

Science et Systèmes Spatiaux

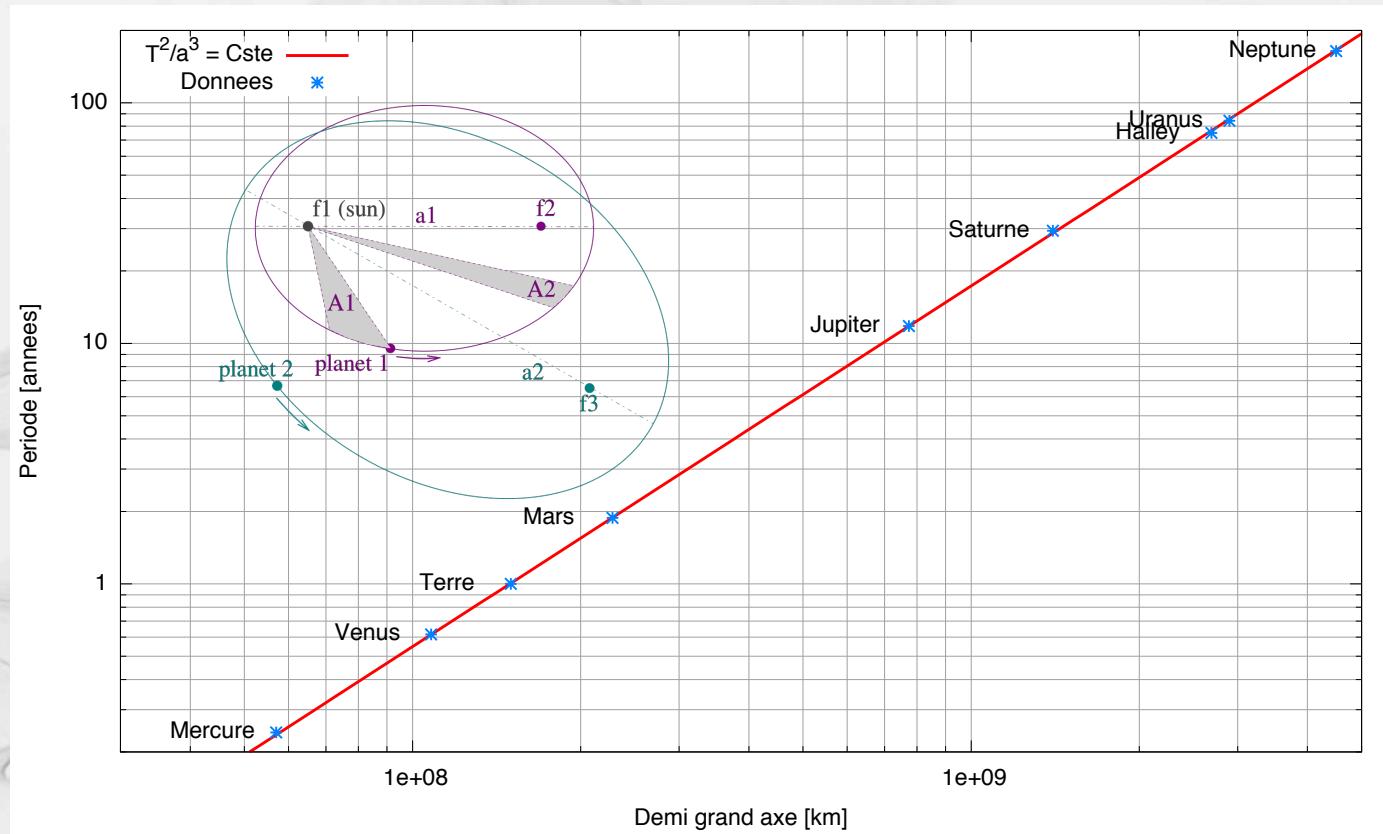
10 octobre 2017

Cours 3 – Gravitation et orbitographie

Hubert Halloin

Lois de Kepler

- ❖ 1609 / 1619 : Kepler montre que les planètes suivent des orbites elliptiques autour du Soleil et énonce ses 3 lois :
 - ❖ Les planètes décrivent des ellipses dont le Soleil est un foyer
 - ❖ Les planètes balaient des aires égales en des temps égaux.
 - ❖ Le carré de la période orbitale est proportionnel au cube du demi grand axe.



Lois de Newton



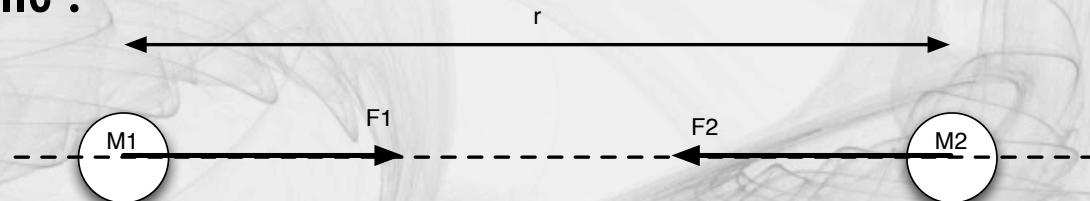
- ❖ On se place dans un repère inertiel (au sens de Galilée / Newton) :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i$$

- ❖ Si la masse est constante (ce n'est pas toujours vrai !) :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i$$

- ❖ Théorème du moment cinétique : $\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{I}\vec{\omega}}{dt} = \sum_i \vec{\tau}_i$
- ❖ Loi de la gravitation universelle :

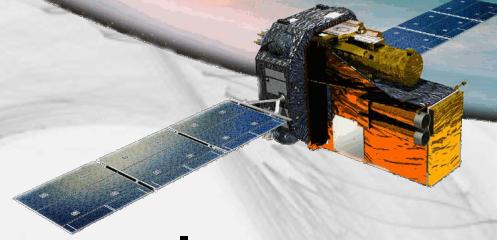


$$\|\vec{F}_1\| = \|\vec{F}_2\| = G \frac{M_1 M_2}{r^2}$$

$$G = 6.674 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$$

- ❖ En RG, la force de gravitation n'existe pas. Elle résulte d'une trajectoire inertie dans une géométrie non euclidienne (courbée par les masses).

Orbitographie



- ❖ On montre (c'est simple ...) que le vecteur \mathbf{r} entre les masses se résout par :

$$\frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \ddot{\vec{r}} = -G \frac{M_1 M_2}{r^3} \vec{r}$$

- ❖ Dans le cas de la Terre et d'un satellite (ou du Soleil et d'une planète), $M \gg m$:

- ❖ L'origine de \mathbf{r} est au CG du corps central et :

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r}, \quad \mu = GM$$

$$\mu_{Terre} = 396600 \text{ } km^3.s^{-2}$$

$$\mu_{Soleil} = 1,32710^{11} \text{ } km^3.s^{-2}$$

Orbitographie



- ❖ Exercice : retrouver les lois de Kepler à partir de $\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r}$
- ❖ Etapes :
- ❖ Exprimer l'équation de la dynamique dans le référentiel cylindrique ($\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{z}$)
- ❖ Calculer le moment angulaire et montrer qu'il est constant (\Rightarrow mouvement plan)
- ❖ Retrouver que le moment cinétique massique ($C = r^2 d\Theta/dt$) est constant
- ❖ En déduire la loi des aires
- ❖ Poser $u=1/r$ et résoudre l'équation différentielle \Rightarrow on trouve une conique
- ❖ Dans le cas d'une ellipse, connaissant sa surface et la loi des aires, on trouve la 3^{ème} loi de Kepler :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mu}$$

Orbitographie



❖ Formules utiles (entre autres) :

$$r(\theta) = \frac{C^2/\mu}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}, \text{ e=excentricité}$$

❖ $e < 1 \Rightarrow$ ellipse ; $e = 1 \Rightarrow$ parabole ; $e > 1 \Rightarrow$ hyperbole

❖ Si $e < 1$:

$$a = \frac{C^2}{\mu(1 - e^2)}$$

$$r_a = a \cdot (1 + e)$$

$$r_p = a \cdot (1 - e)$$

$$C = r_p \cdot V_p = r_a \cdot V_a$$

$$V_p = \sqrt{\frac{\mu}{a} \left(\frac{1 + e}{1 - e} \right)}$$

$$V_a = \sqrt{\frac{\mu}{a} \left(\frac{1 - e}{1 + e} \right)}$$

❖ Energie mécanique (massique) :

$$e_m = \frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r}$$

cinétique potententielle

Orbitographie



❖ Lien entre énergie mécanique et excentricité

$$e^2 = 1 + \frac{2C^2}{\mu^2} \left(\frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} \right) = 1 + \frac{2C^2}{\mu^2} e_m$$

❖ $e_m < 0$ (ellipse) : $e < 1$

$$V < \sqrt{\frac{\mu}{r}} \quad e_m = \frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a}$$

❖ Cas particulier : $e=0$ (cercle) :

$$V_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}} \quad e_m = \frac{V_0^2}{2} - \frac{\mu}{r_0} = -\frac{\mu}{2r_0}$$

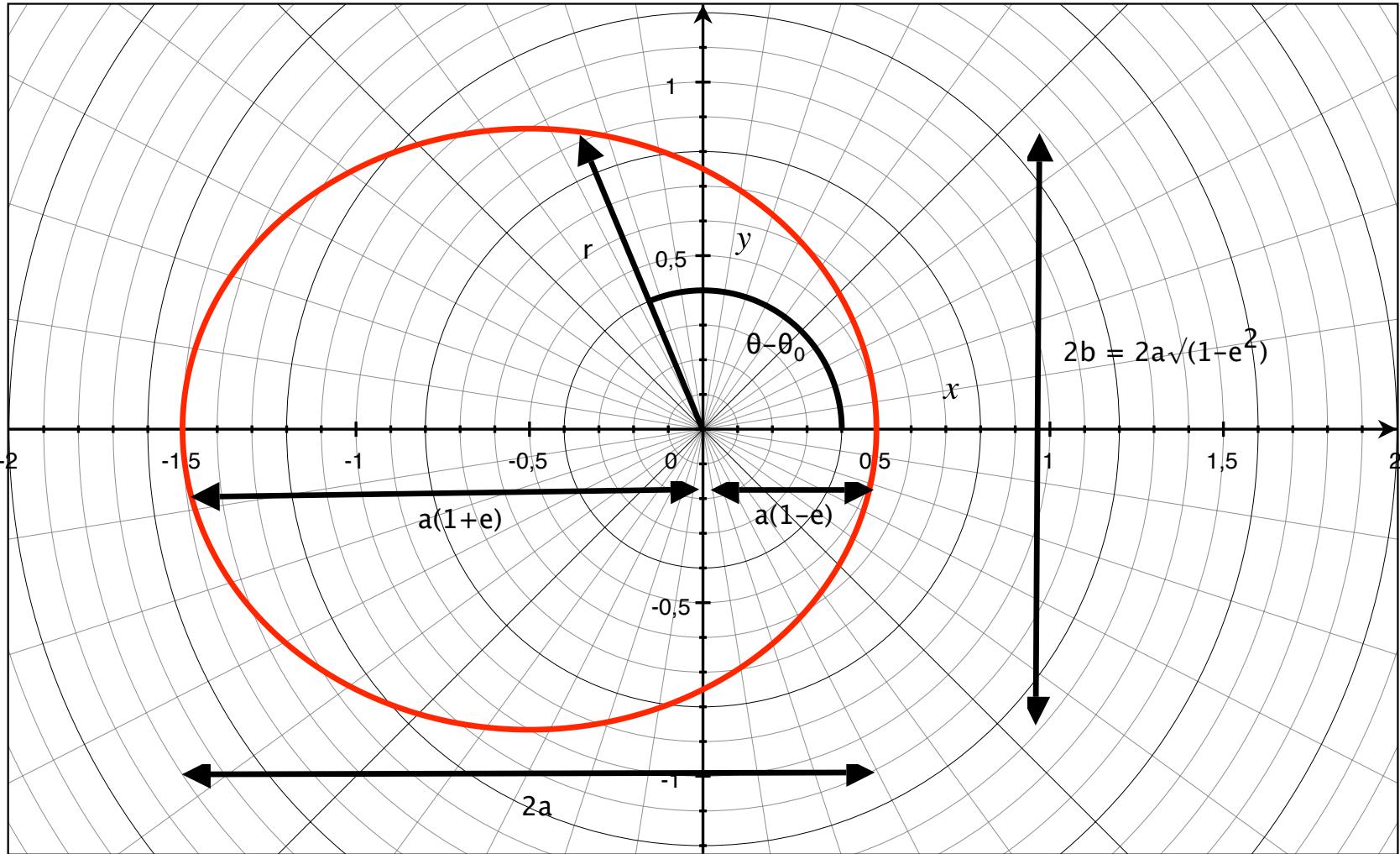
❖ $e_m = 0$ (parabole) : $e = 1$

$$V = \sqrt{\frac{\mu}{r}}$$

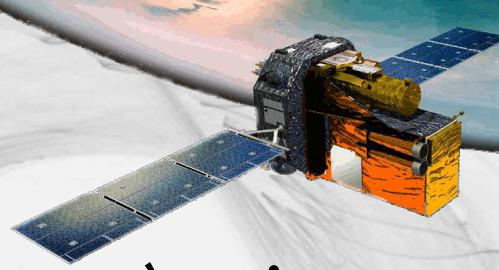
❖ $e_m > 0$ (hyperbole) : $e>1$

$$V > \sqrt{\frac{\mu}{r}} \quad e_m = \frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \frac{\mu}{2a}$$

Orbitographie



Orbitographie



- ❖ Pour connaître la position et la vitesse d'un corps à un instant donné, il suffit de connaître sa position et sa vitesse à un temps arbitraire (i.e. les conditions initiales ...)
 - ❖ 6 paramètres : x, y, z, v_x, v_y, v_z
 - ❖ Pratique pour les ordinateurs (intégration numérique) mais inadapté à une interprétation physique ...
- ❖ Une orbite képlérienne possède plusieurs paramètres 'fixes' (i.e. indépendant du temps)
 - ❖ Sa forme (a et e) : 2 paramètres
 - ❖ Son orientation dans l'espace (rotations) : 3 paramètres
- ❖ Un seul paramètre dépendant du temps : la position sur l'orbite

Orbitographie



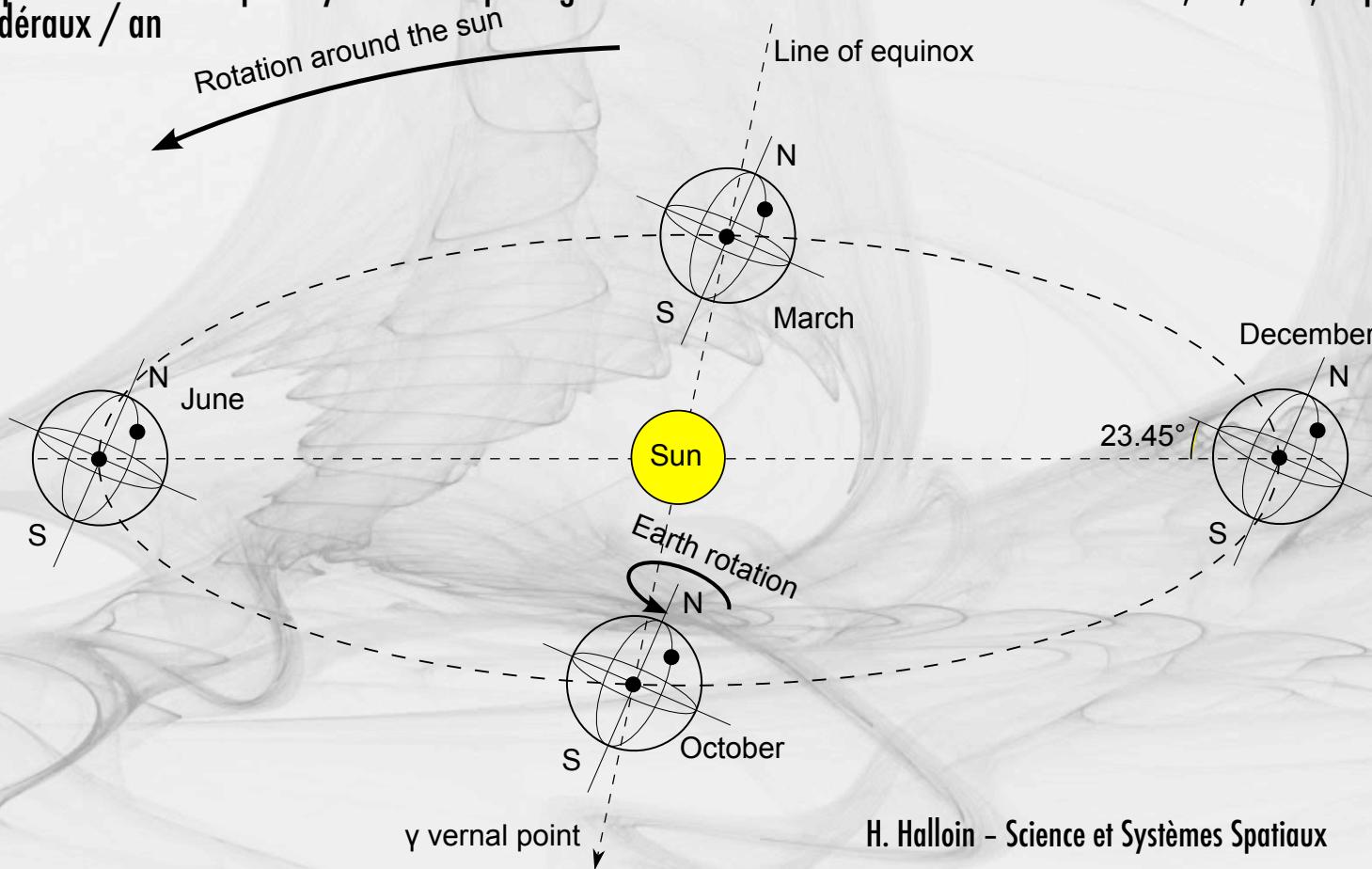
- ❖ Les paramètres képlériens permettent une paramétrisation plus physique de la position
 - ❖ Le référentiel de référence est centré sur le corps central (Soleil ou Terre généralement)
 - ❖ Le plan de référence dépend du système
 - ❖ Plan équatorial autour de la Terre
 - ❖ Plan de l'écliptique (i.e. le plan contenant l'orbite de la Terre) autour du Soleil
 - ❖ L'axe z est perp. au plan de référence, orienté comme le moment cinétique du corps central
 - ❖ L'axe x (pour la Terre et le Soleil) est la direction du point vernal, i.e. la direction du Soleil (vue de la Terre) à l'équinoxe de printemps dans l'hémisphère nord (intersection du plan équatoriale et du plan de l'écliptique)

Orbitographie



❖ Révolution de la Terre autour du Soleil ...

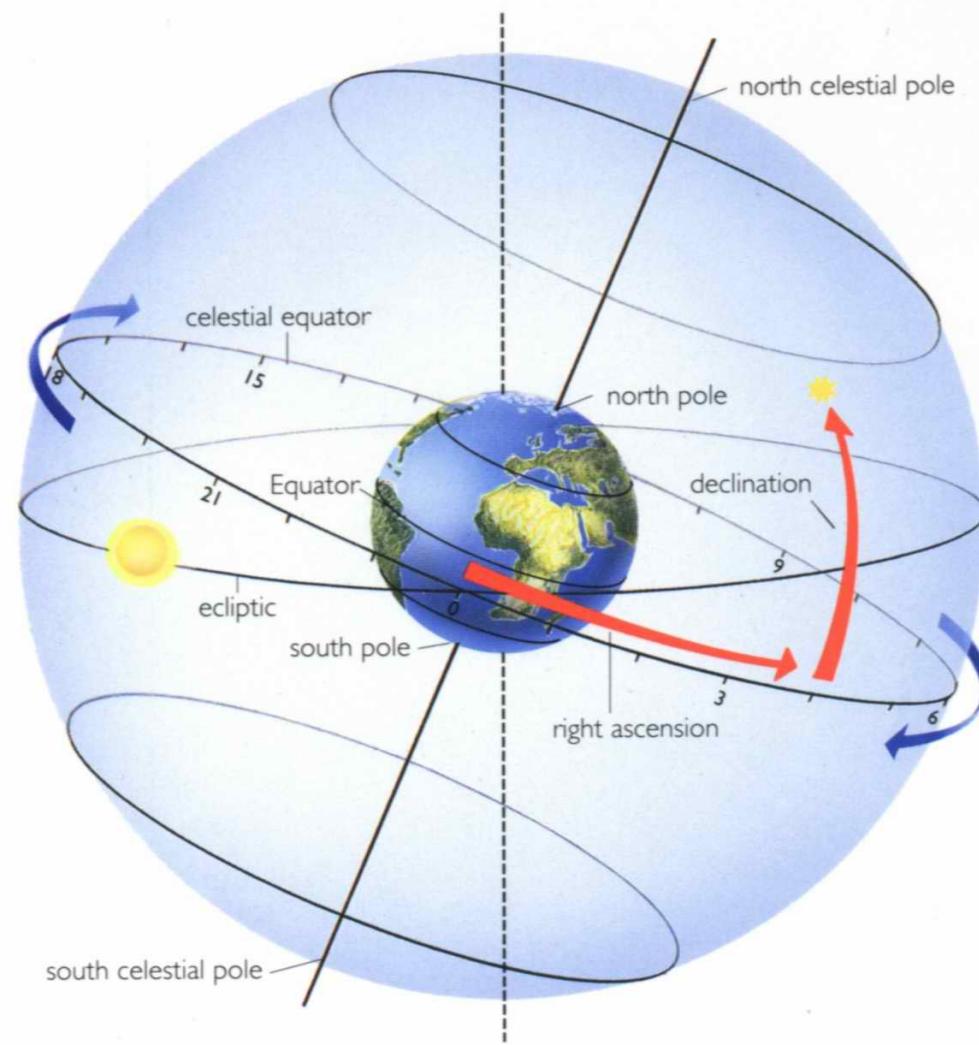
- ❖ 1 jour solaire = temps moyens entre 2 passages du Soleil dans même méridien = 24 heures solaires = 86400 s, 365,25 jours solaires / an
- ❖ 1 jour sidéral = temps moyen entre 2 passages d'un étoile dans même méridien = 86164,1 s , 366,25 jours sidéraux / an



Orbitographie



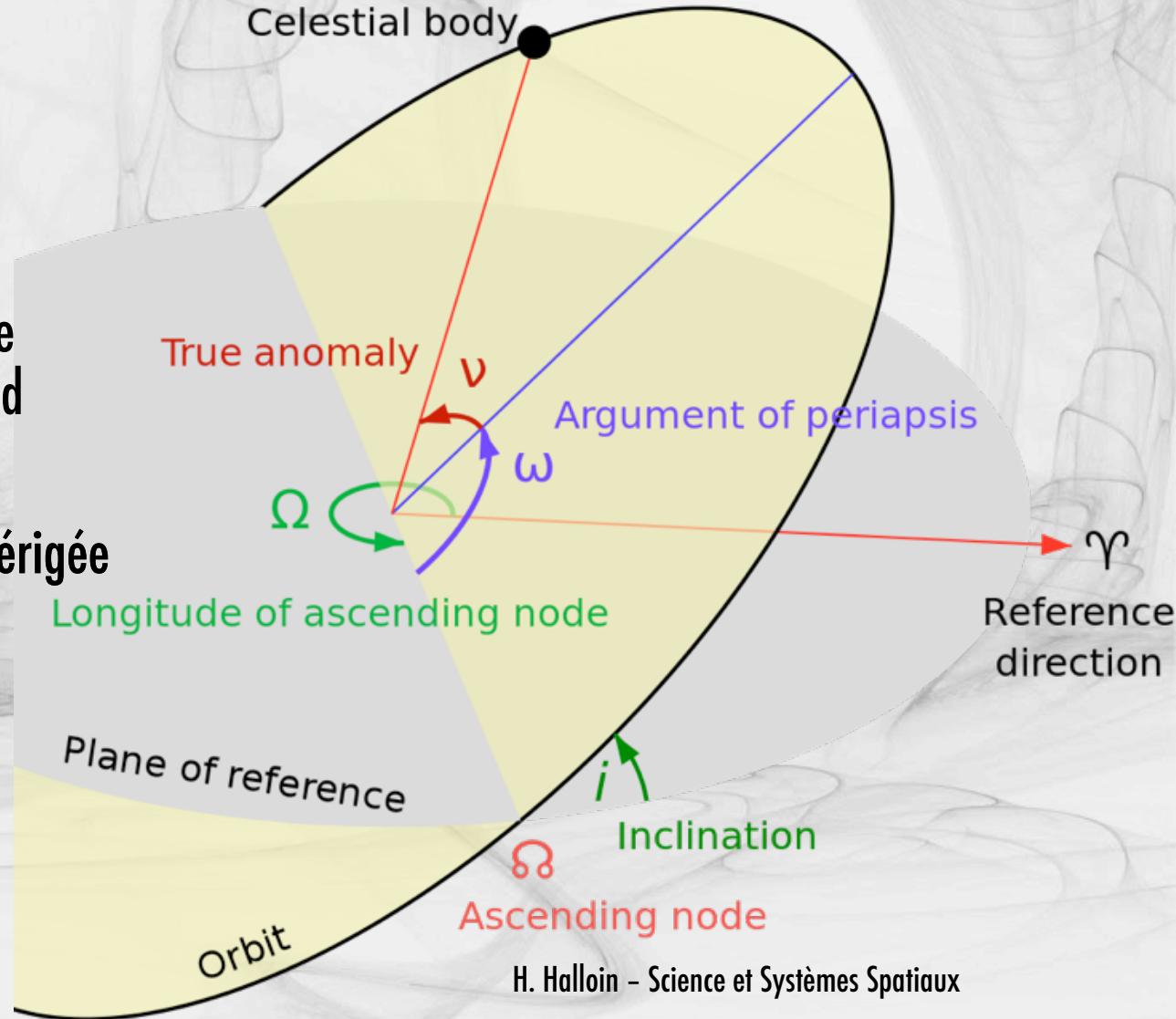
❖ Rappel (?) sur le système de coordonnées équatoriales



Orbitographie

❖ 6 paramètres képlériens

- ❖ a : demi grand axe
- ❖ e : excentricité
- ❖ i : inclinaison
- ❖ Ω : ascension droite (longitude) du nœud ascendant
- ❖ ω : argument du périgée
- ❖ v : anomalie vraie

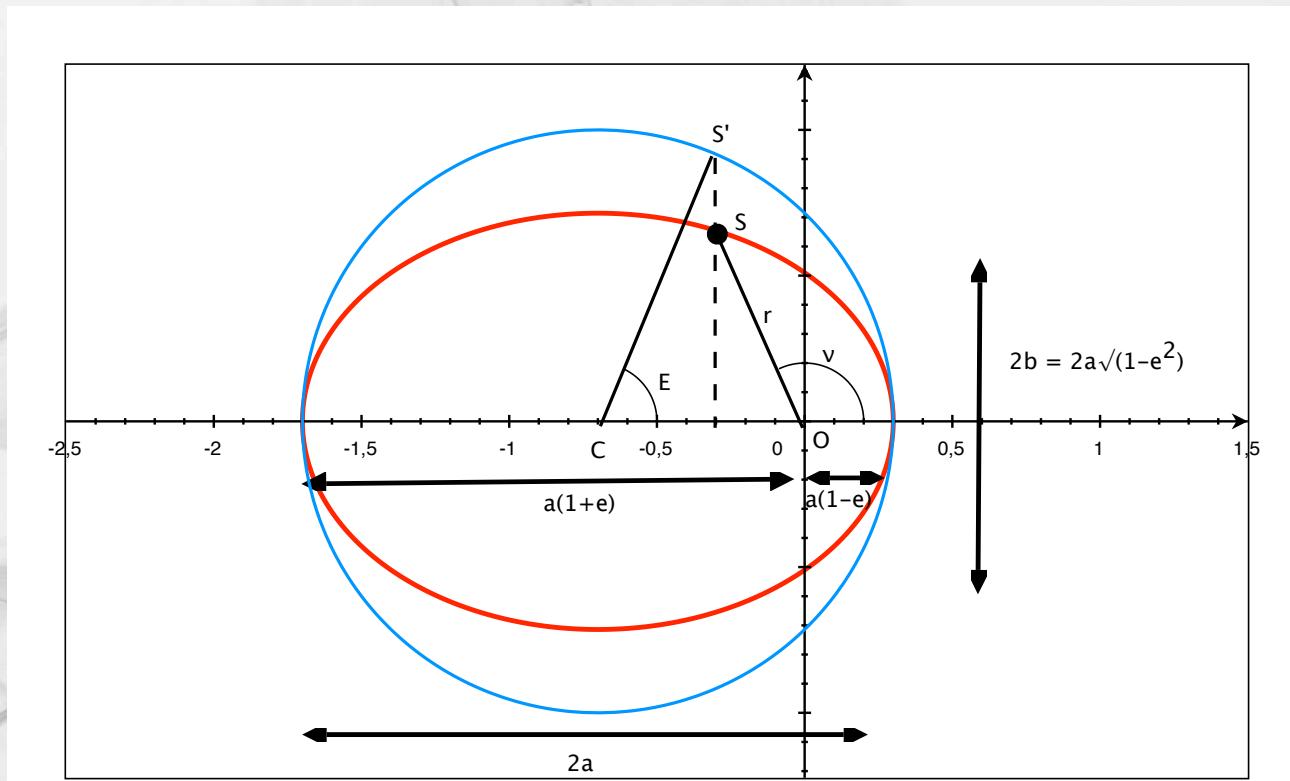


Orbitographie



❖ Anomalies ...

- ❖ Anomalie vraie (ν) : angle entre OP (foyer-périgée) et OS (foyer-objet), c'est l'angle utilisée dans le calcul de la conique
- ❖ Anomalie excentrique (E) : angle entre CP (centre-périgée) et CS'. S' est un point fictif, projection normale de S sur le cercle circonscrit à l'ellipse
- ❖ Anomalie moyenne (M) : quantité « mathématique » (pas de représentation physique réelle) correspondant à la position angulaire d'un objet ayant la même période orbitale et se déplaçant à vitesse uniforme sur le cercle circonscrit



tiaux

Orbitographie



❖ Intérêt des différentes anomalies :

- ❖ Anomalie vraie (ν) : paramétrisation de la conique, positionnement sur l'orbite
- ❖ Anomalie excentrique (E) : simplification de l'expression mathématique, calculs
- ❖ Anomalie moyenne (M) : directement proportionnelle au temps (écoulement linéaire)

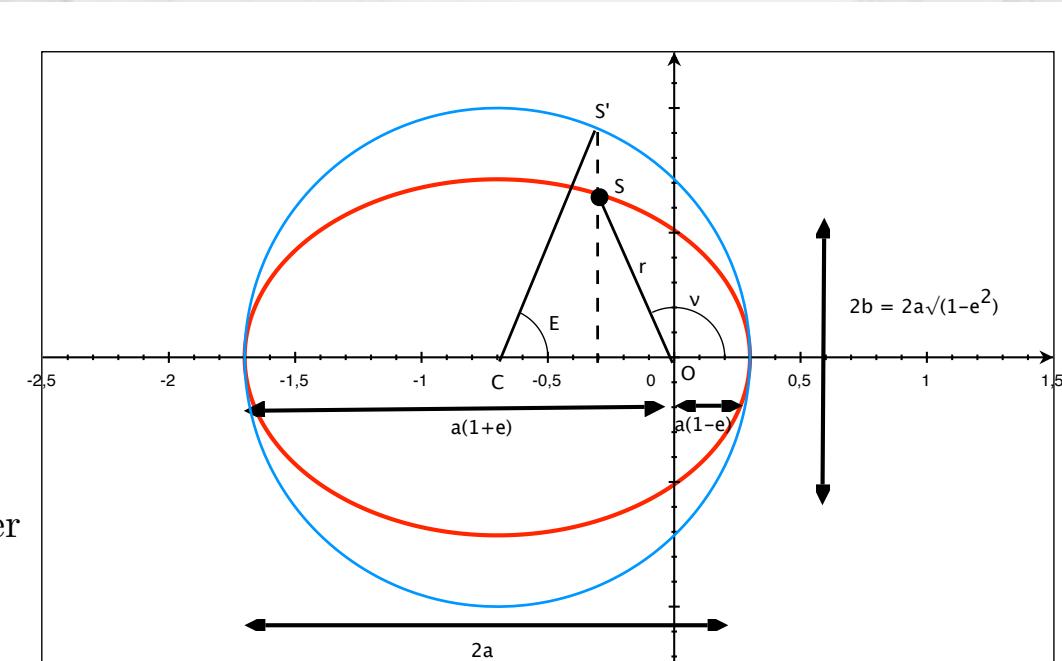
$$r(\nu) = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{1 + e \cos \nu}$$

$$r(E) = a(1 - e \cos E)$$

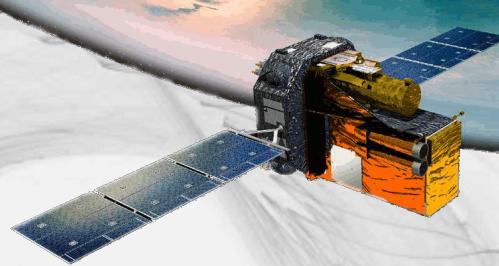
$$1 - e \cos E = \frac{1 - e^2}{1 + e \cos \nu}$$

$$M = \frac{2\pi}{T} \cdot (t - t_p) = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \cdot (t - t_p)$$

$$M = E - e \sin E \quad \text{Equation de Kepler}$$



Lancement



- ❖ On considère une fusée lancée :
- ❖ Depuis un point de longitude L ($L>0$ vers l'ouest) et de latitude φ ($\varphi>0$ vers le nord)
- ❖ Avec une vitesse V_0 , un azimut A_0 (par rapport à la Terre)
- ❖ À une altitude h ($R_L=R_E+h$), dans le plan horizontal ...
- ❖ Question : quelle sera l'orbite du satellite ?

Lancement



- ❖ Question : quelle sera l'orbite du satellite ?
- ❖ 1^{ère} étape : Calculer la forme de l'ellipse (a, e)
 - ❖ Déduit de la conservation de l'énergie et de la conservation du moment cinétique
 - ❖ Le lancement à l'horizontale permet de déduire que le point de lancement est au périgée (éventuellement l'apogée en cas de problème ...). On connaît donc V_p et R_p (=rayon terrestre + altitude de lancement)

$V_L^2 < \frac{\mu}{R_L} \Rightarrow$ Lancement à l'apogée (ellipse)

$V_L^2 = \frac{\mu}{R_L} \Rightarrow$ Orbite circulaire

$\frac{\mu}{R_L} < V_L^2 < \frac{2\mu}{R_L} \Rightarrow$ Lancement au périgée (ellipse)

$V_L^2 = \frac{2\mu}{R_L} \Rightarrow$ Orbite parabolique (échappement)

$\frac{2\mu}{R_L} < V_L^2 \Rightarrow$ Orbite hyperbolique (échappement)

Cas d'une ellipse :

$$V_p^2 = \mu \left(\frac{2}{R_p} - \frac{1}{a} \right)$$

$$V_a^2 = \mu \left(\frac{2}{R_a} - \frac{1}{a} \right)$$

$$2a = R_p + R_a$$

$$a = R_p(1 + e) = R_a(1 - e)$$

$$V_a R_a = V_p R_p$$

Lancement

- ❖ Question : quelle sera l'orbite du satellite ?
- ❖ 2^{ème} étape : convertir les coordonnées locales (longitude, latitude) en coordonnées inertielles célestes (ascension droite, déclinaison)

❖ Déclinaison (δ) = latitude (φ) ...

❖ Longitude => ascension droite : il faut prendre en compte la rotation terrestre

$$\alpha + L = TSG = TSG_0 + \omega_E \cdot \Delta t$$

α = Ascension droite, >0 vers l'est ... vernal

L = Ascension droite, >0 vers l'ouest ...

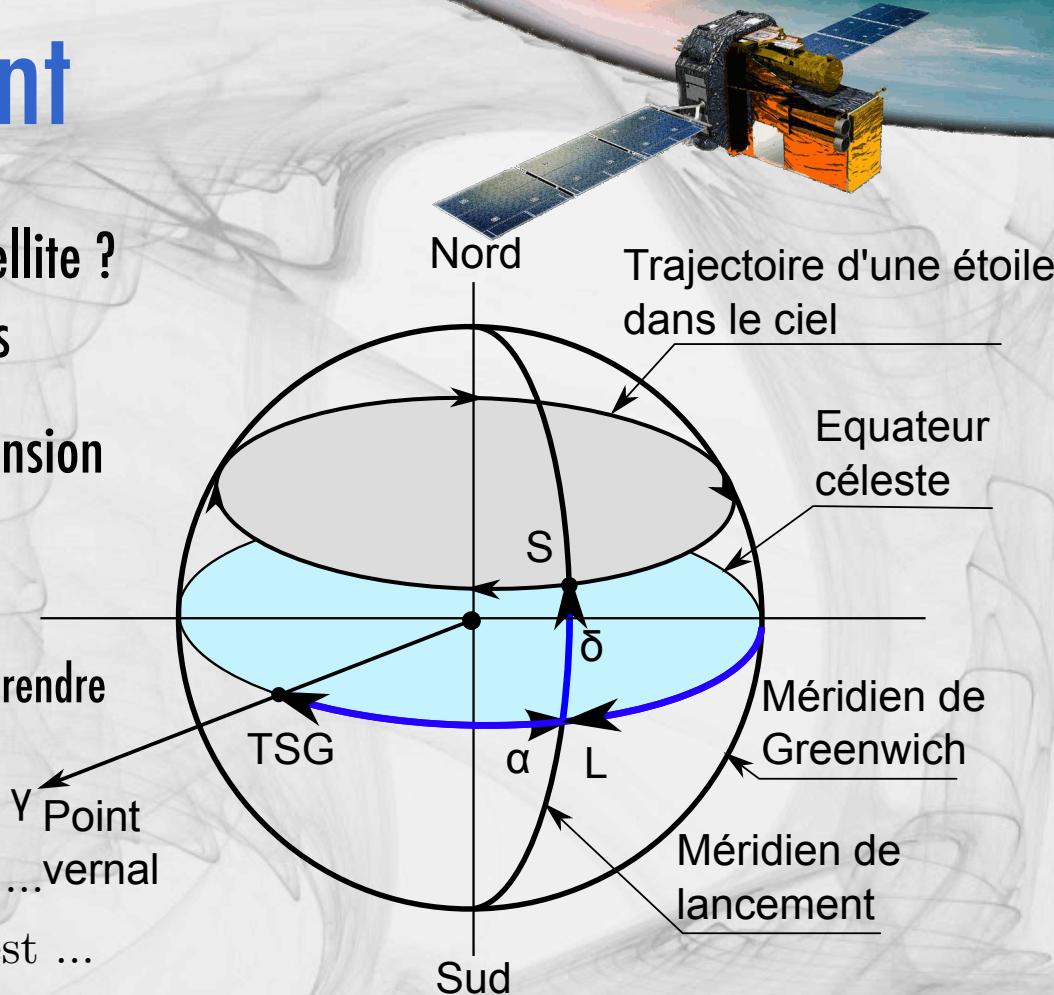
TSG = Temps sidéral de Greenwich, i.e l'angle horaire

du point vernal sur le méridien de Greenwich, augmente avec t

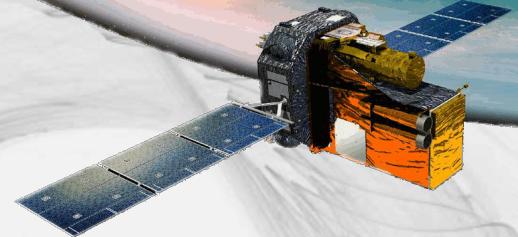
TSG_0 = Temps sidéral de Greenwich à 0h TU, tabulé ou formule approchée

ω_E = Rotation terrestre moyenne, $\omega_E = \frac{366,25}{365,25}$ tours/jour

Δt = Temps depuis 0hTU



Lancement



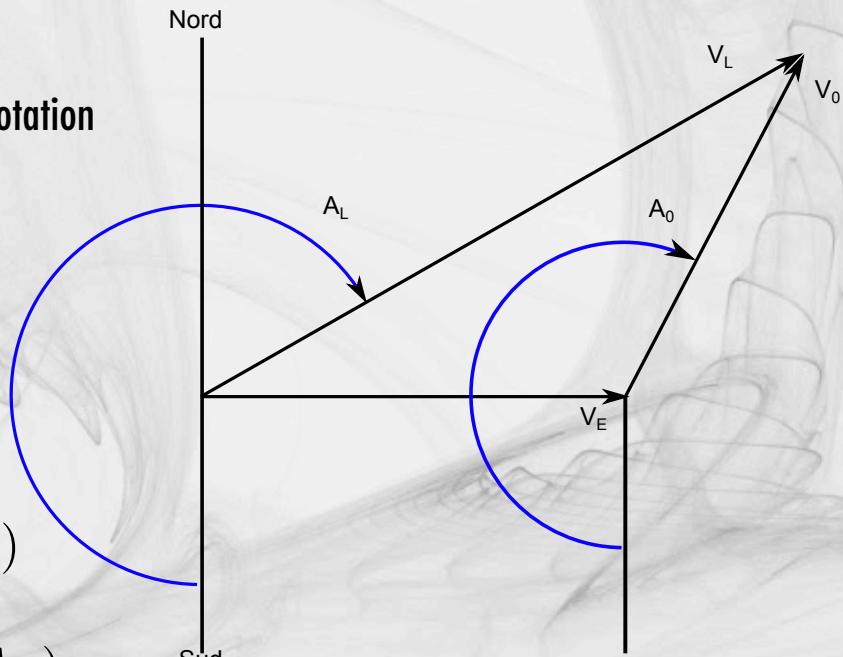
- ❖ Question : quelle sera l'orbite du satellite ?
- ❖ 3ème étape : prendre en compte la rotation de la Terre
 - ❖ V_E : vitesse d'entrainement de la Terre
 - ❖ V_L : vitesse de lancement
 - ❖ Lancer vers l'est permet de bénéficier au maximum de la rotation terrestre ...

$$V_E = \omega_E \cdot R_E \cdot \cos \varphi \approx 0,4645 \cdot \cos \varphi \text{ km/s}$$

$$\frac{V_L}{\sin(A_0 - \frac{\pi}{2})} = \frac{V_0}{\sin(\frac{3\pi}{2} - A_L)}$$

$$V_L^2 = V_E^2 + V_0^2 - 2V_E V_0 \cos(A_0 - \frac{\pi}{2})$$

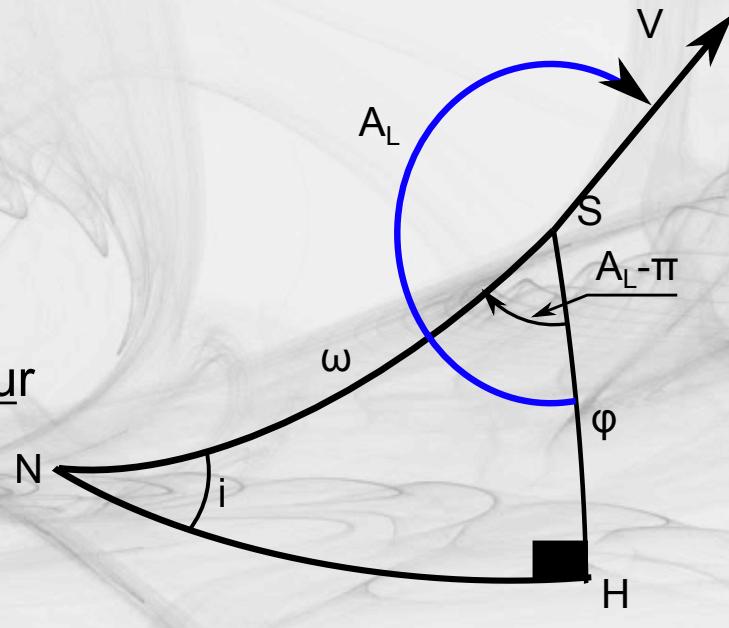
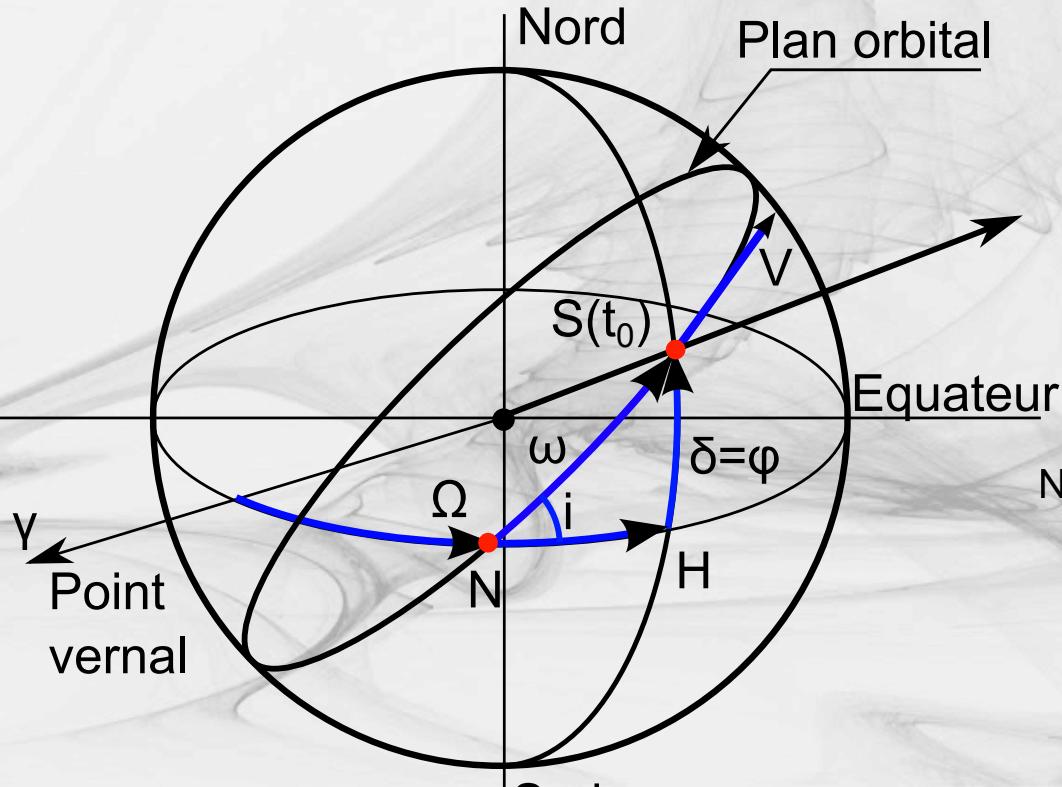
$$V_0^2 = V_E^2 + V_L^2 - 2V_E V_L \cos(\frac{3\pi}{2} - A_L)$$



Lancement



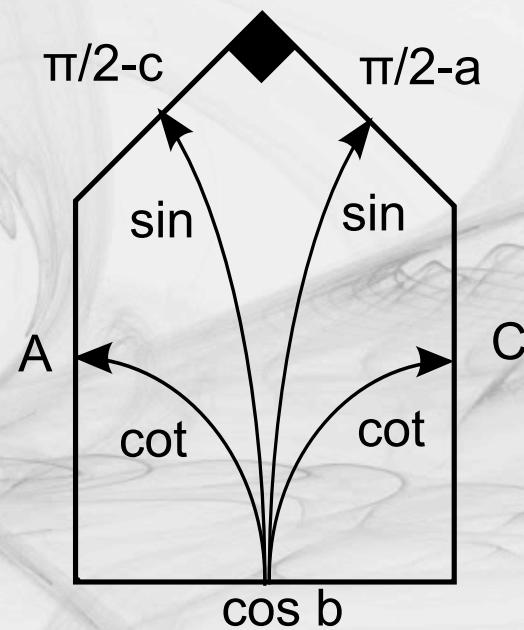
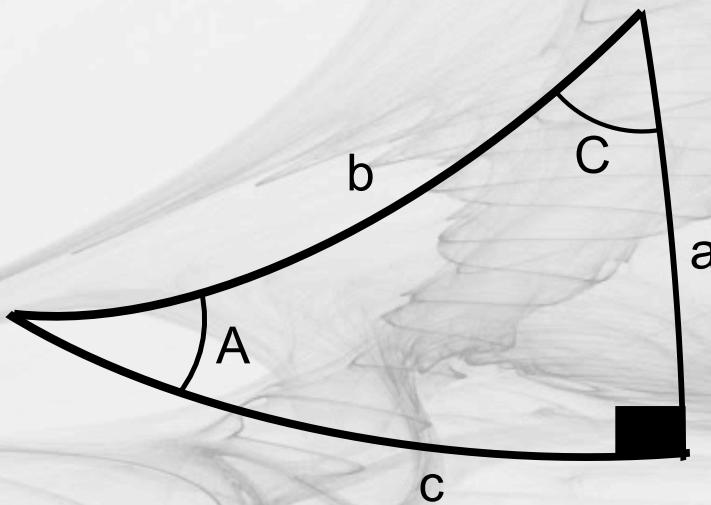
- ❖ Question : quelle sera l'orbite du satellite ?
- ❖ 4ème étape : Calculer la position du plan orbital (trigonométrie sphérique ...)
- ❖ Vitesse horizontale => périgée ou apogée (on suppose périgée)



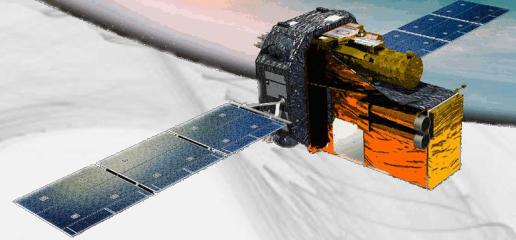
Lancement



- ❖ Question : quelle sera l'orbite du satellite ?
- ❖ 4ème étape : Calculer la position du plan orbital (trigonométrie sphérique ...)
- ❖ Relations dans un triangle sphérique rectangle (pentagone de Neper)...



Lancement



- ❖ Question : quelle sera l'orbite du satellite ?
- ❖ 4ème étape : Calculer la position du plan orbital (trigonométrie sphérique ...)
- ❖ On en déduit les formules suivantes (attention aux cas particuliers et domaines de validité => les retrouver au cas pas cas !)

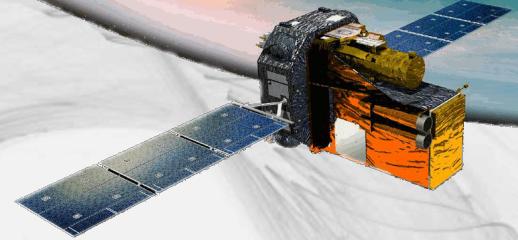
$$\cos i = -\sin A_L \cos \varphi$$

$$\tan NH = \sin \varphi \cdot \tan A_L \quad (\Omega = \alpha - NH)$$

$$\tan \omega = -\frac{\tan \varphi}{\cos A_L}$$

- ❖ Pour un lancement vers l'Est ($A_L=270^\circ$) :
 - ❖ $\cos i = \cos \varphi$
 - ❖ $NH = \omega = 90^\circ$
 - ❖ Le satellite atteint donc une latitude maximale égale à la latitude de lancement

Manœuvres



- ❖ Il est souvent nécessaire de modifier l'orbite d'un engin spatial
 - ❖ Pour l'amener à son orbite finale (ex : satellites géostationnaires)
 - ❖ Pour compenser les perturbations
 - ❖ Pour faire un rendez-vous spatial...
- ❖ La modification des paramètres orbitaux se fait en modifiant la vitesse du satellite :
 - ❖ Ejection de masse => force de réaction
 - ❖ La capacité des réservoirs est souvent une des limitations principales de la durée de vie des engins spatiaux
- ❖ Un propulseur est caractérisé par son 'impulsion spécifique (I_{sp})'
- ❖ L'impulsion spécifique correspond à la vitesse d'éjection, divisée par l'accélération de la pesanteur au niveau de la mer. L' I_{sp} s'exprime donc en s.
- ❖ Pour un ΔV donné, la masse éjectée est d'autant plus faible que l' I_{sp} est grande.

$$\overrightarrow{V_{fin}} = \overrightarrow{V_{init}} + \overrightarrow{\Delta V}$$

$$dV = -V_m \frac{dm}{m}$$

$$\Delta V = V_m \ln \frac{m}{m - \Delta m}$$

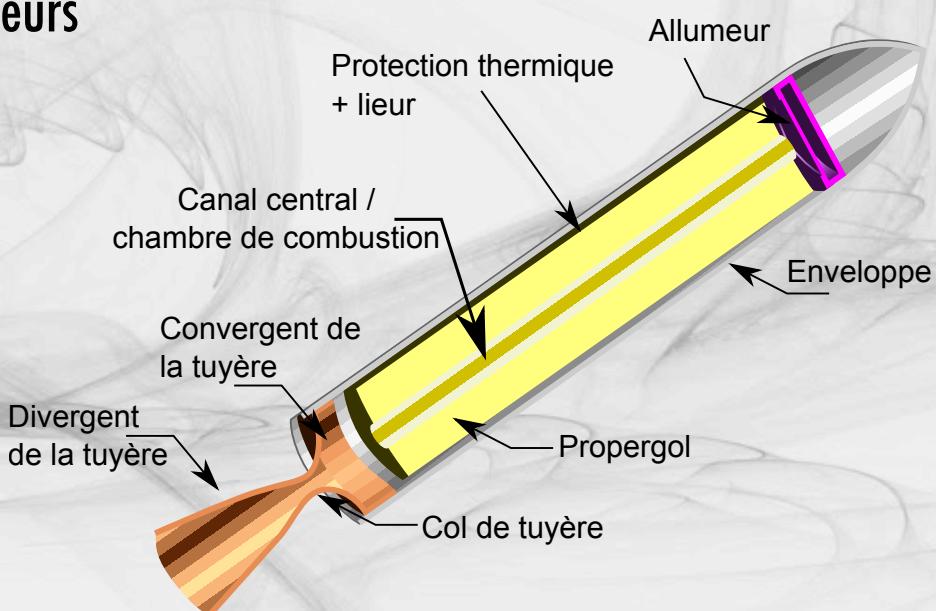
Avec $\Delta m \ll m$:

$$\Delta V \approx g_0 \cdot I_{sp} \ln \left(1 + \frac{\Delta m}{m} \right)$$

$$\Delta m = m \left(1 - e^{-\frac{\Delta V}{g_0 I_{sp}}} \right)$$

Propulseurs

- ❖ Propergols solides (fusées 'à poudre')
- ❖ Composants (exemple): perchlorate d'ammonium (oxydant), poudre d'aluminium (réducteur) et polybutadiène (le carburant)
- ❖ Impulsion spécifique typique : 250 s
- ❖ Poussée maximale : jusqu'à 1500 t
- ❖ Utilisation : propulseurs auxiliaires des lanceurs



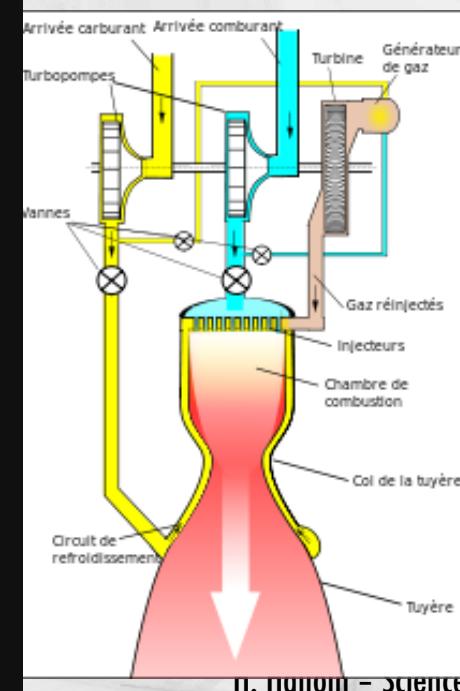
Lancement Ariane 5



Propulseurs

❖ Propergols liquides

- ❖ Composants typiques : kéroène / oxygène liquide ; hydrogène liquide / oxygène liquide
- ❖ Impulsion spécifique : 350 à 450 s
- ❖ Poussée maximale : jusqu'à 700 t
- ❖ Versions 'ré-allumables', utilisations : moteurs principal et étages supérieurs de fusées



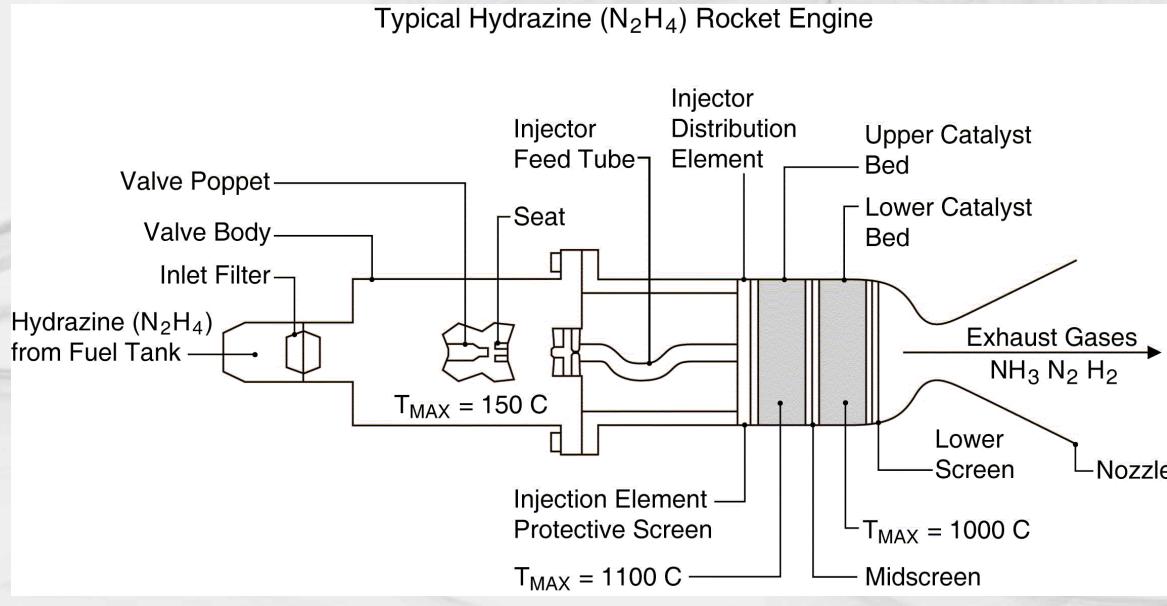
Propulseurs



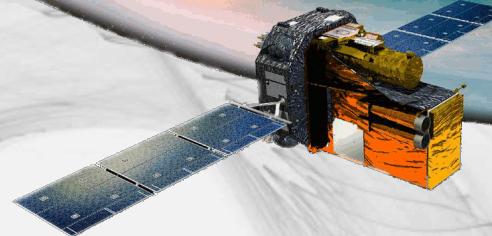
❖ Hydrazine

- ❖ Décomposition catalytique de N_2H_4 sur de l'iridium, alumine ou nanofibres de carbone, produit du N_2 et du H_2 , réaction très exothermique, allumage spontané
- ❖ Impulsion spécifique typique de 220 s
- ❖ Poussée jusqu'à 500 N.
- ❖ Très utilisé pour le contrôle d'attitude et d'orbite des satellites
- ❖ Composant très toxique et instable ...

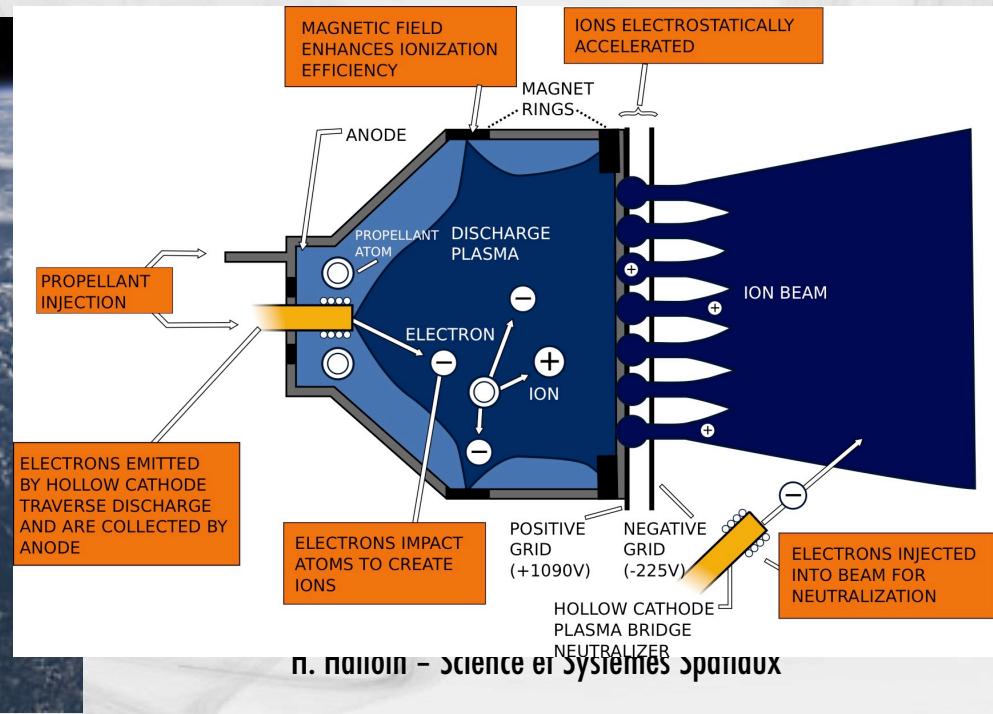
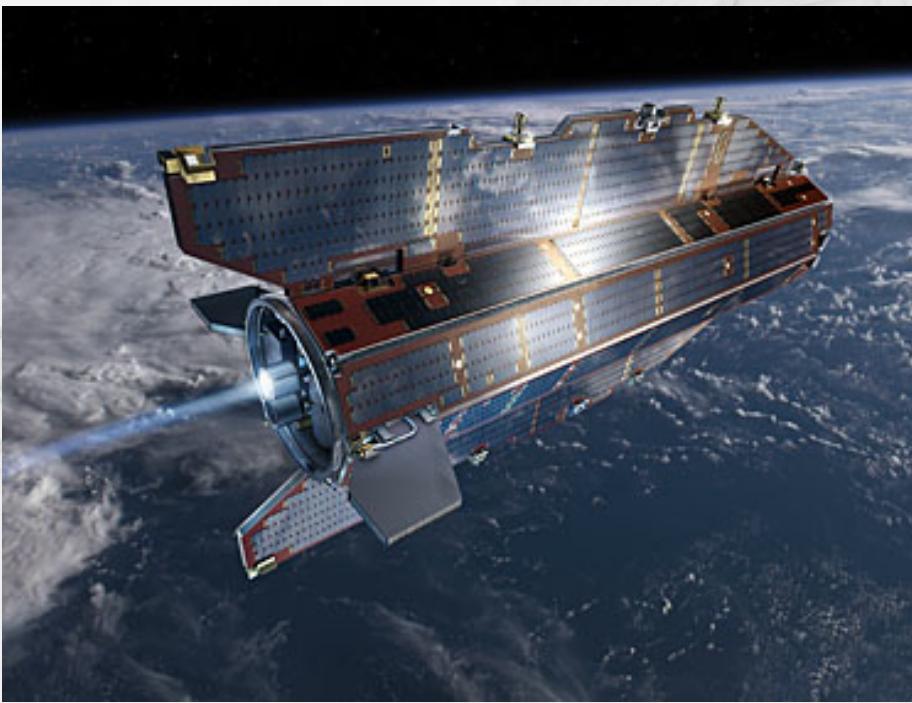
Typical Hydrazine (N_2H_4) Rocket Engine



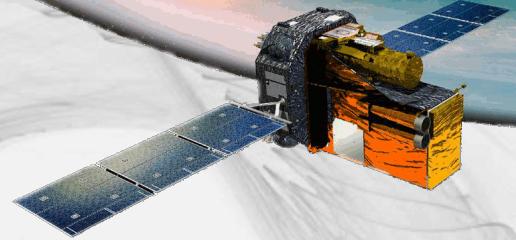
Propulseurs



- ❖ Moteurs ioniques
- ❖ Basés sur l'ionisation et l'accélération électrique ou magnétique des particules chargées
- ❖ Très grande Isp, typiquement entre 2 000 et 10 000 s
- ❖ Poussées assez faibles (difficulté à produire et accélérer une grande masse d'ions...), max 5 N
- ❖ Utilisés en contrôle d'attitude faible et en poussée continue sur les sondes interplanétaires



Manœuvres usuelles



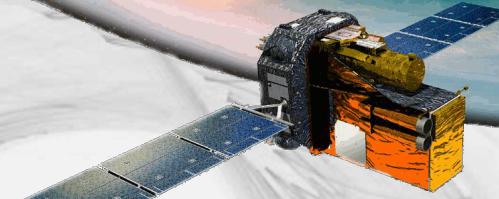
- ❖ Changement de a, e (c.à.d R_a, R_p) :
 - ❖ Les manœuvres 'optimales' se font à l'apogée ou au périgée.
 - ❖ Impulsion à l'apogée => modification de l'altitude du périgée
 - ❖ Impulsion au périgée => modification de l'altitude de l'apogée
 - ❖ En combinant ces manœuvres (2 suffisent), on modifie a et e

$$\frac{(V_{a/p,1} + \Delta V)^2}{2} - \frac{\mu}{R_{a/p,1}} = -\frac{\mu}{2a_2}$$

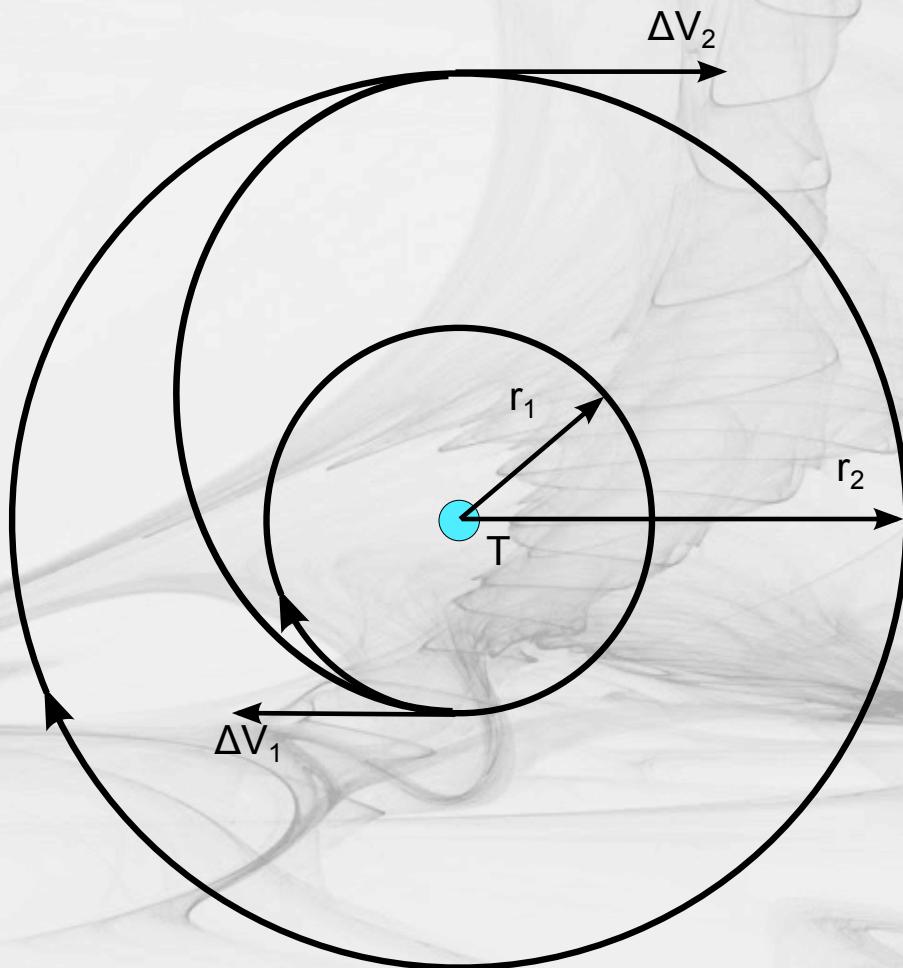
$$R_{a,2} = \max(R_{a/p,1}, 2a_2 - R_{a/p,1})$$

$$R_{p,2} = \min(R_{a/p,1}, 2a_2 - R_{a/p,1})$$

Manœuvres usuelles



- ❖ Transfert de Hohmann : stratégie à moindre coût (c.à.d à moindre ΔV) pour passer d'une orbite circulaire à une autre
 - ❖ Exemple : aller de la Terre à Mars ...



$$\Delta V_1 = \sqrt{\frac{2\mu r_2}{r_1(r_1 + r_2)}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_1}}$$

$$\Delta V_2 = \sqrt{\frac{\mu}{r_2}} - \sqrt{\frac{2\mu r_1}{r_2(r_1 + r_2)}}$$

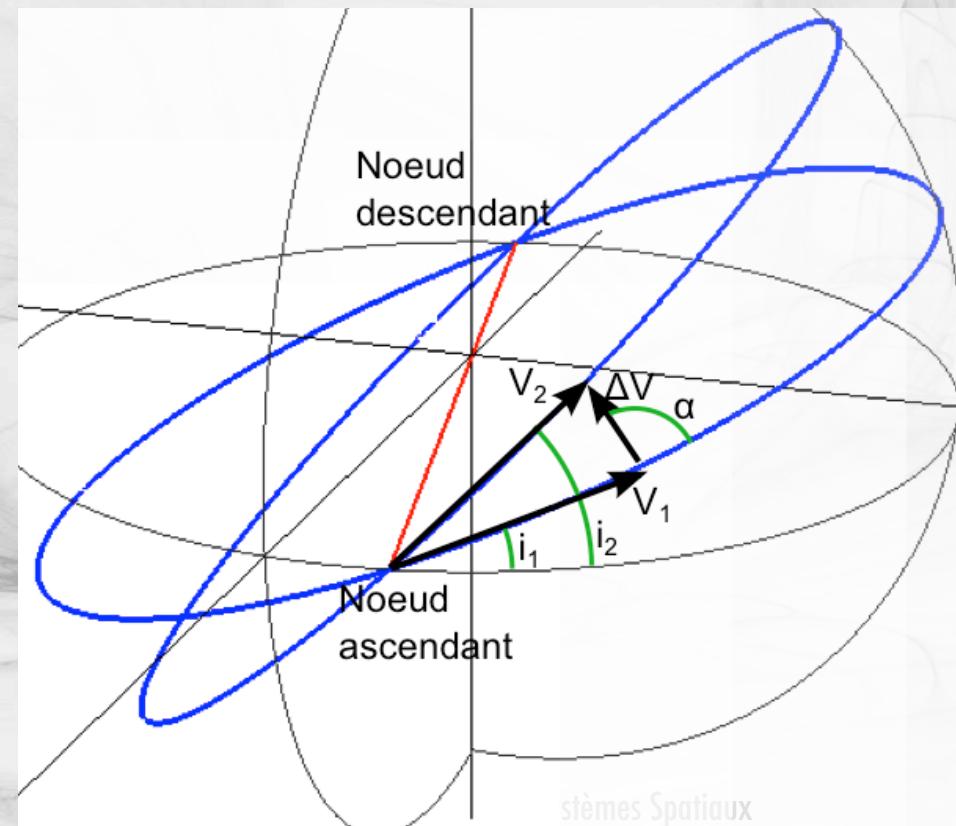
Manœuvres usuelles



- ❖ Modification de l'inclinaison de l'orbite (i)
 - ❖ L'incrément de vitesse se fait au nœud ascendant ou descendant
 - ❖ La manœuvre est optimal si la vitesse de l'engin est faible (i.e. proche de l'apogée)
 - ❖ Un changement d'inclinaison est une manœuvre coûteuse !

$$\Delta V = 2V_0 \sin \frac{i_2 - i_1}{2}$$

$$V_1 = V_2 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{i_2 - i_1}{2}$$



Manœuvres usuelles



- ❖ Modification de Ω (RAAN, ascension droite du nœud ascendant)
 - ❖ Manœuvres complexes et très coûteuses
 - ❖ En pratique, on lance avec le bon $\Omega \Rightarrow$ contrainte sur l'heure de lancement ('fenêtre de tir')
 - ❖ On peut aussi laisser faire les perturbations 'naturelles' de l'orbite (cf. + loin)

Manœuvres usuelles



- ❖ Modification de ω (argument du périgée)
- ❖ Équivalent à faire tourner l'ellipse de l'orbite dans son plan d'un angle $\theta = \omega_2 - \omega_1$
- ❖ La manœuvre se fait à l'intersection entre l'orbite initiale et l'orbite finale

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_r + \vec{V}_\perp$$

Conservation du moment cinétique :

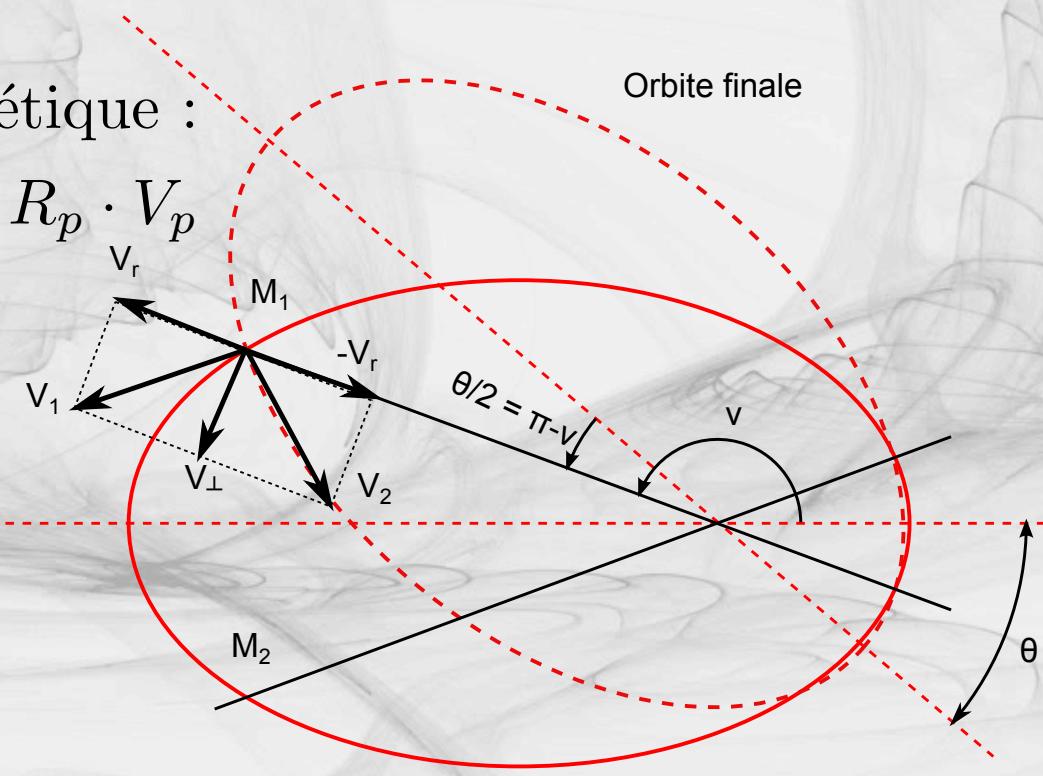
$$C = R \cdot V_\perp = R_a \cdot V_a = R_p \cdot V_p$$

$$V_r = \frac{\mu}{C} e \sin \nu$$

$$= \frac{\mu}{C} e \sin \frac{\theta}{2} \text{ en } M_1$$

$$V_1 = V_2 \Rightarrow \vec{V}_2 = -\vec{V}_r + \vec{V}_\perp$$

$$\Delta \vec{V} = -2 \vec{V}_r$$

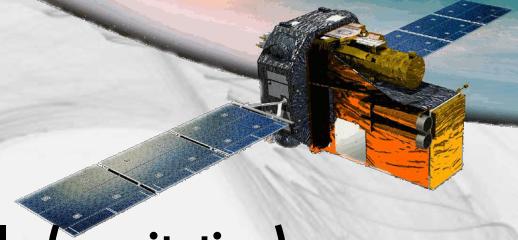


Manœuvres usuelles



- ❖ Modification de la phase (ou date de passage), t_0 :
 - ❖ Transfert sur un orbite de période différente, puis remise sur l'orbite initiale après un nombre entier de révolutions.
- ❖ Supposons que l'on veuille changer la date de passage d'une quantité ΔT ($<0 \Rightarrow$ avance, $>0 \Rightarrow$ retard), à partir d'une orbite de période T
 - ❖ On choisit une orbite de transfert telle que $\Delta T = k (T_f - T)$, avec k entier
 - ❖ Impulsion **ΔV** au périgée pour passer sur l'orbite de demi-grand axe a_f (et période T_f)
 - ❖ Après k révolutions, impulsion **$-\Delta V$** pour revenir sur l'orbite initiale
 - ❖ k petit : manœuvre rapide, coût important
 - ❖ k grand : manœuvre lente, coût réduit

Perturbations



- ❖ Les orbites képlériennes supposent une seule force centrale (gravitation)
 - ❖ Le corps central est considéré comme homogène et parfaitement sphérique
 - ❖ Il n'y a pas d'autres corps attracteurs, ni d'autres forces ...
- ❖ D'autres forces perturbent l'orbite ...
 - ❖ Frottements sur les couches supérieures de l'atmosphère (orbites basses)
 - ❖ Aplatissement de la Terre aux pôles
 - ❖ Influences gravitationnelles de la Lune et du Soleil
 - ❖ Pression de radiation solaire, couplage avec le champ magnétique, etc
- ❖ Ordres de grandeur des perturbations (comparées à l'attraction centrale)

Origine	LEO	GEO
Pression de radiation solaire (hypothèse S/M = $10^{-2} \text{ m}^2/\text{kg}$)	5×10^{-8}	
Trainée atmosphérique (hypothèse S/M = $10^{-2} \text{ m}^2/\text{kg}$)	5×10^{-8} (800 km)	0
Attraction lunaire	10^{-6}	7×10^{-6}
Attraction solaire	5×10^{-7}	$3,3 \times 10^{-6}$
Harmonique de degré p du potentiel gravitationnel terrestre (règle empirique de Kaula's)	$\frac{10^{-4}}{p^2} \cdot \left(\frac{r_{eq}}{r}\right)^{p+2}$	

Perturbations



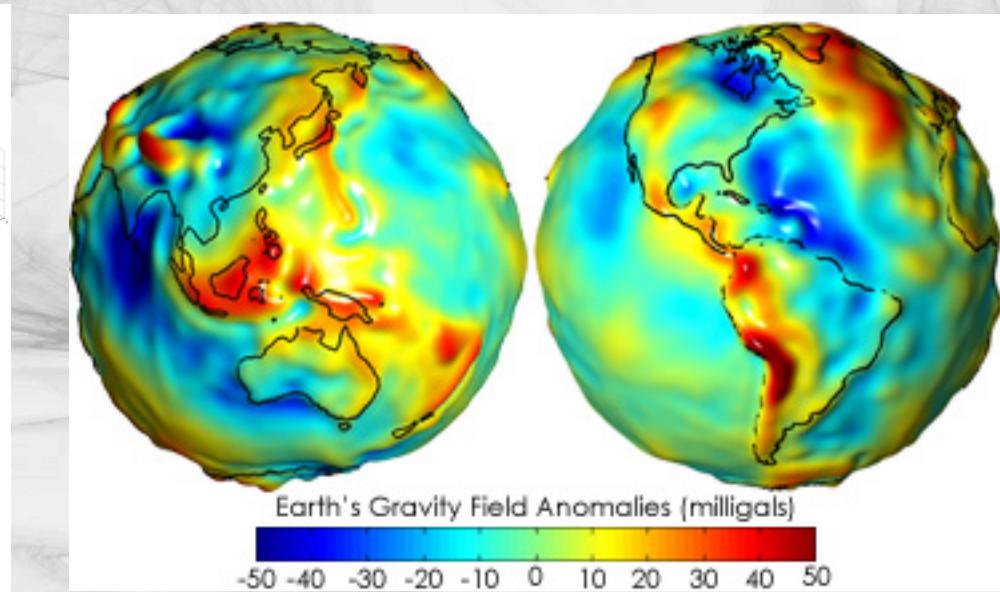
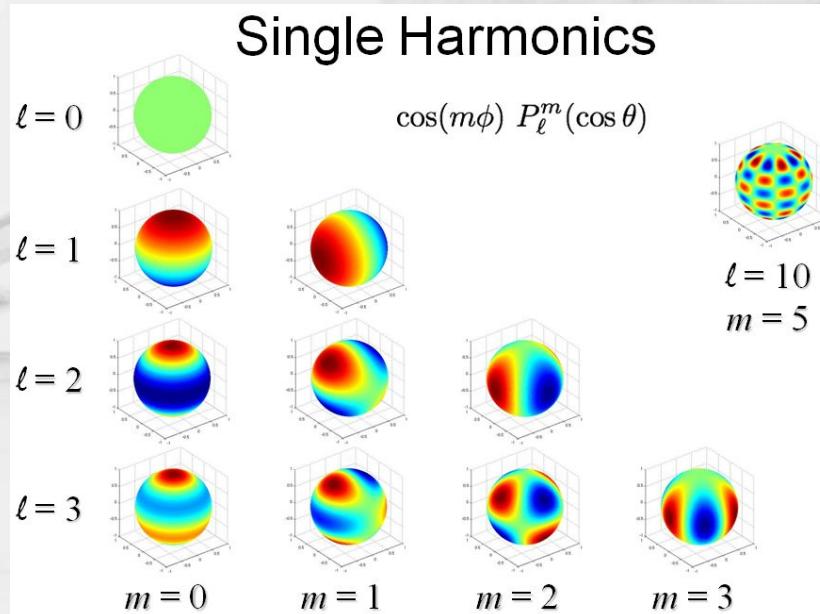
- ❖ Les perturbations ont pour effet de faire lentement dériver les paramètres de l'orbite ($a, e, i, \omega, \Omega, M$)
- ❖ Deux formalismes existent pour traiter les perturbations
 - ❖ Les équations de Lagrange : modification du potentiel gravitationnel par un potentiel perturbateur. Uniquement valide pour les forces dérivant d'un potentiel.
 - ❖ Les équations de Gauss : modification des paramètres orbitaux en fonction des forces locales s'appliquant sur le satellite, dérivant d'un potentiel ou non.
- ❖ Les résolutions analytiques sont rares, mais ces formalismes sont très utilisés pour les simulation numériques
- ❖ Utilisés par Le Verrier pour prédire l'existence de planètes
 - ❖ Perturbations d'Uranus (1846) => Neptune (observée ...)
 - ❖ Avance du périhélie de Mercure (1860) => Vulcan (n'existe pas, il faut attendre Einstein)

Perturbations

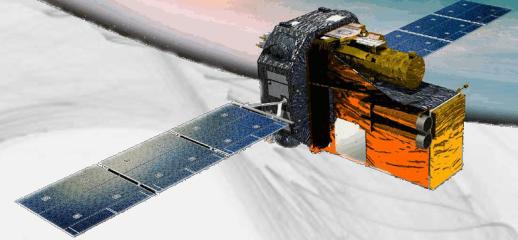


- ❖ Non sphéricité du potentiel gravitationnel terrestre
 - ❖ Décomposition du potentiel en harmoniques sphériques
 - ❖ Le terme prépondérant est le J_2 , dû à l'aplatissement de la Terre aux pôles
 - ❖ Une modélisation fine nécessiterait de prendre aussi en compte les effets gravitationnels des marées (variations temporelles du potentiel gravitationnel)

$$U = \frac{\mu}{r} \cdot \left[1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{r_{eq}}{r} \right)^n \cdot \left[-J_n \cdot P_n(\sin \varphi) + \sum_{m=1}^n (C_{n,m} \cos(m\lambda) + S_{n,m} \sin(m\lambda)) \cdot P_{n,m}(\sin \varphi) \right] \right]$$



Perturbations



- ❖ Effets du J_2 sur les satellites en orbite terrestre
- ❖ De façon générale, les perturbations sur les paramètres orbitaux sont de différentes 'classes' :
 - ❖ Constante : décalage fixe (indépendant du temps)
 - ❖ Séculaire : dérive linéaire (en fonction du temps)
 - ❖ Variable à courte période : variations sur une fraction de la période orbitale
 - ❖ Variable à longue période : dépend sinusoïdalement des paramètres orbitaux
- ❖ Pour le J_2 , on ne considère souvent que les termes séculaires (prépondérant) :

$$\Delta a_s = 0$$

$$\Delta e_s = 0$$

$$\Delta i_s = 0$$

$$\Delta \omega_s = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{r_{eq}}{a} \right)^2 \cdot \frac{J_2 \cdot n}{(1 - e^2)^2} \cdot (4 - 5 \cdot \sin^2 i) \cdot (t - t_0)$$

$$\Delta \Omega_s = -\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{r_{eq}}{a} \right)^2 \cdot \frac{J_2 \cdot n}{(1 - e^2)^2} \cdot \cos i \cdot (t - t_0)$$

$$\Delta M_s = \left[n + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{r_{eq}}{a} \right)^2 \cdot \frac{J_2 \cdot n}{(1 - e^2)^{3/2}} \cdot (2 - 3 \cdot \sin^2 i) \right] \cdot (t - t_0)$$

avec : $n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$; $r_{eq} \approx 6378$ km ; $J_2 \approx 1,082 \times 10^{-3}$

Perturbations



$$\Delta a_s = 0$$

$$\Delta e_s = 0$$

$$\Delta i_s = 0$$

$$\Delta \omega_s = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{r_{eq}}{a} \right)^2 \cdot \frac{J_2 \cdot n}{(1 - e^2)^2} \cdot (4 - 5 \cdot \sin^2 i) \cdot (t - t_0)$$

$$\Delta \Omega_s = -\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{r_{eq}}{a} \right)^2 \cdot \frac{J_2 \cdot n}{(1 - e^2)^2} \cdot \cos i \cdot (t - t_0)$$

$$\Delta M_s = \left[n + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{r_{eq}}{a} \right)^2 \cdot \frac{J_2 \cdot n}{(1 - e^2)^{3/2}} \cdot (2 - 3 \cdot \sin^2 i) \right] \cdot (t - t_0)$$

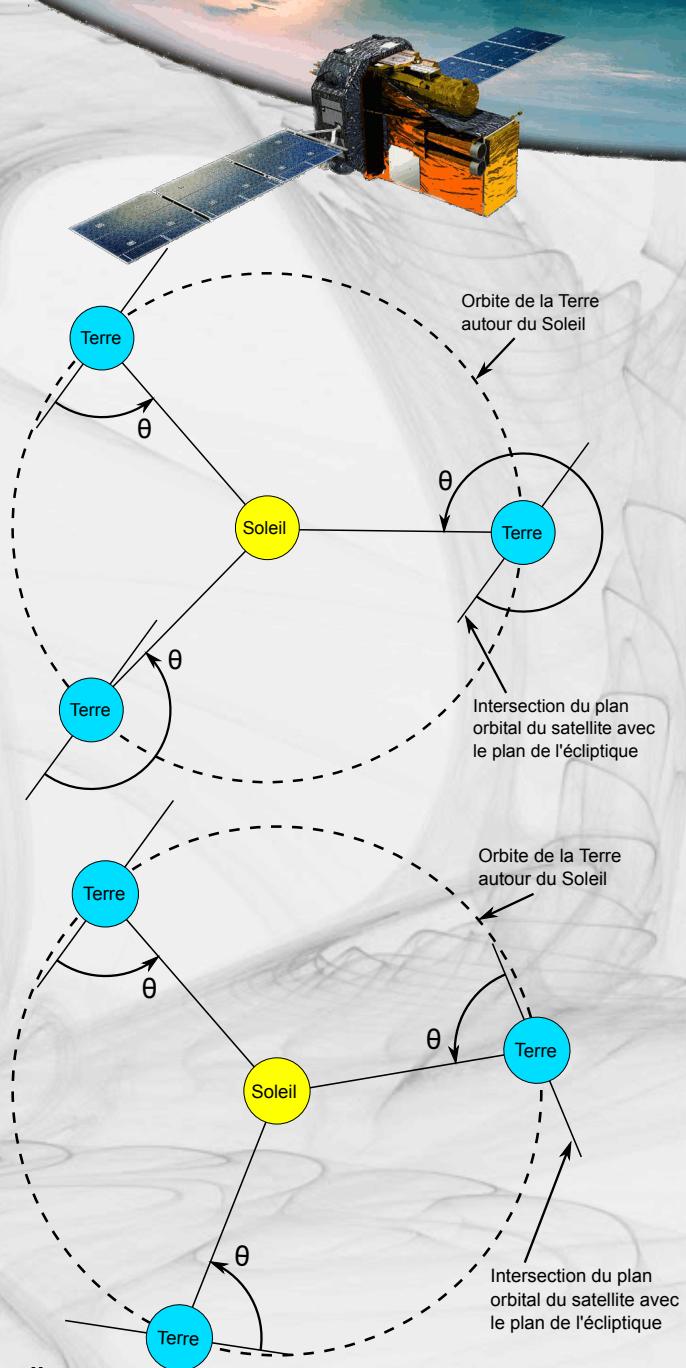
avec : $n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$; $r_{eq} \approx 6378$ km ; $J_2 \approx 1,082 \times 10^{-3}$

❖ Conséquences :

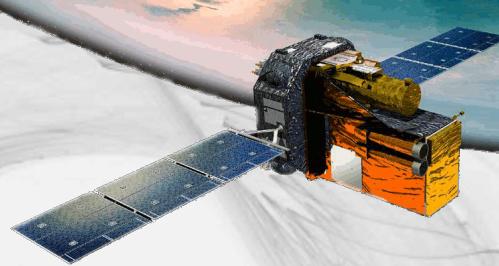
- ❖ La forme et l'inclinaison de l'orbite sont fixes (a , e et i constants)
- ❖ Précession de l'orbite dans son plan, sauf si $4-5 \sin^2 i = 0$ ($i = \pm 63,4^\circ$)
 - ❖ Inclinaison 'critique' pour un 'périgée gelé' : très pratique pour maintenir le périgée au-dessus du même point pour une orbite elliptique
- ❖ Précession du plan orbital, sauf pour les orbites polaires ($i = \pm 90^\circ$)
 - ❖ On peut utiliser cette perturbation pour changer volontairement Ω
- ❖ La pulsation orbitale ne respecte strictement la 3^{ème} loi de Kepler que pour $2-3 \sin^2 i = 0$ ($i = \pm 54,7^\circ$)
 - ❖ Peu utile en pratique (mais on en tient compte pour calculer les 'vraies' périodes orbitales)

Orbite héliosynchrone

- ❖ Dans le cadre d'un mouvement purement képlérien, le plan de l'orbite est fixe par rapport aux étoiles
 - ❖ L'angle de ce plan avec la direction du Soleil varie au cours de l'année de $0,985^\circ/\text{jour solaire}$
- ❖ En utilisant le terme en J2, il existe une combinaison (a,e,i) telle que $d\Omega/dt = 0,985^\circ/\text{jour}$
 - ❖ Pour une orbite circulaire :
$$-9,97 \cdot \left(\frac{r_{eq}}{a} \right)^{7/2} \cdot \cos i = 0,985$$
- ❖ Les orbites héliosynchrones permettent de garantir des conditions d'éclairage identiques à chaque passage du satellite au-dessus d'un point donné du globe.
 - ❖ Toujours rétrograde ($i > 90^\circ$)
 - ❖ Très utilisé : $h=800 \text{ km}$, $i \approx 98^\circ$



Orbites particulières



- ❖ Il existe un certain nombre d'orbites particulières, par exemple :
 - ❖ Géosynchrone : période orbitale = 1 jour sidéral
 - ❖ Géostationnaire : géosynchrone + $i=e=0$ (\Rightarrow fixe / surface terrestre)
 - ❖ Molnyia : période 12h, périgée gelée, fortement excentrique (\Rightarrow bonne couverture des hautes latitudes)
 - ❖ Héliosynchrone : cf transparent précédent ...