

Algorytmy numeryczne – zadanie 1

Sumowanie szeregów potęgowych

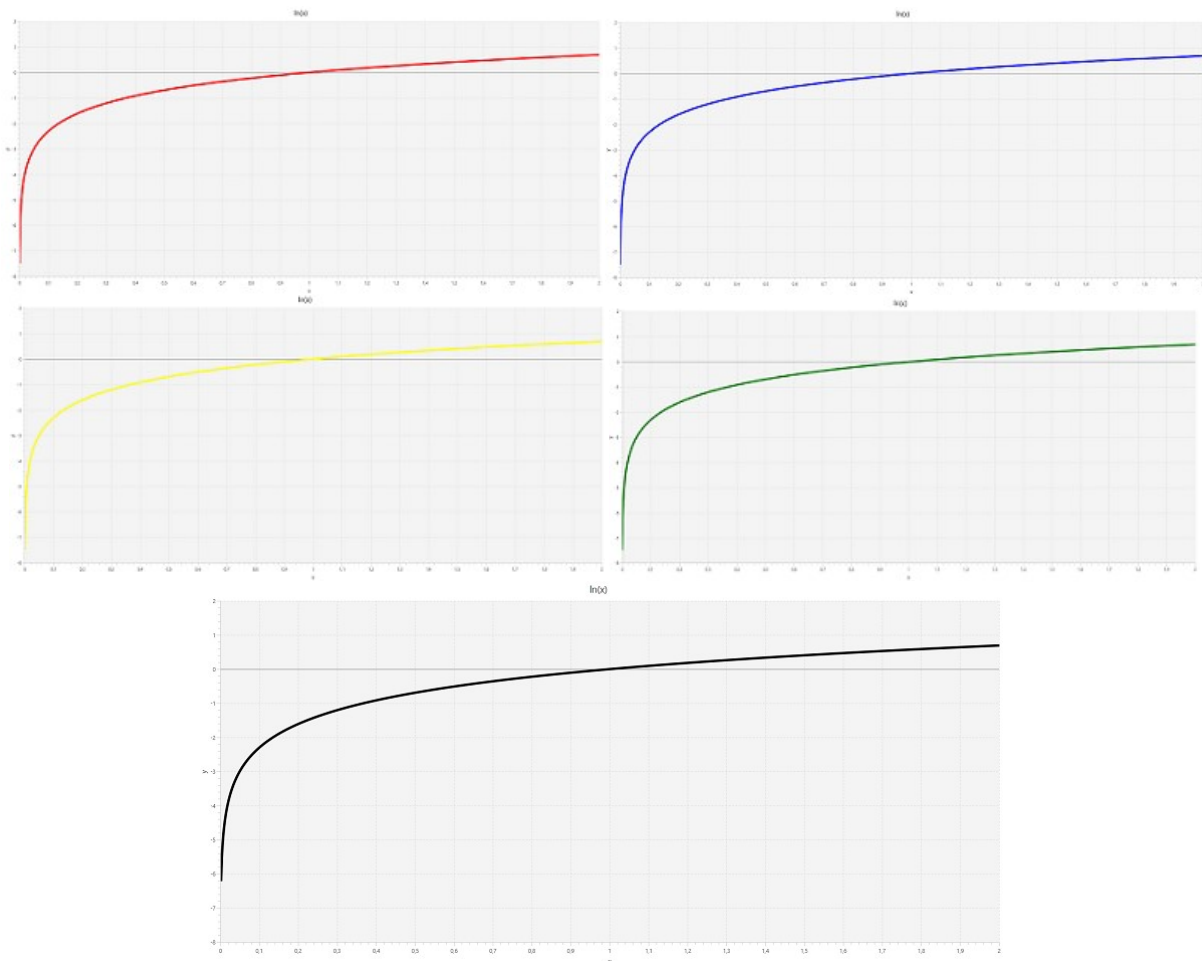
Jakub Skrzypiec (gr. AP3)
13 października 2019

Napisałem program w **JAVIE** obliczający wartość funkcji $\ln(x)$ dla 10^6 argumentów w przedziale $[0,2]$ na 4 sposoby, sumując elementy szeregu potęgowego:

1. obliczane bezpośrednio ze wzoru Taylora w kolejności od początku
2. obliczane bezpośrednio ze wzoru Taylora w kolejności od końca
3. od początku, ale obliczając kolejny wyraz na podstawie poprzedniego wyrazu
4. od końca, ale obliczając kolejny wyraz na podstawie poprzedniego wyrazu

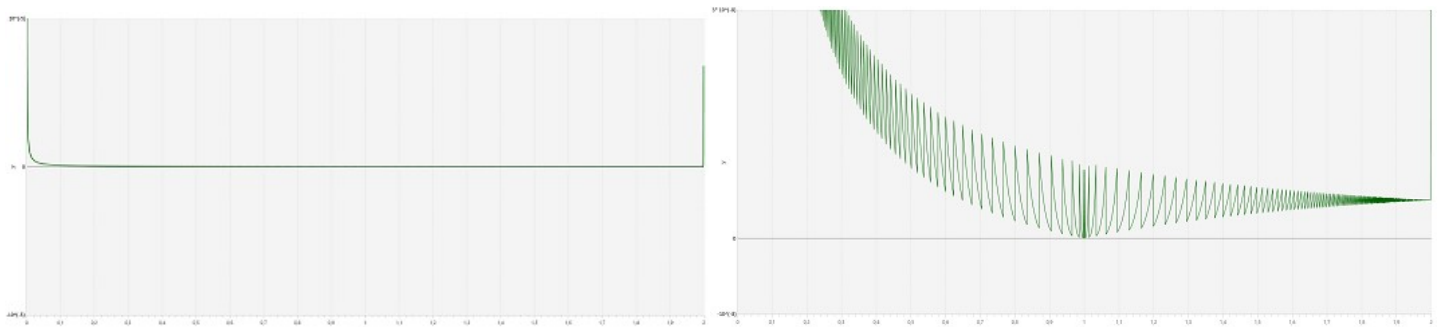
Otrzymane wyniki porównałem z wartościami funkcji bibliotecznej `Math.Log(x)`.

Dla ułatwienia w dalszej części sprawozdania 4 powyższe funkcje będę nazywał numerami (1,2,3,4), do tego funkcję biblioteczną numerem '5'.



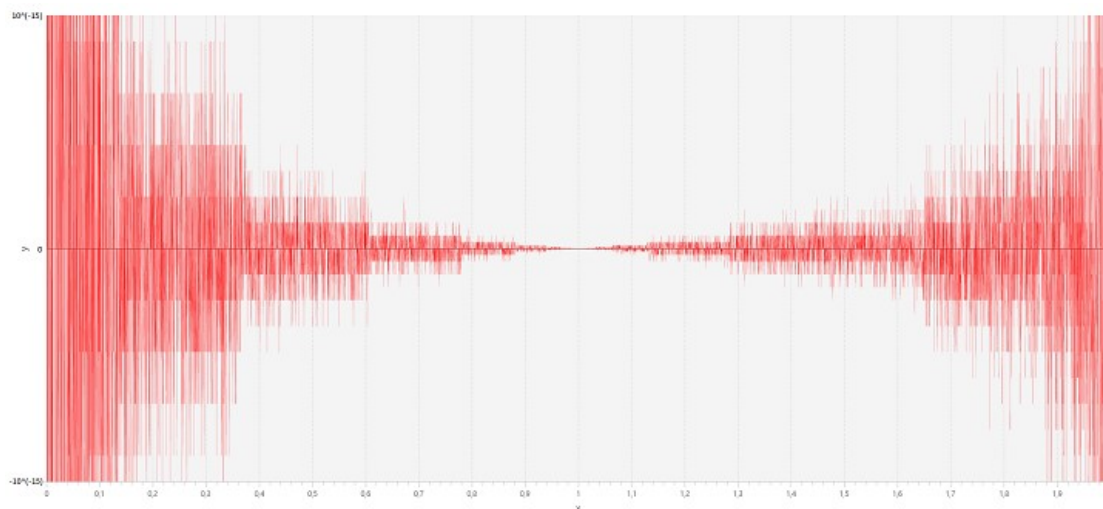
1) Wykresy funkcji: (1-czerwony), (2-niebieski), (3-żółty), (4-zielony), (5-czarny)

Wartości funkcji 1-4 są bardzo zbliżone, dlatego porównałem każdą z 4 funkcji z wartościami funkcji 5 (f.biblioteczna) – obliczając wartość bezwzględną (Abs) z różnicy między daną funkcją a funkcją 5. Otrzymane wyniki również są zbliżone.



2) Przykładem jest wykres funkcji $Abs(1-5)$ [wykresy $Abs(2-5)$, $Abs(3-5)$, $Abs(4-5)$ wyglądają praktycznie tak samo]

Dopiero po odjęciu od siebie poszczególnych wyników widać różnicę między funkcjami 1-4.



3) Wykres różnicy między Abs(1-5) a Abs(2-5) [różnica między Abs(3-5) a Abs(4-5) jest bardzo podobna]

H1: Z powyższego wykresu wynika, że **przy obliczaniu wyrazów ze wzoru** w około połowie przypadków bardziej opłaca się sumować wyrazy od końca, a w około połowie przypadków bardziej opłaca się sumować wyrazy od początku.

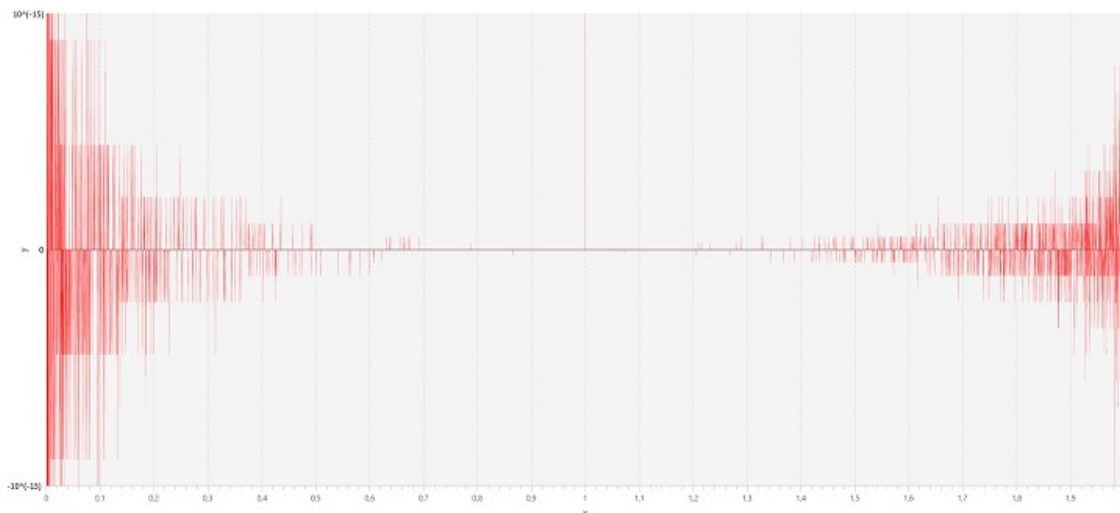
Niemniej jednak wykonałem testy na liczbach i dla 10^6 argumentów w **343 657** przypadkach lepsze jest sumowanie od początku, w **345 402** sumowanie od końca, a w **310 941** przypadkach nie było żadnej różnicy. **Stąd wynika, że przy obliczaniu wyrazów ze wzoru dokładniejsze jest sumowanie wyrazów od końca.**

Podobnie jest **przy obliczaniu wyrazów na podstawie poprzedniego wyrazu.**

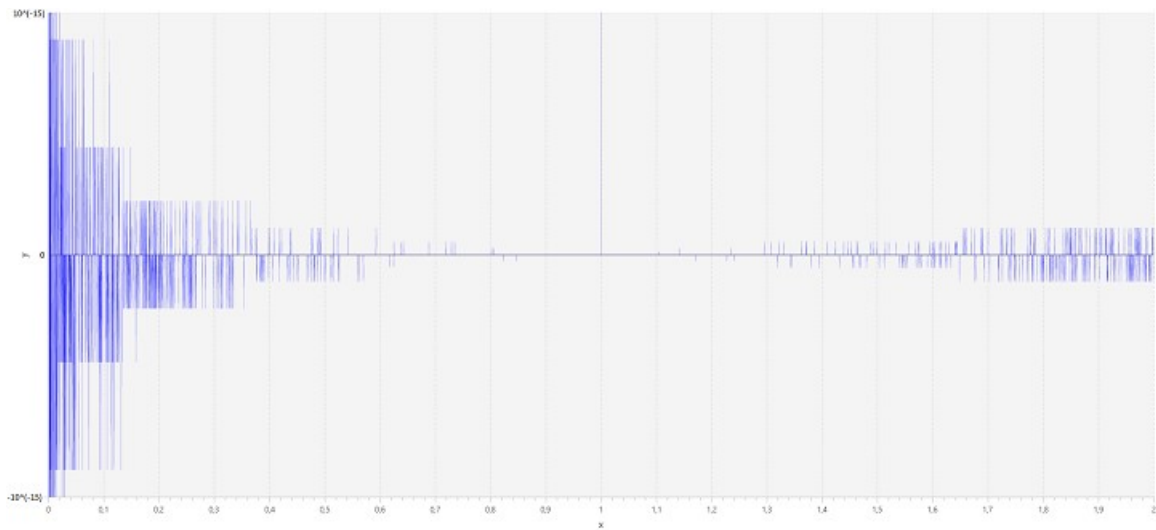
Testy na liczbach wykazały, że dla 10^6 argumentów ($x \in [0,2]$) w **343 700** przypadkach lepsze jest sumowanie od początku, w **345 122** sumowanie od końca, a w **311 178** przypadkach nie było różnicy. **Stąd wynika, że przy obliczaniu wyrazów na podstawie poprzedniego wyrazu dokładniejsze jest sumowanie wyrazów od końca.**

H2: Wykres 2) przedstawia różnicę pomiędzy funkcją 1 a funkcją 5 (wykresy dla różnic między funkcjami 2 a 5, 3 a 5, 4 a 5 wyglądają praktycznie tak samo), czyli **błąd bezwzględny** obliczania funkcji 1 (2,3,4).

Na wykresie 2) widać, że dla argumentów **bliskich 1** (w przypadku funkcji $\ln(x)$ – rozwinięcie wokół zera) wartości są najbliższe wartości 0, co oznacza, że w okolicy argumentu 1 momentami błąd bezwzględny jest najmniejszy.



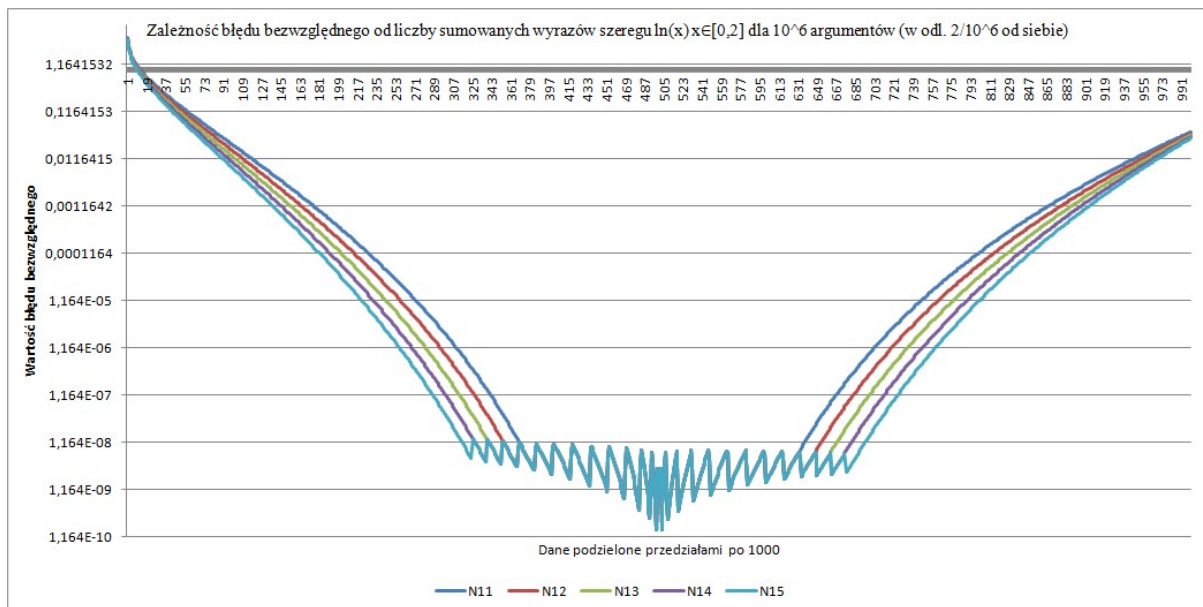
4) Wykres różnicy między Abs(1-5) a Abs(3-5)



5) Wykres różnicy między Abs(2-5) a Abs(4-5)

H3: Na pierwszy rzut oka z wykresów 4) i 5) można by wywnioskować, że sumowanie elementów obliczanych ze wzoru daje podobne rezultaty do sumowania elementów obliczanych z poprzedniego elementu. Widać też jednak, że oba te wykresy mają tendencję do przyjmowania minimalnie większej ilości wyrazów ujemnych niż dodatnich czy równych 0. Co oznacza, że Abs(3-5) częściej jest większe od Abs(1-5) oraz Abs(4-5) większe niż Abs(2-5). **Powyższe sugeruje, iż dodawanie wyrazów obliczanych ze wzoru daje dokładniejsze wyniki niż sumowanie wyrazów obliczanych na podstawie poprzedniego wyrazu.**

Tutaj również wykonałem testy na liczbach, z których wynika, że **dla sumowania wyrazów od początku dla 10^6 argumentów w 66 060 przypadkach lepsze jest sumowanie wyrazów obliczanych ze wzoru, w 65 669 przypadkach sumowanie wyrazów obliczanych na podstawie poprzedniego wyrazu, a w 868 271 przypadkach nie ma różnicy.** Z testów wynika również, że **dla sumowania wyrazów od końca dla 10^6 argumentów w 40 404 przypadkach lepsze jest sumowanie wyrazów obliczanych ze wzoru, w 39 361 przypadkach sumowanie wyrazów obliczanych na podstawie poprzedniego wyrazu, a w 920 235 przypadkach nie ma różnicy. Stąd wynika, że sumowanie wyrazów obliczanych bezpośrednio ze wzoru daje dokładniejsze wyniki niż sumowanie wyrazów obliczanych na podstawie poprzedniego wyrazu.**



6) Wykres zależności błędu bezwzględnego od liczby sumowanych wyrazów szeregu

Q1: Powyższy wykres pokazuje, że dla większej ilości sumowanych wyrazów **błąd bezwzględny** jest mniejszy niż dla małej ilości sumowanych wyrazów. Reasumując im więcej wyrazów sumujemy, tym **błąd bezwzględny** będzie mniejszy.