

Algorytmy Numeryczne – Zadanie 2

9 października 2019

Rozwiązywanie układów równań liniowych metodą eliminacji Gaussa

Zdefiniuj klasę parametryzowaną typem (ang. generic) `MojaMacierz` lub, jeśli programujesz w C++, szablon klasy (ang. template) reprezentującą macierz nad ciałem liczb rzeczywistych.

Zaimplementuj algorytm eliminacji Gaussa w następujących wariantach:

G: bez wyboru elementu podstawowego,

PG: z częściowym wyborem elementu podstawowego,

*FG: z pełnym wyborem elementu podstawowego.

Testy poprawnościowe i wydajnościowe

Wszystkie testy proszę przeprowadzić używając następujących typów reprezentujących liczbę rzeczywistą:

TF: typu pojedynczej precyzji: float (lub odpowiednika w wybranym języku programowania),

TD: typu podwójnej precyzji: double (lub odpowiednika w wybranym języku programowania),

*TC: własnego typu, który przechowuje liczbę w postaci ułamka liczb całkowitych – w tej wersji wszystkie operacje powinny być wykonywane bez utraty precyzji. Do osiągnięcia tego celu można użyć gotowego typu całkowitego, takiego jak `BigInteger` w Javie i `C#` albo skorzystać z implementacji z biblioteki Boost/GMP w C++.

Dla losowej macierzy kwadratowej A i wektora B , rozwiąż układ równań liniowych

$$A \cdot X = B$$

korzystając z zaimplementowanych wariantów metody Gaussa w klasie `MojaMacierz`. Jako współczynniki macierzy A i wektora X proszę przyjąć pseudolosowe liczby zmienionoprzecinkowe z przedziału $[-1, 1)$ otrzymane jako iloraz $r/2^{16}$, gdzie r jest pseudolosową liczbą całkowitą z przedziału: $\{-2^{16}, 2^{16} - 1\}$. Wektor B obliczamy jako $B := A \cdot X$. Macierz A i wektor B podajemy jako parametry do rozwiązania układu równań, wektor X zachowujemy jako rozwiązanie wzorcowe.

Proszę zbadać poprawność (błędy) i wydajność (czas działania) we wszystkich możliwych wariantach: wybierając jedną z trzech implementacji metody Gaussa i jeden z trzech wymienionych typów.

Testy przeprowadź dla różnych rozmiarów macierzy, w tym możliwie dużych dla sprzętu jakim dysponujesz (zapewne rozmiar macierzy nie powinien być większy niż kilka tysięcy) – uruchomienie wszystkich testów nie powinno zająć więcej niż kilka godzin.

Sprawozdanie

W sprawozdaniu proszę przedstawić argumenty za poprawnością implementacji (między innymi należy sprawdzić poprawność operacji na macierzach, w tym operacji mnożenia macierzy przez wektor).

Proszę zweryfikować następujące hipotezy:

- H1: Dla dowolnego ustalonego rozmiaru macierzy czas działania metody Gaussa w kolejnych wersjach (G, PG, FG) rośnie.
- H2: Dla dowolnego ustalonego rozmiaru macierzy błąd uzyskanego wyniku metody Gaussa w kolejnych wersjach (G, PG, FG) maleje.
- H3: Użycie własnej arytmetyki na ułamkach zapewnia bezbłędne wyniki niezależnie od wariantu metody Gaussa i rozmiaru macierzy.

Odpowiedz na następujące pytania:

- Q1: Jak zależy dokładność obliczeń (błąd) od rozmiaru macierzy dla dwóch wybranych przez Ciebie wariantów metody Gaussa gdy obliczenia prowadzone są na typie podwójnej precyzji (TD)?
- Q2: Jak przy wybranym przez Ciebie wariantcie metody Gaussa zależy czas działania algorytmu od rozmiaru macierzy i różnych typów?

Wydajność implementacji

- E1: Podaj czasy rozwiązania układu równań uzyskane dla macierzy o rozmiarze 500 dla 9 testowanych wariantów.

Praca zespołowa

Zadanie można wykonać w zespole dwu osobowym. W takim przypadku proszę dokładnie oznaczyć jaki był zakres pracy członków zespołu. W oddaniu projektu musi uczestniczyć cały zespół.

Wskazówki

- Wszystkie testy wykonaj w taki sposób, aby można było je łatwo odtworzyć i powtórzyć (wykonywane eksperymenty zachowaj w kodzie programu lub w skryptach uruchomieniowych, zanotuj wersję użytego oprogramowania, opcje kompilacji oraz konfigurację sprzętową).
- Macierze i wektory do testów należy losować jeden raz, w taki sposób aby porównywane operacje wykonywać na tych samych danych – jest to istotne zwłaszcza przy porównywaniu dokładności obliczeń.

Ocena i elementy nieobowiązkowe

- Skorzystanie z cudzej implementacji metody Gaussa z pełnym wyborem elementu podstawowego (FG): -10 pkt.
- Pominięcie metody Gaussa z pełnym wyborem elementu podstawowego (FG) w testach: -20 pkt.
- Pominięcie testów z liczbami w postaci ułamków (TC): -20 pkt.