



**UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS**

Tarea 1: funciones periódicas y series trigonométricas de Fourier

Juan Sebastian Manrique Moreno

*Ecuaciones Diferenciales, Proyecto Académico de Física,
Universidad Distrital Francisco José de Caldas*

Septiembre de 2022

1. Periodo de una función

1. Encontrar el periodo de las siguientes funciones:

a) $f(t) = \cos(n\pi t)$

b) $f(t) = \sin(t) + \sin\left(\frac{t}{3}\right) + \sin\left(\frac{t}{5}\right)$

Solución:

Para la solución de este ejercicio, se tiene en cuenta la forma general para hallar el periodo de una función trigonométrica, por tanto, para toda función trigonométrica con periodo natural T_n , se tiene su periodo T_f de la siguiente manera:

$$T_f = \frac{T_n}{B} \quad (1)$$

Dónde B yace de la forma general de una función trigonométrica, la cuál es:

$$f(t) = A \sin(Bx + C) + D$$

Forma usada para cualquier función trigonométrica no necesariamente para la función seno, de esta manera, solo analizando la forma de la función y además conociendo el periodo natural de la función que estemos utilizando, podremos conocer el periodo de dicha función.

Los periodos naturales de las diferentes funciones trigonométricas son:

- Para *seno*, *coseno*, *secante* y *cosecante* es 2π .
- Para *tangente* y *cotangente* es π .

Para una superposición de funciones, se debe buscar el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de esta manera se busca en qué instante todas las funciones pertenecientes a la superposición están en fase, o lo que sería igual a que comparten el mismo periodo.

Teniendo todo esto en cuenta y aplicándolo, resulta:

a) $f(t) = \cos(n\pi t)$

Tomando (??) y teniendo $B = n\pi$ y $T_n = 2\pi$, el periodo T_f de la función es:

$$T_f = \frac{2\pi}{n\pi} \Rightarrow T_f = \frac{2}{n} \quad (2)$$

Obteniendo así que el periodo de la función es $T_f = 2/n$.

b) $f(t) = \sin(t) + \sin\left(\frac{t}{3}\right) + \sin\left(\frac{t}{5}\right)$

Tomando (??) nuevamente y teniendo $B_1 = 1$, $B_2 = \left(\frac{1}{3}\right)$, $B_3 = \left(\frac{1}{5}\right)$ y $T_n = 2\pi$ para todas las funciones superpuestas, definimos T_f para cada una y posteriormente hallamos el m.c.m. entre ellas, así de esta manera obtener el periodo general de la función, por tanto:

$$T_{f1} = \frac{2\pi}{1} \Rightarrow T_{f1} = 2\pi \quad (3)$$

$$T_{f2} = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} \Rightarrow T_{f2} = 6\pi \quad (4)$$

$$T_{f3} = \frac{2\pi}{\frac{1}{5}} \Rightarrow T_{f3} = 10\pi \quad (5)$$

Usando los resultados obtenidos en (3), (4) y (5)

2π	6π	10π	2
1π	3π	5π	3
\vdots	1π	5π	5
\vdots	\vdots	1π	π
1	1	1	
			30 π

De esta manera se concluye qué:

$$T_f = 30\pi \quad (6)$$

2. Si $f(t)$ es una función periódica de t con periodo T , demostrar que $f(at)$, para $a \neq 0$, es una función periódica de t con periodo $\frac{T}{a}$.

Solución:

A la hora de demostrar que una función $f(t)$ posee un periodo T y lo que implicaría que tiene la forma $f(t + T)$, decimos que para demostrar que una función cualquiera sea periódica esta debe tener la misma forma mostrada previamente, así, al variar los parámetros correspondientes ya sea insertando corregimientos o eliminando, el resultado final debe ser el parámetro más su periodo T , por tanto, para una función $f(at)$, se dice que tiene un periodo T/a de tal manera que al operar

$$f(at) = f\left(a\left(t + \frac{T}{a}\right)\right) = f(at + T)$$

Donde si se toma $T_f = T/a$, ya que anteriormente se dice que ese es el periodo de la función, entonces, queda demostrado que para una función $f(at)$ su periodo es T/a , resultando en el periodo normal de la función $T_f \equiv T$.

2. Series de Fourier

1. Demostrar que la serie de Fourier para la función $F(t)$ definida por:

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi/2 \leq t < 0 \\ 1, & \text{si } 0 \leq t < \pi/2 \end{cases} \quad (7)$$

y

$$F(t) = F(t + \pi)$$

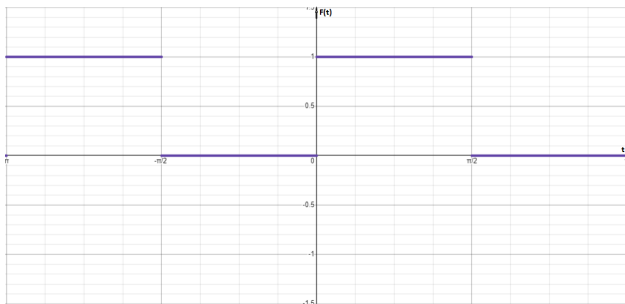


Figura 1: Gráfica de $F(t)$ de la forma (??) con periodo $T_f = \pi$

Viene dada por:

$$F(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2(2n-1)t)}{(2n-1)} \quad (8)$$

Solución:

Para deducir la serie de Fourier trigonométrica de cualquier función continua, suave de la forma $F(t + T)$ se plantea la forma general para la serie, la cual es:

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_f t) + b_n \sin(n\omega_f t)$$

donde $\omega_f = \frac{2\pi}{T_f}$

De la cual se deducen los valores de los coeficientes a_0 , a_n y b_n ; esto gracias a una serie de cálculos, por tanto

$$a_0 = \frac{2}{T_f} \int_{-T_f/2}^{T_f/2} F(t) dt \quad (9)$$

$$a_n = \frac{2}{T_f} \int_{-T_f/2}^{T_f/2} F(t) \cos(n\omega_f t) dt \quad (10)$$

$$b_n = \frac{2}{T_f} \int_{-T_f/2}^{T_f/2} F(t) \sin(n\omega_f t) dt \quad (11)$$

De esta manera, reemplazando en (??), (??) y (??) para hallar los respectivos coeficientes, teniendo $T_f = \pi$ resulta:

Para a_0 :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} F(t) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\int_{-\pi/2}^0 0 dt + \int_0^{\pi/2} 1 dt \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\pi/2} dt \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(t \Big|_0^{\pi/2} \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Resultando

$$a_0 = 1 \quad (12)$$

Para a_n , teniendo $\omega_f = 2$:

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} F(t) \cos(2nt) dt \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[\int_{-\pi/2}^0 0 \cos(2nt) dt + \int_0^{\pi/2} 1 \cos(2nt) dt \right] \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\pi/2} \cos(2nt) dt \right] \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{2n} \left(\sin(2nt) \Big|_0^{\pi/2} \right) \right] \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{2n} \left(\sin\left(2n \frac{\pi}{2}\right) - \sin(2n(0)) \right) \right]
 \end{aligned}$$

Ya que $\sin(n\pi) = \sin(0) = 0$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{\pi} [0] \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Resultando

$$a_n = 0 \quad (13)$$

Para b_n , teniendo $\omega_f = 2$:

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} F(t) \sin(2nt) dt \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[\int_{-\pi/2}^0 0 \sin(2nt) dt + \int_0^{\pi/2} 1 \sin(2nt) dt \right] \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\pi/2} \sin(2nt) dt \right] \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{2n} \left(\cos(2nt) \Big|_0^{\pi/2} \right) \right] \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{2n} \left(\cos\left(2n \frac{\pi}{2}\right) - \cos(2n(0)) \right) \right]
 \end{aligned}$$

Ya que $\cos(n\pi) = (-1)^n$ y $\cos(0) = 1$

$$= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{2n} ((-1)^n - 1) \right]$$

En este caso, para una n par, $(-1)^n = 1$ y para una impar, $(-1)^n = -1$. Teniendo que si n es par, $b_n = 0$, lo cual es un valor inútil para nosotros, ya que daría que la serie de Fourier es igual a una constante ($a_0/2$), por ende se fuerza que n sea impar, resultando b_n así:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{(2n-1)} \quad (14)$$

Tras haber obtenido los valores de los coeficientes a_0 , a_n y b_n , se reemplazan en la ecuación general

para la serie trigonométrica se Fourier. Usando (??), (??) y (??)

$$F(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2(2n-1)t)}{2n-1} \quad (15)$$

Comparando (??) con (??) se puede ver la similitud, quedando demostrado y con ello, solucionado el ejercicio.

2. Utilizar la calculadora *DESMOS* para calcular y graficar la serie de Fourier de las siguientes funciones:

a) $F(t) = -t$ para el intervalo entre $(-\pi, \pi)$ y $F(t) = F(t + 2\pi)$.

b) $F(t) = e^t$ para el intervalo entre $(-\pi, \pi)$ y $F(t) = F(t + 2\pi)$.

c) $F(t) = \ln|t|$ para el intervalo entre $(-\pi, \pi)$ y $F(t) = F(t + 2\pi)$.

Solución:

Para la solución de este ejercicio se utilizó el software *DESMOS*, esto con el fin de soporte en cuánto a la visualización de la gráfica y con ello, poder calcular la serie de Fourier de manera más sencilla. Se van a colocar algunas imágenes referenciando a las gráficas de las respectivas funciones y posteriormente se va a deducir la serie de Fourier con base en ello.

a. $F(t) = F(t + 2\pi) = -t$; $(-\pi, \pi)$

Usando el software *DESMOS*, la gráfica para $F(t)$ junto a su serie de Fourier correspondiente evaluada hasta $n = 15$ es:

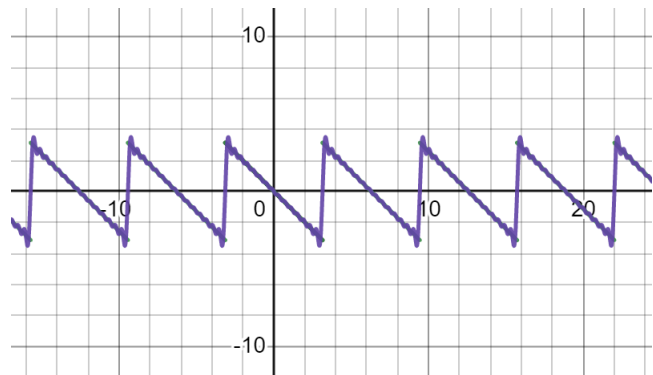


Figura 2: $F(t) = -t$ con su serie de Fourier entre $(-\pi, \pi)$

Como se puede ver en la Figura ??, gracias a la calculadora *DESMOS*, se puede saber que $a_0 = a_n = 0$, por tanto, el único valor obtenido es b_n , que es valor que se va a calcular a continuación:

Para b_n teniendo $\omega_f = 1$:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -t \sin(nt) dt \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin(nt) dt \end{aligned}$$

Sustituyendo al usar integración por partes

$$\begin{aligned} u &= t & dv &= \sin(nt) dt \\ du &= dt & v &= -\frac{1}{n} \cos(nt) \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} b_n &= -\frac{2}{\pi} \left[-\frac{t}{n} \cos(nt) - \int \frac{1}{n} \cos(nt) dt \right]_0^{\pi} \\ &= -\frac{2}{\pi} \left[-\frac{t}{n} \cos(nt) - \frac{1}{n} \int \cos(nt) dt \right]_0^{\pi} \\ &= -\frac{2}{\pi} \left[-\frac{t}{n} \cos(nt) - \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} \sin(nt) \right) \right]_0^{\pi} \\ &= -\frac{2}{\pi} \left[-\frac{t \cos(nt)}{n} - \frac{\sin(nt)}{n^2} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{nt \cos(nt) + \sin(nt)}{n^2} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{n\pi \cos(n\pi) + \sin(n\pi)}{n^2} \right) - \\ &\quad \left(\frac{n(0) \cos(n(0)) + \sin(n(0))}{n^2} \right) \end{aligned}$$

Ya que $\sin(n\pi) = \sin(0) = 0$, $\cos(n\pi) = (-1)^n$ y $\cos(0) = 1$,

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{n\pi(-1)^n}{n^2} \right) \\ &= \frac{2(-1)^n}{n} \end{aligned}$$

Resultando

$$b_n = 2 \frac{(-1)^n}{n} \quad (16)$$

Teniendo $a_0 = a_n = 0$, y usando (??), la serie de Fourier para $F(t)$ es:

$$F(t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(nt)}{n}$$

$$b. F(t) = F(t + 2\pi) = e^t; \quad (-\pi, \pi)$$

Usando el software *DESMOS*, la gráfica para $F(t)$ junto a su serie de Fourier correspondiente evaluada hasta $n = 15$ es:

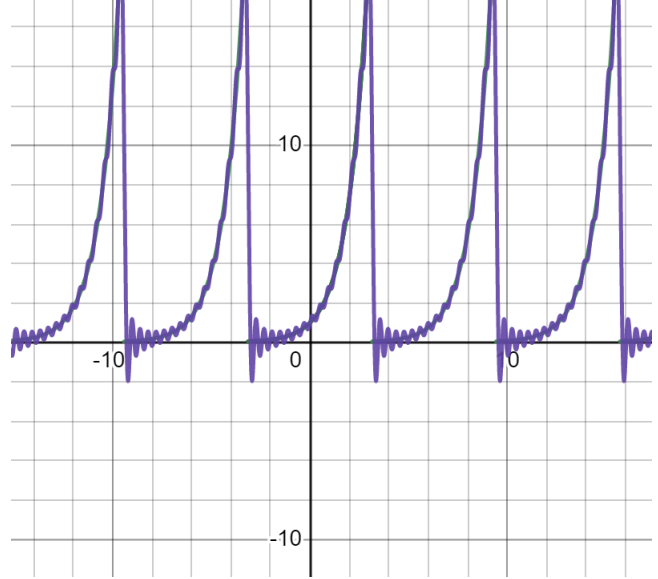


Figura 3: $F(t) = e^t$ con su serie de Fourier entre $(-\pi, \pi)$

Cómo se puede ver en la Figura ??, gracias a la calculadora *DESMOS* se puede ver un poco cómo es el comportamiento de la función, con ello, se comienza a calcular la serie de Fourier para $F(t)$, por tanto sus coeficientes son:

Para a_0 teniendo $\omega_f = 1$:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^t dt \\ &= \frac{1}{\pi} [e^t]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} [e^{\pi} - e^{-\pi}] \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{e^{2\pi} - 1}{e^{\pi}} \right) \end{aligned}$$

Resultando

$$a_0 = \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi e^{\pi}} \quad (17)$$

Para a_n teniendo $\omega_f = 1$:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(t) \cos(nt) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^t \cos(nt) dt \end{aligned}$$

Sustituyendo al usar integración por partes

$$\begin{aligned} u &= \cos(nt) & dv &= e^t dt \\ du &= -n \sin(nt) dt & v &= e^t \end{aligned}$$

Entonces

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[e^t \cos(nt) + n \int e^t \sin(nt) dt \right]_{-\pi}^{\pi}$$

Sustituyendo nuevamente al usar integración por partes

$$\begin{aligned} u &= \sin(nt) & dv &= e^t dt \\ du &= n \cos(nt) dt & v &= e^t \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} [e^t \cos(nt)]_{-\pi}^{\pi} + n \\ &\quad \left[\left(e^t \sin(nt) - n \int e^t \cos(nt) dt \right) \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} [e^t \cos(nt) + ne^t \sin(nt)]_{-\pi}^{\pi} - \\ &\quad n^2 \int_{-\pi}^{\pi} e^t \cos(nt) dt \\ &= \frac{1}{\pi} [e^t \cos(nt) + ne^t \sin(nt)]_{-\pi}^{\pi} \cdot \frac{1}{n^2 + 1} \\ \text{Tras desarrollar los límites, teniendo que} \\ \sin(n(\pm\pi)) &= 0 \text{ y } \cos(n(\pm\pi)) \\ &= \frac{1}{\pi} [e^{\pi} (-1)^n - e^{-\pi} (-1)^n] \cdot \frac{1}{n^2 + 1} \\ &= \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi e^{\pi}} \left(\frac{(-1)^n}{n^2 + 1} \right) \end{aligned}$$

Resultando

$$a_n = \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi e^{\pi}} \left(\frac{(-1)^n}{n^2 + 1} \right) \quad (18)$$

Para b_n teniendo $\omega_f = 1$:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(t) \sin(nt) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^t \sin(nt) dt \end{aligned}$$

Sustituyendo al usar integración por partes

$$\begin{aligned} u &= \sin(nt) & dv &= e^t dt \\ du &= n \cos(nt) dt & v &= e^t \end{aligned}$$

Entonces

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[e^t \sin(nt) - n \int e^t \cos(nt) dt \right]_{-\pi}^{\pi}$$

Sustituyendo nuevamente al usar integración por partes

$$\begin{aligned} u &= \cos(nt) & dv &= e^t dt \\ du &= -n \sin(nt) dt & v &= e^t \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} [e^t \sin(nt)]_{-\pi}^{\pi} - n \\ &\quad \left[\left(e^t \cos(nt) + n \int e^t \sin(nt) dt \right) \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} [e^t \sin(nt) - ne^t \cos(nt)]_{-\pi}^{\pi} - \\ &\quad n^2 \int_{-\pi}^{\pi} e^t \sin(nt) dt \\ &= \frac{1}{\pi} [e^t \sin(nt) - ne^t \cos(nt)]_{-\pi}^{\pi} \cdot \frac{1}{n^2 + 1} \\ \text{Tras desarrollar los límites, teniendo que} \\ \sin(n(\pm\pi)) &= 0 \text{ y } \cos(n(\pm\pi)) \\ &= \frac{1}{\pi} [-ne^{\pi} (-1)^n + ne^{-\pi} (-1)^n] \cdot \frac{1}{n^2 + 1} \\ &= \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi e^{\pi}} \left(\frac{-n(-1)^n}{n^2 + 1} \right) \end{aligned}$$

Resultando

$$b_n = \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi e^{\pi}} \left(\frac{-n(-1)^n}{n^2 + 1} \right) \quad (19)$$

Usando (??), (??) y (??), reemplazando en la forma general de la serie trigonométrica de Fourier y factorizando, resulta la serie de Fourier para $F(t)$:

$$F(t) = \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi e^{\pi}} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} (\cos(nt) - n \sin(nt)) \right]$$

$$c. F(t) = F(t + 2\pi) = \ln|t|; \quad (-\pi, \pi)$$

Usando el software *DESMOS*, la gráfica para $F(t)$ junto a su serie de Fourier correspondiente evaluada hasta $n = 15$ es:

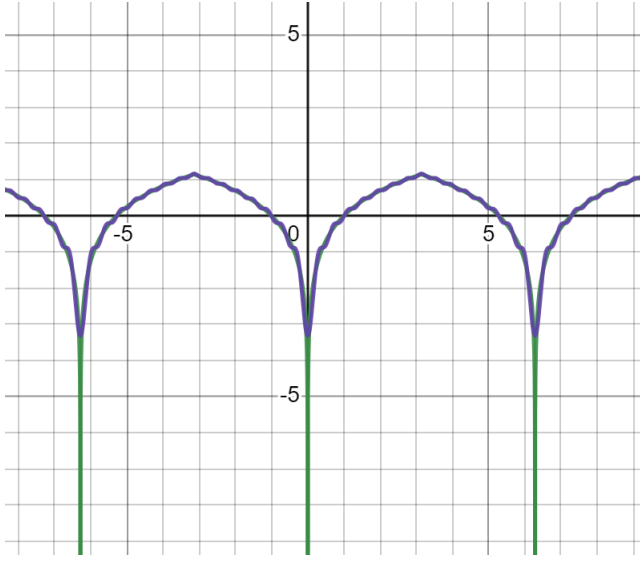


Figura 4: $F(t) = \ln|t|$ con su serie de Fourier entre $(-\pi, \pi)$

Cómo se puede ver en la Figura ??, gracias a la calculadora DESMOS se puede ver cómo es el comportamiento de la función, teniendo una asíntota en 0 y cada 2π tal como lo menciona su periodo. Debido a esto, al realizar las respectivas integraciones para la función, su complejidad es alta llegando a tener que utilizar la función Γ o integrales especiales para seno y coseno, por ende, solamente se va a enseñar el comando usado en el software y se va a asumir la serie de Fourier partiendo de la Figura ??.

Teniendo $T_f = 2\pi$ y $\omega_f = 1$:

$$a_0 = \frac{2}{T_f} \int_{-\frac{T_f}{2}}^{\frac{T_f}{2}} G(t) dt$$

$a_0 = 0.289459771699$

$$a_n = \frac{2}{T_f} \int_{-\frac{T_f}{2}}^{\frac{T_f}{2}} \cos(mv_F(t)) G(t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_f} \int_{-\frac{T_f}{2}}^{\frac{T_f}{2}} \sin(mv_F(t)) G(t) dt$$

$$F_F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(mv_F(t)) + b_n \sin(mv_F(t)))$$

Figura 5: Código usado para hallar la serie de Fourier de $F(t) = |t|$

3. La serie de Fourier de la función $F(t)$ definida por:

$$F(t) = \begin{cases} -1, & \text{si } -\pi/2 \leq t < 0 \\ 1, & \text{si } 0 \leq t < \pi/2 \end{cases} \quad (20)$$

y

$$F(t) = F(t + \pi)$$

Viene dada por:

$$F(t) = \sum_{\text{impar}}^{\infty} \frac{4}{n\pi} \sin(2nt) \quad (21)$$

A partir del resultado anterior, demostrar que:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots \quad (22)$$

Solución:

Para la solución de este ejercicio nos ayudamos de un software para graficar como lo es *DESMOS*, con ello poder analizar la función ya graficada y conocer su forma, la gráfica en cuestión es:

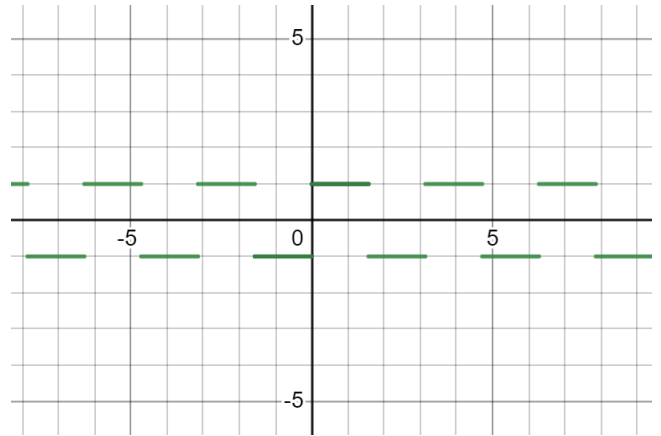


Figura 6: Gráfica de la función mostrada en (??)

Analizando la simetría de la gráfica vista en Figura ??, se puede deducir que la función es *impar*, lo que implica que nos podemos ahorrar algunos cálculos realizando la serie de Fourier para una función impar.

Teniendo en que si $F(t)$ es impar, sus coeficientes de la serie de Fourier son:

$$a_0 = a_n = 0 \quad (23)$$

y

$$b_n = \frac{4}{T_f} \int_0^{T_f/2} F(t) \sin(n\omega_f t) dt \quad (24)$$

Teniendo que $T_f = \pi$, $\omega_f = 2$ y usando (??) y (??) para hallar los coeficientes, resulta:

Para a_0 y a_n , según (??), $a_0 = a_n = 0$.

Para b_n :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} 1 \sin(2nt) dt \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(2nt) dt \\ &= \frac{4}{\pi} \left[-\frac{1}{2n} \left(\cos(2nt) \Big|_0^{\pi/2} \right) \right] \\ &= \frac{4}{\pi} \left[-\frac{1}{2n} \left(\cos\left(2n\frac{\pi}{2}\right) - \cos(2n(0)) \right) \right] \\ \text{Ya que } \cos(n\pi) &= (-1)^n \text{ y } \cos(0) = 1 \\ &= \frac{4}{\pi} \left[-\frac{1}{2n} ((-1)^n - 1) \right] \end{aligned}$$

Al igual que con el caso del itemize 1. de esta misma sección, solo interesa que n sea impar, ya que se realizó el análisis solo se mencionará que n es impar en la serie de Fourier final.

Resultando

$$b_n = \frac{4}{n\pi}, \text{ donde } n \text{ es impar} \quad (25)$$

De esta manera, la serie de Fourier para (??) es:

$$F(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{\text{impar}}^{\infty} \frac{\sin(2nt)}{n} \quad (26)$$

Donde se puede ver la clara similitud a (??), demostrando así que esa es su forma.

Para demostrar (??), se decide evaluar la serie de Fourier mostrada en (??) en $t = \pi/4$. La razón es por la forma de la demostración que se está requiriendo, ya que se tiene $4/\pi$ como factor constante en la serie, se debe evaluar la función dentro del intervalo $0 \leq t < \pi/2$ para que esta sea igual a 1, se usa $\pi/4$ estando este dentro del intervalo y satisfaciendo la demostración requerida. Por tanto

$$\begin{aligned} F\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{4}{\pi} \sum_{\text{impar}}^{\infty} \frac{\sin\left(2n\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}{n} \\ 1 &= \frac{4}{\pi} \sum_{\text{impar}}^{\infty} \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n} \\ \frac{\pi}{4} &= \sum_{\text{impar}}^{\infty} \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n} \end{aligned}$$

Ya que $\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n$

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \quad (27)$$

Como se puede ver en (??), se diferencié a n , debido a que esta ya no es necesariamente impar, sino puede ser cualquier valor siendo $n > 0$, $n \in \mathbb{Z}$, por lo tanto, solamente se reemplaza la n del denominador en su forma impar ya que esta no fue afectada por la función.

Evaluando n en la serie, resultaría:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)-1} \quad (28)$$

Donde se puede ver la similitud de los 5 primeros términos de la serie entre (??) y (??), demostrando y con ello solucionando el ejercicio.

4. Encontrar las componentes par e impar de las siguientes funciones:

$$a) F(t) = e^t$$

$$b) F(t) = \frac{t+1}{t-1}$$

Solución:

Teniendo en cuenta que una función $G(x)$ puede ser expresada como una combinación de sus componentes par e impar, de la forma:

$$G(x) = G_p(x) + G_i(x) \quad (29)$$

Las ecuaciones que se emplearán para hallar cada componente, son:

$$G_p(x) = \frac{1}{2} (G(x) + G(-x)) \quad (30)$$

$$G_i(x) = \frac{1}{2} (G(x) - G(-x)) \quad (31)$$

$$a. F(t) = e^t$$

Usando (??) y (??) para hallar las componentes de $F(t)$, resulta:

Para $F_p(t)$:

$$\begin{aligned} F_p(t) &= \frac{1}{2} (e^t + e^{-t}) \\ &= \frac{e^t + e^{-t}}{2} \end{aligned}$$

Recordando la forma del coseno hiperbólico (cosh), Para $F_i(t)$:
la cual es:

$$\cosh = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad (32)$$

Reemplazando (??), resulta

$$F_p(t) = \cosh \quad (33)$$

Para $F_i(t)$:

$$\begin{aligned} F_i(t) &= \frac{1}{2} (e^t - e^{-t}) \\ &= \frac{e^t - e^{-t}}{2} \end{aligned}$$

Recordando la forma del seno hiperbólico (sinh), la cual es:

$$\sinh = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \quad (34)$$

Reemplazando (??), resulta

$$F_i(t) = \sinh \quad (35)$$

Para finalizar, usando (??), la función $F(t)$ expresada en sus componentes par e impar es:

$$e^t = \cosh + \sinh \quad (36)$$

$$b. F(t) = \frac{t+1}{t-1}$$

Usando (??) y (??) para hallar las componentes de $F(t)$, resulta:

Para $F_p(t)$:

$$\begin{aligned} F_p(t) &= \frac{1}{2} \left(\frac{t+1}{t-1} + \frac{-t+1}{-t-1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{t+1}{t-1} + \frac{t-1}{t+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{(t+1)^2 + (t-1)^2}{t^2 - 1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{t^2 + 2t + 1 + t^2 - 2t + 1}{t^2 - 1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2t^2 + 2}{t^2 - 1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2(t^2 + 1)}{t^2 - 1} \right) \\ &= \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1} \end{aligned}$$

Resultando

$$F_p(t) = \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} F_i(t) &= \frac{1}{2} \left(\frac{t+1}{t-1} - \frac{-t+1}{-t-1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{t+1}{t-1} - \frac{t-1}{t+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{(t+1)^2 - (t-1)^2}{t^2 - 1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{t^2 + 2t + 1 - t^2 + 2t - 1}{t^2 - 1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{4t}{t^2 - 1} \right) \\ &= \frac{2t}{t^2 - 1} \end{aligned}$$

Resultando

$$F_i(t) = \frac{2t}{t^2 - 1} \quad (38)$$

Para finalizar, usando (??), la función $F(t)$ expresada en sus componentes par e impar es:

$$F(t) = \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1} + \frac{2t}{t^2 - 1} \quad (39)$$

Para demostrarlo solo es cuestión de realizar la suma, desarrollar unos productos notables y factorizar, por tanto:

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1} + \frac{2t}{t^2 - 1} \\ &= \frac{t^2 + 2t + 1}{t^2 - 1} \\ &= \frac{(t+1)^2}{(t+1)(t-1)} \\ &= \frac{t+1}{t-1} \end{aligned}$$

Demostrando así que efectivamente (??) y (??) son las componentes par e impar de $F(t)$, respectivamente.

5. Identifique si la función periódica definida por $F(t) = |t|$ para $(-\pi, \pi)$ y $F(t) = F(t + 2\pi)$, es par o impar. Dependiendo de su respuesta, calcule los coeficientes de Fourier que corresponda y encuentre su serie de Fourier.

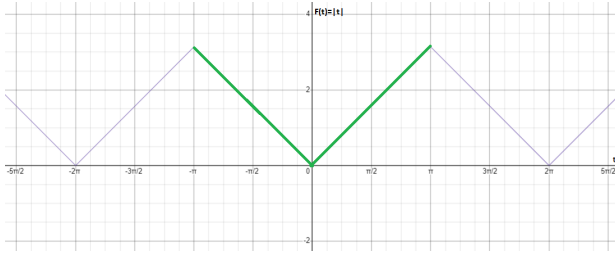


Figura 7: Gráfica de $F(t) = |t|$ entre $(-\pi, \pi)$ con periodo $T_f = 2\pi$

Solución:

La función $F(t) = |t|$ entre $(-\pi, \pi)$, también puede ser escrita como una función a trozos, de la forma

$$F(t) = \begin{cases} -t, & \text{si } -\pi \leq t < 0 \\ t, & \text{si } 0 \leq t \leq \pi \end{cases} \quad (40)$$

Y analizando la forma de la función basándose en la Figura ??, se puede ver que la función es **par**, lo que nos ahorra un cálculo, el cuál sería b_n , esto gracias a las siguientes relaciones:

Si $F(t)$ es par:

$$a_0 = \frac{4}{T_f} \int_0^{T_f/2} F(t) dt \quad (41)$$

$$a_n = \frac{4}{T_f} \int_0^{T_f/2} F(t) \cos(n\omega_f t) dt \quad (42)$$

y $b_n = 0$.

Por lo tanto, se puede hacer la serie de Fourier teniendo en cuenta solamente los coeficientes a_0 y a_n , y el límite de integración necesario. Teniendo $T_f = 2\pi$ y $\omega_f = 1$ la serie de Fourier resultaría:

Para a_0 :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{4}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{2}} F(t) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t dt \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{t^2}{2} \Big|_0^{\pi} \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi^2}{2} \right) \\ &= \pi \end{aligned}$$

Resultando

$$a_0 = \pi \quad (43)$$

Para a_n :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{2}} F(t) \cos(nt) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos(nt) dt \end{aligned}$$

Sustituyendo al usar integración por partes

$$\begin{aligned} u &= t & dv &= \cos(nt) dt \\ du &= dt & v &= \frac{1}{n} \sin(nt) \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \left[t \frac{1}{n} \sin(nt) - \int \frac{1}{n} \sin(nt) dt \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{t}{n} \sin(nt) - \frac{1}{n} \int \sin(nt) dt \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{t}{n} \sin(nt) - \frac{1}{n} \left(-\frac{1}{n} \cos(nt) \right) \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{t}{n} \sin(nt) + \frac{1}{n^2} \cos(nt) \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{nt \sin(nt) + \cos(nt)}{n^2} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{n\pi \sin(n\pi) + \cos(n\pi)}{n^2} \right) - \left(\frac{n(0) \sin(n(0)) + \cos(n(0))}{n^2} \right) \end{aligned}$$

Ya que $\sin(n\pi) = \sin(0) = 0$, $\cos(n\pi) = (-1)^n$ y $\cos(0) = 1$,

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2} \right), \text{ tomando } n \text{ impar} \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{-2}{(2n-1)^2} \right) \\ &= -\frac{4}{(2n-1)^2 \pi} \end{aligned}$$

Resultando

$$a_n = -\frac{4}{(2n-1)^2 \pi} \quad (44)$$

Reemplazando (??) y (??) en la ecuación general para la serie trigonométrica de Fourier:

$$F(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)t)}{(2n-1)^2} \quad (45)$$

La cual también puede ser escrita de la forma:

$$F(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{\text{impar}} \frac{\cos(nt)}{n^2} \quad (46)$$