Tarea 1: funciones periódicas y series trigonométricas de Fourier

Juan Sebastian Manrique Moreno

Ecuaciones Diferenciales, Proyecto Académico de Física,
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Septiembre de 2022

1. Periodo de una función

1. Encontrar el periodo de las siguientes funciones:

   a) $f(t) = cos\left(\pi t\right)$

   b) $f(t) = \sin\left(t\right) + \sin\left(\frac{t}{3}\right) + \sin\left(\frac{t}{5}\right)$

Solución:

Para la solución de este ejercicio, se tiene en cuenta la forma general para hallar el periodo de una función trigonométrica, por tanto, para toda función trigonométrica con periodo natural T_n, se tiene su periodo T_f de la siguiente manera:

$$T_f = \frac{T_n}{B} \tag{1}$$

Dónde B yace de la forma general de una función trigonométrica, la cuál es:

$$f(t) = A\sin\left(Bx + C\right) + D$$

Forma usada para cualquier función trigonométrica no necesariamente para la función seno, de esta manera, solo analizando la forma de la función y además conociendo el periodo natural de la función que estemos utilizando, podremos conocer el periodo de dicha función.

Los periodos naturales de las diferentes funciones trigonométricas son:

- Para *seno, coseno, secante* y *cosecante* es 2π.
- Para *tangente* y *cotangente* es π.

Para una superposición de funciones, se debe buscar el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de esta manera se busca en qué instante todas las funciones pertenecientes a la superposición están en fase, o lo que sería igual a que comparten el mismo periodo.

Teniendo todo esto en cuenta y aplicándolo, resulta:

a) $f(t) = \cos\left(\pi t\right)$

Tomando (1) y teniendo $B = \pi$ y $T_n = 2\pi$, el periodo T_f de la función es:

$$T_f = \frac{2\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}} \Rightarrow T_f = 2 \tag{2}$$

Obteniendo así que el periodo de la función es $T_f = 2$.

b) $f(t) = \sin\left(t\right) + \sin\left(\frac{t}{3}\right) + \sin\left(\frac{t}{5}\right)$

Tomando (1) nuevamente y teniendo $B_1 = 1$, $B_2 = \left(\frac{1}{3}\right)$, $B_3 = \left(\frac{1}{5}\right)$ y $T_n = 2\pi$ para todas las funciones superpuestas, definimos T_f para cada una y posteriormente hallamos el m.c.m. entre ellas, así de esta manera obtener el periodo general de la función, por tanto:

$$T_{f1} = \frac{2\pi}{1} \Rightarrow T_{f1} = 2\pi \tag{3}$$

$$T_{f2} = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} \Rightarrow T_{f2} = 6\pi \tag{4}$$

$$T_{f3} = \frac{2\pi}{\frac{1}{5}} \Rightarrow T_{f3} = 10\pi \tag{5}$$

Usando los resultados obtenidos en (3), (4) y (5)

$$\begin{array}{ccc|c} 2\pi & 6\pi & 10\pi & 2 \\ 1\pi & 3\pi & 5\pi & 3 \\ & 1\pi & 5\pi & 5 \\ & & 1\pi & \\ \hline & & & 30 \end{array}$$

De esta manera se concluye qué:

$$T_f = 30\pi \tag{6}$$

2. Si $f(t)$ es una función periódica de t con periodo T, demostrar que $f(at)$, para $a \neq 0$, es una función periódica de t con periodo $\frac{T}{a}$.

Solución:

A la hora de demostrar que una función $f(t)$ posee un periodo T y lo que implicaría que tiene la forma $f(t+T)$

2. Sección 1

$$Ecuaciones \tag{7}$$

$$\begin{aligned} texto1 &= texto---2 \\ texto---2 &= texto------3 \\ texto------3 &= texto4 \end{aligned}$$

3. Sección 2

«Texto»

3.1. Subsección 1

«Variación entre dos y una columna» ———————————————————————

3.2. Subsección 2

«Texto»

3.2.1. Subsubsección 1

«Texto»

Figura 1: Inserción de una figura

4. Conclusiones

«Conclusión»

5. Anexos

«Anexo»