Tarea 1: funciones periódicas y series trigonométricas de Fourier

Juan Sebastian Manrique Moreno

Ecuaciones Diferenciales, Proyecto Académico de Física, Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Septiembre de 2022

---

1. Periodo de una función

1. Encontrar el periodo de las siguientes funciones:
   a) $f(t) = cos\,(n\pi t)$
   b) $f(t) = \sin(t) + \sin\left(\frac{t}{3}\right) + \sin\left(\frac{t}{5}\right)$

Solución:

Para la solución de este ejercicio, se tiene en cuenta la forma general para hallar el periodo de una función trigonométrica, por tanto, para toda función trigonométrica con periodo natural T_n, se tiene su periodo T_f de la siguiente manera:

$$T_f = \frac{T_n}{B} \tag{1}$$

Dónde B yace de la forma general de una función trigonométrica, la cuál es:

$$f(t) = A\sin(Bx + C) + D$$

Forma usada para cualquier función trigonométrica no necesariamente para la función seno, de esta manera, solo analizando la forma de la función y además conociendo el periodo natural de la función que estemos utilizando, podremos conocer el periodo de dicha función.

Los periodos naturales de las diferentes funciones trigonométricas son:

- Para *seno, coseno, secante* y *cosecante* es 2π.
- Para *tangente* y *cotangente* es π.

Para una superposición de funciones, se debe buscar el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de esta manera se busca en qué instante todas las funciones pertenecientes a la superposición están en fase, o lo que sería igual a que comparten el mismo periodo.

Teniendo todo esto en cuenta y aplicándolo, resulta:

a) $f(t) = \cos(n\pi t)$

Tomando (1) y teniendo $B = n\pi$ y $T_n = 2\pi$, el periodo T_f de la función es:

$$T_f = \frac{2\cancel{\pi}}{n\cancel{\pi}} \Rightarrow T_f = \frac{2}{n} \tag{2}$$

Obteniendo así que el periodo de la función es $T_f = {}^{2}/_{n}$.

b) $f(t) = \sin(t) + \sin\left(\frac{t}{3}\right) + \sin\left(\frac{t}{5}\right)$

Tomando (1) nuevamente y teniendo $B_1 = 1$, $B_2 = \left(\frac{1}{3}\right)$, $B_3 = \left(\frac{1}{5}\right)$ y $T_n = 2\pi$ para todas las funciones superpuestas, definimos T_f para cada una y posteriormente hallamos el m.c.m. entre ellas, así de esta manera obtener el periodo general de la función, por tanto:

$$T_{f1} = \frac{2\pi}{1} \Rightarrow T_{f1} = 2\pi \tag{3}$$

$$T_{f2} = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} \Rightarrow T_{f2} = 6\pi \tag{4}$$

$$T_{f3} = \frac{2\pi}{\frac{1}{5}} \Rightarrow T_{f3} = 10\pi \tag{5}$$

Usando los resultados obtenidos en (3), (4) y (5)

2π	6π	10π	2
1π	3π	5π	3
$\vdots$	1π	5π	5
$\vdots$	$\vdots$	1π	π
1	1	1	
			30π

De esta manera se concluye qué:

$$T_f = 30\pi \tag{6}$$

2. Si $f(t)$ es una función periódica de t con periodo T, demostrar que $f(at)$, para $a \neq 0$, es una función periódica de t con periodo $\frac{T}{a}$.

Solución:

A la hora de demostrar que una función $f(t)$ posee un periodo T y lo que implicaría que tiene la forma $f(t+T)$, decimos que para demostrar que una función cualquiera sea periódica esta debe tener la misma forma mostrada previamente, así, al variar los parámetros correspondientes ya sea insertando corregimientos o eliminando, el resultado final debe ser el parámetro más su periodo T, por tanto, para una función $f(at)$, se dice que tiene un periodo $^T/_a$ de tal manera que al operar

$$f(at) = f\left(a\left(t + \frac{T}{a}\right)\right) = f\left(at + T\right)$$

Donde si se toma $T_f = {}^T/_a$, ya que anteriormente se dice que ese es el periodo de la función, entonces, queda demostrado que para una función $f(at)$ su periodo es $^T/_a$, resultando en el periodo normal de la función $T_f \equiv T$.

2. Series de Fourier

1. Demostrar que la serie de Fourier para la función $F(t)$ definida por:

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } \; -{}^\pi/_2 \leq t < 0 \\ 1, & \text{si } \quad 0 \leq t < {}^\pi/_2 \end{cases} \tag{7}$$

y

$$F(t) = F\left(t + \pi\right)$$

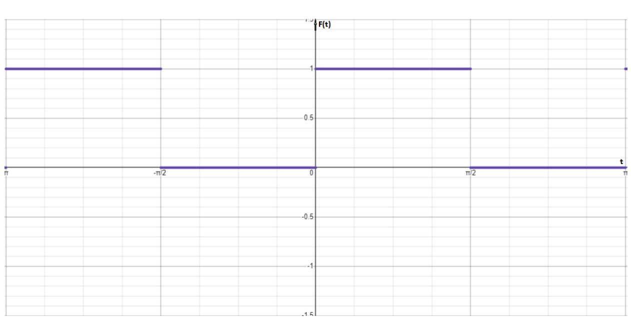

Figura 1: Gráfica de $F(t)$ de la forma (7) con periodo $T_f = \pi$

Viene dada por:

$$F(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{\sin\left(2\left(2n-1\right)t\right)}{\left(2n-1\right)} \tag{8}$$

Solución:

Para deducir la serie de Fourier trigonométrica de cualquier función continúa, suave de la forma $F\left(t+T\right)$ se plantea la forma general para la serie, la cual es:

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n\omega_f t\right) + b_n \sin\left(n\omega_f t\right)$$
$$\text{donde } \omega_f = \frac{2\pi}{T_f}$$

De la cual se deducen los valores de los coeficientes a_0, a_n y b_n; esto gracias a una serie de cálculos, por tanto

$$a_0 = \frac{2}{T_f}\int_{-\,T_f/2}^{T_f/2} F(t)\,dt \tag{9}$$

$$a_n = \frac{2}{T_f}\int_{-\,T_f/2}^{T_f/2} F(t)\cos\left(n\omega_f t\right)\,dt \tag{10}$$

$$b_n = \frac{2}{T_f}\int_{-\,T_f/2}^{T_f/2} F(t)\sin\left(n\omega_f t\right)\,dt \tag{11}$$

De esta manera, reemplazando en (9), (10) y (11) para hallar los respectivos coeficientes, teniendo $T_f = \pi$ resulta:

Para a_0:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_{-\,\pi/2}^{\pi/2} F(t)\,dt \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\int_{-\,\pi/2}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{\pi/2} 1\,dt\right] \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\int_{0}^{\pi/2} dt\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(t\big|_0^{\pi/2}\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) \\ &= \frac{\cancel{2}}{\cancel{\pi}}\left(\frac{\cancel{\pi}}{\cancel{2}}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Resultando

$$a_0 = 1 \tag{12}$$

Para a_n, teniendo $\omega_f = 2$:

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} F(t)\cos(2nt)\ dt \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\int_{-\pi/2}^{0} 0\cos(2nt)\ dt + \int_{0}^{\pi/2} 1\cos(2nt)\ dt\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi/2} \cos(2nt)\ dt\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2n}\left(\sin(2nt)\big|_{0}^{\pi/2}\right)\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2n}\left(\sin\left(\cancel{2}n\frac{\pi}{\cancel{2}}\right) - \sin(2n(0))\right)\right] \\
&\text{Ya que } \sin(n\pi) = \sin(0) = 0 \\
&= \frac{2}{\pi}[0] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Resultando

$$a_n = 0 \tag{13}$$

Para b_n, teniendo $\omega_f = 2$:

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} F(t)\sin(2nt)\ dt \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\int_{-\pi/2}^{0} 0\sin(2nt)\ dt + \int_{0}^{\pi/2} 1\sin(2nt)\ dt\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi/2} \sin(2nt)\ dt\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{2n}\left(\cos(2nt)\big|_{0}^{\pi/2}\right)\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{2n}\left(\cos\left(\cancel{2}n\frac{\pi}{\cancel{2}}\right) - \cos(2n(0))\right)\right] \\
&\text{Ya que } \cos(n\pi) = (-1)^n \text{ y } \cos(0) = 1 \\
&= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{2n}\left((-1)^n - 1\right)\right]
\end{aligned}
$$

En este caso, para una n par, $(-1)^n = 1$ y para una impar, $(-1)^n = -1$. Teniendo que si n es par, $b_n = 0$, lo cual es un valor inútil para nosotros, ya que daría que la serie de Fourier es igual a una constante ($^{a_0}/_2$), por ende se fuerza que n sea impar, resultando b_n así:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{(2n-1)} \tag{14}$$

Tras haber obtenido los valores de los coeficientes a_0, a_n y b_n, se reemplazan en la ecuación general para la serie trigonométrica se Fourier. Usando (12), (13) y (14)

$$F(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2(2n-1)t)}{2n-1} \tag{15}$$

Comparando (15) con (8) se puede ver la similitud, quedando demostrado y con ello, solucionado el ejercicio.

2. Utilizar la calculadora *DESMOS* para calcular y graficar la serie de Fourier de las siguientes funciones:

   a) $F(t) = -t$ para el intervalo entre $(-\pi,\ \pi)$ y $F(t) = F(t + 2\pi)$.

   b) $F(t) = e^t$ para el intervalo entre $(-\pi,\ \pi)$ y $F(t) = F(t + 2\pi)$.

   c) $F(t) = \ln|t|$ para el intervalo entre $(-\pi,\ \pi)$ y $F(t) = F(t + 2\pi)$.

Solución:

Para la solución de este ejercicio se utilizó el software *DESMOS*, esto con el fin de soporte en cuánto a la visualización de la gráfica y con ello, poder calcular la serie de Fourier de manera más sencilla. Se van a colocar algunas imágenes referenciando a las gráficas de las respectivas funciones y posteriormente se va a deducir la serie de Fourier con base en ello.

a. $F(t) = F(t + 2\pi) = -t;\ (-\pi,\ \pi)$

Usando el software *DESMOS*, la gráfica para $F(t)$ junto a su serie de Fourier correspondiente evaluada hasta $n = 15$ es:

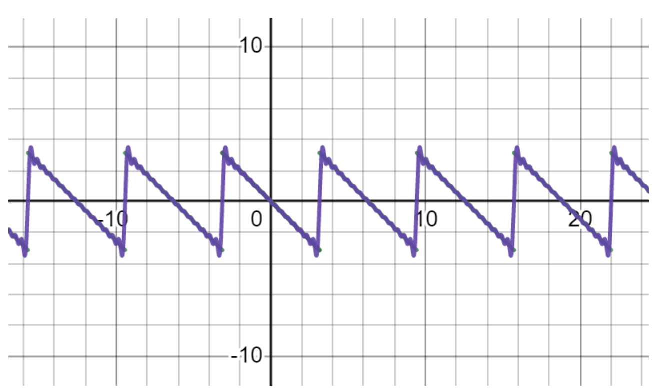

Figura 2: $F(t) = -t$ con su serie de Fourier entre $(-\pi,\ \pi)$

Como se puede ver en la Figura 2, gracias a la calculadora *DESMOS*, se puede saber que $a_0 = a_n = 0$, por tanto, el único valor obtenido es b_n, que es valor que se va a calcular a continuación:

Para b_n teniendo $\omega_f = 1$:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{\cancel{4}}{\cancel{2}\pi}\int_0^{\frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}}} -t\sin(nt)\ dt \\ &= -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin(nt)\ dt \end{aligned}$$

Sustituyendo al usar integración por partes

$$\begin{aligned} u &= t & dv &= \sin(nt)\,dt \\ du &= dt & v &= -\frac{1}{n}\cos(nt) \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} b_n &= -\frac{2}{\pi}\left[-\frac{t}{n}\cos(nt) - \int \frac{1}{n}\cos(nt)\ dt\right]_0^{\pi} \\ &= -\frac{2}{\pi}\left[-\frac{t}{n}\cos(nt) - \frac{1}{n}\int \cos(nt)\ dt\right]_0^{\pi} \\ &= -\frac{2}{\pi}\left[-\frac{t}{n}\cos(nt) - \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\sin(nt)\right)\right]_0^{\pi} \\ &= -\frac{2}{\pi}\left[-\frac{t\cos(nt)}{n} - \frac{\sin(nt)}{n^2}\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{nt\cos(nt) + \sin(nt)}{n^2}\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{n\pi\cos(n\pi) + \sin(n\pi)}{n^2}\right) - \\ &\quad \left(\frac{n(0)\cos(n(0)) + \sin(n(0))}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Ya que $\sin(n\pi) = \sin(0) = 0$, $\cos(n\pi) = (-1)^n$ y $\cos(0) = 1$,

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{\cancel{\pi}}\left(\frac{\cancel{n\pi}(-1)^n}{n^{\cancel{2}}}\right) \\ &= \frac{2(-1)^n}{n} \end{aligned}$$

Resultandoe

$$b_n = 2\frac{(-1)^n}{n} \tag{16}$$

Teniendo $a_0 = a_n = 0$, y usando (16), la serie de Fourier para $F(t)$ es:

$$F(t) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{\sin(nt)}{n}$$

b. $F(t) = F(t+2\pi) = e^t;\ (-\pi,\ \pi)$

Usando el software *DESMOS*, la gráfica para $F(t)$ junto a su serie de Fourier correspondiente evaluada hasta $n = 15$ es:

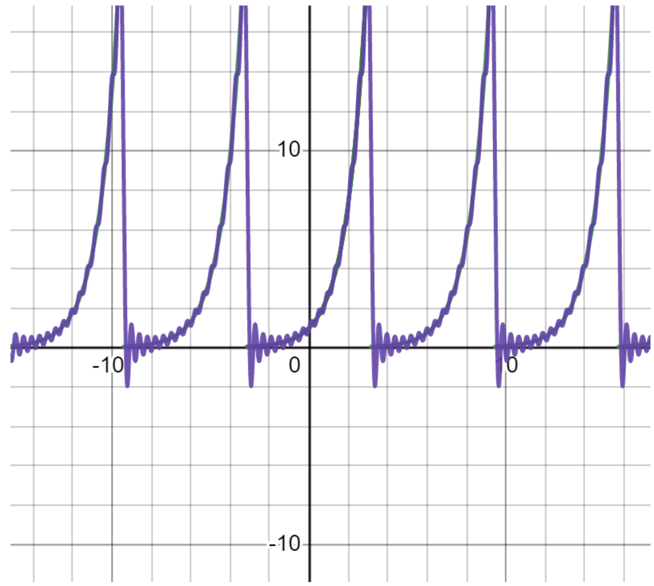

Figura 3: $F(t) = e^t$ con su serie de Fourier entre $(-\pi,\ \pi)$

Cómo se puede ver en la Figura 3, gracias a la calculadora DESMOS se puede ver un poco cómo es el comportamiento de la función, con ello, se comienza a calcular la serie de Fourier para $F(t)$, por tanto sus coeficientes son:

Para a_0 teniendo $\omega_f = 1$:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\pi}\int_{-\frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}}}^{\frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}}} F(t)\,dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^t\,dt \\ &= \frac{1}{\pi}\left[e^t|_{-\pi}^{\pi}\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\left[e^{\pi} - e^{-\pi}\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{e^{2\pi}-1}{e^{\pi}}\right) \end{aligned}$$

Resultando

$$a_0 = \frac{e^{2\pi}-1}{\pi e^{\pi}} \tag{17}$$

Para a_n teniendo $\omega_f = 1$:

$$a_n = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\pi} \int_{-\frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}}}^{\frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}}} F(t) \cos(nt)\ dt$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^t \cos(nt)\ dt$$

Sustituyendo al usar integración por partes

$$u = \cos(nt) \qquad dv = e^t dt$$
$$du = -n \sin(nt)\, dt \qquad v = e^t$$

Entonces

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[e^t \cos(nt) + n \int e^t \sin(nt)\ dt \right]_{-\pi}^{\pi}$$

Sustituyendo nuevamente al usar integración por partes

$$u = \sin(nt) \qquad dv = e^t dt$$
$$du = n \cos(nt)\, dt \qquad v = e^t$$

Entonces

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[e^t \cos(nt) \right]_{-\pi}^{\pi} + n \left[\left(e^t \sin(nt) - n \int e^t \cos(nt)\ dt \right) \right]_{-\pi}^{\pi}$$
$$= \frac{1}{\pi} \left[e^t \cos(nt) + ne^t \sin(nt) \right]_{-\pi}^{\pi} - n^2 \int_{-\pi}^{\pi} e^t \cos(nt)\ dt$$
$$= \frac{1}{\pi} \left[e^t \cos(nt) + ne^t \sin(nt) \right]_{-\pi}^{\pi} \cdot \frac{1}{n^2+1}$$

Tras desarrollar los límites, teniendo que $\sin(n(\pm\pi)) = 0$ y $\cos(n(\pm\pi))$

$$= \frac{1}{\pi} \left[e^{\pi} (-1)^n - e^{-\pi} (-1)^n \right] \cdot \frac{1}{n^2+1}$$
$$= \frac{e^{2\pi}-1}{\pi e^{\pi}} \left(\frac{(-1)^n}{n^2+1} \right)$$

Resultando

$$a_n = \frac{e^{2\pi}-1}{\pi e^{\pi}} \left(\frac{(-1)^n}{n^2+1} \right) \tag{18}$$

Para b_n teniendo $\omega_f = 1$:

$$b_n = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\pi} \int_{-\frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}}}^{\frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}}} F(t) \sin(nt)\ dt$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^t \sin(nt)\ dt$$

Sustituyendo al usar integración por partes

$$u = \sin(nt) \qquad dv = e^t dt$$
$$du = n \cos(nt)\, dt \qquad v = e^t$$

Entonces

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[e^t \sin(nt) - n \int e^t \cos(nt)\ dt \right]_{-\pi}^{\pi}$$

Sustituyendo nuevamente al usar integración por partes

$$u = \cos(nt) \qquad dv = e^t dt$$
$$du = -n \sin(nt)\, dt \qquad v = e^t$$

Entonces

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[e^t \sin(nt) \right]_{-\pi}^{\pi} - n \left[\left(e^t \cos(nt) + n \int e^t \sin(nt)\ dt \right) \right]_{-\pi}^{\pi}$$
$$= \frac{1}{\pi} \left[e^t \sin(nt) - ne^t \cos(nt) \right]_{-\pi}^{\pi} - n^2 \int_{-\pi}^{\pi} e^t \sin(nt)\ dt$$
$$= \frac{1}{\pi} \left[e^t \sin(nt) - ne^t \cos(nt) \right]_{-\pi}^{\pi} \cdot \frac{1}{n^2+1}$$

Tras desarrollar los límites, teniendo que $\sin(n(\pm\pi)) = 0$ y $\cos(n(\pm\pi))$

$$= \frac{1}{\pi} \left[-ne^{\pi} (-1)^n + ne^{-\pi} (-1)^n \right] \cdot \frac{1}{n^2+1}$$
$$= \frac{e^{2\pi}-1}{\pi e^{\pi}} \left(\frac{-n(-1)^n}{n^2+1} \right)$$

Resultando

$$b_n = \frac{e^{2\pi}-1}{\pi e^{\pi}} \left(\frac{-n(-1)^n}{n^2+1} \right) \tag{19}$$

Usando (17), (18) y (19), reemplazando en la forma general de la serie trigonométrica de Fourier y factorizando, resulta la serie de Fourier para $F(t)$:

$$F(t) = \frac{e^{2\pi}-1}{\pi e^{\pi}} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} (\cos(nt) - n \sin(nt)) \right]$$

c. $F(t) = F(t+2\pi) = \ln|t|;\ (-\pi,\ \pi)$

Usando el software *DESMOS*, la gráfica para $F(t)$ junto a su serie de Fourier correspondiente evaluada hasta $n = 15$ es:

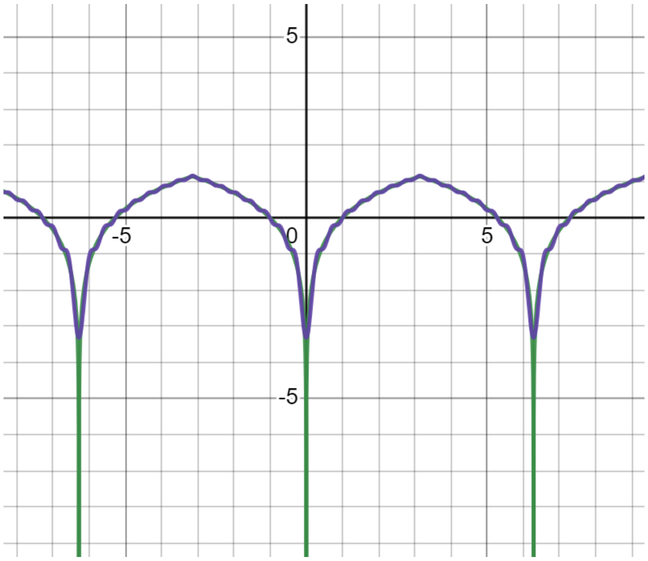

Figura 4: $F(t) = \ln|t|$ con su serie de Fourier entre $(-\pi,\ \pi)$

Cómo se puede ver en la Figura 4, gracias a la calculadora DESMOS se puede ver cómo es el comportamiento de la función, teniendo una asíntota en 0 y cada 2π tal como lo menciona su periodo. Debido a esto, al realizar las respectivas integraciones para la función, su complejidad es alta llegando a tener que utilizar la función Γ o integrales especiales para seno y coseno, por ende, solamente se va a enseñar el comando usado en el software y se va a asumir la serie de Fourier partiendo de la Figura 4.

Teniendo $T_f = 2\pi$ y $\omega_f = 1$:

$$a_0 = \frac{2}{T_F}\int_{-\frac{T_F}{2}}^{\frac{T_F}{2}} G(t)dt$$

$a_0 = 0.289459771699$

$$a_n = \frac{2}{T_F}\int_{-\frac{T_F}{2}}^{\frac{T_F}{2}} \cos\left(nw_F(t)\right)G(t)dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_F}\int_{-\frac{T_F}{2}}^{\frac{T_F}{2}} \sin\left(nw_F(t)\right)G(t)dt$$

$$F_F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left(a_n\cos\left(nw_F(t)\right) + b_n\sin\left(nw_F(t)\right)\right)$$

Figura 5: Código usado para hallar la serie de Fourier de $F(t) = |t|$

3. La serie de Fourier de la función $F(t)$ definida por:

$$F(t) = \begin{cases} -1, & \text{si } -\pi/2 \leq t < 0 \\ 1, & \text{si } \quad 0 \leq t < \pi/2 \end{cases} \tag{20}$$

y

$$F(t) = F(t+\pi)$$

Viene dada por:

$$F(t) = \sum_{\text{impar}}^{\infty} \frac{4}{n\pi}\sin(2nt) \tag{21}$$

A partir del resultado anterior, demostrar que:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots \tag{22}$$

Solución:

Para la solución de este ejercicio nos ayudamos de un software para graficar como lo es *DESMOS*, con ello poder analizar la función ya graficada y conocer su forma, la gráfica en cuestión es:

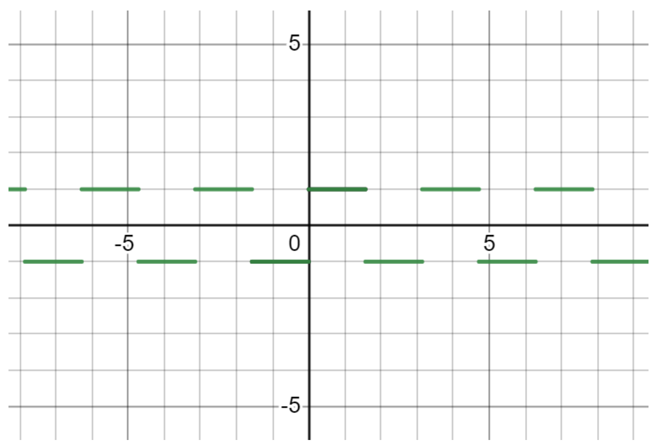

Figura 6: Gráfica de la función mostrada en (20)

Analizando la simetría de la gráfica vista en Figura 6, se puede deducir que la función es *impar*, lo que implica que nos podemos ahorrar algunos cálculos realizando la serie de Fourier para una función impar.

Teniendo en que si $F(t)$ es impar, sus coeficientes de la serie de Fourier son:

$$a_0 = a_n = 0 \tag{23}$$

y

$$b_n = \frac{4}{T_f}\int_0^{T_f/2} F(t)\sin(n\omega_f t)\ dt \tag{24}$$

Teniendo que $T_f = \pi$, $\omega_f = 2$ y usando (23) y (24) para hallar los coeficientes, resulta:

Para a_0 y a_n, según (23), $a_0 = a_n = 0$.

Para b_n:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} 1 \sin(2nt)\ dt \\ &= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin(2nt)\ dt \\ &= \frac{4}{\pi}\left[-\frac{1}{2n}\left(\cos(2nt)\,|_0^{\pi/2}\right)\right] \\ &= \frac{4}{\pi}\left[-\frac{1}{2n}\left(\cos\left(\cancel{2}n\frac{\pi}{\cancel{2}}\right) - \cos(2n(0))\right)\right] \\ &\text{Ya que } \cos(n\pi) = (-1)^n \text{ y } \cos(0) = 1 \\ &= \frac{4}{\pi}\left[-\frac{1}{2n}\left((-1)^n - 1\right)\right] \end{aligned}$$

Al igual que con el con el caso del itemize 1. de esta misma sección, solo interesa que n sea impar, ya que se realizó el análisis solo se mencionará que n es impar en la serie de Fourier final.

Resultando

$$b_n = \frac{4}{n\pi},\ \text{donde } n \text{ es impar} \tag{25}$$

De esta manera, la serie de Fourier para (20) es:

$$F(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{\text{impar}}^{\infty}\frac{\sin(2nt)}{n} \tag{26}$$

Donde se puede ver la clara similitud a (21), demostrando así que esa es su forma.

Para demostrar (22), se decide evaluar la serie de Fourier mostrada en (26) en $t = \pi/4$. La razón es por la forma de la demostración que se está requiriendo, ya que se tiene $4/\pi$ como factor constante en la serie, se debe evaluar la función dentro del intervalo $0 \leq t < \pi/2$ para que esta sea igual a 1, se usa $\pi/4$ estando este dentro del intervalo y satisfaciendo la demostración requerida. Por tanto

$$\begin{aligned} F\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{4}{\pi}\sum_{impar}^{\infty}\frac{\sin\left(\cancel{2}n\left(\frac{\pi}{\cancel{4}}\right)\right)}{n} \\ 1 &= \frac{4}{\pi}\sum_{impar}^{\infty}\frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n} \\ \frac{\pi}{4} &= \sum_{impar}^{\infty}\frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n} \end{aligned}$$

Ya que $\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n$

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1} \tag{27}$$

Como se puede ver en (27), se diferenció a n, debido a que esta ya no es necesariamente impar, sino puede ser cualquier valor siendo $n > 0,\ n \in \mathbb{Z}$, por lo tanto, solamente se reemplaza la n del denominador en su forma impar ya que esta no fue afectada por la función.

Evaluando n en la serie, resultaría:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)-1} \tag{28}$$

Donde se puede ver la similitud de los 5 primeros términos de la serie entre (28) y (22), demostrando y con ello solucionando el ejercicio.

4. Encontrar las componentes par e impar de las siguientes funciones:

   a) $F(t) = e^t$

   b) $F(t) = \frac{t+1}{t-1}$

Solución:

Teniendo en cuenta que una función $G(x)$ puede ser expresada como una combinación de sus componentes par e impar, de la forma:

$$G(x) = G_p(x) + G_i(x) \tag{29}$$

Las ecuaciones que se emplearán para hallar cada componente, son:

$$G_p(x) = \frac{1}{2}\left(G(x) + G(-x)\right) \tag{30}$$

$$G_i(x) = \frac{1}{2}\left(G(x) - G(-x)\right) \tag{31}$$

a. $F(t) = e^t$

Usando (30) y (31) para hallar las componentes de $F(t)$, resulta:

Para $F_p(t)$:

$$\begin{aligned} F_p(t) &= \frac{1}{2}\left(e^t + e^{-t}\right) \\ &= \frac{e^t + e^{-t}}{2} \end{aligned}$$

Recordando la forma del coseno hiperbólico (cosh), la cual es:

$$\cosh = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \tag{32}$$

Reemplazando (32), resulta

$$F_p(t) = \cosh \tag{33}$$

Para $F_i(t)$:

$$\begin{aligned} F_i(t) &= \frac{1}{2}\left(e^t - e^{-t}\right) \\ &= \frac{e^t - e^{-t}}{2} \end{aligned}$$

Recordando la forma del seno hiperbólico (sinh), la cual es:

$$\sinh = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \tag{34}$$

Reemplazando (34), resulta

$$F_i(t) = \sinh \tag{35}$$

Para finalizar, usando (29), la función $F(t)$ expresada en sus componentes par e impar es:

$$e^t = \cosh + \sinh \tag{36}$$

b. $F(t) = \frac{t+1}{t-1}$

Usando (30) y (31) para hallar las componentes de $F(t)$, resulta:

Para $F_p(t)$:

$$\begin{aligned} F_p(t) &= \frac{1}{2}\left(\frac{t+1}{t-1} + \frac{-t+1}{-t-1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{t+1}{t-1} + \frac{t-1}{t+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{(t+1)^2 + (t-1)^2}{t^2-1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{t^2 \cancel{+2t} + 1 + t^2 \cancel{-2t} + 1}{t^2-1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2t^2+2}{t^2-1}\right) \\ &= \frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{\cancel{2}\left(t^2+1\right)}{t^2-1}\right) \\ &= \frac{t^2+1}{t^2-1} \end{aligned}$$

Resultando

$$F_p(t) = \frac{t^2+1}{t^2-1} \tag{37}$$

Para $F_i(t)$:

$$\begin{aligned} F_i(t) &= \frac{1}{2}\left(\frac{t+1}{t-1} - \frac{-t+1}{-t-1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{t+1}{t-1} - \frac{t-1}{t+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{(t+1)^2 - (t-1)^2}{t^2-1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\cancel{t^2} + 2t \cancel{+1} \cancel{-t^2} + 2t \cancel{-1}}{t^2-1}\right) \\ &= \frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{\cancel{4}t}{t^2-1}\right) \\ &= \frac{2t}{t^2-1} \end{aligned}$$

Resultando

$$F_i(t) = \frac{2t}{t^2-1} \tag{38}$$

Para finalizar, usando (29), la función $F(t)$ expresada en sus componentes par e impar es:

$$F(t) = \frac{t^2+1}{t^2-1} + \frac{2t}{t^2-1} \tag{39}$$

Para demostrarlo solo es cuestión de realizar la suma, desarrollar unos productos notables y factorizar, por tanto:

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{t^2+1}{t^2-1} + \frac{2t}{t^2-1} \\ &= \frac{t^2+2t+1}{t^2-1} \\ &= \frac{(t+1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(t+1)}(t-1)} \\ &= \frac{t+1}{t-1} \end{aligned}$$

Demostrando así que efectivamente (37) y (38) son las componentes par e impar de $F(t)$, respectivamente.

5. Identifique si la función periódica definida por $F(t) = |t|$ para $(-\pi,\ \pi)$ y $F(t) = F(t+2\pi)$, es par o impar. Dependiendo de su respuesta, calcule los coeficientes de Fourier que corresponda y encuentre su serie de Fourier.

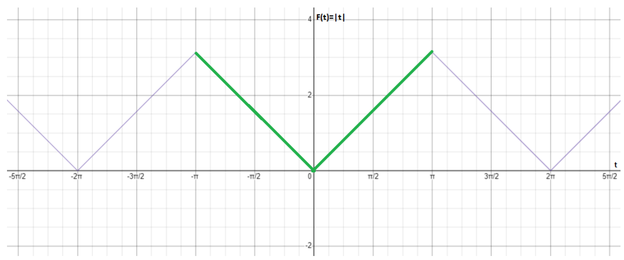

Figura 7: Gráfica de $F(t) = |t|$ entre $(-\pi,\ \pi)$ con periodo $T_f = 2\pi$

Solución:

La función $F(t) = |t|$ entre $(-\pi,\ \pi)$, también puede ser escrita como una función a trozos, de la forma

$$F(t) = \begin{cases} -t, & \text{si } -\pi \le t < 0 \\ t, & \text{si } \quad 0 \le t \le \pi \end{cases} \tag{40}$$

Y analizando la forma de la función basándose en la Figura 7, se puede ver que la función es **par**, lo que nos ahorra un cálculo, el cuál sería b_n, esto gracias a las siguientes relaciones:

Si $F(t)$ es par:

$$a_0 = \frac{4}{T_f}\int_0^{T_f/2} F(t)\, dt \tag{41}$$

$$a_n = \frac{4}{T_f}\int_0^{T_f/2} F(t)\cos(n\omega_f t)\ dt \tag{42}$$

y $b_n = 0$.

Por lo tanto, se puede hacer la serie de Fourier teniendo en cuenta solamente los coeficientes a_0 y a_n, y el límite de integración necesario. Teniendo $T_f = 2\pi$ y $\omega_f = 1$ la serie de Fourier resultaría:

Para a_0:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\cancel{4}}{\cancel{2}\pi}\int_0^{\cancel{2}\pi/\cancel{2}} F(t)\, dt \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\, dt \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{t^2}{2}\Big|_0^{\pi}\right) \\ &= \frac{\cancel{2}}{\cancel{\pi}}\left(\frac{\pi^{\cancel{2}}}{\cancel{2}}\right) \\ &= \pi \end{aligned}$$

Resultando

$$a_0 = \pi \tag{43}$$

Para a_n:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\cancel{4}}{\cancel{2}\pi}\int_0^{\cancel{2}\pi/\cancel{2}} F(t)\cos(nt)\ dt \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos(nt)\ dt \end{aligned}$$

Sustituyendo al usar integración por partes

$$\begin{aligned} u &= t & dv &= \cos(nt)\, dt \\ du &= dt & v &= \frac{1}{n}\sin(nt) \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\left[t\frac{1}{n}\sin(nt) - \int \frac{1}{n}\sin(nt)\ dt\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{t}{n}\sin(nt) - \frac{1}{n}\int \sin(nt)\ dt\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{t}{n}\sin(nt) - \frac{1}{n}\left(-\frac{1}{n}\cos(nt)\right)\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{t}{n}\sin(nt) + \frac{1}{n^2}\cos(nt)\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{nt\sin(nt) + \cos(nt)}{n^2}\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi}\cdot\left(\frac{n\pi\sin(n\pi) + \cos(n\pi)}{n^2}\right) - \\ &\quad \left(\frac{n(0)\sin(n(0)) + \cos(n(0))}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Ya que $\sin(n\pi) = \sin(0) = 0,\ \ \cos(n\pi) = (-1)^n$ y $\cos(0) = 1$,

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\right), \text{ tomando } n \text{ impar} \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{-2}{(2n-1)^2}\right) \\ &= -\frac{4}{(2n-1)^2\,\pi} \end{aligned}$$

Resultando

$$a_n = -\frac{4}{(2n-1)^2\,\pi} \tag{44}$$

Reemplazando (43) y (44) en la ecuación general para la serie trigonométrica de Fourier:

$$F(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((2n-1)\,t)}{(2n-1)^2} \tag{45}$$

La cual también puede ser escrita de la forma:

$$F(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{\text{impar}}^{\infty}\frac{\cos(nt)}{n^2} \tag{46}$$