Tarea 3: osciladores y ecuaciones diferenciales

Juan Sebastian Manrique Moreno

Ecuaciones diferenciales, Programa Académico de Física,
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Octubre de 2022

Ejercicio:

Suponga el siguiente sistema masa-resorte con 3 masas acopladas:

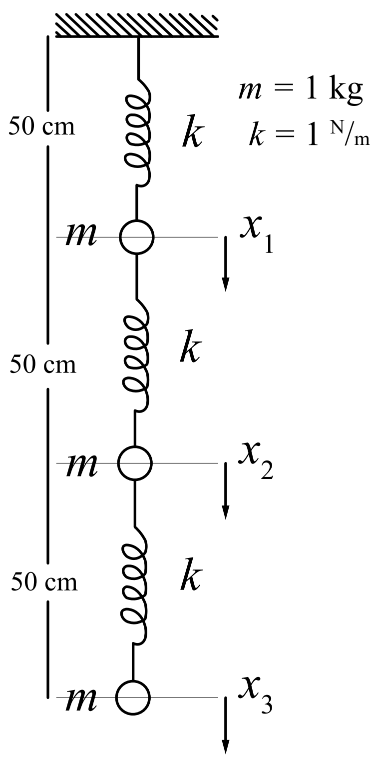

Figura 1: Sistema masa-resorte con 3 masas acopladas

Teniendo en cuenta la Figura 1:

1. Realizar el diagrama de cuerpo libre.
2. Plantear el sistema de ecuaciones diferenciales del sistema.
3. Organizar las ecuaciones y realizar las definiciones pertinentes.
4. Suponer soluciones especiales para el sistema de ecuaciones y reemplazarlas en el mismo.
5. Escribir la ecuación matricial para las frecuencias y amplitudes.
6. Encontrar las frecuencias de los modos normales del sistema (determinante de $W = 0$).
7. Encontrar las relaciones de amplitud para el sistema.

Solución:

1. El diagrama de cuerpo libre es:

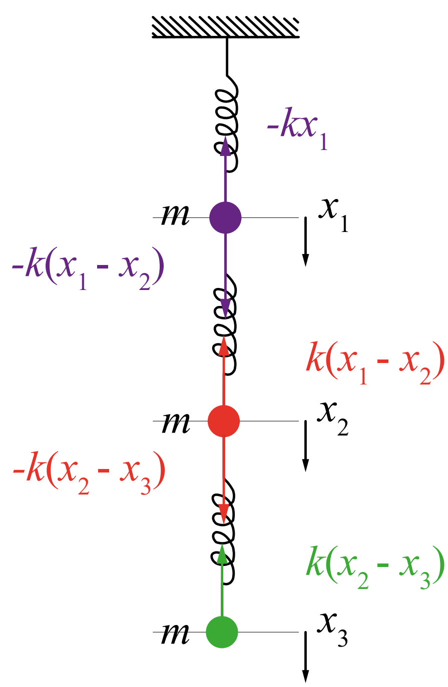

Figura 2: «Comentario figura»

2. Teniendo en cuenta la Figura 2, el sistema de ecuaciones diferenciales es:

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x_1}{dt^2} = -kx_1 - k(x_1 - x_2) \\ \\ m\dfrac{d^2x_2}{dt^2} = k(x_1 - x_2) - k(x_2 - x_3) \\ \\ m\dfrac{d^2x_3}{dt^2} = k(x_2 - x_3) \end{cases}$$

3. La cual se reescribe teniendo las ecuaciones diferenciales de la forma general, por tanto:

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x_1}{dt^2} + kx_1 + k(x_1 - x_2) = 0 \\ \\ m\dfrac{d^2x_2}{dt^2} - k(x_1 - x_2) + k(x_2 - x_3) = 0 \\ \\ m\dfrac{d^2x_3}{dt^2} - k(x_2 - x_3) = 0 \end{cases}$$

Ya que,

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

donde m es la masa y k la constante de elasticidad del resorte, podemos dividir las 3 ecuaciones diferenciales por m, de esta manera nos queda un sistema con ecuaciones diferenciales con soluciones conocidas y además en función de las frecuencias, sin embargo, conocemos valores para k y m por lo que conocemos el valor para ω_0^2, entonces:

$$\omega_0^2 = \frac{1\ \mathrm{N/m}}{1\ \mathrm{kg}} \Rightarrow \omega_0^2 = 1\ \mathrm{s}^{-2}$$

De esta manera, el sistema de ecuaciones diferenciales resulta:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x_1}{dt^2} + x_1 \cdot \mathrm{s}^{-2} + (x_1 - x_2) \cdot \mathrm{s}^{-2} = 0 \\ \\ \dfrac{d^2x_2}{dt^2} - (x_1 - x_2) \cdot \mathrm{s}^{-2} + (x_2 - x_3) \cdot \mathrm{s}^{-2} = 0 \\ \\ \dfrac{d^2x_3}{dt^2} - (x_2 - x_3) \cdot \mathrm{s}^{-2} = 0 \end{cases}$$

Se colocan las unidades para demostrar que existen las frecuencias inclusive si estas valen 1.

4. Debido a la forma de las ecuaciones diferenciales, ya conocemos sus soluciones generales, por tanto, esas mismas soluciones se van a suponer con tal suerte que satisfagan el sistema de ecuaciones.

La solución general es:

$$x^n = D_n \cos(\omega_n t + \delta_n) \tag{1}$$

De esta manera las soluciones especiales para las ecuaciones diferenciales son:

$$\begin{cases} x_1^n = D_{1n} \cos(\omega_n t + \delta_n) \\ \\ x_2^n = D_{2n} \cos(\omega_n t + \delta_n) \\ \\ x_3^n = D_{3n} \cos(\omega_n t + \delta_n) \end{cases}$$

Derivando dos veces (1) para comprobar si es solución, tomando $\mathscr{C} = \cos(\omega_n t + \delta_n)$:

$$\begin{aligned} x_1^n &= D_{1n}\mathscr{C}, & \ddot{x}_1^n &= -\omega_n^2 D_{1n}\mathscr{C} \\ x_2^n &= D_{2n}\mathscr{C}, & \ddot{x}_2^n &= -\omega_n^2 D_{2n}\mathscr{C} \\ x_3^n &= D_{3n}\mathscr{C}, & \ddot{x}_3^n &= -\omega_n^2 D_{3n}\mathscr{C} \end{aligned}$$

Reemplazando los valores para x en cada ecuación por separado donde ya conociendo las unidades para la frecuencia y sabiendo que está implícita no se colocará, resulta:

Para x_1^n:

$$\begin{aligned} \mathscr{C}\left[-\omega_n^2 D_{1n} + D_{1n} + (D_{1n} - D_{2n})\right] &= 0 \\ D_{1n}\left(2 - \omega_n^2\right) - D_{2n} &= 0 \end{aligned}$$

Para x_2^n:

$$\begin{aligned} \mathscr{C}\left[-\omega_n^2 D_{2n} - (D_{1n} - D_{2n}) + (D_{2n} - D_{3n})\right] &= 0 \\ -D_{1n} + D_{2n}\left(3 - \omega_n^2\right) - D_{3n} &= 0 \end{aligned}$$

Para x_3^n:

$$\begin{aligned} \mathscr{C}\left[-\omega_n^2 D_{3n} - (D_{2n} - D_{3n})\right] &= 0 \\ -D_{2n} + D_{3n}\left(1 - \omega_n^2\right) &= 0 \end{aligned}$$

Ya teniendo los valores reemplazados, se puede hallar la forma matricial de los resultados.

5. La forma matricial para el sistema de ecuaciones diferenciales es:

$$\begin{vmatrix} 2-\omega_n^2 & -1 & 0 \\ -1 & 3-\omega_n^2 & -1 \\ 0 & -1 & 1-\omega_n^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} D_{1n} \\ D_{2n} \\ D_{3n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Para que el sistema tenga solución, el determinante de la forma matricial mostrada debe ser igual a 0, por tanto:

$$\left(2-\omega_n^2\right)\left[\left(3-\omega_n^2\right)\left(1-\omega_n^2\right)-1\right]+\omega_n^2-1=0$$