Ley de Hooke

Introducción: Principios Fundamentales de la Elasticidad

La **Ley de Hooke** es un principio fundamental en el estudio de la elasticidad, formulado por *Robert Hooke* en 1678. Afirma que, dentro de ciertos límites (denominados *límite elástico*), la deformación de un material es directamente proporcional a la fuerza aplicada sobre él.

Hooke propuso este principio basándose en sus estudios de resortes, pero este comportamiento es común en una amplia gama de materiales elásticos, como los metales y algunos polímeros, siempre que no se exceda la *región elástica* del material. Una vez que un material supera este límite, entra en la *región plástica*, donde ya no se comporta elásticamente, es decir, no regresa a su forma original cuando se retira la fuerza.

Ley de Hooke: Expresión Matemática

La Ley de Hooke se expresa matemáticamente como:

$$F = -kx$$

Donde:

- F es la *fuerza restauradora* ejercida por el material elástico (en Newtons).
- k es la *constante elástica* o *constante del resorte* (en N/m), que depende del material y la geometría del objeto.
- x es la *deformación* o desplazamiento del material desde su posición de equilibrio (en metros).
- El signo negativo indica que la fuerza es opuesta al desplazamiento, es decir, es una *fuerza restauradora*.

La *constante elástica* k es un parámetro que varía dependiendo del material y su configuración. En los resortes, k es mayor cuando el resorte es más rígido y menor si es más flexible.

Energía Potencial Elástica

Cuando un objeto elástico, como un resorte, es estirado o comprimido, almacena energía en forma de *energía potencial elástica*. La cantidad de energía almacenada se calcula como:

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

Donde:

- U es la *energía potencial elástica* (en Joules).
- x es el desplazamiento o la deformación del resorte (en metros).
- k es la constante elástica del resorte.

Esta energía es la responsable de que el resorte pueda realizar trabajo al regresar a su posición original.

Relación entre Esfuerzo y Deformación: Generalización de la Ley de Hooke

La Ley de Hooke puede generalizarse más allá de los resortes a materiales elásticos tridimensionales. Para ello, se utiliza la relación entre el *esfuerzo* y la *deformación*. El *esfuerzo* (σ) es la fuerza aplicada por unidad de área, mientras que la *deformación* (ϵ) es el cambio relativo en la longitud del material.

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

Donde:

- σ es el esfuerzo (en Pascales o $\mathrm{N/m^2}$).
- E es el *módulo de Young*, una constante que describe la rigidez de un material.
- ϵ es la deformación (sin unidades).

El *módulo de Young* es un parámetro material que indica cuánto se deforma un material bajo la acción de una fuerza, y es el análogo del parámetro k en la Ley de Hooke para resortes.

Relación con las Ecuaciones Diferenciales de la Física

La Ley de Hooke y los sistemas elásticos tienen una profunda relación con las *ecuaciones diferenciales*. El análisis dinámico de un sistema masa-resorte bajo la influencia de una fuerza restauradora elástica se modela mediante la *ecuación diferencial del oscilador armónico simple*. Este sistema se rige por la segunda ley de Newton, que dice que la fuerza neta sobre un objeto es igual a la masa del objeto multiplicada por su aceleración:

$$F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Dado que la Ley de Hooke proporciona la fuerza restauradora como $F = -kx$, al sustituir en la ecuación de Newton obtenemos la ecuación diferencial del oscilador armónico:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

Esta es una *ecuación diferencial ordinaria* (EDO) de segundo orden, cuya solución describe el movimiento oscilatorio del sistema.

Solución de la Ecuación del Oscilador Armónico Simple

La solución general de la ecuación diferencial es una combinación de funciones senoidales y cosenoidales que describen el *movimiento armónico simple*:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

Donde:

- A es la *amplitud* de la oscilación (máximo desplazamiento desde el equilibrio).
- $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ es la *frecuencia angular* del sistema (en radianes por segundo).
- t es el tiempo (en segundos).
- ϕ es la *fase inicial*, que depende de las condiciones iniciales del sistema.

La frecuencia angular ω depende de la constante del resorte k y de la masa del objeto m, lo que refleja cómo sistemas con diferentes masas o resortes oscilan con frecuencias diferentes.

Sistemas Amortiguados y Forzados

En la práctica, muchos sistemas elásticos están sujetos a fuerzas de fricción o resistencias que disipan energía, lo que lleva al *oscilador armónico amortiguado*. La ecuación diferencial que describe un sistema con amortiguamiento se modifica para incluir un término proporcional a la velocidad del objeto:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Donde b es el coeficiente de amortiguamiento. Dependiendo del valor de b, el sistema puede estar *sobreamortiguado*, *subamortiguado* o *críticamente amortiguado*.

Además, si se aplica una fuerza externa periódica al sistema (como una fuerza que varía en el tiempo), la ecuación diferencial se convierte en:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_0\cos(\omega t)$$

Este es el *oscilador forzado*, cuya solución puede mostrar el fenómeno de *resonancia* cuando la frecuencia de la fuerza externa coincide con la frecuencia natural del sistema.