

Kwantyzacja

Kodowanie i kompresja danych - Wykład 8

Maciek Gębala

25 kwietnia 2022

Maciek Gębala Kwantyzacja

Kwantyzacja

Proces zastąpienia dużego zbioru wartości za pomocą znacznie mniejszego.

Dwa odwzorowania:

- **kodujące** – dzieli zbiór wartości na pewną liczbę podprzedziałów, każdy przedział reprezentowany przez inne słowo kodowe (proces nieodwracalny).
- **dekodujące** – na podstawie słowa kodowego zwraca wartość najlepiej reprezentującą kodowany przedział.

Strata dokładności danych ale ułatwione kompresowanie.

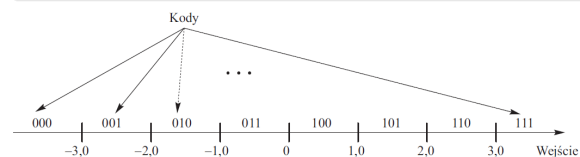
Maciek Gębala Kwantyzacja

Przykład

Dla źródła generującego liczby rzeczywiste z przedziału od -10 do 10 zastępujemy każdą liczbę jej zaokrągleniem do liczby całkowitej.

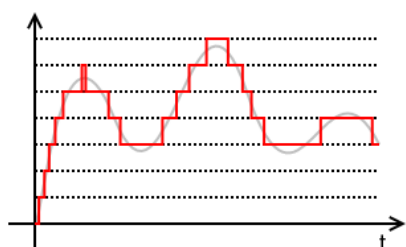
Redukcja nieskończonego alfabetu do 21 elementowego.

Kwantyzacja jednostajna – każdy przedział (poza dwoma skrajnymi) ma taką samą długość.



Maciek Gębala Kwantyzacja

Przykład



Maciek Gębala Kwantyzacja

Notatki

Notatki

Notatki

Notatki

- Kwantyzacja musi uwzględniać rodzaj danych - ich rozkład.
- Konstruując kwantyzację musimy uwzględnić rozkład danych tak aby przedstawiciele danych obejmowali mniej więcej równe zakresy danych.
- Szukamy optymalnych wartości granicznych przedziałów i poziomu rekonstrukcji (ilości przedziałów).

Przykład

- Jeśli w jednym z poprzednich przykładów 90% wartości pojawiałoby się w przedziale od -1 do 1 to zaokrąglenie do najbliższej liczby całkowitej nie byłoby właściwe.
- Dla przedziału od -1 do 1 lepiej by było zaokrąglić z dokładnością do 1/10 (o wiele mniejsza strata informacji).
- Dostajemy kwantyzację niejednostajną – różne długości przedziałów.

Miary kwantyzacji

Średniokwadratowy błąd kwantyzacji

Średnia z kwadratów różnic między wejściem kodera a wyjściem dekodera. Jeśli Q – operacja kwantyzacji i $Q(x) = y_i \iff b_{i-1} < x \leq b_i$ to

$$\begin{aligned}\sigma_q^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - Q(x))^2 f_X(x) dx \\ &= \sum_i \int_{b_{i-1}}^{b_i} (x - y_i)^2 f_X(x) dx\end{aligned}$$

Średnia bitowa kwantyzatora

Średnia liczba bitów potrzebna do reprezentowania jednej danej wynikowej kwantyzatora.

Rodzaje kwantyzatorów skalarnych

Kwantyzator równomierny

- Wszystkie przedziały (poza ewentualnie skrajnymi) mają taką samą długość.
- Również rekonstruowane wartości są rozmieszczone równomiernie.
- Stosowany najczęściej do rozkładów jednostajnych oraz obrazów (redukcja barw przez obcięcie najmniej znaczących bitów).

Kwantyzacja nierównomierna

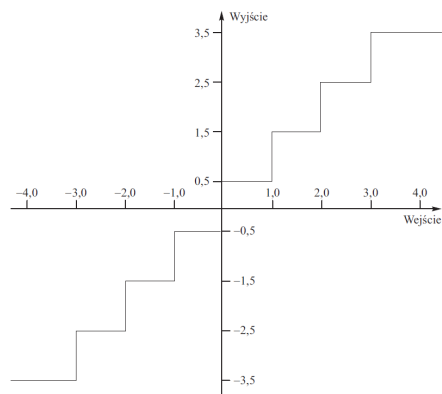
- Podział na przedziały w taki sposób aby każdy przedział miał podobne prawdopodobieństwo wystąpienia (przedziały mają różną długość).

Notatki

Notatki

Notatki

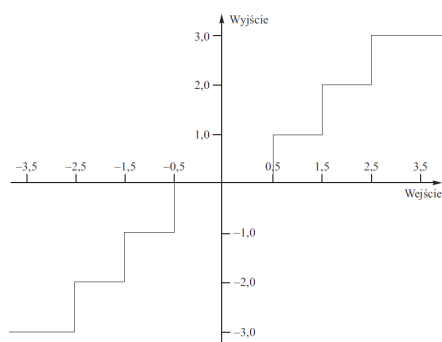
Kwantyzator ze skokiem w zerze (midrise quantizer)



Maciek Gębala Kwantyzacja

Notatki

Kwantyzator stały w zerze (midtread quantizer)

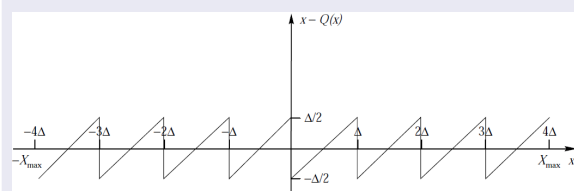


Maciek Gębala Kwantyzacja

Notatki

Kwantyzator równomierny, rozkład jednostajny

Dla kwantyzatora równomiernego i źródła jednostajnego błąd kwantyzacji możemy określić w następujący sposób:



gdzie $\Delta = \frac{2X_{\max}}{M}$ jest wielkością kroku kwantyzacji, a M liczbą przedziałów kwantyzacji.

Maciek Gębala Kwantyzacja

Notatki

Kwantyzator równomierny, rozkład jednostajny

Błąd kwantyzacji możemy obliczyć w następujący sposób (wykorzystując symetrię):

$$\sigma_q^2 = 2 \sum_{i=1}^{\frac{M}{2}} \int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} \left(x - \frac{2i-1}{2}\Delta \right) \frac{1}{2X_{\max}} dx.$$

Możemy także policzyć błąd badając różnicę $q = x - Q(x)$ (gdzie $Q(x)$ jest wartością rekonstrukcji dla x), wtedy:

$$\sigma_q^2 = \frac{1}{\Delta} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} q^2 dq = \frac{\Delta^2}{12}.$$

(obliczenia jako zadanie)

Maciek Gębala Kwantyzacja

Notatki

Kwantyzator równomierny, rozkład jednostajny

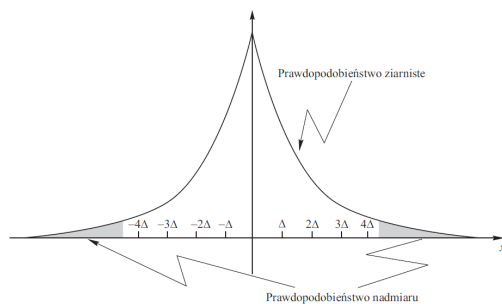
Jak wygląda SNR przy $\Delta = \frac{2X_{\max}}{M}$ i wariancji $\sigma^2 = \frac{2X_{\max}^2}{12}$ ($M = 2^n$)?

$$\begin{aligned} \text{SNR(dB)} &= 10 \log_{10} \frac{\sigma_s^2}{\sigma_q^2} \\ &= 10 \log_{10} M^2 \\ &= 20 \log_{10} 2^n \approx 6,02 \text{ dB} . \end{aligned}$$

Zatem dla każdego dodatkowego bitu kwantyzatora mamy wzrost SNR o 6,02 dB.

Maciek Gębala Kwantyzacja

Kwantyzator równomierny, rozkład niejednostajny



Maciek Gębala Kwantyzacja

Kwantyzator równomierny, rozkład niejednostajny

W przypadku kwantyzacji równomiernej dla danych o rozkładzie innym niż jednostajny można policzyć optymalną liczbę przedziałów kwantyzacji M oraz wielkość parametru Δ .

Zalety

Proste obliczenia (wystarczy wariancja), proste przetwarzanie (nie trzeba nawet pamiętać granic decyzyjnych).

Wady

Stosunkowo duży błąd kwantyzacji przy zadanej średniej bitowej, w sytuacji zmieniającego się (lub nieznanego) rozkładu dodatkowe problemy.

Rozwiązania problemu

- Kwantyzacja nierównomierna.
- Kwantyzacja z kompanderem (kiedy znamy rozkład).
- Kwantyzacja adaptacyjna (jeżeli rozkład się zmienia).

Maciek Gębala Kwantyzacja

Kwantyzator równomierny, rozkład niejednostajny

Jak wyznaczyć parametr Δ ?

Badamy ekstremum funkcji (f_X to funkcja gęstości rozkładu):

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= 2 \sum_{i=1}^{\frac{M}{2}-1} \int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} \left(x - \frac{2i-1}{2}\Delta\right)^2 f_X(x) dx \\ &\quad + 2 \int_{(\frac{M}{2}-1)\Delta}^{\infty} \left(x - \frac{M-1}{2}\Delta\right)^2 f_X(x) dx . \end{aligned}$$

Łatwo zauważyć, że jeden z członów odpowiada za błąd ziarnisty, a drugi za błąd nadmiaru.

Co się stanie jak wariancja nie będzie dobrze określona?

Maciek Gębala Kwantyzacja

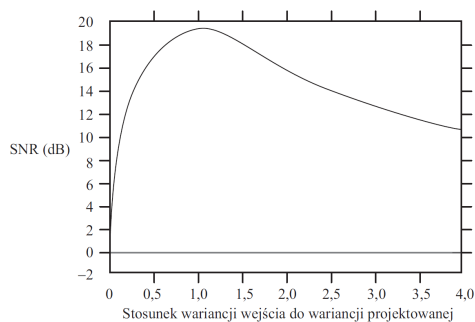
Notatki

Notatki

Notatki

Notatki

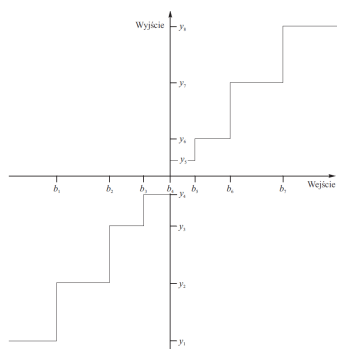
Kwantyzator równomierny, rozkład niejednostajny



Maciek Gębala Kwantyzacja

Notatki

Kwantyzator nierównomierny



Maciek Gębala Kwantyzacja

Notatki

Rodzaje kwantyzatorów skalarnych

Kwantyzacja adaptacyjna

- Dostosowanie kwantyzatora do statystyk danych wejściowych.
- Kwantyzacja adaptacyjna w przód – dane dzielone na bloki, bloki analizowane i kwantyzowane osobno, przesyłamy dodatkowe informacje o rodzaju kwantyzacji.
- Kwantyzacja adaptacyjna wstecz – dostosowujemy kwantyzację w oparciu o wyniki kwantyzatora (zmieniamy ilość i wielkość przedziałów kwantyzacji – kwantyzator Jayanta).

Maciek Gębala Kwantyzacja

Notatki

Kwantyzacja adaptacyjna w przód

- Zakładamy, że wartość średnia wejścia jest równa zero.
- Na podstawie bloku N kolejnych próbek (w chwili t) szacujemy wariancję źródła:

$$\hat{\sigma}_q^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_{t+i}^2.$$

- Przesyłamy (skwantyzowaną) informację o wariancji do dekodera.

Maciek Gębala Kwantyzacja

Notatki

Kwantyzacja adaptacyjna wstecz – kwantyzator Jayanta

- Do zmiany kwantyzatora wykorzystujemy wcześniejsze dane (w postaci skwantyzowanej).
- Każdy przedział ma przypisany mnożnik (M_k).
- Mnożniki przedziałów wewnętrznych < 1 a zewnętrznych > 1 .
- Jeżeli w kroku $n - 1$ próbka „wpadła” do przedziału $l(n - 1)$ to parametr Δ dla następnego kroku obliczamy jako:

$$\Delta_n = M_{l(n-1)} \Delta_{n-1} .$$

- Jeżeli wejście jest dobrze dopasowane, to iloczyn kolejnych współczynników powinien być równy jeden.

Maciek Gębala Kwantyzacja

Kwantyzacja z kompanderem

Problem

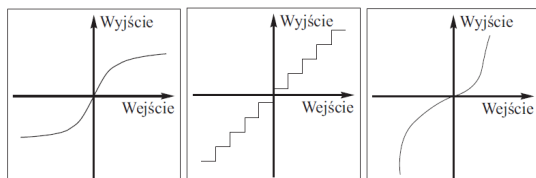
Znamy rozkład, ale chcemy uprościć proces kwantyzacji (kwantyzator jednostajny).

Rozwiązanie

- **Przed** kwantyzacją przekształcamy dane wejściowe za pomocą pewnej funkcji.
- **Po** rekonstrukcji przekształcamy wartości zrekonstruowane za pomocą funkcji odwrotnej.

Maciek Gębala Kwantyzacja

Kompresor, kwantyzator jednorodny i expander



Maciek Gębala Kwantyzacja

Notatki

Notatki

Notatki

Notatki