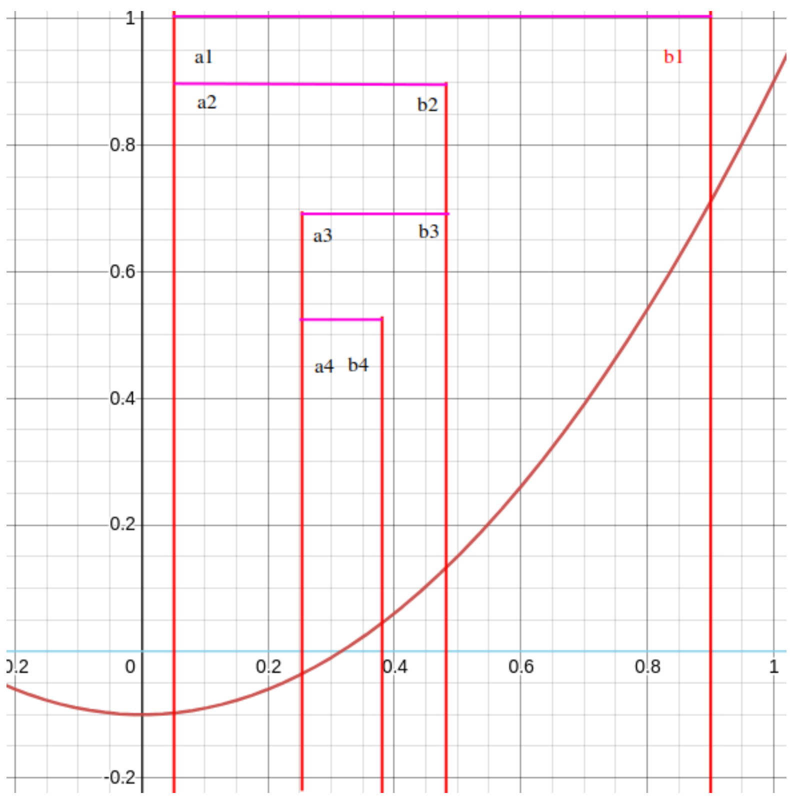
Obliczenia naukowe - lista 3

Jakub Sofiński

Listopad 2021

Zadanie 1

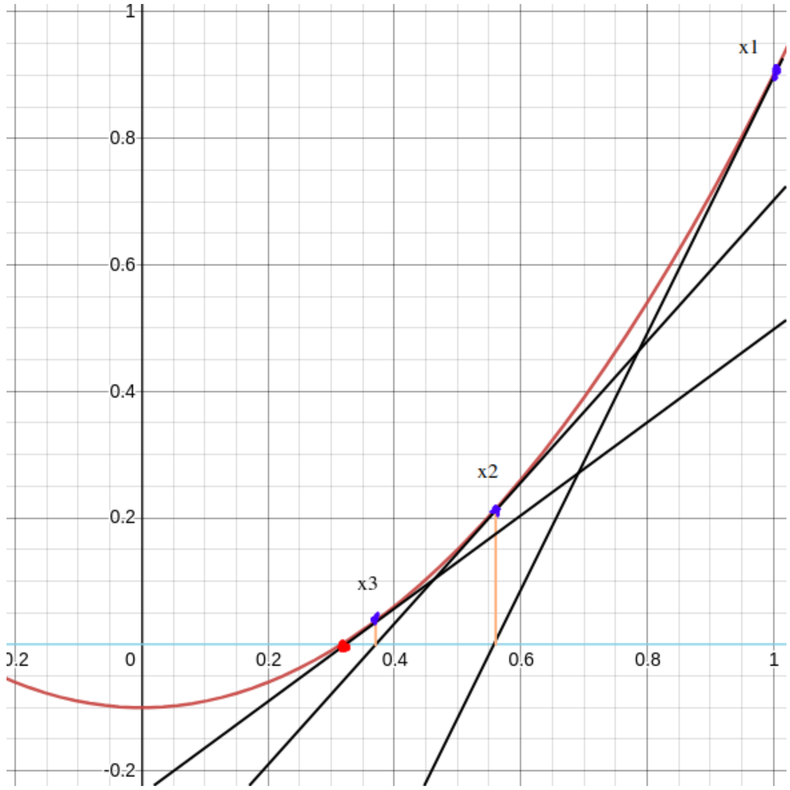
Algorymt bisekcji opiera się na f(a) * f(b) < 0, gdy istnieje miejsce zerowe między a i b. Z każdą kolejną iteracją wybieramy c = (a+b)/2 i sprawdzamy czy f(a) * f(c) < 0, jeśli tak to b = c, jeśli nie to a = c. Algorytm kończy działanie, gdy f(c) będzie wystarczająco blisko 0.



Funkcja	Przedział	Pierwiastek	Wartość	Iteracje
$a^2 - 4$	$0; 2$	2.0	0.0	0
$a^2 - 4$	$0; 2.1$	1.9999998807907107	$-4.7683714310409187e-7$	22

Zadanie 2

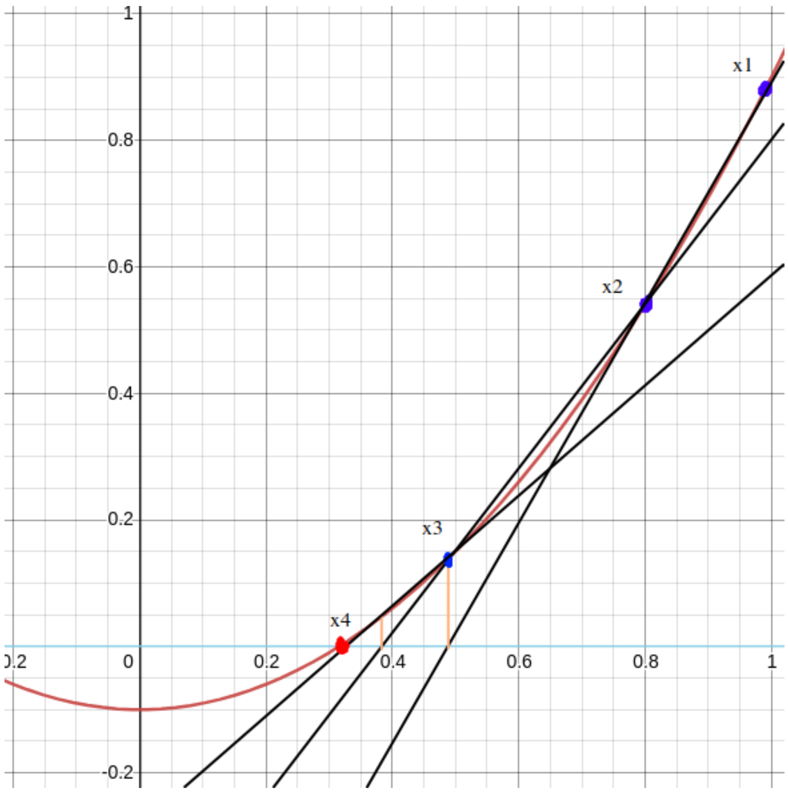
Algorytm Newtona polega na tworzeniu stycznych do danej funkcji w punkcie x, który jest przybliżeniem miejsca zerowego. Miejsca zerowe właśnie utworzonej stycznej jest kolejnym punktem x, dla którego znowu zostanie utworzona styczna. Algorytm zakończy działanie, gdy f(x) będzie wystarczająco blisko 0.



Funkcja	Przybliżenie początkowe	Pierwiastek	Wartość	Iteracje
$a^2 - 4$	2.1	2.000000000000501	$2.0037305148434825e - 12$	3
$a^2 - 4$	3.0	2.000000000026214	$1.0485656787295738e - 10$	4
$a^2 - 4$	5.0	2.000000000006711	$2.6844304557016585e - 11$	5
$a^2 - 4$	100.0	2.0000000050877156	$2.035086232865524e - 8$	9
$a^2 - 4$	10000.0	2.0000000000164926	$6.59703403016465e - 11$	16

Zadanie 3

Metoda siecznych działa podobnie do metody newtona, tylko tu tworzone są sieczne przechodzące przez dwa przybliżenia miejsca zerowego f(x1) i f(x2). Miejsce zerowe siecznej będzie kolejnym punktem x3, który posłuży do utworzenia kolejnej siecznej przechodzącej przez f(x2) i f(x3). Algorytm skończy działanie, gdy wartość funkcji w miejscu zerowym siecznej będzie wystarczająco bliskie 0.



Funkcja	Przybliżenia początkowe	Pierwiastek	Wartość	Iteracje
$a^2 - 4$	$-6.0; 2.0$	2.0	0.0	0
$a^2 - 4$	$-6.0; 1.9$	2.000000000502999	$2.011995903217212e - 9$	8
$a^2 - 4$	$-6.0; 2.1$	2.000000276204484	$1.1048180130757146e - 6$	4
$a^2 - 4$	$0.0; 3.0$	1.9999999967232	$-1.310719976999053e - 8$	7
$a^2 - 4$	$1.9; 2.1$	1.9999999598857707	$-1.6045691531019202e - 7$	3
$a^2 - 4$	$-1000.0; 100.0$	2.0000000004558043	$1.823217132823629e - 9$	14

Zadanie 4

Metoda	Pierwiastek	Wartość	Iteracje
Bisekcji	1.9337539672851562	$-2.7027680138402843e-7$	16
Newtona	1.933753779789742	$-2.2423316314856834e-8$	4
Siecznych	1.933753644474301	$1.564525129449379e-7$	4

Zadanie 5

Według Wolframu alpha funkcja ma 2 miejsca zerowa. Program znalazł oba:
(0.6190643310546875, 3.4790879874790903e-6, 16, 0)
(1.5121345520019531, -5.28692645218598e-10, 18, 0)
Szukałem miejsc zerowych dla $f(x) = 3x - e^x$, w ograniczonym przedziale (-10.0, 10.0) coraz to bardziej go dzieląc na mniejsze części, na których wykonywałem algorytm bisekcji.

Zadanie 6

$f_1(x) = e^{1-x} - 1$

Metoda	Pierwiastek	Wartość	Iteracje
Bisekcji(0; 1.5)	1.0000076293945312	$-7.6293654275305656e-6$	16
Newtona(0.1)	0.9999996022845382	$3.977155409451427e-7$	4
Siecznych(0.2; 0.3)	0.9999991918102031	$8.081901234913147e-7$	5

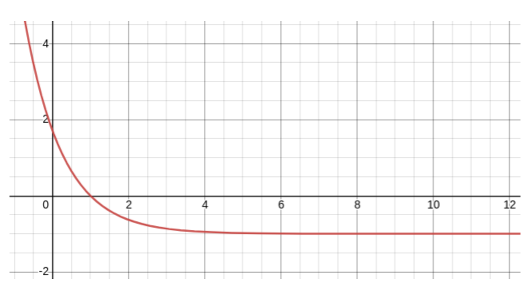
$f_2(x) = x * e^{-x}$

Metoda	Pierwiastek	Wartość	Iteracje
Bisekcji(-1.0; 1.1)	$-3.814697265582706e-6$	$-3.81471181752569e-6$	17
Newtona(0.1)	$-1.4906619716777104e-8$	$-1.490661993898442e-8$	3
Siecznych(-1.0; -0.8)	$-9.166075562136206e-6$	$-9.166159579462471e-6$	6

f_1 dla $x_0 \in (1; \infty]$:

x	Pierwiastek	Wartość	Iteracje
1.1	0.99999999991094	$8.905987058938081e-11$	3
2.0	0.9999999810061002	$1.8993900008368314e-8$	5
5.0	0.9999996427095682	$3.572904956339329e-7$	54
7.0	0.9999999484165362	$5.15834650549607e-8$	401
8.0	NaN	NaN	2

Dla coraz to większego x ilość wykonywanych iteracji drastycznie rośnie aż do momentu, w którym styczne do funkcji stają się równoległe do osi x. Wtedy algorytm Newtona nie jest w stanie znaleźć miejsca zerowego stycznej do funkcji.



f_2 dla $x_0 \geq 1$:

x	Pierwiastek	Wartość	Iteracje
1.01	102.00999999999992	$5.0846685549318855e-43$	1
1.1	14.272123938290509	$9.040322779745447e-6$	3
2.0	14.398662765680003	$8.036415344217211e-6$	10
10.0	14.380524159896261	$8.173205649825554e-6$	4
20.0	0.0	$4.122307244877116e-8$	0
100.0	0.0	$3.7200759760208363e-42$	0

Dla x0 większego od 1, styczne do funkcji zaczynają wskazywać duże wartośći dalekie od 0, których wartość jest na tyle bliska 0, że algorytm uznaje, że znalazł miejsce zerowe.
Dla jeszcze większych x, wartości są bardzo bliskie 0 oraz nie wykonują się żadne iteracje, ponieważ od razu wartość funkcji w danym x jest wystarczająco mała. Podane pierwiastki funkcji są równe 0, ponieważ nawet nie doszło do wyliczenia kolejnego punktu algorytmu.

f_2 dla $x_0 = 1$ otrzymujemy (Inf, NaN, 1, 0)
Funckja dla x=1 osiąga lokalne maksimum, więc styczna w tym miejscu będzie równoległa osi x ($f(1) = 1/e \approx 0.368$)