Métodos Numéricos

Guía 3

Interpolación y aproximación polinomial

Abril de 2023

Problema 1: Para las siguientes funciones $f(x)$, y siendo $x_0 = 0$, $x_1 = 0.6$ y $x_2 = 0.9$, construya analíticamente los polinomios interpolantes de Lagrange de grado 1 y 2 que aproximan la función en $x = 0.45$, y encuentre el error absoluto y relativo correspondiente.

a) $f(x) = \ln(x + 1)$

b) $f(x) = \sqrt{x + 1}$

Resuélvalo también numéricamente.

Grafique en un archivo postscript ambas funciones, sus polinomios interpolantes y la aproximación de Taylor de grado 2 (entorno a x_o) en el rango dado.

Problema 2: Escriba una subrutina que evalúe el polinomio interpolante de Lagrange de orden n en un punto x, con $x_0 < x < x_n$, siendo $(x_i, f(x_i))$ los puntos a interpolar. La subrutina debe tener el orden del polinomio, n, un arreglo de tamaño $n + 1$ con los valores de x_i, un arreglo de tamaño $n + 1$ con los valores de $f(x_i)$ y el valor de x donde se evaluará el polinomio, como argumentos de entrada. Finalmente, el valor del polinomio en x, $P(x)$, será el único argumento de salida.

Escriba un programa que utilice esta subrutina para evaluar los polinomios interpolantes de Lagrange de las funciones del problema 1, en $N = 200$ puntos equidistantes en el intervalo $[x_0, x_n]$, escribiendo los valores en un archivo. Grafique el polinomio y los pares $(x_i, f(x_i))$ (utilizados para interpolar), verificando el resultado. Compare además con la expresión analítica (como función en *gnuplot*) de los polinomios.

Problema 3: Se desea aproximar $\cos(x)$ en el intervalo $[0, 1]$ con un error absoluto menor a 1×10^{-7} para todo $x \in [0, 1]$. Usando el teorema del error de la interpolación polinomial, encuentre la cantidad mínima de puntos de interpolación. Verifique graficando (con *gnuplot*, guardando la gráfica en archivo *png*) el error absoluto en el intervalo para tres casos particulares de $\{x_i\}$.

Problema 4: Construya analíticamente el polinomio interpolante de Newton para las siguientes funciones. De una cota del error absoluto en el intervalo $[x_0, x_n]$.

a) $f(x) = \exp(2x)\cos(3x)$, $\quad x_0 = 0$, $x_1 = 0.3$, $x_2 = 0.6$, $n = 2$.

b) $f(x) = \ln(x)$, $\quad x_0 = 1$, $x_1 = 1.1$, $x_2 = 1.3$, $x_3 = 1.4$, $n = 3$.

Problema 5: Escriba una subrutina que evalúe el polinomio interpolante de Newton de orden n en un punto x, con $x_0 < x < x_n$, siendo $(x_i, f(x_i))$ los puntos a interpolar. La subrutina debe tener el orden del polinomio, n, un arreglo de tamaño $n + 1$ con los valores de x_i, un arreglo de tamaño $n + 1$ con los valores de $f(x_i)$ y el valor de x donde se evaluará el polinomio, como argumentos de entrada. Finalmente, el valor del polinomio en x, $P(x)$, será el único argumento de salida.

Escriba un programa que utilice esta subrutina para evaluar los polinomios interpolantes de Newton de las funciones del problema 4, en $N = 200$ puntos equidistantes en el intervalo $[x_0, x_n]$, escribiendo los valores en un archivo. Grafique el polinomio y los pares $(x_i, f(x_i))$ (utilizados para interpolar), verificando el resultado. Compare además con la expresión analítica (como función en *gnuplot*) de los polinomios.

Problema 6: Suponga que se conoce la función $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ en los puntos $x_i = -1 + (i-1)2/n$ para $i = 1, n+1$; que están dados en el intervalo $[-1, 1]$. Calcule la interpolación por el método de Lagrange para los valores de $n = 10, 20, 40$. Haga un gráfico en pantalla y en archivo, postscript o png en los rangos $x = [-1 : 1]$ e $y = [-1,5 : 1,5]$, conteniendo la función original y las tres interpolaciones evaluadas en 200 puntos equidistantes. Calcule el error máximo para cada caso e incluya estos datos de errores máximos en el gráfico.

Nota: En este problema se observa el llamado fenómeno de Runge, en el que la interpolación por polinomios usando puntos equiespaciados da resultados divergentes.

¿Por qué no hay contradicción con el teorema de aproximación de Weierstrass?

Pruebe también usando el espaciamiento de Chebyshev, en lugar de puntos equiespaciados. Los mismos están dados por la siguiente fórmula: $x_i = -cos(\pi(i-1)/n)$, para $i = 1, n+1$.

Hint:

- En el programa fortran puede grabar los errores máximos en un archivo, digamos:`datos/maximum-err-values.dat`
- En particular notar que el comando: `maxval(abs(err10))` da el valor máximo del valor absoluto del arreglo `err10`.

Ejercicios Complementarios

Problema 7: Dado el siguiente polinomio

$$p(x) = -10 + 5x - 12x^2 + 6x^3 - 2x^4 + x^5 \ ,$$

grafique el mismo utilizando *gnuplot* y observe que posee una única raíz real positiva, encuentre la misma utilizando El método de Newton-Raphson. Evalúe el polinomio y su derivada en una subrutina utilizando el algoritmo de Horner.

Problema 8: *Error de la interpolación polinomial para puntos equiespaciados:* Usando el teorema dado en el teórico, demuestre el siguiente

corolario: Sea $f(x)\varepsilon C^{(n+1)}_{[a,b]}$ tal que su derivada $n+1$ es acotada en $[a, b]$: $\exists M > 0/|f^{(n+1)}(x)| < M \ \forall x\varepsilon[a, b]$. Definimos $x_i = a + i$; $i = 0, \cdots, n$ donde $h = (b - a)/n$. Sea $P_n(x)$ es el polinomio interpolante a $f(x)$: $P_n(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \cdots, n$, entonces $\forall \ x\varepsilon[a, b]$ se tiene

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M}{4(n+1)} \left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1}$$