

Métodos Numéricos

Guía 4: Derivadas.

FORTTRAN

Problema 1: Sea $f(x) = xe^x$. Evalúe $f'(2)$ mediante la fórmula centrada de tres puntos

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$$

para distintos valores de h y calcule el incremento óptimo h_o teniendo en cuenta los errores de truncamiento y redondeo. Grafique el error (usando el valor exacto de la derivada) versus h (elija $h = 10^{-k}$, con k entero, y grafique usando escala *log-log*).

Problema 2: *Fórmula de la derivada numérica de 5 puntos:* Para funciones $f(x)$ que son suficientemente diferenciables en $x = c$

a) muestre que se puede aproximar $f'(c)$ con la fórmula centrada de 5 puntos como:

$$f'(c) = \frac{1}{12h} (f(c-2h) - 8f(c-h) + 8f(c+h) - f(c+2h)) + \mathcal{O}(h^4),$$

b) muestre que con esta fórmula se obtiene la derivada primera exacta para polinomios de grado ≤ 4 .

Problema 3: Use las fórmulas *hacia adelante*(orden 1), *centrado*(orden 2) y *de 5 puntos*(orden 4) para calcular las derivadas de $\cos x$ y e^x , en $x = 0.1, 1$, y 100 .

a) Escriba en archivo el valor de la derivada y el error relativo, E , en función de h . Elija valores del *paso* h entre 0.1 y ϵ_m .

b) Haga un gráfico *log-log* de E versus h , y verifique si el número de cifras decimales que obtiene coincide con las estimaciones hechas en el teórico.

c) Identifique las regiones donde domina el error del algoritmo y el error de redondeo, respectivamente. Las pendientes que se observan, corresponden a las predichas en el teórico?

Problema 4: En el archivo *pos.dat* (que se encuentra cerca de esta guía) se dispone de un conjunto de datos experimentales de la posición de un móvil que se desplaza en línea recta. El mismo tiene dos columnas, siendo la primera el tiempo de la medición, t_i y la segunda la posición, $x(t_i)$.

a) Escriba un programa que lea los datos del archivo y calcule la velocidad del móvil para los mismos tiempos, t_i . Utilice la fórmula de 3 puntos. Preste especial atención a los puntos de los bordes del intervalo.

b) Repita el punto a) utilizando las fórmulas de 5 puntos.

Ejercicios Complementarios

Problema 5: *Derivada segunda:* Deduzca la fórmula centrada equiespaciada de tres puntos para la derivada segunda $f''(x_0)$. Incluya una cota para el error absoluto.

Problema 6: *Interpolación y diferenciación:* Se conoce el valor de $f(x)$ en tres puntos x_0, x_1, x_2 . Escriba el polinomio interpolante $P_2(x)$ en la forma de Lagrange. Asuma que aproximamos $f'(x_i)$ por $P'_2(x_i)$,

- a) Muestre que si tomamos $x_0 = c - h$, $x_1 = c$, $x_2 = c + h$ obtenemos la expresión del algoritmo centrado de tres puntos para $f'(c)$.
- b) Muestre que, en general, esta aproximación arroja el algoritmo de tres puntos. Re-obtenga la fórmula dada en el teórico para $x_0 = c - h_1$, $x_1 = c$, $x_2 = c + h_2$. Obtenga una expresión para las derivadas en extremos del intervalo $[a, b]$, $f'(a)$ con $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, $x_2 = a + 2h$ y $f'(b)$ con $x_0 = b$, $x_1 = b - h$, $x_2 = b - 2h$.
- c) Generalice a 5 puntos y re-obtenga el algoritmo centrado y equiespaciado en este caso.