Métodos Numéricos

Guía 6: Ecuaciones diferenciales

FORTRAN

Problema 1: Escriba un programa que le permita resolver numéricamente el problema de valores iniciales de la forma,

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y), \qquad a \leq t \leq b, \qquad y(a) = \alpha$$

utilizando los métodos de Euler, Runge Kutta de 2° orden y Runge Kutta de 4° orden en el intervalo $a \leq t \leq b$ con un paso de integración h. El programa debe usar un módulo de precisión y un módulo que contenga tres subrutinas, una para el paso de integración de cada método, y la función f(t,y). Utilice una variable entera para seleccionar el método a utilizar, y de acuerdo a éste, el programa debe generar un archivo de salida (con nombre indicativo del método) con dos columnas separadas por 3 espacios, en formato exponencial, con 7 cifras significativas: $t_i = a + i\,h$ y la correspondiente aproximación w_i a la solución exacta $y(t_i)$.

Problema 2: Utilizando el programa realizado en el problema 1, resuelva con los tres métodos dados en el teórico (Euler, Runge Kutta de segundo orden y Runge Kutta de cuarto orden) el siguiente problema de valores iniciales:

$$\frac{dy}{dt} = -y + \sin(2\pi t), \qquad 0 \leq t \leq 1\ , \qquad y(0) = 1.0$$

en el intervalo $0 \leq t \leq 1$ con un paso de integración $h = 0.1$. Sabiendo que la solución exacta es:

$$y_e(t) = \Big(1 + \frac{2\pi}{1+4\pi^2}\Big)e^{-t} + \frac{\sin(2\pi t) - 2\pi\cos(2\pi t)}{1+4\pi^2},$$

modifique el programa de forma tal que calcule, para cada método, también el error absoluto a cada paso, $\epsilon(t) = |y(t) - y_e(t)|$. Usando gnuplot observe que su solución se aproxima a la solución exacta. Grafique $\epsilon(t)$ usando $h = 0.01$ y $h = 0.005$ para cada método (no olvide hacer gráficas completas, en color, con leyendas apropiadas, título, ejes y rangos adecuados que muestren claramente la conclusión del problema). Discuta los resultados.

Problema 3: Considere el problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dx} = \sin(y), \qquad 0 \leq t \leq 20.0, \qquad y(0) = \alpha$$

Resuélvalo para los siguientes valores iniciales $\alpha_1 = 0.5$, $\alpha_2 = 2.0$, $\alpha_3 = \pi$, $\alpha_4 = 3.6$ $\alpha_5 = 5.5$ y $\alpha_6 = 2\pi$, en todos los casos con $h = 0.1$. Para cada valor inicial genere un archivo de salida como el indicado en el problema 1 (sólo para RK4). Luego grafique simultáneamente las seis curvas aproximadas a las soluciones de los seis problemas de valores iniciales (no olvide hacer un gráfico de calidad, completo). Analice.

Problema 4: Considere el problema de valores iniciales para la ecuación de la dinámica de un péndulo simple de longitud l

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin(\theta), \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \frac{d\theta}{dt}(0) = \dot{\theta}_0,$$

donde g es la acelaración de la gravedad. Definiendo $u = \dot{\theta}$ esta ecuación de segundo orden se puede escribir como un sistema de dos ecuaciones de primer orden

$$\frac{d\theta}{dt} = u \tag{1}$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{g}{l}\sin(\theta) \tag{2}$$

mientras que las condiciones iniciales transformadas quedan $(u(0), \theta(0)) = (\dot{\theta}_0, \theta_0)$.

- **a)** Modifique la subrutina de Runge Kutta de 4° orden del problema 1 de forma tal que resuelva en general un sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas.
- **b)** Utilice este programa modificado para resolver ahora este sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas con $g = 10m/s^2$ y $l = 1m$. Ahora la salida debe ser un archivo de tres columnas t, $\theta(t)$ y $u(t)$.

c) Grafique θ vs. t, para $0 \leq t \leq 10$, con las siguientes condiciones iniciales: a) $u(0) = 0$ y $\theta(0) = 0.5$ y b) $u(0) = 0$ y $\theta(0) = 0.25$

d) Modifique el programa para que calcule la energía del sistema en cada paso, y la escriba en un archivo de salida. Para las condiciones del inciso anterior grafique la energía vs. t. Analice la conservación para distintos valores de h.

e) Para las condiciones iniciales $\theta(0) = \theta_0$, y $u(0) = 0$, y sólo cuando $\theta_0 \ll 1$, las ecuaciones de movimiento del péndulo se pueden aproximar por las siguientes:

$$\frac{d\theta}{dt} = u \tag{3}$$
$$\frac{du}{dt} = -\frac{g}{l}\theta. \tag{4}$$

Modifique el programa para resolver estas ecuaciones y compare con la solución exacta ($\theta(t) = \theta_0 \cos(\sqrt{10}t)$.) Para verificar esto graficar la diferencia $\theta(t) - \theta_0 \cos(\sqrt{10}t)$, para $0 \leq t \leq 10$, en los casos $\theta_0 = 1$ y $\theta_0 = 10^{-2}$. En los mismos gráficos comparar con la solución exacta del problema, i.e. con la solución numérica de las ecuaciones (1) y (2).

Problema 5: Considere el problema de estudiar la evolución de una epidemia, con el modelo SIR. Sea $S =$ población de individuos susceptibles, $I =$ población de individuos infectados y $R =$ población de individuos recuperados (que tienen inmunidad y no pueden volver a contagiarse). Entonces las ecuaciones diferenciales asociadas a la evolución temporal de dichas poblaciones son:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI/N \tag{5}$$
$$\frac{dI}{dt} = \beta SI/N - \gamma I \tag{6}$$
$$\frac{dR}{dt} = \gamma I \tag{7}$$

donde $N = S + I + R$ es la población total (constante).

a) Considere las condiciones iniciales: $N = 1000$, $I_0 = 10$, $R_0 = 0$ y los parámetros $\gamma = 0.1$ y $\beta = 0.5$.

b) Utilice el programa del problema 4 (runge Kutta de orden 4, para n ecuaciones diferenciales acopladas) para resolver este problema entre $t = 0$ y $t = 200$. Guarde el resultado en un archivo de salida con cuatro columnas: t, S, I y R.

c) Grafique la evolución temporal de las tres poblaciones.

Problemas complementarios

Problema 6: La llamada *ecuación logística*

$$\frac{dN}{dt} = r\,N\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

describe el crecimiento autolimitado de una población dada (suponiendo que no interactúa con otras especies y que tiene fuentes limitadas de alimentos). Fue propuesta por Verhulst en 1838 y permite describir al menos cualitativamente varios fenómenos poblacionales observados en la naturaleza. En esta ecuación $N(t)$ es el número de individuos de la colonia al tiempo t y K es una constante positiva.

Una solución N^* se dice estacionaria si se satisface que $dN^*/dt = 0$, y por ende no cambia en el tiempo. Para esta ecuación es fácil verificar que sólo existen dos soluciones estacionarias: $N_1^* = 0$ y $N_2^* = K$.

Determine cuál de las dos soluciones estacionarias es estable y cuál inestable resolviendo numéricamente la ecuación diferencial con el método Runge-Kutta de cuarto orden para $r = 2$, $K = 100$, en el intervalo $0 \leq t \leq 50$ con $h = 0.1$

y considerando cinco condiciones iniciales diferentes: a) $N(0) = 0$, b) $N(0) = 2$, c) $N(0) = 50$, d) $N(0) = 120$ y d) $N(0) = 200$. Grafique simultáneamente las cinco soluciones t vs. $N(t)$ en el intevalo $0 \leq t \leq 50$ en un gráfico completo.

Problema 7: Use el método del disparo para resolver los siguientes problemas de frontera con una tolerancia de 10^{-5}. Se da un valor tentativo inicial de h y la solución exacta para comparación.

a) $1 \leq t \leq 2$, comience con $h = 0.5$

$$\ddot{x} = -(\dot{x})^2 , \quad x(1) = 0 , \quad x(2) = \ln(2) .$$

Solución exacta $x = \ln(t)$.

b) $-1 \leq t \leq 0$, comience con $h = 0.25$

$$\ddot{x} = 2x^3 , \quad x(-1) = \frac{1}{2} , \quad x(0) = \frac{1}{3} .$$

Solución exacta $x = 1/(t + 3)$.

c) $1 \leq t \leq 2$, comience con $h = 0.05$

$$\ddot{x} = \frac{(t\,\dot{x})^2 - 9x^2 + 4t^6}{t^5}, \quad x(1) = 0 , \quad x(2) = \ln(256) .$$

Solución exacta $x = t^3 \ln(t)$.

Problema 8: *Método de Runge-Kutta de orden 4:* Muestre que la elección dada en el teórico para los pesos $\vec{b}$, los nodos $\vec{c}$ y la matriz $\mathbf{A}$ para el método RK4:

$$\vec{b} = (1/6, 1/3, 1/3, 1/6) \quad ; \quad \vec{c} = (0, 1/2, 1/2, 1) \quad ; \quad a_{2,1} = a_{3,2} = 1/2 \; ; \; a_{4,3} = 1$$

conduce a las ecuaciones RK4 "clásicas" dadas en clase.

Problema 9: Considere la siguiente ecuación diferencial

$$y'' = \frac{1}{8}\left(32 + 2x^3 - yy'\right) \qquad \text{para } 1 \leq x \leq 3$$

a) Utilice el método de Runge-Kutta de 4° orden en el intervalo $1 \leq x \leq 3$ para resolver esta ecuación con las condiciones iniciales $y(1) = 17$, $y'(1) = 0$. Encuentre, además $y'(3)$.

b) Repita el inciso anterior, pero con las condiciones iniciales $y(1) = 17$, $y'(1) = -40$.

c) Use ahora el método de disparo para resolver la misma ecuación diferencial con las condiciones de borde $y(1) = 17$, $y'(3) = 0$. Con la información de los incisos anteriores implemente un método de bisección con una tolerancia de 10^{-10}. Escriba en archivo el número de la iteración y el valor de la derivada en $x = 3$, y una vez encontrada la solución, en otro archivo, escriba x, e $y(x)$, para una grilla de 400 valores equiespaciados de x, entre 1 y 3. Grafique la convergencia y la solución.