数值分析第三次上机作业

宋歌 2015080086 数 52

11/16/2018

用 Jacobi 方法及 QR 算法计算矩阵特征值：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}_{10\times 10}$$

.

1 实验原理

1.1 Jacobi 方法

对 Hermite 阵 $\mathbf{A}$，用 Givens 矩阵 $\mathbf{J}$ 通过一系列正交相似变换，让其收敛于对角阵，则可得到其所有的特征值。由于 $\mathrm{tr}(\mathbf{A}\mathbf{A}^*) = ||\mathbf{A}||_F^2$，我们知道矩阵的 Frobenius 范数在酉相似变换 $\mathbf{B} = \mathbf{J}\mathbf{A}\mathbf{J}^{-1}$ 下不变，从而有 $||\mathbf{B}||_F^2 = ||\mathbf{A}||_F^2$，非对角元的平方和有如下关系：

$$N(\mathbf{B}) = ||\mathbf{B}||_F^2 - \sum_{i=1}^{n} |b_{ii}|^2 = ||\mathbf{A}||_F^2 - \sum_{i\neq k,l} |a_{ii}|^2 - |b_{kk}|^2 - |b_{ll}|^2 = N(A) + 2|b_{kl}|^2 - 2|a_{kl}|^2$$

已知 $\mathbf{J}$ 有如下形式：

$$\mathbf{J}(j,k;\theta) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & \cos\theta & & & & \sin\theta & & & \\ & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & \\ & & & -\sin\theta & & & & \cos\theta & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

该矩阵只对 $\mathbf{A}$ 的第 j,k 行进行了变换，变换后有：

$$\begin{cases} b_{ij}=a_{ij}(i\neq k,l;j\neq k,l) \\ b_{kk}=a_{kk}\cos^2\theta+a_{kl}\sin 2\theta+a_{ll}\sin^2\theta \\ b_{ll}=a_{kk}\sin^2\theta-a_{kl}\sin 2\theta+a_{kk}\cos^2\theta \\ b_{kl}=b_{lk}=a_{kl}\cos 2\theta+\frac{1}{2}(a_{ll}-a_{kk}\sin 2\theta) \\ b_{ik}=b_{ki}=a_{ik}\cos\theta+a_{il}\sin\theta(i\neq k,l) \\ b_{il}=b_{li}=-a_{ik}\sin\theta+a_{il}\cos\theta(i\neq k,l) \end{cases}$$

我们希望 $\mathbf{B}=\mathbf{JAJ}^{-1}$ 能向对角阵靠近，即希望 $N(\mathbf{B})$ 尽可能小，即让 $b_{kl}=0$，故可以进行如下操作：

$$a_{kk}\neq a_{ll}\rightarrow\tan 2\theta=\frac{2a_{kl}}{a_{kk}-a_{ll}}$$
$$a_{kk}=a_{ll}\rightarrow\cos 2\theta=0\rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}$$

因此，只要扫描 $\mathbf{A}$ 找到绝对值最大的非对角元 a_{kl}，用以上方法确定 $\mathbf{J}(k,l;\theta)$，然后做相似变换 $\mathbf{A}=\mathbf{JAJ}^{-1}$，如此下去，不断使非对角元的平方和尽可能的小，就可以得到最后的对角阵。

由于 $N(\mathbf{A})\leqslant(n^2-n)\max_{i\neq j}|a_{ij}|^2=(n^2-n)|a_{kl}|^2$，即 $|a_{kl}|^2=\max_{i\neq j}|a_{ij}|^2\geqslant\frac{N(\mathbf{A})}{n^2-n}$，我们可以得到:

$$N(\mathbf{B})=N(\mathbf{A})-2|a_{kl}|^2\leqslant qN(\mathbf{A})\Rightarrow N(\mathbf{A}^{(m+1)})\leqslant q^m N(\mathbf{A})\rightarrow 0$$

即 $\mathbf{A}^{(m)}$ 会收敛到对角阵。

1.2 QR 算法

已知 $\forall\mathbf{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$，存在一个酉矩阵 $\mathbf{Q}$ 和一个上三角阵 $\mathbf{R}$，使得 $\mathbf{A}=\mathbf{QR}$，若令 $\mathbf{B}=\mathbf{RQ}$，则有 $\mathbf{B}=\mathbf{Q}^*\mathbf{AQ}\Rightarrow\Lambda(\mathbf{A})=\Lambda(\mathbf{B})$. 不断重复上述过程，先做 QR 分解，再交换位置相乘，则可以得到矩阵系列 $\{\mathbf{A}_k\}_{k\geqslant 1}$. 若令 $\tilde{\mathbf{Q}}_k=\mathbf{Q}_1\ldots\mathbf{Q}_k$，$\tilde{\mathbf{R}}_k=\mathbf{R}_k\ldots\mathbf{R}_1$，则该序列满足：

$$\mathbf{A}_{k+1}=\tilde{\mathbf{Q}}_k^*\mathbf{A}\mathbf{Q}_k;\qquad\Lambda(\mathbf{A}_k)=\Lambda(\mathbf{A});\qquad\tilde{Q}_k\tilde{R}_k=\mathbf{A}^k$$

可以证明，对于任意的实方阵 $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$，若它有 n 个互异的非零特征值 $|\lambda_1|>\cdots>|\lambda_n|$，则上述 QR 算法产生的矩阵系列基本收敛到上三角阵：$\lim_{k\rightarrow\infty}a_{ii}^{(k)}=\lambda_i,i=1,\ldots,n.$

2 实验设计

先用 Matlab 自带的 eig(A) 函数计算得到 $\mathbf{A}$ 的特征值为：0.0810, 0.3175, 0.6903, 1.1692, 1.7154, 2.2846, 2.8308, 3.3097, 3.6825, 3.9190

2.1 Jacobi 方法

根据以上实验原理，先构造求矩阵绝对值最大的非对角元的函数，可以得到任意矩阵的绝对值最大非对角元的数值与位置。

```
function [value,r,c] = max_nd(A)
% find the nondiagonal entry with the largest absolute value
D = diag(diag(A));
UP = triu(A) - D;
LOW = tril(A) - D;
UPmax = max(max(abs(UP)));
LOWmax = max(max(abs(LOW)));
if UPmax >= LOWmax
    value = UPmax;
    [r,c] = find(UPmax == abs(UP));
else
    value = LOWmax;
    [r,c] = find(LOWmax == abs(LOW));
end
if size([r,c],1) > 1
    r = r(1); c = c(1);
end
end
```

Figure 1: 求矩阵绝对值最大的非对角元的函数

再构造已知 $\tan 2\theta$ 求出 $\sin\theta, \cos\theta$ 的函数 cs(tan2)。

```
function [cos1,sin1] = cs(tan2)
% use tan2x to compute cosx and sinx
cos2 = sqrt(1/(1 + tan2^2));
cos1 = sqrt((cos2 + 1)/2);
sin1 = sqrt(1 - cos1^2);
end
```

Figure 2: 由 $\tan 2\theta$ 求 $\sin\theta, \cos\theta$ 的函数

已知 $\cos\theta, \sin\theta$ 之后，就可以用如下函数 $\text{Givens}(j, k, cos1, sin1, n)$ 构造相应的 Givens 矩阵 $\mathbf{J}(j, k, \theta)$。

```matlab
function [J] = Givens(j,k,cos1,sin1,n)
J = eye(n);
J(j,j) = cos1;
J(j,k) = sin1;
J(k,j) = -sin1;
J(k,k) = cos1;
end
```

Figure 3: 生成 n 阶 Givens 矩阵 $\mathbf{J}(j,k,\theta)$ 的函数

最后，按照之前的实验原理，我们可以构造如下用 Jacobi 方法求矩阵特征值的函数 Jacobi($\mathbf{A}$).

```matlab
function [lambda] = Jacobi(A)
% use Jacobi method to compute the eigenvalues of A
tol = 1e-6; MAX_ITER = 10000; n = size(A,1);

for i = 1:MAX_ITER
    [a,k,l] = max_nd(A);
    if a < tol
        Out = A;
        lambda = sort(diag(Out));
        break;
    end

    if A(k,k) == A(l,l)
        theta = pi/4; cos1 = cos(theta); sin1 = sin(theta);
    else
        tan2 = (2*A(k,l))/(A(k,k)-A(l,l)); [cos1,sin1] = cs(tan2);
    end
    J = Givens(k,l,cos1,sin1,n); A = J * A * inv(J);
end
if i == MAX_ITER
    sprintf('Algorithm does not converge.')
end
end
```

Figure 4: 用 Jacobi 方法求矩阵特征值的函数

2.2 QR 算法

利用在 Jacobi 方法中构造的求矩阵绝对值最大非对角元的函数，以及 Matlab 自带的 QR 分解函数，按照之前的实验原理，可以构造如下用 QR 分解方法求矩阵特征值的函数。

```matlab
function [lambda] = QR_eig(A)
% use QR method to compute the eigenvalues of A
tol = 1e-6; MAX_ITER = 10000;

for i = 1:MAX_ITER
    [Q,R] = qr(A);
    A = R * Q;

    if max_nd(A) < tol
        Out = A;
        lambda = sort(diag(Out));
        break;
    end
end
end
```

Figure 5: 用 QR 分解方法求矩阵特征值的函数

3 结果与分析

3.1 实验结果

在有了以上函数之后，运行如下代码即可得到不同方法计算出的矩阵特征值。

```matlab
D = 2 * eye(10);
U = diag(-1 * ones(1,9),1);
L = diag(-1 * ones(1,9), -1);
A = D + U + L;

E = eig(A);
J = Jacobi(A);
Q = QR_eig(A);
```

Figure 6: 运行代码

用 eig(A) 函数计算得到 **A** 的特征值为：0.0810, 0.3175, 0.6903, 1.1692, 1.7154, 2.2846, 2.8308, 3.3097, 3.6825, 3.9190；

用 Jacobi 方法计算得到 **A** 的特征值为：0.0810, 0.3175, 0.6903, 1.1692, 1.7154, 2.2846, 2.8308, 3.3097, 3.6825, 3.9190；

用 QR 算法得到 **A** 的特征值为：0.0810, 0.3175, 0.6903, 1.1692, 1.7154, 2.2846, 2.8308, 3.3097, 3.6825, 3.9190；

可见 Jacobi 方法、QR 算法均收敛。

3.2 收敛性验证

显然 $\mathbf{A}$ 为 Hermite 阵，故 Jacobi 方法收敛。$\mathbf{A}$ 为实方阵，由 $\mathrm{eig}(\mathbf{A})$ 知道 $\mathbf{A}$ 有 10 个互异的非零特征值，故 QR 算法产生的矩阵系列基本收敛到上三角阵。