数值分析第四次上机作业

宋歌 2015080086 数 52

11/30/2018

设 $f(x)=\frac{1}{1+25x^2}, x\in[-1,1]$，取 $x_j=-1+\frac{2j}{n}, j=0,1,\dots,n$. 取适当的 $n=10,20\dots$，试求出 n 次 Lagrange 插值多项式 $L_n(x)$、分段线性插值函数 $I_1^h(x)$ 和三次样条插值函数 $S_3^h(x)$（采用自然边界），画出他们的图像，并对结果进行比较说明。

1 实验原理

1.1 Lagrange 插值

希望插值函数 $p_n(x)=\sum_{k=0}^n y_k l_k(x)$ 满足 $y_k=f(x_k)$，$l_k(x)$ 为线性无关的 n 次多项式且满足 $l_k(x_m)=\delta_{km}$，故取

$$l_k(x)=\prod_{i=0,i\neq k}^{n}\frac{x-x_i}{x_k-x_i}, k=0,1,\dots,n$$

可以证明，若被插值函数 $f(x)$ 的任意阶导数在区间 $[a,b]$ 上都有界，那么插值多项式 $L_n(f)$ 随着 $n\to\infty$ 会在无穷范数意义下收敛到 $f(x)$.

1.2 分段线性插值

把区间分为 n 小段 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，记 $h_k=x_k-x_{k-1}, h=\max_{1\leqslant k\leqslant n}h_k$. 我们希望找到一个函数 $I_h(x)$ 满足以下三个条件：

- $I_h(x)\in C(a,b)$;
- $I_h(x_j)=f(x_j), j=0,1,\dots,n$;
- $I_h|_{[x_k,x_{k+1}]}=f(x_k)\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}+f(x_{k+1})\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}$

故可以令 $I_h(x)=\sum_{j=0}^n f(x_j)\phi_j(x)$，其中

$$\phi_0(x)=\begin{cases}0, & x_1\leqslant x;\\ \frac{x-x_1}{x_0-x_1}, & x_0\leqslant x\leqslant x_1;\end{cases}\qquad \phi_n(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant x_{n-1};\\ \frac{x-x_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}, & x_{n-1}\leqslant x\leqslant x_n;\end{cases}$$

$$\phi_j(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant x_{j-1}\text{或}x\geqslant x_{j+1};\\ \frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}}, & x_{j-1}\leqslant x\leqslant x_j;\\ \frac{x-x_{j+1}}{x_j-x_{j+1}}, & x_j\leqslant x\leqslant x_{j+1}.\end{cases}\qquad j=1,2,\dots,n-1$$

可以证明，若 $f\in C[a,b]$，那么当 $h\to 0$ 时，分段线性插值函数 I_h 一致收敛到 f.

1.3 三次样条插值

我们希望找到一个函数 $S(x)$ 满足以下三个条件：

- $S(x) \in C^1[a,b]$;
- $S(x_j) = f(x_j), S'(x_j) = m_j = f'(x_j), j = 0,1,\dots,n$;
- $S|_{[x_k,x_{k+1}]} = f(x_k)\alpha_k(x) + f(x_{k+1})\alpha_{k+1}(x) + m_k\beta_k(x) + m_{k+1}\beta_{k+1}(x)$ 为三次多项式

故可以令

$$\alpha_j(x) = \begin{cases} 0, & \text{otherwise;} \\ (1+2\frac{x-x_j}{x_{j-1}-x_j})(\frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}})^2, & x_{j-1} \leqslant x \leqslant x_j; \\ (1+2\frac{x-x_j}{x_{j+1}-x_j})(\frac{x-x_{j+1}}{x_j-x_{j+1}})^2, & x_j \leqslant x \leqslant x_{j+1}. \end{cases} \quad \beta_j(x) = \begin{cases} 0, & \text{otherwise;} \\ (x-x_j)(\frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}})^2, & x_{j-1} \leqslant x \leqslant x_j; \\ (x-x_j)(\frac{x-x_{j+1}}{x_j-x_{j+1}})^2, & x_j \leqslant x \leqslant x_{j+1}. \end{cases}$$

从而有三次样条插值函数 $S(x) = \sum_{j=0}^{n}[f(x_j)\alpha_j(x) + m_j\beta_j(x)]$. 利用二阶导连续条件 $S''(x_j^-) = S''(x_j^+)$ 得到 $\lambda_j m_{j-1} + 2m_j + \mu_j m_{j+1} = g_j, j = 1,\dots,n-1$. 其中 $\lambda_j = \frac{h_{j+1}}{h_j+h_{j+1}}, \mu_j = 1-\lambda_j, g_j = 3\{\lambda_j f[x_{j-1},x_j] + \mu_j f[x_j,x_{j+1}]\}$. 再加上边界条件 $S'(x_0) = m_0, S'(x_n) = m_n$, 我们解以下方程即可得到 m_j.

$$\begin{bmatrix} 2 & \mu_1 & & & \\ \lambda_2 & 2 & \mu_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \mu_{n-2} \\ & & & \lambda_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 - \lambda_1 m_0 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{n-2} \\ g_{n-1} - \mu_{n-1} m_n \end{bmatrix}$$

设 $h_j = x_j - x_{j-1}, \bar{h} = \max_{1\leqslant j\leqslant n} h_j, \underline{h} = \min_{1\leqslant j\leqslant n} h_j$. 可以证明若在 $\bar{h} \to 0$ 时有 $\frac{\bar{h}}{\underline{h}} \leqslant C < +\infty$，那么在 I 型边界下的三次样条 $S(x)$ 一致收敛到 $f(x)$.

2 实验设计

将插值点 $x_j = -1 + \frac{2j}{n}, j = 0,1,\dots,n$ 存入向量 X，对应的函数值 $f(x_j), j = 0,1,\dots,n$ 存入向量 Y。然后根据上述实验原理，分别建立如下三个求 Lagrange 插值多项式、分段线性插值函数和三次样条插值函数的 MATLAB 函数。其中 Lagrange(X,Y) 输出的是形式上的多项式，peiceLin(X,Y,x) 和 spline3(X,Y,m_1,m_n,x) 是以 x 为自变量的函数。

2.1 Lagrange 插值

如图 1，可以在 MATLAB 中写出多项式 $l_k(x) = \prod_{i=0,i\neq k}^{n} \frac{x-x_i}{x_k-x_i}, k = 0,1,\dots,n$，从而得到插值多项式 $L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x)$.

```
function [L] = Lagrange(X,Y)
n = length(X);
L = ones(n,n);

for k = 1 : n
    P = 1;
    for i = 1 : n
        if k ~= i
            P = conv(P, poly(X(i)) / (X(k) - X(i)));
        end
    end
    l(k) = poly2sym(P);
end
L = Y * vec(l);
end
```

Figure 1: 求 Lagrange 插值多项式的函数

2.2 分段线性插值

如图 2，可以写出分段线性插值函数，满足 $I_h|_{[x_k,x_{k+1}]} = f(x_k)\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}} + f(x_{k+1})\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}$。

```
function [I] = pieceLin(X,Y,x)
n = length(X);
for k = 1:(n-1)
    if x >= X(k) && x <= X(k+1)
        I = Y(k)*(x - X(k+1))/(X(k) - X(k+1)) + ...
            Y(k+1)*(x - X(k))/(X(k+1) - X(k));
    else
        continue;
    end
end
end
```

Figure 2: 分段线性插值函数

2.3 三次样条插值

如图 3，可以写出三次样条插值函数，满足 $S|_{[x_k,x_{k+1}]} = f(x_k)\alpha_k(x) + f(x_{k+1})\alpha_{k+1}(x) + m_k\beta_k(x) + m_{k+1}\beta_{k+1}(x)$. 其中 m_j 由方程 $Am = b$ 解出。

```
function [S] = spline3(X,Y,m_1,m_n,x)
n = length(X); b = zeros(n-2,1);
for j = 2:n
    h(j) = X(j) - X(j-1);
end
for j = 2:n-1
    lambda(j) = h(j+1) / (h(j) + h(j+1)); mu(j)= 1 - lambda(j);
end
for j = 2:n-1
    g(j) = 3 * (lambda(j)*(Y(j) - Y(j-1))/(X(j) - X(j-1)) + mu(j)*(Y(j+1) - Y(j))/(X(j+1) - X(j)));
end
b(1) = g(2) - lambda(2)*m_1; b(n-2) = g(n-1) - mu(n-1)*m_n; b(2:n-3) = g(3:n-2);
A = 2 * eye(n-2) + diag(mu(2:n-2),1) + diag(lambda(3:n-1),-1); %生成三对角系数矩阵
m(2:n-1) = inv(A) * b; m(1) = m_1; m(n) = m_n; %解得m
for k = 1:n-1
    if x >= X(k) && x <= X(k+1)
        p = (x - X(k+1))^2/(h(k+1))^2; q = (x - X(k))^2/(h(k+1))^2;
        S = Y(k)*(1+2*(x - X(k))/h(k+1))*p + Y(k+1)*(1 - 2*(x-X(k+1))/h(k+1))*q +...
            m(k)*(x - X(k))*p + m(k+1)*(x-X(k+1))*q;
    else, continue;
    end
end
end
```

Figure 3: 三次样条插值函数

3 结果与分析

3.1 实验结果

将 X, Y 输入如上定义的三个函数当中并作图。其中 x 为 $[-1, 1]$ 之间均匀分布的 200 个点，X 为 n 个插值点。橙色曲线是在插值点 X 上拟合出的插值函数图像，蓝色曲线是在更加稠密的 x 上拟合出的插值函数图像。当 $n = 10$ 时，我们得到如图 4所示的结果。当 $n = 20$ 时，我们得到如图 5所示的结果。当 $n = 30$ 时，我们得到如图 6所示的结果。

可见随着插值点个数 n 的增加，插值逼近效果变好。Lagrange 插值多项式在插值点 X 上，即橙色曲线的逼近效果看似不错，但当选取 x 进行拟合时，可以看到 Lagrange 插值法在靠近区间端点的区域并不能很好地逼近原函数。三种方法中三次样条插值优于分段线性插值，分段线性插值优于 Langrange 插值。

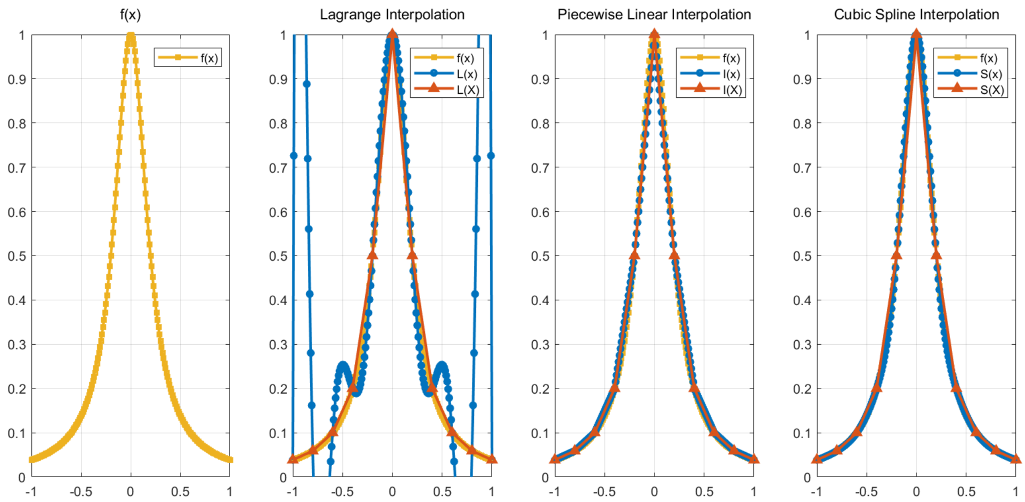

Figure 4: $n = 10$ 时原函数与各个插值函数在 $[-1, 1]$ 上的函数图像。

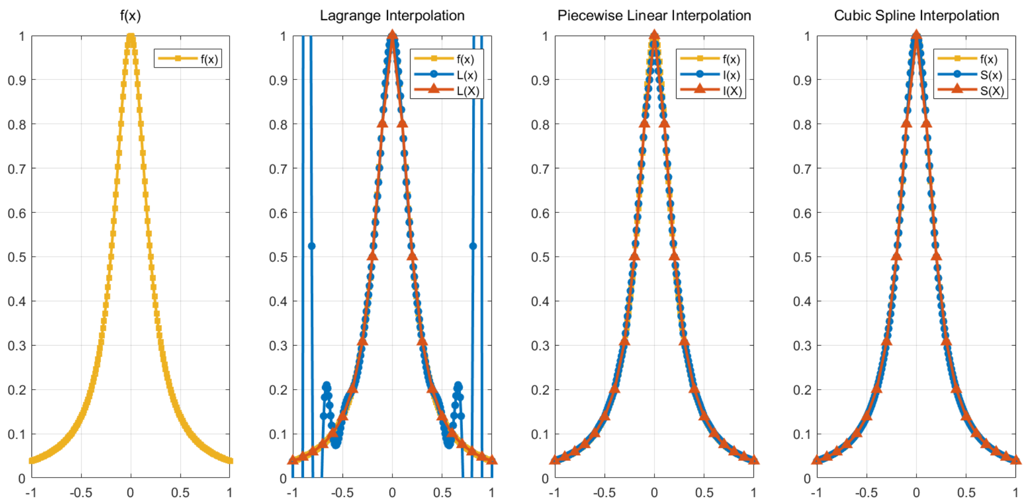

Figure 5: $n = 20$ 时原函数与各个插值函数在 $[-1, 1]$ 上的函数图像。

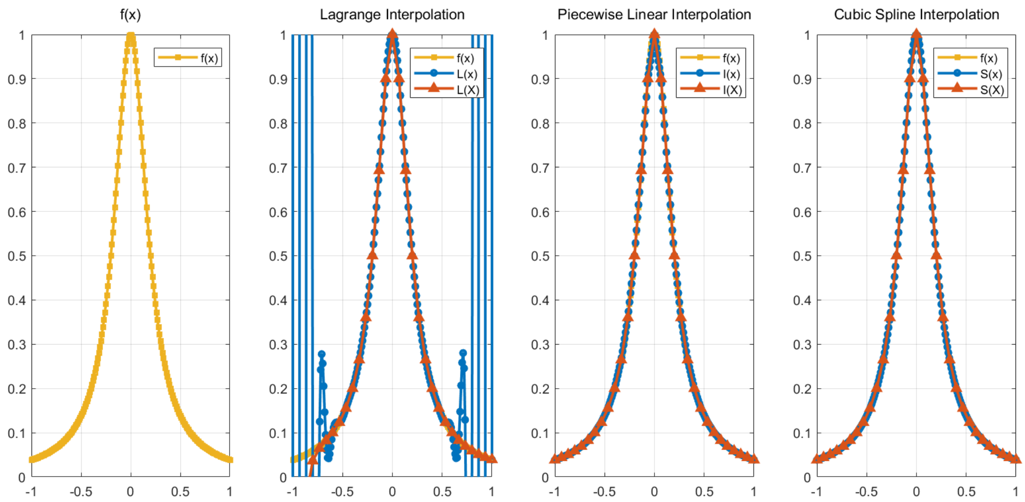

Figure 6: $n = 30$ 时原函数与各个插值函数在 $[-1, 1]$ 上的函数图像。

3.2 收敛性验证

函数 $f(x) = \frac{1}{1+25x^2} \in C^\infty[-1, 1]$，但 $||f^{(n)}||_\infty \to +\infty$，即 f 的各阶导数并不是一致有界的，从而不满足 Lagrange 插值多项式的收敛性条件。我们可以看到 n 增大时 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 的中间部分收敛得更好，但在靠近两端点处震荡得更加厉害了。

而分段低次插值可以克服这种高次插值的数值不稳定性。此题 f 连续，插值点个数 n 增加相当于 $h \to 0$，故分段线性插值函数会逐渐收敛到被插值原函数。

但分段线性函数光滑性不够好，故我们可以采用三次样条函数，即分段三次插值函数。此题中 $\bar{h} = \underline{h} = \frac{2}{n}$，故满足条件：在 $\bar{h} \to 0$ 时有 $\frac{\bar{h}}{\underline{h}} \leqslant C < +\infty$. 从而三次样条插值函数会逐渐一致收敛到被插值原函数。