数值分析第五次上机作业

宋歌 2015080086 数 52

12/15/2018

设 $f(x) = x^2\ln(2+x), x \in [-1,1]$, 试求出权函数 $\rho(x) = 1$ 的最佳平方逼近三次多项式。另外用 Tchebychev 截断级数的办法和插值余项极小化方法分别给出近似最佳一致逼近三次多项式。并画图比较。

1 实验原理

1.1 最佳平方逼近

设 $f \in L^2_\rho[a,b]$，设 $\{\varphi_j\}_{j=0}^n \subset L^2_\rho[a,b]$ 为线性无关函数，

$$L^2_\rho[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} |\ \|f\|_2 =< +\infty\}, \qquad \|f\|_2 = \left(\int_a^b \rho(x)|f(x)|^2\right)^{1/2}$$

若 $\exists S_n^* \in \mathcal{A} = \text{span}\{\varphi_0, \dots, \varphi_n\}, s.t. \|f - S_n^*\|_2 = \inf_{S\in\mathcal{A}} \|f - S\|_2$, 则称 S_n^* 为 f 在 $\mathcal{A}$ 中的最佳平方逼近函数。

令 $S_n^*(x) = \sum_{j=0}^n a_j^*\varphi_j(x)$，由极值条件可得关于 $(a_0, \dots, a_n)$ 的法方程

$$\sum_{j=0}^n a_j(\varphi_j, \varphi_k) = (f, \varphi_k), \quad k = 0, 1, \dots, n$$

由 $\{\varphi_j\}_{j=0}^n \subset L^2_\rho[a,b]$ 线性无关知该方程必存在唯一解，且可证明这样得到的 $S_n^*(x) = \sum_{j=0}^n a_j^*\varphi_j(x)$ 确实为最佳平方逼近。

我们用 Gram-Schmit 正交化方法构造 $[a,b]$ 上带权 $\rho(x)$ 的正交 n 次多项式，即

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \int_a^b \rho(x)\varphi_j(x)\varphi_k(x)dx = \begin{cases} 1, & j = k; \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

设 $\varphi_0(x) = C$, 由 $(\varphi_0, \varphi_0) = 1$ 得

$$C = \left(\int_a^b \rho(x)dx\right)^{-1/2}$$

为了满足 $(\psi_i, \varphi_j) = 0, j = 0, \dots, i-1$，令

$$\psi_i(x) = x^i + a_{i,i-1}\varphi_{i-1}(x) + \cdots + a_{i0}\varphi_0(x), \quad a_{ij} = -(x^i, \varphi_j), \quad j = 0, \dots i-1, \quad i = 1, \dots, n$$

再令 $\varphi_i = \frac{\psi_i}{\|\psi_i\|_2}$，便得到了待求的正交多项式序列 $\{\varphi_j\}_{j=0}^n$.

由正交多项式序列的性质，可以基于上述法方程进一步写出 $a_j^* = \frac{(f,\varphi_j)}{(\varphi_j,\varphi_j)}$，从而得到最佳平方逼近多项式 $S_n^*(x) = \sum_{j=0}^n a_j^*\varphi_j(x)$.

1.2 Tchebychev 截断级数

在 $[-1,1]$ 上，取权函数 $\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，可以得到 Tchebychev 正交多项式 $\{T_n\}_{n\geqslant 0}, T_n(x)=\cos(n\arccos x)$，从而得到最佳平方逼近：

$$S_n^*(x)=\sum_{j=0}^{n}\alpha_j T_j(x),\quad \alpha_j=\frac{(f,T_j)}{(T_j,T_j)},\quad (T_j,T_j)=\begin{cases}\pi, & j=0\\ \frac{\pi}{2}, & j\neq 0\end{cases}$$

可以证明

$$f(x)-S_n^*(x)=c_{n+1}T_{n+1}(x)+\mathcal{O}\left(\frac{1}{(n+1)^{r-1}}\right)$$

而 $T_{n+1}(x)$ 有 $n+2$ 个轮流正负 1 的极值点，因此 S_n^* 可以看成 $f(x)$ 的近似最佳一致逼近多项式。

1.3 Lagrange 插值余项极小化

我们已知 Lagrange 插值多项式 $L_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f(x_k)l_k(x)$，其中

$$l_k(x)=\prod_{i=0,i\neq k}^{n}\frac{x-x_i}{x_k-x_i}, k=0,1,\ldots,n$$

我们希望通过调整插值节点，构造好的插值多项式来得到最佳一致逼近，即希望能够极小化余项。已知

$$R_{n-1}(x)=f(x)-L_{n-1}(x)=\frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)\omega_n(x),\quad \omega_n(x)=\prod_{j=1}^{n}(x-x_j)$$

从而有

$$\|R_{n-1}\|_\infty\leqslant\frac{\|f^{(n)}\|_\infty}{n!}\|\omega_n\|_\infty$$

为了极小化 $\|\omega_n\|_\infty$，我们取 $\omega_n(x)=2^{1-n}T_n(x)$，即取插值节点为 $T_n(x)$ 的零点：

$$x_k=\cos\frac{2k-1}{2n}\pi,\quad k=1,\ldots,n$$

此时

$$\|R_{n-1}\|_\infty\leqslant\frac{\|f^{(n)}\|_\infty}{n!2^{n-1}}$$

即 $L_{n-1}(x)$ 可以看成 $f(x)$ 的一个近似最佳一致逼近。

2 实验设计

2.1 最佳平方逼近

根据以上实验原理，我们可以先写出如图 1的函数求带权 $\rho(x)$ 的内积，然后写出如图 2的函数通过 Gram-Schmit 方法求出正交多项式并最终得到函数 f 的 n 次最佳平方逼近多项式。

```
function [y] = innerP(f,g)
integrand = f .* g;
y = vpa(int(integrand,[-1 1]));
end
```

Figure 1: 带权内积

```matlab
function [S,P] = GS(f,n)
phi(1) = poly2sym([0,2^(-1/2)]);
astar = zeros(n+1,1); astar(1) = innerP(f,phi(1));
P(1) = phi(1); S = astar(1) * phi(1);

for i = 2:(n+1)
    temp1 = zeros(i,1); temp1(1) = 1; psi = 0;
    for j = 1:(i-1)
        a(i,j) = - innerP(poly2sym(temp1),phi(j));
        psi = psi + a(i,j) * phi(j);
    end
    psi = poly2sym(temp1) + psi;
    phi(i) = psi / sqrt(innerP(psi,psi));
    astar(i) = innerP(f,phi(i));
    S = S + astar(i) * phi(i);
end
P = phi(:);
end
```

Figure 2: 用 Gram-Schmit 求正交多项式，从而得到最佳平方逼近多项式

2.2 Tchebychev 截断级数

根据以上实验原理，我们可以得到如图 3的近似最佳一致逼近函数，X 是任意输入，Y 是该方法得到的最佳一致逼近函数作用在输入 X 上得到的函数值。

```matlab
function [Y] = Tcheb(X)
alpha = zeros(4,1);
fun1 = @(x)(x.^2 .* log(2+x))./sqrt(1 - x.^2);
alpha(1) = integral(fun1,-1,1)/pi;
Y = alpha(1);
for i = 2:4
    fun = @(x)(x.^2 .* log(2+x) .* cos((i-1) * acos(x)))./sqrt(1 - x.^2);
    alpha(i) = 2 * integral(fun,-1,1) / pi;
    Y = Y + alpha(i) * cos((i-1)*acos(X));
end
end
```

Figure 3: 用 Tchebychev 截断级数得到近似最佳一致逼近函数

2.3 Lagrange 插值余项极小化

如图 4，在之前的习题中已经得到了根据给定插值节点 X 以及在插值节点上的函数值 Y 求 Lagrange 插值多项式的函数。

```
function [L] = Lagrange(X,Y)
n = length(X);
L = ones(n,n);

for k = 1 : n
    P = 1;
    for i = 1 : n
        if k ~= i
            P = conv(P, poly(X(i)) / (X(k) - X(i)));
        end
    end
    l(k) = poly2sym(P);
end
L = Y * vec(l);
end
```

Figure 4: 求 Lagrange 插值多项式的函数

实验中我们只需令输入 X 为我们选取的插值节点 $x_k = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi, \quad k = 1, \ldots, n$ 即可。

3 结果与分析

我们运行如图 5的代码，就得到了在权函数 $\rho(x) = 1$ 下的最佳平方逼近多项式、在 Tchebychev 正交多项式下的最佳平方逼近函数，以及在插值余项极小化条件选取的插值节点下的 Lagrange 插值多项式。

```
f = @(x) x^2 * log(2+x);
x = -1:0.05:1;
y = x.^2 .* log(2+x);
y_T = zeros(length(x),1);

[S,P] = GS(f,3);

for i = 1:length(x)
    y_T(i) = Tcheb(x(i));
end

n = 4;
interX = zeros(1,n); interY = zeros(1,n);
for i = 1:n
    interX(i) = cos((2*i - 1)*pi/(2*n));
    interY(i) = f(interX(i));
end
L = Lagrange(interX,interY);
```

Figure 5: 实验主要部分代码

选取 $[-1, 1]$ 之间等距的 40 个点拟合作出各个函数图像，图 6反映了上述三种不同方法下的逼近结果。

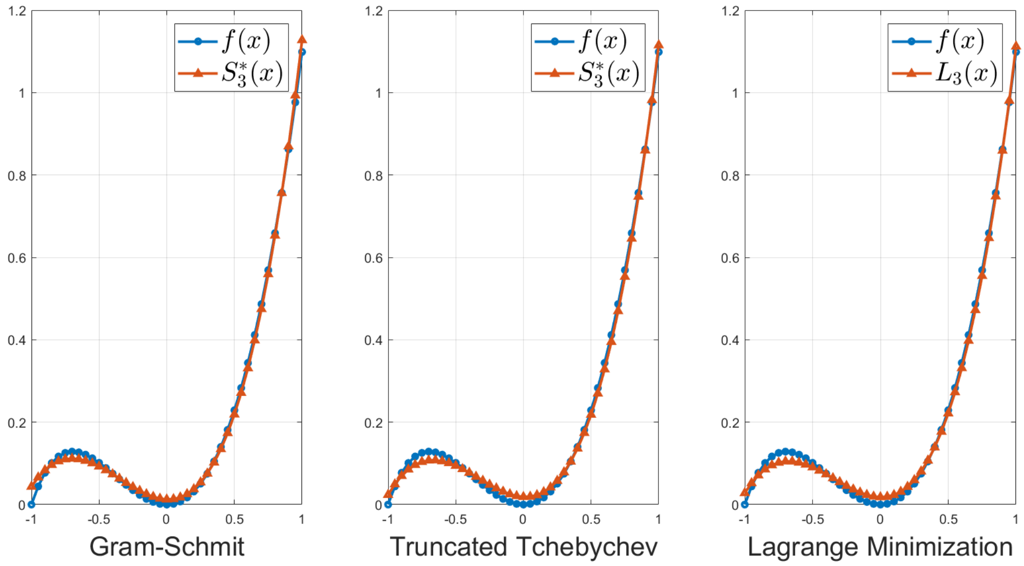

Figure 6: 图中蓝色线条表示原函数 $f(x)$，左图红线是在权函数 $\rho(x)=1$ 下用 Gram-Schmit 正交多项式得到的逼近函数，中间图红线是用 Tchebychev 截断级数方法得到的逼近函数，右图红线是在插值余项极小化方法下得到的 Lagrange 插值多项式。

可见三种方法都表现良好，其中第一种方法逼近程度最高。