Control Inteligente
Tarea 3

Jose Sebastian Osorio Espinosa,
David Vela Muñoz,
Cristian David Lavacude Galvis

Punto 1:

Presente un diagrama de bloques genérico para un sistema difuso basado en reglas. Indique el nombre y función de sus diferentes partes componentes.

El funcionamiento de un sistema que usa lógica difusa (FLS por sus siglas en inglés) se puede describir en tres etapas las cuales se muestran en la figura 1. La primera etapa se denomina **fusificación** y se encarga de recibir las señales de entrada y asociarles un determinado grado de pertenencia dadas las etiquetas lingüísticas que se han definido para la entrada del sistema.

La siguiente etapa se conoce como **inferencia** y es donde se relaciona las variables de entrada fusificadas con las variables de salida a través de una base de reglas definida por un experto y una vez asociadas se hace una agregación de las mismas con el fin de obtener una respuesta en formato difuso.

Por ultimo se tiene la etapa de **defusificación** la cual consiste en convertir la salida que se tiene en formato difuso en un valor concreto que se pueda entender mejor para aplicaciones prácticas. Para realizar este proceso se puede usar métodos como el *centro de masa* o el *mean-of-maxima*.

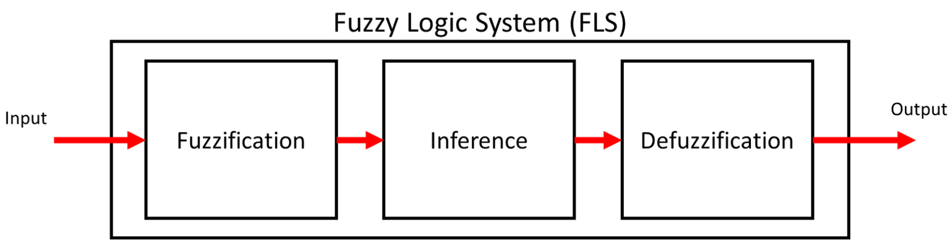


Figura 1: Diagrama de bloques de un FLS.

Punto 2:

Explique los pasos en el algoritmo de inferencia Mamdani (max-min) para un sistema difuso lingüístico con una entrada concreta (crisp) y una salida difusa (fuzzy). Aplique estos pasos a la base de reglas siguiente:

1. R^1: If x is A_1 then y is B_1
2. R^2: If x is A_2 then y is B_2

con conjuntos difusos

$$A_1 = \{0.1/1, 0.6/2, 1/3\} \qquad A_2 = \{0.9/1, 0.4/2, 0/3\}$$
$$B_1 = \{1/4, 1/5, 0.3/6\} \qquad B_2 = \{0.1/4, 0.9/5, 1/6\}$$

Defina la inferencia en términos de ecuaciones. Calcule el conjunto difuso de salida B' para $x = 2$.

Primero que todo **el algoritmo de inferencia Mamdani** (max-min) es el siguiente:

1. Calcular el grado de cumplimiento para cada regla de la siguiente manera:
   $\beta_i = \underset{x}{max}\ [\mu_{A^{\text{`}}}(x) \wedge \mu_{A_i}(x)]$, $1 \leq i \leq K$. Se debe tener en cuenta que para el caso de una entrada singelton, la ecuación para β_i se simplifica de la manera $\beta_i = \mu_{A_i}(x_o)$.
2. Obtener los conjuntos de salida difusos B_i': $\mu_{B_i'}(y) = \beta_i \wedge \mu_{B_i}(y)$, $y\ \varepsilon\ \boldsymbol{y},\ 1 \leq i \leq K$.
3. Unir los conjuntos de salida difusos $B_i^{'}$ de la siguiente manera: $\mu_{B'}(y) = \underset{1\leq i\leq K}{max}\ \mu_{B_i'}(y)$, $y\ \varepsilon\ \boldsymbol{y}$.

Tener en cuenta que para este algoritmo $A^{\text{`}}$ es el conjunto difuso de entrada, A_i y B_i se refieren a las funciones de transferencia de entrada y salida respectivamente.

Con esto en mente el desarrollo para calcular el conjunto difuso de salida $B^{'}$ para $x = 2$ (singelton) es el siguiente:

- Se calcula β_1 y β_2:

$$\beta_1 = \mu_{A_1}(2) = 0.6$$
$$\beta_2 = \mu_{A_2}(2) = 0.4$$

- Se obtiene los conjuntos de salida difusos $B_1^{'}$ y $B_2^{'}$:

$$B_1^{'} : \mu_{B_1'}(y) = \beta_1 \wedge \mu_{B_1}(y) = 0.6 \wedge [1, 1, 0.3] = [0.6, 0.6, 0.3]$$
$$B_2^{'} : \mu_{B_2'}(y) = \beta_2 \wedge \mu_{B_2}(y) = 0.4 \wedge [0.1, 0.9, 1] = [0.1, 0.4, 0.4]$$

- Para finalizar se unen los conjuntos de salida difusos $B_1^{'}$ y $B_2^{'}$ para calcular $B^{'}$ de la siguiente manera:

$$B^{'} = \mu_{B'}(y) = \underset{1\leq i\leq K}{max}\ \mu_{B_i'}(y) = max[B_1^{'}, B_2^{'}]$$
$$B^{'} = max([0.6, 0.6, 0.3], [0.1, 0.4, 0.4])$$
$$B^{'} = [0.6, 0.6, 0.4]$$

Punto 3:

Considere un modelo Takagi-Sugeno definido por las reglas siguientes:

1. R^1: If x is A_1 and y is B_1 then $z_1 = x + y + 1$
2. R^2: If x is A_2 and y is B_1 then $z_2 = 2x + y + 1$
3. R^3: If x is A_1 and y is B_2 then $z_3 = 2x + 3y$
4. R^4: If x is A_2 and y is B_2 then $z_4 = 2x + 5$

Escriba la fórmula para calcular la salida z y calcule el valor de z para $x = 1$, $y = 4$ con los conjuntos difusos del antecedente A_1, A_2, B_1, B_2 definidos en el numeral anterior.

$$z(x,y) = \frac{\sum_{i=1}^{k} \beta_i z_i}{\sum_{i=1}^{k} \beta_i}$$

La fórmula para calcular la salida z es:

$$z(x,y) = \frac{(\beta_1)(x+y+1) + (\beta_2)(2x+y+1) + (\beta_3)(2x+3y) + (\beta_4)(2x+5)}{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4}$$

Procedemos a calcular el grado de cumplimiento para la primera regla.

$$\beta_1 = \mu_{A_1}(x) \wedge \mu_{B_1}(y) = R_{min} = \begin{array}{cccc} & y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ x_2 & 0.6 & 0.6 & 0.3 \\ x_3 & 1 & 1 & 0.3 \end{array}$$

Procedemos a calcular el grado de cumplimiento para la segunda regla.

$$\beta_2 = \mu_{A_2}(x) \wedge \mu_{B_1}(y) = R_{min} = \begin{array}{cccc} & y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & 0.9 & 0.9 & 0.3 \\ x_2 & 0.4 & 0.4 & 0.3 \\ x_3 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Procedemos a calcular el grado de cumplimiento para la tercera regla.

$$\beta_3 = \mu_{A_1}(x) \wedge \mu_{B_2}(y) = R_{min} = \begin{array}{cccc} & y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ x_2 & 0.1 & 0.6 & 0.6 \\ x_3 & 0.1 & 0.9 & 1 \end{array}$$

Procedemos a calcular el grado de cumplimiento para la cuarta regla.

$$\beta_4 = \mu_{A_2}(x) \wedge \mu_{B_2}(y) = R_{min} = \begin{array}{cccc} & y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & 0.1 & 0.9 & 0.9 \\ x_2 & 0.1 & 0.4 & 0.4 \\ x_3 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Calculamos el valor de z para $x = 1$ y $y = 4$, en donde los grados de cumplimiento son:

$$\beta_1 = 0.1$$
$$\beta_2 = 0.9$$
$$\beta_3 = 0.1$$
$$\beta_4 = 0.1$$

$$z(1,4) = \frac{(0.1)(1+4+1) + (0.9)(2(1)+4+1) + (0.1)(2(1)+3(4)) + (0.1)(2(1)+5)}{0.1+0.9+0.1+0.1}$$

$$z(1,4) = \frac{(0.1)(6) + (0.9)(7) + (0.1)(14) + (0.1)(7)}{1.2} = 7.5$$

$$z(1,4) = 7.5$$

Punto 4:

Enumere los pasos que deben seguirse cuando se diseña un modelo difuso basado en conocimiento.

Los pasos a seguir en la construcción de un FLS son los siguientes:

1. Identificar cuales son las variables de entrada y de salida con las que se quiere abordar el problema, por ejemplo en el caso del taller anterior se decidió que a la entrada se tiene las variables salario y distancia y a la salida la conveniencia.

2. Definir cuales son las etiquetas lingüísticas que se van a utilizar para cada una de las variables. Continuando con el ejemplo las etiquetas usadas para la variable distancia son pequeña, media y grande.

3. Definir las funciones de pertenecía que se quieren utilizar para cada etiqueta, ya sean de tipo sigmoidal, trapezoidal, triangular, entre otras. En el caso del ejemplo se trabajó con funciones trapezoidales y triangulares.

4. Se crea la base de reglas relacionando las variables de la entrada y la salida procurando que a través de esta se describa de la mejor manera el problema. Una recomendación para el número de reglas es que se deben tener tantas reglas como combinaciones haya de las etiquetas lingüísticas de las variables de entrada.

5. Finalmente se debe decidir un método apropiado de defusificación con el cual se convierta la salida del sistema en un valor concreto que se pueda usar de forma práctica, algunos de los métodos mas conocidos son el *centro de masa* y el *mean of maxima*.

Punto 5:

Considere un sistema dinámico de la forma $y(k+1) = f(y(k), u(k))$, en donde la función f es desconocida. Supóngase que se desea aproximar f mediante un sistema difuso singleton.

a) Dé un ejemplo de un modelo difuso singleton para aproximar este sistema. Defina un número razonable de reglas colocando su forma general. Use tres funciones de pertenencia por entrada.

   Un modelo difuzo singelton que pueda aproximar este sistema puede consistir de reglas que tienen la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{R_i}: \ & \textbf{If } \ y(k) \ \textit{is} \ A_{i1} \ \textbf{and} \ y(k-1) \ \textit{is} \ A_{i2} \ \textbf{and} \ \ldots \ y(k-n+1) \ \textit{is} \ A_{in} \\
& \textbf{and } \ u(k) \ \textit{is} \ B_{i1} \ \textbf{and} \ u(k-1) \ \textit{is} \ B_{i2} \ \textbf{and} \ \ldots \ u(k-m+1) \ \textit{is} \ B_{im} \\
& \textbf{then } \ y(k+1) \ \textit{is} \ c_i.
\end{aligned}
$$

   En este modelo se tiene en cuenta que tanto m como n, representan el ordenes de entrada y salida respectivamente, los cuales reflejan que tantos datos pasados se quieren tener en cuenta para el desarrollo de las reglas.

En el caso de que se empleen tres funciones de pertenecía por entrada, en las cuales $\mathbf{A_1}$ $\mathbf{A_2}$ $\mathbf{A_3}$ corresponderían a la salida y(k) mientras que $\mathbf{B_1}$ $\mathbf{B_2}$ $\mathbf{B_3}$ a la entrada u(k).

Con el objetivo de definir un numero de reglas *mínimo*, se decide emplear ordenes unitarios de entrada y de salida ($m = 1$ y $n = 1$), con lo cual se desarrollarían *9 reglas* las cuales serian las siguientes:

- **If** y(k) is A_1 **and** u(k) is B_1 **then** y(k+1) is c_1
- **If** y(k) is A_1 **and** u(k) is B_2 **then** y(k+1) is c_2
- **If** y(k) is A_1 **and** u(k) is B_3 **then** y(k+1) is c_3
- **If** y(k) is A_2 **and** u(k) is B_1 **then** y(k+1) is c_4
- **If** y(k) is A_2 **and** u(k) is B_2 **then** y(k+1) is c_5
- **If** y(k) is A_2 **and** u(k) is B_3 **then** y(k+1) is c_6
- **If** y(k) is A_3 **and** u(k) is B_1 **then** y(k+1) is c_7
- **If** y(k) is A_3 **and** u(k) is B_2 **then** y(k+1) is c_8
- **If** y(k) is A_3 **and** u(k) is B_3 **then** y(k+1) is c_9

Se debe tener en cuenta que con cada orden que se aumente ya sea en la entrada y la salida el numero de reglas va aumentar de la misma manera, por ejemplo, si se emplea un orden de entrada $m = 2$ y uno de salida $n = 2$ el modelo necesitaría un total de *81 reglas*, para el caso de de un tercer orden se necesitarían *729 reglas*. Para estos cálculos se emplea la siguiente formula:

$$\#\ Reglas = 3^{n+m}$$

Vale la pena resaltar, que esta formula se usaría solo en este caso particular, donde tanto entrada como salida tienen tres funciones de pertenecía.

b) Cuáles son los parámetros libres en este modelo?

Los parámetros libres son n y m, ya que al decidir los ordenes de entrada y salida estos se relaciona directamente con el numero de reglas necesarios y también con la complejidad de las mismas, a mayor orden, el sistema tiene que tener en cuenta un mayor numero de reglas, aumentando los recursos computacionales.

Punto 6:

Provea una ecuación general para un modelo dinámico del tipo NARX (Nonlinear AutoRegressive with eXogenous input) para un sistema SISO que tenga en cuenta los órdenes de entrada (n_u), salida (n_y) y tiempo muerto (n_d). Explique todos los símbolos de la ecuación. Dé un ejemplo de algún modelo NARX reportado en la literatura académica y/o científica indicando la(s) referencia(s) consultadas.

Para representar matemáticamente un sistema dinámico del tipo NARX de acuerdo con las notas de curso la forma mas común de hacerlo es por medio de la siguiente ecuación:

$$y(k) = f(y(k-1), (y(k-2), ..., y(k-n_y), u(k-1), u(k-2), ..., u(k-n_u))$$

Lo que este expresión quiere decir que la salida y en el instante k es función de la ella misma y de la entrada u en momentos anteriores. Esta se puede modificar para encontrar la salida en el instante $k+1$:

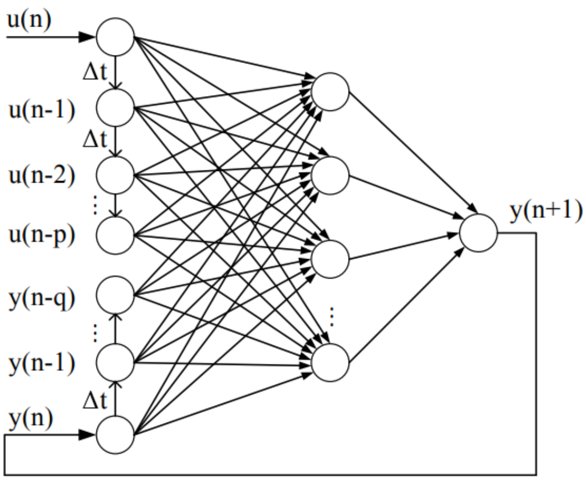
$$y(k+1) = f(y(k), (y(k-1), ..., y(k-n_y+1), u(k), u(k-1), ..., u(k-n_u+1))$$

Dentro de esta ecuación se encuentran dos parámetros que son n_y y n_u los cuales representan los instantes de tiempo atrás que se desea tener en cuneta para hallar la salida en el instante $k+1$ para las variables y y u respectivamente. A medida que aumenta la complejidad del sistema es necesario incrementar los parámetros n_y y n_u.

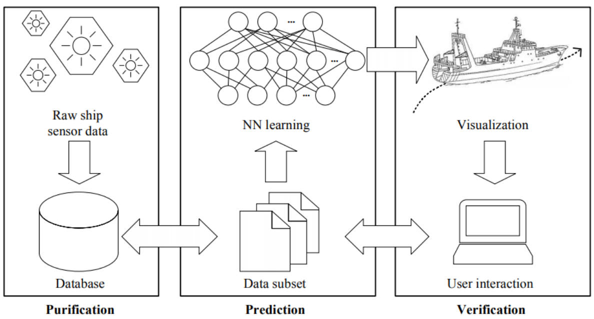
En este tipo de sistemas es necesario tener en cuenta otro parámetro n_d que corresponde a el tiempo muerto, el cual representa un retraso en el momento en el que se toma la señal para compensar el tiempo de reacción del sistema. Al integrar este parámetro en la ecuación del modelo NARX se obtiene lo siguiente:

$$y(k+1) = f(y(k-n_d), (y(k-1-n_d), ..., y(k-n_y-n_d+1), u(k-n_d), u(k-1-n_d), ..., u(k-n_u-n_d+1))$$

Los modelos NARX tienen muchas aplicaciones en la literatura con en el caso de [2] en el cual se utiliza un modelo no lineal autor regresivo para realizar implementado a una red neuronal con el fin de hacer predicciones sobre el movimiento de los barcos (figura 2(a) y 2(b)).



(a) Modelo NARX (ANN).[2]



(b) Diagrama de sistema para predecir movimiento de barcos.[2]

Figura 2: Cálculo de tiempo crítico para falla en el nodo 5 despejando la línea 5.

Punto 7:

a) Explique qué significa el término modelado "semi-mecanístico" (híbrido).

Un modelado semi-mecanístico emplea algún conocimiento físico del sistema en donde se pueden involucrar transformaciones no lineales de las señales medidas. El modelo al usar regresores no lineales en modelos no lineales elimina esfuerzos innecesarios en reglas, parámetros, etc. Ya que no es necesario estimar hechos que ya se conocen.

El modelado semi-mecanístico puede emplear la combinación de los modelos de caja blanca y caja negra. En donde las tareas del modelado se pueden dividir en dos: la primera es un modelado del mecanismo que se conoce y que abarca las no linealidades, y una segunda tarea de modelado con una aproximación de relaciones parcialmente conocidas en donde las incógnitas serán menos complejas.

b) Para tal modelo, qué se entiende por "selección de estructura" y "estimación de parámetros"?

- Selección de estructura: La estructura determina la flexibilidad del modelo en la aproximación de los mapeos (desconocidos). Un modelo con una estructura rica es capaz de aproximar funciones más complicadas, pero tiene deficientes propiedades de generalización, por lo que no funcionara bien en otro conjunto de datos.

  En el modelo semi-mecanístico mejoras las propiedades de generalización de la estructura manteniendo la riqueza de la estructura. El mapeo se puede aproximar mejor cuando se tiene algún conocimiento previo del sistema, ya que se tiene menos datos desconocidos.

- Estimación de parámetros: Los parámetros de una estructura (funciones de pertenencia, singleton consecuentes o parámetros de los consecuentes TS) se pueden ajustar utilizando datos de entrada-salida. Los parámetros se ajustan (estiman) a los datos disponibles, por lo tanto cuando el conocimiento disponible aumente (Modelo semi-mecanicista) existirá una mejor estimación de parámetros.

c) Para el caso de modelos difusos, enuncie los diferentes aspectos que deben tenerse en cuenta para la selección de estructura.

En modelos difusos, la selección de estructura implica las siguientes opciones:

- Variables de entrada y salida: En el caso de sistemas dinámicos se debe estimar el orden del sistema. El conocimiento previo, la comprensión del comportamiento del proceso y el propósito del modelado son las fuentes usuales de información para esta elección.

- Estructura de las reglas: Esta elección involucra el tipo de modelo (lingüístico, singleton, relacional, Takagi-Sugeno) y la forma del antecedente. Los aspectos importantes son el propósito del modelado y el tipo de conocimiento disponible.

- Número y tipo de funciones de pertenencia para cada variable: Esta elección determina el nivel de detalle (granularidad) del modelo. El propósito del modelado y el detalle del conocimiento disponible influirán en esta elección.

- Tipo de mecanismo de inferencia, operadores conectivos, método de defuzzificación: Opción restringida por el tipo de modelo difuso (Mamdani, TS). La decisión es en cuanto a la elección de los operadores de conjunción, etc. Se suelen emplear los operadores mín y máx estándar.

d) Igualmente enuncie las técnicas para estimar los parámetros de los modelos.
ajuste basado en datos

- Estimación por mínimos cuadrados de los consecuentes: La estimación por mínimos cuadrados de los consecuentes es una solución óptima que da el error de predicción mínimo. Sin embargo, puede sesgar las estimaciones de los parámetros consecuentes como parámetros de modelos locales, para solventar este repercusión se puede utilizar un enfoque de mínimos cuadrados ponderados.

- Modelado basado en plantillas: Los dominios de las variables antecedentes se dividen en un número específico de funciones de pertenencia igualmente espaciadas y configuradas. Luego se establece la base de reglas para cubrir todas las combinaciones de los términos antecedentes y finalmente los parámetros consiguientes se estiman mediante el método de mínimos cuadrados. Un inconveniente de este enfoque es que el número de reglas en el modelo puede crecer muy rápido.

- Modelado neuro-difuso: Se emplean algoritmos de entrenamiento conocidos en el área de redes neuronales y optimización no lineal. Un modelo difuso puede verse como una estructura en capas (red), similar a las redes neuronales artificiales, en donde los parámetros pueden ajustarse mediante algoritmos de aprendizaje.

- Construcción mediante agrupamiento (Clustering) difuso: Se originan a partir del análisis de datos y el reconocimiento de patrones. El concepto de pertenencia graduada se utiliza para representar el grado en que un objeto (vector de características) es similar a algún objeto prototípico. El grado de similitud se calcula utilizando una medida de distancia. Con base en la similitud, los vectores de características se pueden agrupar de manera que los vectores dentro de un grupo sean lo más similares (cercanos) posibles, y los vectores de diferentes grupos sean lo más diferentes posible. Mediante el agrupamiento difuso se puede obtener un modelo TS con tres conjuntos difusos de referencia.

Referencias

[1] "*FUZZY AND NEURAL CONTROL DISC Course Lecture Notes (November 2009)*".Robert Babuska.Delft Center for Systems and Control.Delft University of Technology Delft, the Netherlands.

[2] "*Neural-network-based modelling and analysis for time series prediction of ship motion*".Li, Guoyuan Kawan, Bikram Wang, Hao Zhang, Houxiang. (2017). Ship Technology Research.