PAC3 – ALGEBRA LINEAL

NOM I COGNOMS: JOSEP ANDREU MIRALLES

1. Sigui $\mathbb{R}_n[x]$ l'espai vectorial del conjunt de polinomis de grau menor o igual a *n*, per a un *n* $\in \mathbb{N}$.

Definim l'aplicació lineal *T*: $\mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_4[x]$ de la següent manera

$$T(p(x)) = p(x^2).$$

a) Trobeu la representació matricial de *T* relativa a les bases *B* = {1, *x*, *x*^{2}} de $\mathbb{R}_2[x]$ i C = {1, x, x^2, x^3, x^4} de $\mathbb{R}_4[x]$.

(1) $T(p(x)) = p(x^2) \rightarrow$ amb $x = 1 \rightarrow$

$T(1) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^4$

$T(p(x)) = p(x^2) \rightarrow$ amb $x = x \rightarrow$

$T(x) = x^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^4$

$T(p(x)) = p(x^2) \rightarrow$ amb $x = x^2 \rightarrow$

$T(x^2) = x^4 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + 1 \cdot x^4$

Calculem la imatge T de la base B = {1, x, x^2} i obtenim la imatge de T en la base C.

Obtenim la imatge T següent: (1,0,0,0,0), (0,0,1,0,0) i (0,0,0,0,1). I d'aquí podem construir la matriu associada a T en les bases B i C:

$$F = \mathrm{M(T,B,C)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A partir de les dades d'(1) obtenim la matriu associada de T en les bases B i C,

i obtenim la representació matricial següent, siguent respectivament a_1, a_2 i a_3, i b_1, b_2, b_3, b_4 i b_5 els coeficients dels polinomis de grau 2 i grau 4.

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

b) Es injectiva? I exhaustiva?

(1) rang F = 3 — Calculem el rang d'F (la matriu associada de T), com veiem és igual a 3 ja que hi ha 3 files linealment independents (1,0,0), (0,1,0) i (0,0,1).

(2) dim $\mathbb{R}_2[x]$ = 3 — La dimensió d'$\mathbb{R}_2[x]$ és 3.

(3) dim(Im(T)) = rang F = 3 — La dimensió de la imatge de T és 3, ja que aquesta és igual al rang de F.

(4) dim $\mathbb{R}_4[x]$ = 5 — La dimensió d'$\mathbb{R}_4[x]$ és 5.

1. Proposició: Si ***T*: $\mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_4[x]$** és un monomorfisme (aplicació lineal injectiva), llavors la dimensió del seu nucli ha de ser igual a 0:

dim $\mathbb{R}_2[x]$ = dim(Im(T)) + dim(ker(T)) — Segons el teorema de la dimensió

dim(ker(T)) = dim $\mathbb{R}_2[x]$ - dim(Im(T))=

= 3 – 3 = 0 — segons (2) i (3), obtenim que la dimensió de ker(T) és 0.

Com que dim(ker(T)) és igual a 0 podem deduir que T és una aplicació injectiva (monomorfisme).

2. Proposició: Si ***T*: $\mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_4[x]$** és un monomorfisme (aplicació lineal injectiva), llavors la dimensió de la seva matriu associada F té un rang igual a la dimensió d'$\mathbb{R}_2[x]$:

rang F = dim $\mathbb{R}_2[x]$ = 3 — Segons (1) i (2) el rang de la matriu associada i d'$\mathbb{R}_2[x]$ és el mateix i igual a 3.

Com que el rang d'F (matriu associada de T) és igual a la dimensió d'$\mathbb{R}_2[x]$ podem deduir que T és una aplicació injectiva (monomorfisme).

3. Proposició: Si ***T*: $\mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_4[x]$** és un epimorfisme (aplicació lineal exhaustiva o suprajectiva), llavors la dimensió de la seva imatge ha de ser igual a la dimensió d'$\mathbb{R}_4[x]$:

dim(Im(T)) = 3 ≠ dim $\mathbb{R}_4[x]$ = 5 — Segons (3) i (4) la dimensió de la imatge de l'aplicació lineal T és diferent a la dimensió d'$\mathbb{R}_4[x]$.

Com que la dimensió de la imatge de T és diferent a la dimensió d'$\mathbb{R}_4[x]$ podem deduir que T no és una aplicació exhaustiva (epimorfisme).

Així doncs, segons el deduït en els punts 1, 2 i 3 l'aplicació *T(p(x)) = p (x^2)* és una aplicació injectiva.

2. Recordeu que una matriu quadrada es diu que és idempotent si A^2 = A.

a) Suposeu que *u* i *v* són vectors unitaris d' $\mathbb{R}^n$ tals que *u* i *v* són ortogonals. Sigui Q = $uu^T + vv^T$. Proveu que *Q* és una matriu idempotent.

(1) uu^T=1 i vv^T=1 — Donat que u i v són vectors unitaris el producte d'un vector pel seu vector trasposat és 1.

(2) $v^T u=0$ i $u^T v=0$	Donat que u i v són ortogonals el seu producte és 0.

Finalment,

$Q^2 = (uu^T + vv^T)^2 =$	Fem el quadrat de Q
$= (uu^T + vv^T)\cdot (uu^T + vv^T) =$	
$= uu^T\cdot uu^T + vv^T\cdot uu^T + uu^T\cdot vv^T + vv^T\cdot vv^T =$	, desenvolupem el producte
$= u\cdot(1)\cdot u^T + v\cdot(0)\cdot u^T + u\cdot(0)\cdot v^T + v\cdot(1)\cdot v^T =$	, substiuïm segons les igualtats (1) i (2)
$= uu^T + 0 + 0 + vv^T = uu^T + vv^T =$	
$= uu^T + vv^T = Q$	i obtenim que Q^2 és igual a Q.

Així doncs Q és una matriu idempotent ja que $Q^2=Q$.

b) Proveu que cada vector (no nul) de la forma *au + bv* per *a,b* $\in \mathbb{R}$ és un vector propi de valor propi 1 de la matriu *Q*.

(1) $\parallel u \parallel = 1$ i $\parallel v \parallel = 1$	Donat que u i v són vectors unitaris la seva norma és 1.
(2) $v^T u=0$ i $u^T v=0$	Donat que u i v són ortogonals el seu producte és 0.
(3) $Q\cdot u = (uu^T + vv^T)\cdot u = uu^T u + vv^T u =$	Fem el producte de la matriu Q pel vect. u
$= uu^T u + 0 = u\parallel u \parallel^2 = u$	, per les identitats (1) i (2) obtenim que $Q\cdot u$ és igual a u.
(4) $Q\cdot v = (uu^T + vv^T)\cdot v = uu^T v + vv^T v =$	Fem el producte de la matriu Q pel vect. v
$= 0 + vv^T v = v\cdot\parallel v \parallel^2 = v$	, per les identitats (1) i (2) obtenim que $Q\cdot v$ és igual a v.
(5) $\lambda\cdot(au + bv) =$	Suposem que (au + bv) és un VEP
$= 1\cdot(au + bv) = au + bv$	, si el seu VAP és igual a 0, obtenim que $Q\cdot(au + bv)$ es igual al vector (au + bv).

Finalment,

$Q\cdot(au + bv) = Qau + Qbv =$	Fem el producte de la matriu pel vector
$= a\cdot Qu + b\cdot Qv = au + bv$	, i obtenim el vector au + bv.

Així doncs, el vector (au + bv) és un vector propi de Q amb $\lambda=1$ per qualsevol a i b $\in \mathbb{R}$, ja que $Q\cdot(au+bv)$ és i gual a $\lambda\cdot(au+bv)$ per un VAP = 1.