Àlgebra Lineal (22.404), Pràctica 2, Curs 2020-21, Semestre 2

Cadenes de Markov discretes / El ratolí i el laberint

Resolució

Pregunta 1

Com es diu a l'enunciat de la pràctica, un cop el ratolí està a les habitacions 1 o 5, no en sortirà. Des de l'habitació 2 es mourà a les habitacions 1, 4 o 5 amb probabilitat 1/3. Des de l'habitació 3 es mourà a les habitacions 1 o 4 amb probabilitat 1/2. Finalment, des de l'habitació 4 es mourà a les habitacions 1, 2, 3 o 5 amb probabilitat 1/4. Per tant, la matriu de transició entre la ubicació actual del ratolí i la seva ubicació al cap d'un minut és:

Ubicació	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	0
2	1/3	0	0	1/3	1/3
3	1/2	0	0	1/2	0
4	1/4	1/4	1/4	0	1/4
5	0	0	0	0	1

Pregunta 2

Primer de tot, generem un vector `x` amb els 25 valors de la taula (per files) per finalment generar la matriu de transició `P`.

```
x <- c(1,0,0,0,0,1/3,0,0,1/3,1/3,1/2,0,0,1/2,0,1/4,1/4,1/4,0,1/4,0,0,0,0,1)
labels <- c("1","2","3","4","5")
byRow <- TRUE
P <- matrix(data=x,byrow=byRow,nrow=5,dimnames=list(labels,labels))
```

Pregunta 3

Podem comprovar que la suma de les probabilitats de cada una de les files és 1 amb la línia de codi següent:

```
apply(P,1,sum)
```

```
## 1 2 3 4 5
## 1 1 1 1 1
```

Pregunta 4

Creem la cadena de Markov discreta definida per la matriu `P` amb les línies de codi següents:

```
library("markovchain")
```

```
## Package:   markovchain
## Version:   0.8.6
## Date:      2021-05-17
```

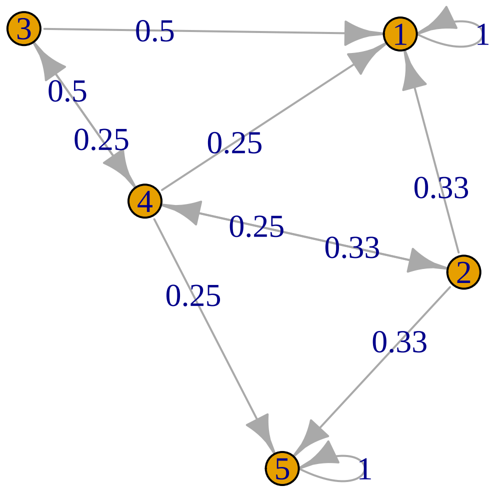
```
## BugReport: https://github.com/spedygiorgio/markovchain/issues
```

```
mcP <- new("markovchain", states=labels, byrow=byRow,
           transitionMatrix=P, name="The mouse and the maze")
```

Pregunta 5

Fem un diagrama de la cadena de Markov discreta amb la línia de codi següent:

```
plot(mcP, package="diagram", cex=.6)
```



Pregunta 6

Amb les línies de codi següents generem una llista, `mcL` que conté el nombre de zeros de cada una de les potències de la matriu de transició de la cadena de Markov `mcP`. Noteu que per poder accedir a la matriu de transició de la cadena de Markov cal escriure `(mcP^i)@transitionMatrix`. Quan igualem aquesta matriu de transició a zero mitjançant `== 0` el que obtenim és una matriu formada de `TRUE` i `FALSE`. Finalment, sumem els `TRUE` d'aquesta matriu i els afegim a la llista `mcL`.

```
n <- 5
m <- (n-1)^2+1
mcL <- c()
for (i in 1:m){
  aux <- sum((mcP^i)@transitionMatrix == 0)
  mcL <- c(mcL,aux)
}
mcL
```

```
##  [1] 14 12 13 12 13 12 13 12 13 12 13 12 13 12 13 12 13
```

Pregunta 7

Tots els elements de la llista `mcL` són diferents de zero, com es pot veure en la següent línia de codi:

```
sum(mcL == 0)
```

```
## [1] 0
```

Això implica que la cadena de Markov **no és regular**. Per tant, no es pot garantir l'existència d'un únic estat estacionari.

Pregunta 8

La cadena de Markov `mcP` té dos estats absorbents, com es pot veure a la següent línia de codi:

```
summary(mcP)
```

```
## The mouse and the maze  Markov chain that is composed by:
## Closed classes:
## 1
## 5
## Recurrent classes:
## {1},{5}
## Transient classes:
## {2,3,4}
## The Markov chain is not irreducible
## The absorbing states are: 1 5
```

L'habitació 1 i l'habitació 5 són dos estats absorbents ja que, un cop entra el ratolí, ja no en surt.

En efecte, l'existència d'estats absorbents implica la **no regularitat** de la cadena de Markov, perquè les transicions des de l'habitació 1 o des de l'habitació 5 de qualsevol potència de la cadena de Markov $\texttt{mcP}^i$ seran idèntiques (un 1, i la resta zeros).

Pregunta 9

Si es mira la matriu de transicions, la columna corresponent a l'habitació 3 només té un valor no nul, el valor 1/4 corresponent a la fila 4 (la transició de l'habitació 4 a l'habitació 3). És a dir, si el ratolí es desplaça a l'habitació 3, només ho pot fer **des de l'habitació 4**.

Pregunta 10

Com que tenim dos estats absorbents tindrem dues distribucions estacionàries. Aquestes distribucions estacionàries es poden calcular amb la línia de codi següent:

```
steadyStates(mcP)
```

```
##      1 2 3 4 5
## [1,] 0 0 0 0 1
## [2,] 1 0 0 0 0
```

També podem calcular quants valors propis de la matriu de transició `P` són iguals a 1 amb les línies de codi següents:

```
r <- eigen(P)
r$values # valors propis
```

```
## [1]  1.0000000  1.0000000  0.4564355 -0.4564355  0.0000000
```

```
sum(r$values == 1) # valors propis iguals a 1
```

```
## [1] 2
```

En efecte, el nombre de valors propis iguals a 1 és el nombre d'estats estacionaris.

Pregunta 11

Els possibles valors de `N` són 2, 3 o 4. La probabilitat que el ratolí acabi a l'habitació 1 si ha estat inicialment ubicat a l'habitació `N` és la *primera* component del límit:

$$\lim_{i \to +\infty} \left(e_N \cdot \texttt{mcP}^i\right)[1]$$

on e_N és l'`N`-èssim vector de la base canònica de $\mathbb{R}^5$. A efectes pràctics, podem calcular el límit amb un valor prou gran d'i (per exemple $i = 100$). En aquest cas:

Per a `N`$= 2$:

```
(c(0,1,0,0,0)*mcP^100)[1]
```

```
## [1] 0.5263158
```

Per a `N`$= 3$:

```
(c(0,0,1,0,0)*mcP^100)[1]
```

```
## [1] 0.7894737
```

I, finalment, per a `N`$= 4$:

```
(c(0,0,0,1,0)*mcP^100)[1]
```

```
## [1] 0.5789474
```

Una manera més elegant i més compacta d'arribar al mateix resultat és mitjançant la instrucció `absorptionProbabilities`, com es pot veure a la següent línia de codi:

```
absorptionProbabilities(mcP)
```

```
##           1         5
## 2 0.5263158 0.4736842
## 3 0.7894737 0.2105263
## 4 0.5789474 0.4210526
```

La fila representa l'habitació de sortida i la columna l'habitació d'arribada.

Pregunta 12

Com abans, els possibles valors de `N` són 2, 3 o 4. La probabilitat que el ratolí acabi a l'habitació 5 si ha estat inicialment ubicat a l'habitació `N` és la *cinquena* component del límit:

$$\lim_{i \to +\infty} \left(e_N \cdot \texttt{mcP}^i\right)[5]$$

on e_N és l'`N`-èssim vector de la base canònica de $\mathbb{R}^5$. A efectes pràctics, podem calcular el límit amb un valor prou gran d'i (per exemple $i = 100$). En aquest cas:

Per a `N`$= 2$:

```
(c(0,1,0,0,0)*mcP^100)[5]
```

```
## [1] 0.4736842
```

Per a `N`$= 3$:

```
(c(0,0,1,0,0)*mcP^100)[5]
```

```
## [1] 0.2105263
```

I, finalment, per a `N`= 4:

```
(c(0,0,0,1,0)*mcP^100)[5]
```

```
## [1] 0.4210526
```

També, com abans, una manera més elegant i més compacta d'arribar al mateix resultat és mitjançant la instrucció `absorptionProbabilities`, com es pot veure a la següent línia de codi:

```
absorptionProbabilities(mcP)
```

```
##           1         5
## 2 0.5263158 0.4736842
## 3 0.7894737 0.2105263
## 4 0.5789474 0.4210526
```

La fila representa l'habitació de sortida i la columna l'habitació d'arribada.

Noteu, finalment, que la suma de les probabilitats d'acabar a l'habitació 1 o a l'habitació 5 sumen el 100%:

```
apply(absorptionProbabilities(mcP),1,sum)
```

```
## 2 3 4
## 1 1 1
```

Pregunta 13

Els resultats demanats són:

```
apply(P,1,sum)
```

```
## 1 2 3 4 5
## 1 1 1 1 1
```

```
apply(P,2,sum)
```

```
##         1         2         3         4         5
## 2.0833333 0.2500000 0.2500000 0.8333333 1.5833333
```

```
sum(mcL) # pregunta 6
```

```
## [1] 214
```

```
sum(mcL == 0) # pregunta 7
```

```
## [1] 0
```

- Hi ha **dos** estats absorbents.
- La cadena de Markov `mcP` **no és regular**.
- El ratolí es desplaça **des de l'habitació** 4.
- Hi ha **dos valors propis** de la matriu `P` iguals a 1.
- La probabilitat que el ratolí acabi a l'habitació 1 depèn de l'habitació inicial:
  - si l'habitació inicial és la segona (`N`= 2), la probabilitat és: 0.5263158;
  - si l'habitació inicial és la tercera (`N`= 3), la probabilitat és: 0.7894737;

- si l'habitació inicial és la quarta (`N`$= 4$), la probabilitat és: 0.5789474.

- La probabilitat que el ratolí acabi a l'habitació 5 depèn de l'habitació inicial:
  - si l'habitació inicial és la segona (`N`$= 2$), la probabilitat és: 0.4736842;
  - si l'habitació inicial és la tercera (`N`$= 3$), la probabilitat és: 0.2105263;
  - si l'habitació inicial és la quarta (`N`$= 4$), la probabilitat és: 0.4210526.