Presentació

Aquesta PAC revisa els conceptes bàsics associats als sistemes d'equacions lineals (SEL), la seva expressió matricial, la seva discussió (és a dir, l'estudi de si el SEL té o no solució) i els mètodes de resolució de Gauss i de Cramer, així com una interpretació geomètrica en els casos en que sigui possible.

Competències

En aquesta PAC es treballen les següents competències del Grau en Ciència de Dades Aplicada:

- Que els estudiants hagin demostrat tenir i comprendre coneixements en un àrea d'estudi que parteix de la base de l'educació secundària general, i se sol trobar a un nivell que, si bé es recolza en llibres de text avançats, inclou també alguns aspectes que impliquen coneixements procedents de l'avantguarda del seu camp d'estudi.
- Utilitzar de forma combinada els fonaments matemàtics, estadístics i de programació per desenvolupar solucions a problemes en l'àmbit de la ciència de les dades.
- Ús i aplicació de les TIC en l'àmbit acadèmic i professional.

Objectius

Els objectius concrets d'aquesta PAC són:

- Comprendre la importància dels sistemes d'equacions lineals per resoldre problemes típics de la ciència de dades.
- Reconèixer un sistema d'equacions lineals, aprendre a expresar-lo de forma matricial i saber avaluar si té o no solució.
- Saber interpretar de forma geomètrica un sistema d'equacions lineals.
- Ser capaç de resoldre sistemes d'equacions lineals mitjançant els mètodes de Gauss i Cramer.

- Comprendre la dificultat de resoldre de forma analítica SELs on el nombre d'incògnites i equacions és elevat, així com entendre la necessitat de mètodes numèrics per a aquest tipus de sistemes.

- Comprendre la dificultat de resoldre de forma analítica SELs on el nombre d'incògnites i equacions és elevat, així com entendre la necessitat de mètodes numèrics per a aquest tipus de sistemes.

Descripció de la PAC

Aquesta activitat ens permetrà posar en pràctica els coneixements i procediments treballats en aquest repte. La PAC consta de dues parts:

1. Qüestionaris. Per una banda, us demanem que treballeu els conceptes treballats setmanalment en una sèrie de qüestionaris (els podreu trobar al moodle entrant a l'enllaç "Qüestionaris"a la part dreta de l'aula). En aquests qüestionaris es treballa la part més instrumental d'aquest repte. Per cada qüestionari teniu 2 intents, i es tindrà en compte la nota més alta dels dos. Hi ha algunes setmanes que no tenen qüestionari associat, esteu atentes a les recomanacions de planificació setmanals que us enviarem pel Taulell! Si no podeu fer el qüestionari la setmana que pertoqui, el podreu fer fins al dia de lliurar la PAC d'aquest repte, però us recomanem que seguiu la planificació setmanal per anar consolidant els conceptes a mesura que els aneu treballant.
2. Lliurable. Us demanem també que resolgueu uns exercicis teòrics i lliureu les solucions en PDF al Registre d'Avaluació Continuada (RAC), tot detallant els passos seguits i justificant les vostres respostes.

Recursos

Recursos Bàsics

- Mòdul *Elements bàsics de l'àlgebra lineal i geometria*
- Mòdul *Sistemes d'equacions lineals*
- Document *Sistemes d'equacions lineals: Problemes per a la ciència de dades*

Recursos Complementaris

- Calculadora CalcMe
- Documentació de CalcMe
- Guia CalcMe UOC
- Laboratori CalcMe

Criteris d'avaluació

- LA PAC s'ha de resoldre de manera individual.
- És necessari justificar totes les respostes proposades al lliurable de la PAC.

Tingueu en compte que les dues activitats que es plantegen a aquest repte (la resolució dels exercicis que es plantegen d'aquest document i el qüestionari) seran part de la nota d'avaluació contínua AC: (PAC1 + PAC2 + PAC3)/3. La nota d'aquestes activitats correspon a la PAC1 (amb un pes del 70% pel qüestionari i un 30% pel lliurable). **Recordeu que heu d'aprovar l'AC per superar l'assignatura.** Per a més informació sobre el model d'avaluació de l'assignatura consulteu el pla docent.

Format i data de lliurament

Cal lliurar un **únic document PDF** amb les respostes de tots els exercicis. Cal realitzar la PAC **amb un processador de textos**, no s'acceptaran solucions a mà i escanejades.

El nom del fitxer ha de ser PAC1Cognom1Cognom2Nom.pdf. Aquest document s'ha de lliurar a l'espai de Lliurament i Registre AC de l'aula abans de les 23:59 del dia 19/03/2021.

No s'acceptaran lliuraments fora de termini ni en formats que no siguin els especificats.

Des de l'any 2017 s'està plantejant un nou paradigma de l'aprenentatge automàtic, el que es coneix com *aprenentatge federat*. La idea principal és que en comptes de que les dades es centralitzin en un únic lloc i allà es dugui a terme l'algorisme, en aquest nou model l'algorisme és capaç d'aprendre de diferents fonts de dades distribuïdes en diferents dispositius. Aquest model té especial interés si les dades són especialment sensibles, com podria ser en casos relacionats amb les dades de pacients.

Intentem modelar matemàticament el problema anterior. Suposem que tenim un conjunt de participants $P_1, P_2, \cdots, P_n$ i que cadascun d'ells té un secret $s_1, s_2, \cdots, s_n$ respectivament que no vol compartir amb la resta de participants. L'objectiu és calcular una certa funció $f(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ de manera que ningú (ni els participants ni menys alguna entitat externa) obtinguin cap més informació que el resultat $f(s_1, s_2, \ldots, s_n)$. Això és el que es coneix com computació multipart i té moltes aplicacions en l'àmbit de la ciberseguretat i recentment, també a la ciència de dades.

Trobar protocols per calcular aquesta funció f, sigui quina sigui la funció f, no és una tasca senzilla. Tradicionalment, els esquemes de compartició de secrets han estat una eina molt útil per a poder fer aquest càlcul, i darrere d'ells es troba la resolució de sistemes lineals, perquè cada vegada que es realitzen aquests càlculs, es resolen molts sistemes lineals (de dimensions gegantines a vegades depenent del volum de dades que s'estiguin considerant).

Per això resulta especialment important disposar de tècniques que permetin resoldre'ls eficientment. En particular, ens centrarem a aquesta PAC a resoldre sistemes lineals i alguns dels problemes relacionats amb ells.

1. Una certa funció f tal que $f(\theta) = a\cos(\theta) + b\cos(2\theta) + c\cos(3\theta)$, per a un certs $a, b, c \in \mathbb{R}$ satisfà $f(0) = 3, f(\pi/2) = 1$, i $f(\pi) = -5$. Trobeu $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Solució: Cada condició a f es pot traduir en una equació amb a, b, c de la següent manera:

$$\begin{aligned} f(0) &= a + b + c = 3 \\ f(\pi/2) &= -b = 1 \\ f(\pi) &= -a + b - c = -5 \end{aligned}.$$

Per resoldre aquest sistema, utilitzarem l'eliminació de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1+F_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[-2F_2+F_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Per tant, cal resoldre el sistema $b = -1$ i $a + c = 4$. És a dir $a = 4 - c$ i $b = -1$. Així, $f(\theta) = (4 - c)\cos(\theta) - \cos(\theta) + \cos(3\theta)$, on $c \in \mathbb{R}$.

2. Un tipus molt interessant de matrius que ens podem trobar en resoldre un sistema lineal són aquelles tals que $A^2 = A$. Són les matrius anomenades idempotent. Si A i B són matrius $n \times n$ tals que $AB = A$ i $BA = B$, proveu que A és una matriu idempotent.

Solució: Siguin A i B matrius $n \times n$ que satisfan

$$AB = A \tag{1}$$

$$BA = B \tag{2}$$

Volem provar que la matriu A és idempotent, és a dir, $A^2 = A$. Per això, calculem

$$\begin{aligned} A^2 &= AA \\ &= (AB)A \quad \text{per (1)} \\ &= A(BA) \\ &= AB \quad \text{per (2)} \\ &= A \quad \text{per (1)} \end{aligned}$$

I podem concloure que la matriu A és idempotent.