Presentació

En aquesta PAC es treballen els principals conceptes associats a la idea d'aplicació lineal, i es connecten els conceptes d'aplicacions lineals i matrius. Tanmateix, els conceptes de vectors i valors propis, així com el problema de diagonalització són analitzats en profunditat.

Competències

En aquesta PAC es treballen les següents competències del Grau en Ciència de Dades Aplicada:

- Que els estudiants hagin demostrat tenir i comprendre coneixements en un àrea d'estudi que parteix de la base de l'educació secundària general, i se sol trobar a un nivell que, si bé es recolza en llibres de text avançats, inclou també alguns aspectes que impliquen coneixements procedents de l'avantguarda del seu camp d'estudi.
- Utilitzar de forma combinada els fonaments matemàtics, estadístics i de programació per desenvolupar solucions a problemes en l'àmbit de la ciència de les dades.
- Ús i aplicació de les TIC en l'àmbit acadèmic i professional.

Objectius

Els objectius concrets d'aquesta PAC són:

- Comprendre la utilitat dels conceptes d'aplicació lineal, vectors i valors propis en l'àmbit de la ciència de dades.
- Conèixer les aplicacions lineals i aprendre a representar-les en forma de matriu.
- Entendre el concepte de vectors i valors propis, així com la manera de calcular-los i la seva interpretació geomètrica.
- Ser capaç de resoldre problemes de diagonalització de matrius quadrades.
- Ser capaç d'utilitzar software matemàtic per a resoldre problemes de l'àlgebra lineal.

Descripció de la PAC

Aquesta activitat, tal i com vam fer en el repte anterior, ens permetrà posar en pràctica els coneixements i procediments treballats en aquest repte.

Per una banda, us demanem que treballeu els conceptes treballats setmanalment en una sèrie de qüestionaris (els podreu trobar al moodle entrant a l'enllaç " Qüestionaris" a la part dreta de l'aula). En aquests qüestionaris es treballa la part més instrumental d'aquest repte. Per cada qüestionari teniu 2 intents, i es tindrà en compte la nota més alta dels dos. Hi ha algunes setmanes que no tenen qüestionari associat, ¡esteu atentes a les recomanacions de planificació setmanals que us enviarem pel Taulell. Si no podeu fer el qüestionari la setmana que pertoqui, el podreu fer fins al dia de lliurar la PAC d'aquest repte, però us recomanem que seguiu la planificació setmanal per anar consolidant els conceptes a mesura que els aneu treballant.

Us demanem també que resolgueu uns exercicis teòrics i lliureu les solucions en PDF al Registre d'Avaluació Continuada (RAC), tot detallant els passos seguits i justificant les vostres respostes.

Recursos

Recursos Bàsics

- Introducció a les aplicacions lineals per a la ciència de dades
- Mòdul Aplicacions lineals
- Vídeo resum: aplicacions lineals
- Problemes sobre aplicacions lineals en la ciència de dades

Recursos Complementaris

- Calculadora CalcMe
- Documentació de CalcMe
- Guia CalcMe UOC
- Laboratori CalcMe

Criteris d'avaluació

- LA PAC s'ha de resoldre de manera individual.
- És necessari justificar totes les respostes proposades a la PAC.

Tingueu en compte que aquestes dues activitats seran part de la nota d'avaluació continuada AC: (PAC1 + PAC2 + PAC3)/3. La nota d'aquestes activitats correspon a la PAC3 (amb un pes del 70% pel qüestionari i un 30% pel lliurable). Recordeu que heu d'aprovar l'AC per superar l'assignatura.

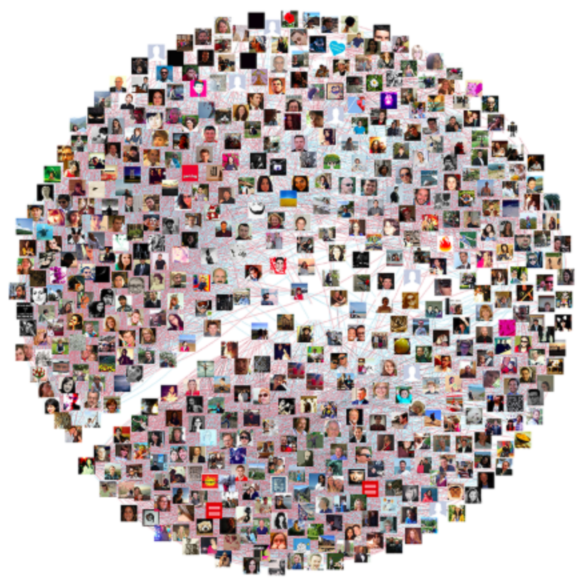
Format i data de lliurament

Cal lliurar un **únic document PDF** amb les respostes de tots els exercicis. Cal realitzar la PAC **amb un processador de textos**, no s'acceptaran solucions a mà i escanejades.

El nom del fitxer ha de ser PAC3Cognom1Cognom2Nom.pdf, tot i que després el Registre d'Avaluació Continuada (RAC) canviarà el nom del fitxer per incloure-hi el dia i l'hora del lliurament. Aquest document s'ha de lliurar a l'espai de Lliurament i Registre AC de l'aula abans de les 23:59 del dia 07/05/2021. No s'acceptaran lliuraments fora de termini.

Agrupar (o com es coneix en anglès, *clustering*) és una de les tasques principals en l'aprenentatge automàtic no supervisat. L'objectiu és assignar grups a dades no agrupades prèviament, de manera que el resultat final agrupi les dades similars als mateixos grups.

La teoria de grafs és una branca de les matemàtiques a que es dedica a l'estudi dels grafs, estructures matemàtiques utilitzades per a modelitzar relacions entre parelles d'objectes. En aquest context, un graf consisteix en una col·lecció de vèrtexs o nodes connectats per línies anomenades arestes. La teoria de grafs té múltiples aplicacions, que van des de la sociologia a les xarxes socials, per explorar, per exemple, l'expansió d'un rumor en les xarxes socials, com es podria fer en el següent graf.



La Clusterització espectral és una tècnica amb arrels en aquesta branca de les matemàtiques, la teoria de grafs, on l'enfocament s'utilitza per identificar comunitats de nodes en un graf a partir de les arestes que els connecten. El clúster espectral utilitza informació dels valors propis (anomenat també espectre) de matrius especials construïdes a partir del graf o del conjunt de dades. Així doncs, els valors propis i els vectors propis d'una matriu ens ajudaran a agrupar o classificar la informació de manera automàtica.

A aquesta PAC aprofundirem a l'estudi de les aplicacions lineals i dels valors i vectors propis de la matriu associada.

1. (Valoració d'un 50%) Sigui $\mathbb{R}_n[x]$ l'espai vectorial del conjunt de polinomis de grau menor o igual a n, per a un $n \in \mathbb{N}$[1].

   Definim l'aplicació lineal $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_4[x]$ de la següent manera

   $$T(p(x)) = p\left(x^2\right).$$

   (a) Trobeu la representació matricial de T relativa a les bases $\mathcal{B} = \left\{1, x, x^2\right\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ i $\mathcal{C} = \left\{1, x, x^2, x^3, x^4\right\}$ de $\mathbb{R}_4[x]$.

   (b) És injectiva? I exhaustiva?

Solució:

(a) Com es detalla a la secció 3 del mòdul, per calcular la matriu associada a l'aplicació lineal a les bases $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$, $M(f \mid \mathcal{B}, \mathcal{C})$, hem de calcular les imatges de tots els vectors de la base $\mathcal{B}$. Les coordenades d'aquestes imatges seran les columnes d'aquesta matriu. Així, calculem $T(1)$, $T(x)$ i $T(x^2)$ com segueix $T(1) = 1, T(x) = x^2, T(x^2) = x^4$, i per tant la matriu associada a l'aplicació lineal T, serà:

$$M(f \mid \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Com es detalla a la secció 5 del mòdul, l'aplicació serà injectiva, és a dir, un monomorfisme, si $\ker T = \{0\}$. Per això, cal calcular el nucli de la matriu $M(f \mid \mathcal{B}, \mathcal{C})$. Donat que el rang de la matriu és 3, el sistema homogeni associat té una única solució, 0, pel que efectivament l'aplicació és injectiva. Com també es detalla a la secció 5 del mòdul, per ser exhaustiva (o epimorfisme) cal que $ImT = \mathbb{R}_4[x]$. Pel teorema de la dimensió (que trobareu a la secció 4 del mòdul):

$$dim \ker T + dim ImT = dim \mathbb{R}_2[x]$$

Així, $dim ImT = 3 - 0$, pel que $ImT \neq \mathbb{R}_4[x]$, donat que aquest últim és un espai vectorial de dimensió 5. Així doncs, l'aplicació no és exhaustiva.

[1] Tal i com està definit a l'Exemple 5 del Mòdul *Elements d'àlgebra lineal i geometria.*

2. (Valoració d'un 50%) Recordeu que una matriu quadrada es diu que és idempotent si $A^2 = A$.
   (a) Suposeu que u i v són vectors unitaris d'$\mathbb{R}^n$ tals que u i v són ortogonals. Sigui $Q = uu^\top + vv^\top$. Proveu que Q és una matriu idempotent.
   (b) Proveu que cada vector (no nul) de la forma $au + bv$ per $a, b \in \mathbb{R}$ és un vector propi de valor propi 1 de la matriu Q.

Solució:

(a) Com u i v són vectors unitaris,
$$u^\top u = 1 \text{ i } v^\top v = 1$$
Com u i v són ortogonals, el seu producte escalar és 0. Per tant, tenim que
$$u^\top v = v^\top u = 0$$
Utilitzant aquestes identitats, calculem Q^2 de la següent manera:.
$$\begin{aligned} Q^2 &= \left(uu^\top + vv^\top\right)\left(uu^\top + vv^\top\right) \\ &= uu^\top\left(uu^\top + vv^\top\right) + vv^\top\left(uu^\top + vv^\top\right) \\ &= uu^\top uu^\top + uu^\top vv^\top + vv^\top uu^\top + vv^\top vv^\top \\ &= uu^\top + vv^\top = Q \end{aligned}$$
I, per tant, la matriu Q és idempotent.

(b) Comencem calculant Qu i obtenim:
$$\begin{aligned} Qu &= \left(uu^\top + vv^\top\right)u \\ &= uu^\top u + vv^\top u = u. \end{aligned}$$
Noteu que u és un vector no nul donat que és un vector unitari. Per tant, la igualtat $Qu = u$ implica que 1 és un valor propi de Q i v és el corresponent vector propi. De manera similar, podem comprobar que u és un vector propi de valor propi 1. Sigui $au + bv$ un vector no nul. Aleshores es compleix que:
$$Q(au + bv) = aQu + bQv = au + bv$$
Pel que deduïm que $au + bv$ és un vector propi de valor propi 1.