PAC2 – ALGEBRA LINEAL

NOM I COGNOMS: <u>JOSEP ANDREU MIRALLES</u>

Considereu una matriu A amb m files i n columnes. Definim el conjunt *N(A)* com

$$\boldsymbol{N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}}$$

1. Proveu que *N(A)* és un subespai vectorial.

Per què *N(A)* sigui un subespai vectorial ha de complir les 3 següents condicions:

1. $\emptyset \neq N(A) \subseteq \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$**:**

x=(0,0,...,0) pertany a *N(A)* ja que és solució trivial del sistema, i per tant *N(A)* no és igual al conjunt buit.

Considerem una matriu A ∈ $\boldsymbol{\mathcal{M}_{mxn}}$ amb m files i n columnes $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ i el vector x ∈ $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$amb n elements (0,...,0), podem efectuar el producte A·x, $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} a_{11} \cdot 0 + \cdots + a_{1n} \cdot 0 \\ \ldots \\ a_{m1} \cdot 0 + \cdots + a_{mn} \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}$. Observem doncs que el vector (0,..,0) sempre és solució trivial, i per tant *N(A)* ≠ ∅.

2. $\forall \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2} \in \boldsymbol{N(A)},\ \boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2} \in \boldsymbol{N(A)}$**:**

Siguin x_1 i x_2 solucions del sistema Ax=0 ∈ $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n \cdot 1}}$

$A(x_1+x_2) = A \cdot x_1 + A \cdot x_2$	Per la propietat distributiva de les matrius,
$A \cdot x_1 + A \cdot x_2 = 0+0$	x_1 i x_2 pertanyen a *N(A),* per tant Ax_i=0,
$A(x_1+x_2) = 0$	per tant $A(x_1+x_2)$=0, i (x_1+x_2) és solució del sistema i ∈ $\boldsymbol{N(A)}$.

3. $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{N(A)},\ \forall \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{N(A)}$**:**

Sigui x solució del sistema Ax=0 ∈ $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n \cdot 1}}$, i k un escalar ∈ $\mathbb{R}$**.**

A(k·x) = k(A·x)	Per la prop. distributiva del producte de matrius amb un escalar,
k(A·x) = k(0) = 0	x pertany a *N(A),* per tant Ax=0,
A(k·x) = 0	i per tant A(k·x)=0, i (k·x) és solució del sistema i ∈ $\boldsymbol{N(A)}$.

Queda doncs demostrat que N(A) és un subespai vectorial.

2. Considereu la matriu A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ i calculeu el complement ortogonal de *N(A)*.

1. Obtenim una base ortonormal d'*N(A):*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow x = 0, y = \lambda, z = 0, t = 0$$

Obtenim la base ortonormal de *N(A)*=<(0,1,0,0)> i de dimensió =1.

I obtenim, $\mathrm{N}(\mathrm{A}_{3x4}) = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{t}) \in \mathbb{R}^4 \mid \mathrm{Ax} = 0\} = \{(0, \mathrm{y}, 0, 0) / \mathrm{y} \in \mathbb{R}\} = <(0,1,0,0)>$.

2. Obtenim el complement ortogonal mitjançant la base de tots els vectors ortogonals del subespai *N(A)*.

Donat qualsevol vector (x, y, z, t) i el vector (0, 1, 0, 0) $\in \mathbb{R}^4$, es diu que són ortogonals si el seu producte escalar és igual a 0.

$$\begin{pmatrix} x & y & z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (0) \rightarrow y = 0$$

Es evident doncs que els vectors de la forma $(x\ 0\ z\ t)$ són ortogonals a *N(A)*.

Podem obtenir la base de *N(A)*$^\perp$ = <(x 0 0 0), (0 0 z 0), (0 0 0 t)>, i la base ortonormal d'*N(A)*$^\perp$ = <(1 0 0 0), (0 0 1 0), (0 0 0 1)> de dimensió 3.

I obtenim que $\mathrm{N}(\mathrm{A}_{3x4})^\perp = \{(\mathrm{x}, 0, \mathrm{z}, \mathrm{t}) \in \mathbb{R}^4\} = <(1\ 0\ 0\ 0), (0\ 0\ 1\ 0), (0\ 0\ 0\ 1)>$.