**PAC3 – ALGEBRA LINEAL**

**NOM I COGNOMS: JOSEP ANDREU MIRALLES**

**1. Sigui [*x*] l’espai vectorial del conjunt de polinomis de grau menor o igual a *n*, per a un *n* .**

**Definim l’aplicació lineal *T*: de la següent manera**

***T(p(x)) = p(x2)*.**

**a) Trobeu la representació matricial de *T* relativa a les bases *B* = {1, *x, x2*} de [*x*] i = {1, x, x2, x3, x4} de [*x*].**

(1) T(p(x)) = p(x2) amb x = 1 Calculem la imatge T de la base B =

T(1) = 1 = 1·1 + 0·x + 0·x2 + 0·x3 + 0·x4 {1, x, x2} i obtenim la imatge de T en

T(p(x)) = p(x2) amb x = xla base C.

T(x) = x2 = 0·1 + 0·x + 1·x2 + 0·x3 + 0·x4

T(p(x)) = p(x2) amb x = x2

T(x2) = x4 =0·1 + 0·x + 0·x2 + 0·x3 + 1·x4

Obtenim la imatge T següent: (1,0,0,0,0), (0,0,1,0,0) i (0,0,0,0,1). I d’aquí podem construir la matriu associada a T en les bases B i C:

F = A partir de les dades d’(1) obtenim la matriu associada de T en les bases B i C,

i obtenim la representació matricial següent, siguent respectivament a1, a2 ia3, i b1, b2, b3, b4 i b5 els coeficients dels polinomis de grau 2 i grau 4.

**b) Es injectiva? I exhaustiva?**

(1) rang F = 3 Calculem el rang d’F (la matriu associada de T), com veiem és igual a 3 ja que hi ha 3 files linealment independents (1,0,0), (0,1,0) i (0,0,1).

(2) dim = 3La dimensió d’és 3.

(3) dim(Im(T)) = rang F = 3 La dimensió de la imatge de T és 3, ja que aquesta és igual al rang de F.

(4) dim = 5 La dimensió d’és 5.

1. Proposició: Si ***T*:**  és un monomorfisme (aplicació lineal injectiva), llavors la dimensió del seu nucli ha de ser igual a 0:

dim = dim(Im(T)) + dim(ker(T)) Segons el teorema de la dimensió

dim(ker(T)) = dim - dim(Im(T))=

= 3 – 3 = 0 segons (2) i (3), obtenim que la dimensió de ker(T) és 0.

Com que dim(ker(T)) és igual a 0 podem deduir que T és una aplicació injectiva (monomorfisme).

2. Proposició: Si ***T*:**  és un monomorfisme (aplicació lineal injectiva), llavors la dimensió de la seva matriu associada F té un rang igual a la dimensió d’:

rang F = dim = 3 Segons (1) i (2) el rang de la matriu associada i d’és el mateix i igual a 3.

Com que el rang d’F (matriu associada de T) és igual a la dimensió d’ podem deduir que T és una aplicació injectiva (monomorfisme).

3. Proposició: Si ***T*:**  és un epimorfisme (aplicació lineal exhaustiva o suprajectiva), llavors la dimensió de la seva imatge ha de ser igual a la dimensió d’:

dim(Im(T)) = 3 ≠ dim = 5 Segons (3) i (4) la dimensió de la imatge de l’aplicació lineal T és diferent a la dimensió d’.

Com que la dimensió de la imatge de T és diferent a la dimensió d’ podem deduir que T no és una aplicació exhaustiva (epimorfisme).

**Així doncs, segons el deduït en els punts 1, 2 i 3 l’aplicació *T(p(x)) = p (x2)* és una aplicació injectiva.**

**2. Recordeu que una matriu quadrada es diu que és idempotent si A2 = A.**

**a) Suposeu que *u* i *v* són vectors unitaris d’*n* tals que *u* i *v* són ortogonals. Sigui Q = uuT + vvT. Proveu que *Q* és una matriu idempotent.**

(1) uuT=1 i vvT=1 Donat que u i v són vectors unitaris el producte d’un vector pel seu vector trasposat és 1.

(2) vTu=0 i uTv=0 Donat que u i v són ortogonals el seu producte és 0.

Finalment,

Q2 = (uuT + vvT)2 = Fem el quadrat de Q

= (uuT + vvT)· (uuT + vvT) =

= uuT·uuT + vvT·uuT + uuT·vvT + vvT·vvT = , desenvolupem el producte

= u·(1)·uT + v·(0)·uT + u·(0)·vT + v·(1)·vT = , substiuïm segons les igualtats (1) i (2)

= uuT + 0+ 0 + vvT = uuT + vvT =

= uuT + vvT = Q i obtenim que Q2 és igual a Q.

Així doncs Q és una matriu idempotent ja que Q2=Q.

**b) Proveu que cada vector (no nul) de la forma *au* + *bv* per *a,b* és un vector propi de valor propi 1 de la matriu *Q*.**

(1) Donat que u i v són vectors unitaris la seva norma és 1.

(2) vTu=0 i uTv=0 Donat que u i v són ortogonals el seu producte és 0.

(3) Q·u = (uuT + vvT)·u = uuTu+ vvTu = Fem el producte de la matriu Q pel vect. u

= uuTu+ 0 = u = u , per les identitats (1) i (2) obtenim que Q·u és igual a u.

(4) Q·v = (uuT + vvT)·v = uuTv+ vvTv = Fem el producte de la matriu Q pel vect. v

= 0 + vvTv = v· = v , per les identitats (1) i (2) obtenim que Q·v és igual a v.

(5) λ·(au + bv) = Suposem que (au + bv) és un VEP

= 1·(au + bv) = au + bv , si el seu VAP és igual a 0, obtenim que Q·(au + bv) es igual al vector (au + bv).

Finalment,

Q·(au + bv) = Qau + Qbv = Fem el producte de la matriu pel vector

= a·Qu + b·Qv = au + bv , i obtenim el vector au + bv.

Així doncs, el vector (au + bv) és un vector propi de Q amb λ=1 per qualsevol a i b , ja que Q·(au+bv) és i gual a λ ·(au+bv) per un VAP = 1.