

Nombre: \_\_\_\_\_ Código: \_\_\_\_\_ Fila: \_\_\_\_\_ Columna: \_\_\_\_\_

1. [20%] **Teoría de enteros** Demuestre el siguiente teorema:

$$b \equiv c \implies b^n \equiv c^n, \text{ para todo } n \geq 0$$

2. [20%] **Conteo** Demuestre o refute:

$$\binom{r+n+1}{n} = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{r+k}{k}$$

3. [20%] Demuestre que:

$$a \triangleleft (x^y) = (a \triangleleft x)^y$$

4. [20%] **Inducción estructural** Demuestre formalmente o refute que el número de hojas de un árbol binario de altura  $n$  es menor o igual que  $2^{n-1}$ .

Una hoja es un nodo tal que, para ese nodo, tanto el subárbol izquierdo como el derecho son vacíos.

No olvide formalizar las funciones que use en su demostración (si no están previamente definidas).

5. [20%] **Inducción sobre naturales** Demuestre o refute el siguiente teorema:

$$\text{Fib}(n)\text{Fib}(m+1) - \text{Fib}(n+1)\text{Fib}(m) = (-1)^m \text{Fib}(n-m), \text{ para todo } n \geq 0, m \leq n$$

### Recuperación parcial 2:

Al desarrollar este punto usted está de acuerdo en que la calificación obtenida en el mismo le sea sumado a la nota que obtuvo en el parcial 2 de la materia.

- [20%] Sea  $R$  una relación definida de la siguiente manera:

$$R : \text{Seq}_n[N] \leftrightarrow \text{Seq}_n[N]$$

$$a R b \equiv \left( \exists f: N \rightarrow N \mid f \text{ es biyectiva: } \left( \forall x \mid 0 \leq x < n: a(f(x)) = b(x) \right) \right)$$

Demuestre o refute que  $R$  es una relación de equivalencia.