MKP - Metoda konečných prvků, cvičení

1. cvičení

Témata: Vektorový prostor, lineární zobrazení, matice, inverzní matice, hodnost, soustava lin. rovnic, vlastní čísla a vektory. Vektorový prostor funkcí. Skalární a vektorové funkce více promenných. Derivace složených funkcí. Diferenciální operátory: gradient, divergence, rotace.

(a) Vektorový prostor funkcí.

(b) Tvoří množina $\{t^2+1,(t+1)^2,(t-1)^2\}$ bázi prostoru P_2? Jakou hodnost má příslušná matice?

(c) Najděte matici přechodu z báze $a:(3\sin(t+\alpha),2\cos(t+\alpha))$ do báze $b:(\sin(t),\cos(t))$ a její inverzní matici. Najděte matici přechodu z báze b do báze a. Matice X_a bilineární formy $X(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ v bázi A je $[1\ 0; 0\ -1]$ nalezněte její matici X_b v bázi b. Jaká budou vlastní čísla a vlastní vektory matice X_b?

(d) Nechť $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$ jsou dané funkce tří proměnných. Transformujte výraz:

$$V=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial z}$$

do "cylindrických"souřadnic:

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad h=2z+1.$$

výsledek:

$$\frac{1}{r}\Big(\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial g}{\partial \varphi}-\frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial g}{\partial r}\Big)+4\frac{\partial f}{\partial h}\frac{\partial g}{\partial h}$$

(e) Je dáno:

$$\partial_a u=b^2,\ \partial_b u=2ab,\ a(x)=1+x^2,\ b(y)=y^2$$

Vypočtěne Jacobiho matici funkce $\boldsymbol{f}(x,y)=[u,-2u+y,u^2]$

(f) Pro polohový vektor (rádius vektor)

$$\boldsymbol{r}=(x,y,z),\quad r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{r_1^2+r_2^2+r_3^2}.$$

spočtěte:

$$\text{a) }\nabla\cdot\boldsymbol{r}\qquad\text{b) }\nabla\times\boldsymbol{r}\qquad\text{c) }\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\qquad\text{d) }\nabla\times\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

Plyne z posledních dvou výsledků porušení Helmholtzovy dekompozice?

(g) Spočtěte $\mathrm{div}(\mathrm{rot}(\boldsymbol{\omega}))$ pro obecné vektorové pole ω.

Další vhodné příklady:

(a) Derivace ve směru - [2] str. 22; 1,2,3

(b) Derivace složené funkce - [2] str. 29; 1,2,3,4

(c) První derivace, 2 nezávisle proměnné - [2] str. 50; 2,3

(d) Polarní souřadnice - [2] str. 52; 8, 10*

0.1 Vektorový počet. Diferenciální operátory.

Rektorys I., 219 - 229
Feynman II., kapitola 2, str. 27 - 44

Vektorová algebra: Eukleidovský prostor R^3, skalarní a vektorový součin
Vektorový počet: gradient, nabla, divergence, rotace (i ve 2d), Laplaceův operátor, skalární a vektorový potenciál

3. cvičení

(a) Pro vektorové pole $\boldsymbol{v}(x, y, z) = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ rychlostí tuhého tělesa rotujícího okolo osy dané vektorem úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}$ spočítejte $\nabla \cdot \boldsymbol{v}$ a $\nabla \times \boldsymbol{v}$. První výsledek odpovídá nestlačitelnosti, druhý ukazuje na geometrický význam rotace — vířivosti.

Další vhodné příklady:

(a) Gradient - [2] str. 223; 1-4,6,8*,13,17a,

(b) Divergence - [2] str. 232; 25, 27, 28-36

(c) Rotace - [2] str. 237; 38-42

0.2 Extrémy, Vázané extrémy, Lagrangeovy multiplikátory.

Rektorys I., 388 - 395 příklady: 65/1, 58/1,2,3

(a) Nalezněte všechny lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = x^3 + \frac{y^3}{8} + 3x^2 - \frac{3}{2}xy + 3x - \frac{3}{2}y + 1$$

(b) Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ na množině $M = \{x + 2y + 3z = 1\}$.

(c) Do polokoule vepište kvádr s maximálním objemem.

Další vhodné příklady:

(a) Extrémy funkcí 2 proměnných - str. 58; 1-9,10*

(b) Extrémy funkcí 3 proměnných - str. 61; 11-14

(c) Vázané extrémy - str. 66; 1,3,5,7,9,11

1 Integrální počet na $\mathbf{R}^N$

1.1 Míra a Lebesgueův integrál

1.2 Oblasti, křivky, plochy, integrovatelné funkce

1.3 Integrace ve 2D a 3D. Fubiniova věta. Substituce.

Rektorys I., 500 - 516

7. cvičení

Pro každý příklad nejprve namalujte oblast, přes kterou se integruje.

(a) Vypočítejte

$$\int_\Omega x^2 + y^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde Ω je omezena přímkami:

$$2x = y,\ y = 2x + 1,\ y = -1,\ y = 1.$$

(b) Vypočtěte

$$\int_\Omega \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde Ω je elipsa

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1.$$

Použijte eliptické souřadnice, určete jakobián.

(c)

$$\int_V xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

kde V je oblast ohraničená plochami

$$x^2 + y^2 + z^2 < 1, \quad x > 0,\ y > 0,\ z > 0.$$

Výpočet proveďte jednak přímo pomocí Fubiniovy věty a dále pomocí substituce do cylindrických, nebo sférických souřadnic.

Další vhodné příklady:

(a) Fubiniho věta: [2] str. 89; 1-7,9,11

(b) Substituce: [2] str. 97; 1-3, 7

1.4 Integrace po křivce a po ploše. Kelvin-Stokesova, Greenova, Gaussova věta.

Rektorys 520 - 531 (bohužel pouze ve složkovém zápisu) Pomocí vektorového zápisu je integrál (1. druhu) ze skalárního pole f podél křivky k dané parametricky funkcí $\boldsymbol{\varphi}(t),\ t \in [\alpha, \beta]$:

$$\int_k f|\,\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}| = \int_\alpha^\beta f\big(\boldsymbol{\varphi}(t)\big)\,|\boldsymbol{\varphi}'(t)|\;\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z)\sqrt{(\varphi'_x)^2 + (\varphi'_y)^2 + (\varphi'_z)^2}\;\mathrm{d}t$$

kde $\boldsymbol{\varphi}'(t)$ je tečný vektor, tj. vektor derivace funkce φ, [2] str. 135.

Podobně pro integrál (1. druhu) ze skalárního pole f podél plochy S dané parametricky funkcí $\boldsymbol{\varphi}(u,v)$, $[u,v] \in M \subset \mathbf{R}^2$:

$$\int_S f|\,\mathrm{d}\boldsymbol{n}| = \int_M f(\boldsymbol{\varphi}(u,v))|\boldsymbol{n}(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_M f(\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z)\sqrt{(n_x)^2 + (n_y)^2 + (n_z)^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

kde $\boldsymbol{n}$ je normála plochy (vektor kolmý k ploše jehož velikost je daná "velikostí elementární plošky"). Normála je rovna vektorovému součinu tečných vektorů:

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{t}_u \times \boldsymbol{t}_v, \quad \boldsymbol{t}_u = \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial u}, \quad \boldsymbol{t}_v = \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial v}.$$

Pozor, pokud plocha není rovina, tak normála a tudíž i její velikost závisí na parametrech u, v, [2] str. 151.

Ve vektorovém zápisu je integrál (2. druhu) z vektorového pole $\boldsymbol{F}$ podél křivky k:

$$\int_k \boldsymbol{F}\cdot\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_\alpha^\beta \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\varphi}(s))\cdot\boldsymbol{\varphi}'(s)\,\mathrm{d}s$$

Integrál vyjadřuje práci pole podél křivky, [2] str. 169. Podobně lze integrál (2. druhu) vektorového pole $\boldsymbol{F}$ skrze plochu S napsat:

$$\int_S \boldsymbol{F}\cdot\,\mathrm{d}\boldsymbol{n} = \int_M \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\varphi}(u,v))\cdot\big(\partial_u\boldsymbol{\varphi}\times\partial_v\boldsymbol{\varphi}\big)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Tento integrál má význam celkového toku pole skrz plochu, [2] str. 192.

Stokesova věta: Pro plochu S ohraničenou uzavřenou křivkou k platí

$$\int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{F}\cdot\,\mathrm{d}\boldsymbol{n} = \int_k \boldsymbol{F}\cdot\,\mathrm{d}\boldsymbol{k}.$$

Gaussova věta: Pro objem V ohraničený plochou S platí

$$\int_V \mathrm{div}\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}V = \int_S \boldsymbol{F}\cdot\,\mathrm{d}\boldsymbol{n}.$$

Greenova věta (integrace per partes):

$$\int_V \partial_x uv\,\mathrm{d}V = \int_S uv\,\mathrm{d}n_x - \int_V u\partial_x v\,\mathrm{d}V$$

$$\int_V (\nabla u)\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V = \int_S uv\cdot\,\mathrm{d}n - \int_V u\mathrm{div}v\,\mathrm{d}V$$

([2] str. 208)

9. cvičení

(a) Spočítejte tok vektorového pole

$$\boldsymbol{F} = (x^3, y^3, z^3)$$

plochou danou rovnicí

$$x^2 + y^2 + z^2 = x.$$

Návod: Použijte Gaussovu větu a substituci do sférických souřadnic. $[\pi/5]$

(b) Spočítejte tok pole $\boldsymbol{F} = (y, x, -z)$ trojúhelníkem $A = (1,0,0)$, $B = (0,2,0)$, $C = (0,0,3)$ orientovaným směrem od počátku. $[3/2]$

Další vhodné příklady:[2] str. 244;

1.5 Aplikace v geometrii a fyzice

Rektorys I., 520 - 551

Délka křivky, plocha plochy je integrál (1. druhu) ze skalárního pole $f(x,y,z)=1$, tj.

$$l=\int_\alpha^\beta |\boldsymbol{\varphi}'(t)|\,\mathrm{d}t,\quad P=\int_M |\boldsymbol{n}(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Hmota křivky nebo plochy je integrál (1. druhu) ze skalárního pole hustoty $\rho(x,y,z)$.

$$M=\int_k \rho(x,y,z)|\,\mathrm{d}\varphi|,\quad M=\int_S \rho(x,y,z)|\,\mathrm{d}\boldsymbol{n}|$$

Souřadnice těžiště křivky nebo plochy je vektor (T_x,T_y,T_z) integrálů (1. druhu !!) z vektoru skalárních funkcí $x\rho(x,y,z)$, $y\rho(x,y,z)$, $z\rho(x,y,z)$ dělený celkovou hmotou M. Např. pro plochu S:

$$T_x=\frac{1}{M}\int_S x\rho(x,y,z)|\,\mathrm{d}\boldsymbol{n}|,\quad T_y=\frac{1}{M}\int_S y\rho(x,y,z)|\,\mathrm{d}\boldsymbol{n}|,\quad T_z=\frac{1}{M}\int_S z\rho(x,y,z)|\,\mathrm{d}\boldsymbol{n}|.$$

Moment setrvačnosti vzhledem k ose o je integrál (1. druhu) ze skalární funkce $f(x,y,z)=r^2\rho(x,y,z)$, kde r je vzdálenost bodu $[x,y,z]$ od osy o. Bývá vhodné použít cylindrické souřadnice okolo osy o.

Práce síly po křivce. Integrál 2. druhu z vektorové funkce síly. **Tok kapaliny skrze plochu za jednotkový čas.** Integrál 2. druhu z vektorového pole rychlosti.

(a) Spočítejte moment setrvačnosti kuželolvé plochy $x^2+y^2-4z^2=0$, $0<z<\frac{1}{2}$ s hustotou $\rho(x,y,z)=z$ vzhledem k přímce $\{y=0,\ z=\frac{1}{2}\}$. Návod: Použijte cylindrické souřadnice pro parametrické vyjádření plochy. $[\pi\sqrt{5}13/(20*12)]$

(b) Spočítejte práci elastické síly směřující do počátku o velikosti dvojnásobku vzdálenosti do počátku podél šroubovice $\{3\cos 2t, 3\sin 2t, t\}$, $0<t<2\pi$. Vysvětlete proč je výsledek záporný. $[-4\pi^2]$

Další vhodné příklady:[2] str. 112, str. 248; 199/12 (hmotnost), 249/58 (hmotnost), 122/20 …(3D momenty), 159/11 (skořepina),

2 Všehochuť

2.1 Laplaceova transformace, Fourierovy řady.

2.2 Rovnice vedení tepla, rovnice kontinuity.

Další vhodné příklady:[3] - Laplaceova transformace
[1] 574 - 584 - Fourierovy řady
[2] str. 249, 58 - rovnice vedení tepla; 59 - rovnice kontinuity

3 Mechanika tekutin

3.1 Stavové proměnné, rovnice kontinuity, Eulerovy a Navier-Stokesovy rovnice

3.2 Zjednodušené modely: Bernuliho rovnice, porézní prostředí

* [5] Horský, J., Novotný, J., Štefaník, M.: Mechanika ve fyzice, Academia, Praha, 2001. Feynman I.

14. přednáška

4 Elektromagnetismus

Elektromagnetická indukce, Faradayův zákon, Magnetické pole, Maxwellovy rovnice Kapitoly z Feynmana: 1 (základní zákony bez formalismu), 2 a 3 - vektorový, diferenciální a integrální počet prakticky, 4 - Maxwellovy rovnice 12 - aplikace Laplaceovy rovnice, 13 a 14 - pouze vybrane, 18 finalni Maxwelovy rovnice [4], [5]

5 Požadavky ke zkoušce

Vypracovanáa odevzdaná (nejpozději při zkoušce) zadaná cvičení z přednášek 1-7 (viz. výše). Dále si připravit celkem tři témata. Po jednom z okruhů 1, 2, 3. Zkouška bude probíhat ústně.

1. (a) Funkce více proměnných: limita, spojitost, parciální derivace, totální diferenciál
   (b) Derivace složených funkcí. Transformace diferenciálních výrazů při změně souřadnic. Cylindrické a sférické souřadnice.
   (c) Extrémy funkcí více proměnných: nevázané a vázané extrémy, extrémy na omezené oblasti, rozpoznání minima, maxima, sedla
2. (a) Vektorový počet: součiny, vektorové pole, operátory ∇, div, rot
   (b) Lesgueova míra a integrál (základní idea), Fubiniho věta, věta o substituci
   (c) Integrace podél křivky a podél plochy, integrály I. a II. druhu, "Stokesovy věty"
3. (a) Aplikace integrálů ve fyzice: hmota, těžiště, momenty, tok pole skrze plochu, práce pole podél křivky, rovnice vedení tepla, rovnice kontinuity
   (b) Laplaceova transformace. Fourierovy řady.
   (c) Elektřina a magnetismus: náboj q a proudová hustota $\boldsymbol{J}$, stavové veličiny elektro magnetického pole: $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{B}$, parametry μ, ε; pohyb náboje v elektromagnetiském poli, Lorentzova síla, umět zjednodušit úplný systém Maxwell rovnic v případech elektrostatického a stacionárního proudového pole; Ohmův zákon, odpor, vodivost

Reference

[1] K. Rektorys a spol. : *Přehled užité matematiky.* Prometheus, Praha, 1995.

[2] `http://euler.fd.cvut.cz/predmety/ml2/files/MA2_CV.pdf`(originál), `http://morf.matfyz.cz/vyuka/mft/MA2_CV.pdf`(kopie)

[3] J. Veit: *Integrální transformace.* SNTL, Praha, 1979.

[4] R. Feynman: *Přednášky z fyziky II.*, Fragment, 2001

[5] B. Sedlák,I. Štoll :*Eletřina a magnetismus.* Academia, Praha, 2002..