MKP - Metoda konečných prvků, cvičení

1 Opakování

Témata: Vektorový prostor, lineární zobrazení, matice, inverzní matice, hodnost, soustava lin. rovnic, vlastní čísla a vektory. Vektorový prostor funkcí. Skalární a vektorové funkce více promenných. Derivace složených funkcí. Diferenciální operátory: gradient, divergence, rotace.

Příklady k řešení:

1. Vektorový prostor funkcí.
2. Tvoří množina $\{t^2+1, (t+1)^2, (t-1)^2\}$ bázi prostoru P_2? Jakou hodnost má příslušná matice?
3. Najděte matici přechodu z báze $a : (3\sin(t+\alpha), 2\cos(t+\alpha))$ do báze $b : (\sin(t), \cos(t))$ a její inverzní matici. Najděte matici přechodu z báze b do báze a. Matice X_a bilineární formy $X(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ v bázi A je $[1\ 0; 0\ \ -1]$ nalezněte její matici X_b v bázi b. Jaká budou vlastní čísla a vlastní vektory matice X_b?
4. Nechť $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$ jsou dané funkce tří proměnných. Transformujte výraz:

   $$V = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial z}$$

   do "cylindrických"souřadnic:

   $$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad h = 2z + 1.$$

   výsledek:

   $$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial g}{\partial \varphi} - \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial g}{\partial r}\right) + 4\frac{\partial f}{\partial h}\frac{\partial g}{\partial h}$$
5. Je dáno:

   $$\partial_a u = b^2,\ \partial_b u = 2ab,\ a(x) = 1 + x^2,\ b(y) = y^2$$

   Vypočtěne Jacobiho matici funkce $\boldsymbol{f}(x, y) = [u, -2u + y, u^2]$
6. Pro polohový vektor (rádius vektor)

   $$\boldsymbol{r} = (x, y, z), \quad r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}.$$

   spočtěte:

   $$\text{a) } \nabla \cdot \boldsymbol{r} \qquad \text{b) } \nabla \times \boldsymbol{r} \qquad \text{c) } \nabla \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \qquad \text{d) } \nabla \times \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

   Plyne z posledních dvou výsledků porušení Helmholtzovy dekompozice?
7. Spočtěte $\mathrm{div}(\mathrm{rot}(\boldsymbol{\omega}))$ pro obecné vektorové pole ω.

Příklady doplňující

1. Derivace složené funkce - [2] str. 29; 1,2,3,4
2. První derivace, 2 nezávisle proměnné - [2] str. 50; 2,3
3. Polarní souřadnice - [2] str. 52; 8, 10*
4. Diferenciální operátory, vektorový počet: [2] str. 221,
5. Gradient - [2] str. 223; 1-4,6,8*,13,17a,
6. Divergence - [2] str. 232; 25, 27, 28-36
7. Rotace - [2] str. 237; 38-42

2 Integrace po křivce a po ploše. Stokesova, Greenova, Gaussova věta.

Křivkový integrál 1. druhu ze skalárního pole f podél křivky k dané parametricky funkcí $\boldsymbol{\varphi}(t),\ t \in [\alpha, \beta]$ ([2] str. 135):

$$\int_k f\,\mathrm{d}k = \int_\alpha^\beta f\big(\boldsymbol{\varphi}(t)\big)\,|\boldsymbol{\varphi}'(t)|\ \mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z)\sqrt{(\varphi_x')^2 + (\varphi_y')^2 + (\varphi_z')^2}\ \mathrm{d}t.$$

Křivkový integrál 2. druhu z vektorového pole $\boldsymbol{F}$ (práce pole podél křivky, [2] str. 169):

$$\int_k \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t}\,\mathrm{d}k = \int_\alpha^\beta \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\varphi}(s))\cdot\boldsymbol{\varphi}'(s)\,\mathrm{d}s.$$

Plošný integrál 1. druhu ze skalárního pole f podél plochy S dané parametricky funkcí $\boldsymbol{\varphi}(u,v), [u,v] \in M \subset \mathbf{R}^2$ ([2] str. 151):

$$\int_S f\,\mathrm{d}S = \int_M f(\boldsymbol{\varphi}(u,v))|\boldsymbol{N}(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_M f(\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z)\sqrt{(N_x)^2 + (N_y)^2 + (N_z)^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

kde $\boldsymbol{N}$ je normála plochy (vektor kolmý k ploše jehož velikost je daná "velikostí elementární plošky"). Normála je rovna vektorovému součinu tečných vektorů:

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{t}_u \times \boldsymbol{t}_v, \quad \boldsymbol{t}_u = \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial u}, \quad \boldsymbol{t}_v = \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial v}.$$

Pozor, pokud plocha není rovina, tak normála a tudíž i její velikost závisí na parametrech u, v.

Plošný integrál 2. druhu z vektorového pole $\boldsymbol{F}$ (celkový tok pole skrz plochu, [2] str. 192):

$$\int_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \int_M \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\varphi}(u,v))\cdot\big(\partial_u\boldsymbol{\varphi}\times\partial_v\boldsymbol{\varphi}\big)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Veličina	Křivka	Plocha
Délka/plocha	$L = \int_k \mathrm{d}k$	$P = \int_S \mathrm{d}S$
Hmotnost	$M = \int_k \rho\,\mathrm{d}k$	$M = \int_S \rho\,\mathrm{d}S$
Poloha těžiště	$\boldsymbol{T} = \frac{1}{M}\int_k \boldsymbol{x}\rho\,\mathrm{d}k$	$\boldsymbol{T} = \frac{1}{M}\int_S \boldsymbol{x}\rho\,\mathrm{d}S$
Moment setrvačnosti	$I_z = \frac{1}{M}\int_k (x_x^2 + x_y^2)\rho\,\mathrm{d}k$	$I_z = \frac{1}{M}\int_S (x_x^2 + x_y^2)\rho\,\mathrm{d}S$

<u>Stokesova věta</u>: Pro plochu S ohraničenou uzavřenou křivkou k platí:

$$\int_S (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \int_k \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t}\,\mathrm{d}k.$$

<u>Gaussova věta</u>: Pro objem V ohraničený plochou S platí:

$$\int_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}V = \int_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S.$$

<u>Greenova věta</u> (integrace per partes): Pro objem V ohraničený plochou S platí:

$$\int_V \partial_x uv\,\mathrm{d}V = \int_S uvn_x\,\mathrm{d}S - \int_V u\partial_x v\,\mathrm{d}V$$

$$\int_V (\nabla u)\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V = \int_S u\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S - \int_V u\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V$$

Příklady k řešení:

1. Šroubovice má poloměr r a výšku závitu h. Spočtěte délku jejího závitu, polohu těžiště a moment setrvačnosti vzhledem k ose šroubovice.
   [$L = \sqrt{(2\pi r)^2 + h^2}$, $\boldsymbol{T} = (0, 0, h/2)$, $I = r^2$]

2. Spočtěte hmotnost a polohu těžiště polosféry

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad z \geq 0,$$

   jejíž hustota je $\rho(x, y, z) = \frac{z}{a}$.
   [πa^2, $(0, 0, \frac{2}{3}a)$]

3. Spočítejte tok vektorového pole

$$\boldsymbol{F} = (x + y^3, y + z^3, z + x^3)$$

   plochou danou rovnicí

$$x^2 + y^2 + z^2 = x.$$

   Návod: Použijte Gaussovu větu a substituci do sférických souřadnic. [$\pi/2$]

4. Pomocí Stokesovy věty vypočtěte integrál

$$\int_k (y + z, z + x, x + y) \cdot \boldsymbol{t} \, \mathrm{d}k,$$

   kde k je elipsa $x = a \sin^2 t$, $y = 2a \sin t \cos t$, $z = a \cos^2 t$, $0 \leq t \leq \pi$, orientovaná ve směru rostoucího parametru t. [0]

5. Ukažte, že pravidlo "per partes"je speciální případ Greenovy věty.

6. Nechť plocha S ohraničuje objem V. Pomocí Gaussovy věty dokažte, že pro hladké vektorové pole $\boldsymbol{u}$ platí:

$$\int_S (\mathrm{rot}\, \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S = 0.$$

7. Nechť u je řešením okrajové úlohy

$$-\operatorname{div}(\mathbb{A}\nabla u) = f \text{ ve } V, \quad (\mathbb{A}\nabla u) \cdot \boldsymbol{n} = g \text{ na } S,$$

   kde plocha S ohraničuje objem V a $\mathbb{A}, f, g$ jsou zadané funkce. Pomocí Greenovy věty ukažte, že pro libovolnou hladkou funkci v platí rovnost:

$$\int_V \mathbb{A}\nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}V = \int_S g v \, \mathrm{d}S + \int_V f v \, \mathrm{d}V.$$

Příklady doplňující:

1. Fubiniho věta: [2] str. 89 (př: 1-7,9,11)
2. Substituce: [2] str. 97 (př: 1-3, 7)
3. Aplikace integrálů: [2] str. 112-134
4. Křivkové integrály: [2] str. 135-150; str. 169-191
5. Plošné integrály: [2] str. 150-168; str. 192-196; str. 248; 199/12 (hmotnost), 249/58 (hmotnost), 122/20... (3D momenty), 159/11 (skořepina),
6. Greenova věta: [2] str. 197-207;
7. Gaussova, Stokesova věta: [2] str. 208-220; 244/48, 245/51, 246/52, 247/54

3 Matematické modely. Klasifikace PDR, vlastnosti řešení.

3.1 Rovnice kmitů struny

Odvoďte rovnici pro rovinné kmity struny. Výchylka struny v čase t a bodě x v intervalu $(0,1)$ je dána funkcí $u(t,x)$.

1. Načrtněte si element struny mezi body a, b. Jakými silami působí okolí struny na tento element. Vypočtěte při znalosti výchylky $u(t,\,\cdot\,)$ horizontální a vertikální sílu působící na element.
2. Použijte druhý Newtonův zákon pro změnu hybnosti elementu (integrál 1. druhu) v horizontalním a vertikálním směru. Odvoďte "integrální formulaci"pro výchylku u.
3. Odvoďte bodovou formulaci rovnice. pro výchylku u.

3.2 Chování parabolických a hyperbolických rovnic

Na stránce `http://math.uchicago.edu/~luis/pde/` pozorujte chování vlnové rovnice a rovnice vedení tepla. Vždy nejprve odhadněte jak se řešení bude chovat a pak teprve spusťte simulaci.

1. Pro řešič vlnové rovnice. Spusťte simulaci pro výchozí nastavení. Počáteční podmínka se skládá z výchylku u a její časové derivace $\partial_t u$.
2. Upravte $\partial_t u(0,\cdot)$ tak aby vlna na počátku směřovala doprava.
3. Co se stane, když nezadáte rychlost? Jaké reálné situaci to odpovídá?
4. Demonstrujte, že neplatí princip maxima.
5. Pokuste se fyzikálně interpretovat Dirichletovu a Neumannovu okrajovou podmínku.

1. Pro řešič rovnice vedení tepla. Spusťte simulaci pro výchozí nastavení. Počáteční podmínka je pouze počáteční teplota v každém bodě $u(0,x)$.
2. Nastavte Neumannovu OKP (odpovídá tepelné izolaci). Nastavte na jedné straně skok z 1 na 0. Teplo jen na jedné straně. Co očekáváte?
3. Nastavte poč. podmínku s množstvím různých skoků? Co očekáváte?
4. Pozorujte zachování principu maxima v různých případech.
5. Jaká je interpretace Dirichletovy okrajové podmínky.

3.3 Fourierova metoda pro rovnici vedení tepla

Řešte rovnici vedení tepla, na oblasti $\Omega = (0,1) \subset \mathbf{R}$ a pro čas $t \geq 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,y) \tag{3.1}$$

okrajové podmínky

$$u(t,0) = u(t,1) = 0 \tag{3.2}$$

Počáteční podmínka:

$$u(0,y) = y \tag{3.3}$$

1. Proveďte separaci proměnných. Hledejte všechna řešení ve tvaru $u(t,y) = T(t)Y(y)$. Dosaďte do (3.7), nalezněte řešení pro T a Y.

2. Použijte okrajovou podmínku (3.8). Pro omezení konstanty λ a tím prostoru řešení.
3. Použijte princip superpozice (platí pro lineární PDR).
4. Napište obecné řešení ve formě Fourierovy řady a použijte počáteční podmínku (3.6).
5. Určete koeficienty fourierovy řady $b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(y)\sin(ky)$. Požijete `https://www.wolframalpha.com`.

3.4 Fourierova metoda pro vlnovou rovnici

Řešte vlnovou rovnici, na oblasti $\Omega = (0,1) \subset \mathbf{R}$ a pro čas $t \geq 0$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,y) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,y) \tag{3.4}$$

okrajové podmínky

$$u(t,0) = u(t,1) = 0 \tag{3.5}$$

Počáteční podmínky:

$$u(0,y) = y,\ \partial_t u(0,y) = 0 \tag{3.6}$$

1. Proveďte separaci proměnných. Hledejte řešení ve tvaru $u(t,y) = T(t)Y(y)$, dosaďte do (3.7), nalezněte řešení pro T a Y.
2. Použijte okrajovou podmínku (3.8). Pro omezení počtu řešení na spočetně mnoho.
3. Napište obecné řešení ve formě Fourierovy řady a použijte počáteční podmínku (3.6).
4. Určete koeficienty Fourierovy řady.

3.5 Fourierova metoda pro Laplaceovu rovnici

Řešte Laplaceovu rovnici, na oblasti $\Omega = (0,\pi) \times (0,\pi)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = f(x,y) \tag{3.7}$$

okrajové podmínky

$$u(0,y) = u(1,y) = 0, \quad \partial_y u(x,0) = \partial_y u(x,1) = 0 \tag{3.8}$$

4 Slabé řešení a úvod do metody konečných prvků

4.1 Slabé řešení

Nechť f je zadaná spojitá funkce. Okrajová úloha

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x) \qquad \text{pro } x \in (0,1), \\ u(0) &= u(1) = 0, \end{aligned} \tag{4.1}$$

je prototypem úlohy, popisující např. průhyb struny nebo vedení tepla. V jedné prostorové dimenzi umíme úlohu na intervalu vyřešit analyticky, pokud rovnici dvakrát integrujeme. Pro analogickou úlohu na obecné oblasti ve 2D nebo 3D však *klasické* řešení najít neumíme, a proto místo něj hledáme řešení *slabé*. Při definici slabého řešení budeme používat množinu funkcí

$$\mathcal{V} := \{v \in C([0,1]);\ v' \text{ je po částech spojitá},\ v(0) = v(1) = 0\}$$

a skalární součin

$$(u,v) := \int_0^1 u(x)v(x)\ \mathrm{d}x.$$

Ve slabé formulaci úlohy (4.1) hledáme funkci $u \in \mathcal{V}$, splňující

$$\forall v \in \mathcal{V}:\ (u',v') = (f,v). \tag{V}$$

1. Odvoďte vztah (V):
   - Vynásobte $(4.1)_1$ číslem $v(x)$, kde $v \in \mathcal{V}$.
   - Rovnici integrujte přes interval $(0,1)$ a levou stranu upravte pomocí integrace per partes.
2. Ukažte, že pokud slabé řešení $u \in \mathcal{V}$ má na intervalu $(0,1)$ spojitou 2. derivaci, pak je také klasickým řešením.
3. Ukažte, že formulace (V) je ekvivalentní úloze minimalizace funkcionálu $F(u) := \frac{1}{2}(u',u') - (f,u)$:
   $$\text{Najdi } u \in \mathcal{V} \text{ takové, že } \forall v \in \mathcal{V}:\ F(u) \le F(v). \tag{M}$$
4. Ukažte, že nemohou existovat dvě různá slabá řešení úlohy (4.1).
5. Odvoďte slabou formulaci pro úlohu
   $$-u''(x) + u(x) = f(x) \text{ pro } x \in (0,1), \quad u'(0) = u'(1) = 0.$$
6. * Odvoďte slabou formulaci pro úlohu 4. řádu
   $$u^{(4)}(x) = f(x) \text{ pro } x \in (0,1), \quad u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0,$$
   která popisuje průhyb nosníku.
7. * Odvoďte slabou formulaci pro úlohu
   $$-\operatorname{div}(\mathbb{A}\nabla u) = f \text{ ve } V, \quad (\mathbb{A}\nabla u)\cdot \boldsymbol{n} = g \text{ na } S,$$
   kde plocha S ohraničuje objem V a $\mathbb{A}, f, g$ jsou zadané funkce.

4.2 Metoda konečných prvků

Nyní zavedeme podprostor $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$ s konečnou dimenzí, tvořený po částech lineárními funkcemi.

- Rozdělíme interval $(0,1)$ pomocí bodů $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_M < x_{M+1} = 1$ na podintervaly $I_j = (x_{j-1}, x_j)$. Délku I_j označíme $h_j := x_j - x_{j-1}$ a definujeme $h := \max h_j$.

- Prostor $\mathcal{V}_h$ definujeme jako množinu všech spojitých funkcí v, které jsou na každém podintervalu I_j lineární, a navíc $v(0) = v(1) = 0$.
- Bázi $\mathcal{V}_h$ definujeme jako funkce $\varphi_i \in \mathcal{V}_h$, určené podmínkami $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$. Libovolnou funkci $v \in \mathcal{V}_h$ pak můžeme zapsat ve tvaru
$$v(x) = \sum_{j=1}^{M} \xi_j \varphi_j(x),\ \xi_j = v(x_j).$$
Vektorový prostor $\mathcal{V}_h$ má tedy dimenzi M.

Metodu konečných prvků pro úlohu (4.1) nyní můžeme formulovat následovně:

$$\text{Najdi } u_h \in \mathcal{V}_h \text{ takové, že } \forall v \in \mathcal{V}_h :\ (u_h', v') = (f, v). \tag{V_h}$$

Nebo alternativně:

$$\text{Najdi } u_h \in \mathcal{V}_h \text{ takové, že } \forall v \in \mathcal{V}_h :\ F(u_h) \le F(v_h). \tag{M_h}$$

První formulaci říkáme *Galerkinova* metoda, druhé *Ritzova* metoda.

8. Vypočítejte skalární součiny (φ_i, φ_j), $i, j = 1, ..., M$.
9. Pro u_h ve tvaru $u_h(x) = \sum_{j=1}^{M} \xi_j \varphi_j(x)$ formulujte úlohu (V_h) jako soustavu lineárních rovnic pro $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, ..., \xi_M)^\top$.
10. Určete matici soustavy z předchozího cvičení pro případ ekvidistantního dělení intervalu, tj. $h_j = h$. Ukažte, že tato matice je symetrická a pozitivně definitní (tj. $\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbb{A}\boldsymbol{\eta} > 0$ pro každé $\boldsymbol{\eta} \in \mathbf{R}^M \setminus \{\mathbf{0}\}$).
11. Uvažujte prostor $\mathcal{V}_h$ tvořený spojitými funkcemi, které jsou na každém i_j kvadratické. Jak lze zvolit parametry popisující tyto funkce? Najděte vhodnou bázi. Formulujte metodu konečných prvků s tímto prostorem a pro ekvidistantní dělení intervalu odvoďte tvar matice soustavy.

4.3 Slabé řešení, praktický problém

Kolonavý experiment probíhá ve skleněném válci o průměru R, ve válci je do výšky h_s hrubý štěrk (hydraulická vodivost k_s) a nad ním je vrstva písku o mocnosti h_p (hydraulická vodivost) k_p. Stěna válce okolo vrstvy písku je perforovaná a obalená membránou, na které byl při tlakovém rozdílu 1 Pa naměřen tok $5e - 6m^3/s$ na m^2 plochy. Na horní podstavě (na povrchu písku), je udržována hladina vody. Spodní podstava je preforovaná a je naměřen konstantní tok vody $1e{-}6m^3/s$. Navrhněte výpočetní oblast, a rozdělení hranice podle druhů okrajových podmínek. Sestavte rovnice popisující rozložení tlaku a rychlosti ve válci. Napište okrajové podmínky. Odvoďte slabou formulaci úlohy.

5 Normovaný lineární prostor

1. Zjistěte, zda následující zobrazení jsou lineární, resp. bilineární formy:

$$l_1(u) = \int_0^1 (u(x)+1)\ dx,\ \ u \in C([0,1]),$$

$$l_2(u) = u(0) + \int_{\frac{1}{2}}^1 u'(x)\ dx,\ \ u \in C^1([0,1]),$$

$$l_3(u) = \int_0^1 u^2(x)\ dx,\ \ u \in C([0,1]);$$

$$a_1(u,v) = \int_0^1 u(x)v'(x)\ dx,\ \ u,v \in C^1([0,1]),$$

$$a_2(u,v) = \int_0^1 xu'(x)v'(x)\ dx,\ \ u,v \in C^1([0,1]).$$

   Je některá z bilineárních forem skalárním součinem?

2. Ověřte, že $\|\ \|_\infty$ je norma na $C(\overline{\Omega})$.

3. Pomocí definice ukažte, že norma je nezáporná funkce.

4. Množiny v $\mathbf{R}^2$ ...

5. Zjistěte, zda následující posloupnosti mají bodovou limitu a pokud ano, ověřte, zda konvergují v $\|\ \|_2$ a $\|\ \|_\infty$:

$$u_n(x) = x^n \text{ na } [0,1], \qquad v_n(x) = x^2 + x/n \text{ na } [-1,1], \quad w_n(x) = \begin{cases} n; & x \in [0, 1/n^3] \\ x^{-1/3}; & x \in (1/n^3; 1], \end{cases}$$

$$z_n(x) = \sqrt{\cos(\frac{x}{n})e^{-x}} \text{ na } [-1,1].$$

6 Lax-Milgramovo lemma, vlastnosti forem

... viz. příklady z kapitoly 12 textů k přednášce.

7 Implementace Galerkinovy metody pro 1d prvky

Chceme řešit rovnici vedení tepla na $\Omega = (0, L)$, Γ_d je v 0, Γ_n je v L.

$$-\operatorname{div}(\mathbb{K}\nabla u) = \sigma(u_f - u) \qquad \text{v } \Omega, \tag{7.1}$$

$$u = u_d \qquad \text{v bodě } 0, \tag{7.2}$$

$$-\mathbb{K}\nabla u \cdot \boldsymbol{n} = -q \qquad \text{v bodě } L. \tag{7.3}$$

Jelikož aplikace Dirichletovy podmínky na levém okraji je v MKP trochu komplikovanější, aproximujeme pro začátek tuto podmínku pomocí Robinovy podmínky:

$$-\mathbb{K}\nabla u \cdot \boldsymbol{n} = (u - u_d)/\epsilon \qquad \text{v bodě } 0,$$

kde ϵ je dostatečně malé kladné číslo. Na pravém okraji aplikujeme Neumannovu podmínku, ale zde s konvencí $q > 0$ pro tok dovnitř oblasti.

Abstraktní variační úloha:

$$\text{Najdi } u \in H^1_{\Gamma_d}(\Omega): \ \forall v \in H^1(\Omega): \ a(u, v) = b(v),$$

kde formy $a(\cdot, \cdot)$ a $b(\cdot)$ mají tvar:

$$a(u, v) := (Ku', v')_{L^2(\Omega)} + (\sigma u, v)_{L^2(\Omega)} + u(0)v(0)/\epsilon, \tag{7.4}$$

$$b(v) := (\sigma u_f, v)_{L^2(\Omega)} + qv(L) + u_d v(0)/\epsilon. \tag{7.5}$$

Nyní předpokládejme konečný podprostor $\tilde{V} \subset H^1(\Omega)$ s bází $\{v_i,\ i \in I\}$. Aplikujte na úlohu Galerkinovu metodu a odvoďte předpis pro matici a pravou stranu. Diskrétní řešení uvažujeme ve tvaru:

$$\tilde{u}(x) = \sum_{j \in I} u_j v_j(x)$$

Diskrétní podobu variační úlohy dostaneme dosazením $\tilde{u}(x)$ a testováním $v_i(x)$:

$$a(\tilde{u}, v_i) = \sum_{j \in I} a(v_i, v_j) u_j = b(v_i)$$

Odtud dostaneme prvky matice a pravé strany Zde a dále uvažujeme konstantní data K, σ, u_f.

$$a_{ij} = a(v_i, v_j) = K \int_0^L v_i'(x) v_j'(x) \, \mathrm{d}x + \sigma \int_0^L v_i(x) v_j(x) \, \mathrm{d}x + v_i(0) v_j(0)/\epsilon \tag{7.6}$$

$$b_i = b(v_i) = \sigma u_f \int_0^L v_i(x) \, \mathrm{d}x + q v_i(L) + u_d v_i(0)/\epsilon. \tag{7.7}$$

Pro výpočet integrálů a sestavení soustavy již potřebujeme zvolit konkrétní konečné prvky. V našem případě bude prostor $\tilde{V}$ tvořen bázovými funkcemi lineárních konečných prvků. Interval $(0, L)$ rozdělíme pomocí bodů $x_1, \ldots, x_{n+1}$ na n podintervalů (elementů) $e_i = (x_i, x_{i+1})$. Bázové funkce jsou po částech lineární na elementech, funkce v_i je nenulová pouze na elementech e_{i-1} a e_i. Speciálně je nutno uvažovat krajní funkce v_1 a v_{n+1}, které jsou nenulové pouze na e_1, resp. e_n. Nyní můžeme integraci rozdělit na jednotlivé elementy. Postup si ukážeme pro druhý integrál v rovnici (7.6) :

$$a^\sigma_{i,j} = \int_0^L v_i(x) v_j(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_{e_k} v_i(x) v_j(x).$$

Integrací přes jeden element e_k získáme takzvanou lokální matici $\mathbb{A}^k$. Jelikož jsou na elementu e_k nenulové pouze funkce v_k a v_{k+1} (platí včetně krajních elementů), má matice $\mathbb{A}^k$ pouze čtyři nenulové prvky na pozicích (k, k), $(k, k+1)$, $(k+1, k)$, $(k+1, k+1)$. Podobně bude vektor $\boldsymbol{b}$ složen z příspěvků na jednotlivých elementech, kde lokální vektor pravé strany na elementu e_k má nenulové pouze prvky na pozicích k a $k+1$.

$$\left[\begin{array}{c:c:c:c}
\ddots & \mathbb{A}^{k-1} & 0 & \ddots \\ \hdashline
\mathbb{A}^{k-1} & \mathbb{A}^{k-1} + \mathbb{A}^k & \mathbb{A}^k & 0 \\ \hdashline
0 & \mathbb{A}^k & \mathbb{A}^k + \mathbb{A}^{k+1} & \mathbb{A}^{k+1} \\ \hdashline
\ddots & 0 & \mathbb{A}^{k+1} & \ddots
\end{array}\right]
\qquad
\left[\begin{array}{c}
\vdots \\ \hdashline
\boldsymbol{b}^{k-1} + \boldsymbol{b}^k \\ \hdashline
\boldsymbol{b}^k + \boldsymbol{b}^{k+1} \\ \hdashline
\vdots
\end{array}\right]$$

Dále provedeme na každém elementu e_k lineární substituci $x = (x_{k+1} - x_k)t + x_k$, $\mathrm{d}x = |e|\,\mathrm{d}t$, kde $|e| = x_{k+1} - x_k$ je velikost elementu. Substituce převede integrály na různých elementech na integrály přes interval $(0, 1)$ (tzv. referenční element) a dostaneme bázové funkce dané pomocí jednoduchých lineárních funkcí $\varphi_0(t) = 1 - t$ a $\varphi_1(t) = t$. Pro čtyři nenulové prvky lokální matice pak dostaneme vztah:

$$A^{\sigma,k}_{k+i,k+j} = \int_{e_k} v_{k+i}(x)v_{k+j}(x)\,\mathrm{d}x = |e_k| \int_0^1 \varphi_i(t)\varphi_j(t)\,\mathrm{d}t,$$

kde $i, j = 0, 1$. Při transformaci na referenční element je třeba správně transformovat derivace. Platí:

$$\partial_x v(x) = \partial_t \varphi(t) \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \partial_t \varphi(t)/|e|$$

Pro první integrál v (7.6) pak máme:

$$A^{K,k}_{k+i,k+j} = \int_{e_k} v'_{k+i}(x)v'_{k+j}(x)\,\mathrm{d}x = |e_k| \int_0^1 \left[\varphi'_i(t)/|e_k|\right]\left[\varphi'_j(t)/|e_k|\right]\mathrm{d}t$$

opět pro $i, j = 0, 1$. Po transformaci na referenční element dostaneme následující vztahy pro výpočet prvků lokální matice A^l a lokálního příspěvku pravé strany b^l na elementu e:

$$A^l_{00} = K_e/|e| \int_0^1 (-1)(-1) + \sigma_e|e| \int_0^1 (1-t)^2$$

$$A^l_{11} = K_e/|e| \int_0^1 (1)(1) + \sigma_e|e| \int_0^1 (t)^2$$

$$A^l_{01} = A^l_{10} = K_e/|e| \int_0^1 (1)(-1) + \sigma_e|e| \int_0^1 (1-t)t$$

$$b^l_0 = \sigma_e u_{fe}|e| \int_0^1 (1-t)$$

$$b^l_1 = \sigma_e u_{fe}|e| \int_0^1 t$$

V případě konstantních koeficientů K a σ a pro stejné velikosti elementů $|e_k| = h = L/n$ budou všechny lokální matice i pravé strany stejné. Pro další výpočet použijeme integrály:

$$\int_0^1 (1-t)^2 = \int_0^1 (t)^2 = 1/3, \quad \int_0^1 (1-t)t = 1/6, \quad \int_0^1 (1-t) = \int_0^1 t = 1/2$$

Dostaneme:

$$A^l_{00} = K/h + \sigma h/3$$
$$A^l_{11} = K/h + \sigma_e h/3$$
$$A^l_{01} = A^l_{10} = -K/h + \sigma h/6$$
$$b^l_0 = \sigma u_f h/2$$
$$b^l_1 = \sigma u_f h/2$$

Na prvním elementu e_1 musíme navíc aplikovat Robinovu okrajovou podmínku $v_i(0)v_j(0)/\epsilon$ z (7.6). Jelikož tento člen je nenulový pouze pro $i = j = 0$, musíme k prvku $a_{0,0}$ globální matice přičíst $1/\epsilon$. Na elemenu e_1 proto bude:

$$A^l_{00} = K/h + \sigma h/3 + 1/\epsilon$$

Podobně člen $u_d v_i(0)/\epsilon$ v (7.7) je nenulový pouze pro $i = 0$ a k prvku b_0 globální pravé strany je třeba přičíst u_d/ϵ, předpis pro b^l_0 na elementu e_1 bude:

$$b^l_0 = \sigma u_f h/2 + u_d/\epsilon$$

Na posledním elementu musíme aplikovat Neumannovu podmínku. Lokální příspěvek pravé strany na elementu e_n bude:

$$b^l_1 = \sigma u_f h/2 + q$$

Po sečtení všech lokálních matic a aplikování okrajových podmínek dostaneme následující vtahy pro jednotlivé prvky matice a pravé strany:

$$a_{i,i} = 2K/h + 2\sigma h/3$$
$$a_{i,i-1} = -K/h + \sigma h/6$$
$$a_{i,i+1} = -K/h + \sigma h/6$$
$$b_i = \sigma u_f h$$

Pro $i = 1$ dostaneme odlišné předpisy:

$$a_{i,i} = K/h + \sigma h/3 + 1/\epsilon$$
$$a_{i,i+1} = -K/h + \sigma h/6$$
$$b_i = \sigma u_f h/2 + u_d/\epsilon$$

Podobně pro $i = n + 1$ dostaneme předpisy:

$$a_{i,i} = K/h + \sigma h/3$$
$$a_{i,i-1} = -K/h + \sigma h/6$$
$$b_i = \sigma u_f h/2 + q$$

7.0.1 Zdrojové kódy

Zdrojové kódy ke cvičením jsou v adresáři `http://bacula.nti.tul.cz/~mkp/matlab/`. Příklad implementace řešení Laplaceovy rovnice na intrevalu $(0, 1)$ je v souboru `mkp1d_laplace.m`. Z něj je odvozena implementace úlohy popsané výše: `mkp1d_heat.m`.

8 Lokální matice a numerická integrace pro MKP v 1d

Pro 1d lineární prvky jsme si ukázali, že globální matice metody konečných prvků $\mathbb{A}$ má blokově diagonální tvar:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} A^1 & & & & \\ & A^2 & & & \\ & & A^3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & A^n \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A}^k = \begin{pmatrix} A^k_{00} & A^k_{01} \\ A^k_{10} & A^k_{11} \end{pmatrix},$$

kde $\mathbb{A}^k$ je tzv. lokální matice řádu 2×2 vzniklá integrací na elementu e^k. Např. pokud globální matice má prvky $a_{ij} = \int_\Omega \mathcal{K}(x) v_j'(x) v_i'(x)\,\mathrm{d}x$, pak prvky lokální matice na elementu e^k jsou:

$$A^k_{ij} = \int_{e^k} \mathcal{K}(x) v'_{k+j}(x) v'_{k+i}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathcal{K}(x) \frac{\varphi_j'(t)}{|e^k|} \frac{\varphi_i'(t)}{|e^k|} |e^k|\ \mathrm{d}t,\ \ i,j = 0,1$$

a bázové funkce na referenčním elementu $(0,1)$ mají tvar

$$\varphi_0(t) = 1 - t, \quad \varphi_1(t) = t. \tag{8.1}$$

Podobně sestavujeme i vektor $\boldsymbol{b}$ pomocí lokálních příspěvků na elementech.

Okrajové podmínky. Na elementech ležících na hranici oblasti mohou lokální matice a vektory mít odlišnou podobu podle zadaných okrajových podmínek. Konkrétně pro Dirichletovu podmínku $u = u_d$ uvažujeme i bázové funkce nenulové na hranici intervalu $(0,1)$. Na levé straně 1. elementu pak definujeme

$$A^1_{00} = 1,\ A^1_{01} = 0,\ b^1_0 = u_d.$$

Báze pro konečné prvky. Pro kvadratické konečné prvky máme na referenčním elementu bázové funkce:

$$\varphi_0(t) = (t-1)(2t-1), \quad \varphi_1(t) = 4t(1-t), \quad \varphi_2(t) = t(2t-1) \tag{8.2}$$

odpovídající stupňům volnosti $\hat{u}(0)$, $\hat{u}(\frac{1}{2})$, $\hat{u}(1)$ a lokální matice jsou řádu 3×3.
Kubické konečné prvky:

$$\varphi_0(t) = \frac{9}{2}(1-t)(t-\frac{1}{3})(t-\frac{2}{3}), \quad \varphi_1(t) = \frac{27}{2}t(t-\frac{2}{3})(t-1), \quad \varphi_2(t) = \frac{27}{2}t(t-\frac{1}{3})(1-t), \quad \varphi_3(t) = \frac{9}{2}t(t-\frac{1}{3})(t-\frac{2}{3}),$$

stupně volnosti: $\hat{u}(0)$, $\hat{u}(\frac{1}{3})$, $\hat{u}(\frac{2}{3})$, $\hat{u}(1)$.

Numerická integrace. Pro výpočet integrálů v lokálních maticích a vektorech je vhodné použít numerickou integraci:

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=1} f(x_i) w_i,$$

kde $\{x_i\}$ jsou kvadraturní body rozmístěné v intervalu $(0,1)$ a $\{w_i\}$ jsou kvadraturní váhy ($\sum w_i = 1$). Např. dvě nejjednodušší Gaussovy kvadratury, které jsou přesné pro polynomy 1., resp. 3. stupně, mají tvar:

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \approx f(1/2), \qquad \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{2}\left(f(\frac{3-\sqrt{3}}{6}) + f(\frac{3+\sqrt{3}}{6}) \right).$$

1. Pro následující úlohy nejprve sestavte lokální matice a vektory $\mathbb{A}^k$, $\boldsymbol{b}^k$ a poté je implementujte úpravou skriptu `http://bacula.nti.tul.cz/~mkp/matlab/mkp1d_laplace_numint.m`:

$$\begin{aligned}
&a)\ -u'' = 1 \text{ v } (0,1), \quad u(0) = 2,\ u(1) = 3,\\
&b)\ -u'' = 2(1-u) \text{ v } (0,2), \quad u'(0) = 1, -u'(2) = \frac{1}{2},\\
&c)\ -((1+x)u')' = 1 \text{ v } (0,1), \quad u(0) = u(1) = 0,\\
&d)\ -u'' + u' = 0 \text{ v } (0,1), \quad u(0) = 1, -u'(1) = 0.
\end{aligned}$$

   Uvažujte ekvidistantní dělení a lineární, resp. kvadratické konečné prvky. Dirichletovy podmínky aplikujte jako dodatečné rovnice pro stupně volnosti v krajních bodech.

2. Sestavte lokální matice a vektory $\mathbb{A}$ a vektor $\boldsymbol{b}$ pro MKP s 1d lineárními prvky pro úlohu

$$-\mathcal{K}u'' = \sigma(u_f - u) \text{ v } (0,1), \quad u(0) = u_d,\ \mathcal{K}(1)u''(1) = q.$$

Úloha popisuje vedení tepla v tyči o délce 1, která je zleva předehřívána na konstantní teplotu $u_d = 373\ K \doteq 100\ °C$, zprava tepelným tokem $q = 1\ W/K$. Tepelná vodivost $\mathcal{K}(x) = \begin{cases} 10^3\ W/K & x \leq \frac{1}{2} \\ 10^6\ W/K & x > \frac{1}{2} \end{cases}$. Těleso je chlazeno vodou o teplotě $u_f = 283\ K$ s koeficientem přestupu $\sigma = 10^7\ W/(Km^2)$.

Tabulka integrálů na referenčním prvku $(0,1)$ pro lineární bázové funkce (8.1):

	φ_0	φ_1	φ_0'	φ_1'
φ_0	1/3			
φ_1	1/6	1/3		
φ_0'	-1/2	-1/2	1	
φ_1'	1/2	1/2	-1	1

Tabulka integrálů na referenčním prvku $(0,1)$ pro kvadratické bázové funkce (8.2):

	φ_0	φ_1	φ_2	φ_0'	φ_1'	φ_2'
φ_0	2/15					
φ_1	1/15	8/15				
φ_2	1/60	7/15	8/15			
φ_0'	-1/2	-2/3	-1/3	7/3		
φ_1'	2/3	0	-2/3	-8/3	16/3	
φ_2'	-1/6	2/3	1	1/3	-8/3	7/3

Reference

[1] K. Rektorys a spol. : *Přehled užité matematiky.* Prometheus, Praha, 1995.

[2] `http://euler.fd.cvut.cz/predmety/ml2/files/MA2_CV.pdf`(originál), `http://morf.matfyz.cz/vyuka/mft/MA2_CV.pdf`(kopie)

[3] J. Veit: *Integrální transformace.* SNTL, Praha, 1979.

[4] R. Feynman: *Přednášky z fyziky II.*, Fragment, 2001

[5] B. Sedlák, I. Štoll: *Eletřina a magnetismus.* Academia, Praha, 2002.