

MKP - Metoda konečných prvků

Zadání semestrálních prací

naposledy upraveno: 25. září 2020

# Zadání

Pro zadanou úlohu proveďte následující úkoly:

1. Odvoďte slabou formulaci daného problému, aplikujte Galerkinovu metodu.
2. Definujte prostor testovacích funkcí  $\mathcal{V}$  a prostor řešení  $\mathcal{U}$ .
3. Definujte vhodné bilineární a lineární formy a zapište pomocí nich odvozenou slabou formulaci.
4. Definujte konečně-dimenzionální prostory **lineárních** konečných prvků.  $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$  a  $\mathcal{U}_h \subset \mathcal{U}$ .  
Definujte řešení  $u_h \in \mathcal{U}_h$ .
5. Proveďte zvolenou diskretizaci a sestavte systém lineárních algebraických rovnic ( $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ).
6. Pro systém  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  definujte lokální matice  $\mathbf{M}_k$  a lokální vektor pravé strany  $\mathbf{m}_k$  pro všechny elementy  $E_k$ .
7. Určete analytické řešení  $u(x)$ .  
*Pozn.: Pro analytické řešení je potřeba vyřešit nehomogenní dif. rovnici 2.řádu pomocí variace konstant nebo přímou integrací. K vybraným úlohám je řešení dáno až na konstanty. Vaším úkolem je tyto dopočítat.*
8. Implementujte MKP v Matlabu/Octave.  
Použijte lokální matice, numerickou integraci a sestavení pomocí referenčního elementu.  
(Máte na webu k dispozici skripty ze cvičení, nebojte se je použít!)
9. Ověřte numericky konvergenci metody. Použijte dělení  $n = [10 \ 20 \ 40 \ 80 \ 160 \ 320 \ 640 \ 1280]$ .

Přiložená zpráva musí splňovat následující:

- formát PDF (zpracujte pomocí MS Word, Libre Office Writer nebo L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X)
- úvodní strana - název předmětu, název sem. práce, jména řešitelů, semestr, datum, (logo TUL)
- zadání Vaší vybrané úlohy
- analytické řešení, vypočítané konstanty
- odvození slabé formulace – všechny náležitosti, viz body výše
- diskrétní slabá formulace – jasně označené, popsané a definované body, indexy, elementy, proměnné atd.
- lokální matice a vektor pravé strany, viz body výše
- chyby řešení v  $L_2$  a  $H^1$  normě, řád konvergence (konvergenční tabulka)
- graf řešení (pro vybraný diskretizační krok, analytické a diskrétní), graf konvergence
- grafy, tabulky číslované a popsané, rovnice číslované
- komentáře k jednotlivým (alespoň k těm nejpodstatnějším) krokům
- ZÁVĚR - shrnutí, zhodnocení výsledků, co vám vyšlo  $\times$  co jste očekávali (co mělo vyjít), konverguje správně vaše metoda? atd. V rozsahu půl A4.

Všechny soubory Vaší semestrální práce (všechny potřebné \*.m skripty, PDF) mějte v jednom adresáři, který zabalte (zip, rar, tar) a odešlete na emailovou adresu cvičícího (pavel.exner@tul.cz).

# Úlohy

1.

$$\begin{aligned}-Ku''(x) &= \sigma(u - u_f) & \text{in } \Omega = [a, b] \\ u(a) &= U_a \\ -Ku'(b) &= 0\end{aligned}$$

Analytické řešení hledejte ve tvaru  $u(x) = C_1 \cos(\sqrt{\alpha}x) + C_2 \sin(\sqrt{\alpha}x) + u_f$ ,  $\alpha = \frac{\sigma}{K}$ .  
Pro výpočet volte  $K = 0.3$ ,  $u_f = 5$ ,  $\sigma = 1.2$ ,  $U_a = 0.2$ ,  $a = 0$ ,  $b = 5$ .

2.

$$\begin{aligned}-8u''(x) + 2u'(x) &= 17 \cos(x) & \text{in } \Omega = [0, L] \\ u'(0) &= q_N \\ u(L) &= 0\end{aligned}$$

Analytické řešení hledejte ve tvaru  $u(x) = C_1 + C_2 e^{0.25x} + 0.5(\sin(x) + 4 \cos(x))$ .  
Pro výpočet volte  $L = 10$ ,  $q_N = 1$ .

3.

$$\begin{aligned}-((1+x)u'(x))' &= d & \text{in } \Omega = [a, b] \\ (1+a)u'(a) &= \sigma(u(a) - U_R) \\ u(b) &= U_b\end{aligned}$$

Analytické řešení hledejte ve tvaru  $u(x) = -dx + C_1 \ln(x+1) + C_2$ .  
Pro výpočet volte  $d = -3$ ,  $\sigma = 5$ ,  $U_R = 2$ ,  $U_b = 3$ ,  $[a, b] = [2, 7]$ .

4.

$$\begin{aligned}-Ku''(x) + cu'(x) &= de^{\frac{c}{K}x} & \text{in } \Omega = [1, 3] \\ u(1) &= 0 \\ -Ku'(3) &= q_N\end{aligned}$$

Analytické řešení hledejte ve tvaru  $u(x) = C_1 + (C_2 - \frac{d}{c}x) e^{\frac{c}{K}x}$ .  
Pro výpočet volte  $K = 4$ ,  $c = -5$ ,  $d = 3$ ,  $q_N = 2$ .

5.

$$\begin{aligned}-u''(x) + Ku &= dx & \text{in } \Omega = [0, L] \\ u'(0) &= 0 \\ u(L) &= U_L\end{aligned}$$

Analytické řešení hledejte ve tvaru  $u(x) = C_1 e^{\sqrt{K}x} + C_2 e^{-\sqrt{K}x} + \frac{d}{K}x$ .  
Pro výpočet volte  $K = 3$ ,  $d = 2.5$ ,  $L = 5$ ,  $U_L = -2$ .

6.

$$\begin{aligned}-((x^2 + c)u'(x))' &= -dx & \text{in } \Omega = [a, b] \\ u(a) &= U_a \\ -(b^2 + c)u'(b) &= q_N\end{aligned}$$

Analytické řešení hledejte ve tvaru  $u(x) = \frac{d}{2}x - \frac{C_1}{\sqrt{c}} \arctan \frac{x}{\sqrt{c}} + C_2$ .  
Pro výpočet volte  $d = 0.7$ ,  $c = 0.05$ ,  $U_a = -10$ ,  $q_N = 1$ ,  $[a, b] = [-5, 5]$ .  
Vyzkoušejte zmenšovat postupně konstantu  $c$  k hodnotě  $10^{-4}$ , pozorujte řešení a konvergenci metody a pokuste se vysvětlit, co se děje a proč.