MKP - Metoda konečných prvků, cvičení

1 Opakování

Témata: Vektorový prostor, lineární zobrazení, matice, inverzní matice, hodnost, soustava lin. rovnic, vlastní čísla a vektory. Vektorový prostor funkcí. Skalární a vektorové funkce více promenných. Derivace složených funkcí. Diferenciální operátory: gradient, divergence, rotace.

1. Vektorový prostor funkcí.

2. Tvoří množina $\{t^2+1, (t+1)^2, (t-1)^2\}$ bázi prostoru P_2? Jakou hodnost má příslušná matice?

3. Najděte matici přechodu z báze $a : (3\sin(t+\alpha), 2\cos(t+\alpha))$ do báze $b : (\sin(t), \cos(t))$ a její inverzní matici. Najděte matici přechodu z báze b do báze a. Matice X_a bilineární formy $X(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ v bázi A je $[1\ 0; 0\ -1]$ nalezněte její matici X_b v bázi b. Jaká budou vlastní čísla a vlastní vektory matice X_b?

4. Nechť $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$ jsou dané funkce tří proměnných. Transformujte výraz:

$$V = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial z}$$

   do "cylindrických"souřadnic:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad h = 2z + 1.$$

   výsledek:

$$\frac{1}{r}\Big(\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial g}{\partial \varphi} - \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial g}{\partial r}\Big) + 4\frac{\partial f}{\partial h}\frac{\partial g}{\partial h}$$

5. Je dáno:

$$\partial_a u = b^2,\ \partial_b u = 2ab,\ a(x) = 1 + x^2,\ b(y) = y^2$$

   Vypočtěne Jacobiho matici funkce $\boldsymbol{f}(x, y) = [u, -2u + y, u^2]$

6. Pro polohový vektor (rádius vektor)

$$\boldsymbol{r} = (x, y, z), \quad r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}.$$

   spočtěte:

$$\text{a) } \nabla\cdot\boldsymbol{r} \qquad \text{b) } \nabla\times\boldsymbol{r} \qquad \text{c) } \nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \qquad \text{d) } \nabla\times\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

   Plyne z posledních dvou výsledků porušení Helmholtzovy dekompozice?

7. Spočtěte $\mathrm{div}(\mathrm{rot}(\boldsymbol{\omega}))$ pro obecné vektorové pole ω.

Další vhodné příklady:

1. Derivace ve směru - [2] str. 22; 1,2,3

2. Derivace složené funkce - [2] str. 29; 1,2,3,4

3. První derivace, 2 nezávisle proměnné - [2] str. 50; 2,3

4. Polarní souřadnice - [2] str. 52; 8, 10*

2 Integrace po křivce a po ploše. Kelvin-Stokesova, Greenova, Gaussova věta.

Rektorys 520 - 531 (bohužel pouze ve složkovém zápisu) Pomocí vektorového zápisu je integrál (1. druhu) ze skalárního pole f podél křivky k dané parametricky funkcí $\boldsymbol{\varphi}(t),\ t \in [\alpha, \beta]$:

$$\int_k f|\,\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}| = \int_\alpha^\beta f\big(\boldsymbol{\varphi}(t)\big)\,|\boldsymbol{\varphi}'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z)\sqrt{(\varphi_x')^2 + (\varphi_y')^2 + (\varphi_z')^2}\,\mathrm{d}t$$

kde $\boldsymbol{\varphi}'(t)$ je tečný vektor, tj. vektor derivace funkce φ, [2] str. 135.

Podobně pro integrál (1. druhu) ze skalárního pole f podél plochy S dané parametricky funkcí $\boldsymbol{\varphi}(u, v), [u, v] \in M \subset \mathbf{R}^2$:

$$\int_S f|\,\mathrm{d}\boldsymbol{n}| = \int_M f(\boldsymbol{\varphi}(u, v))|\boldsymbol{n}(u, v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_M f(\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z)\sqrt{(n_x)^2 + (n_y)^2 + (n_z)^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

kde $\boldsymbol{n}$ je normála plochy (vektor kolmý k ploše jehož velikost je daná "velikostí elementární plošky"). Normála je rovna vektorovému součinu tečných vektorů:

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{t}_u \times \boldsymbol{t}_v, \quad \boldsymbol{t}_u = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u}, \quad \boldsymbol{t}_v = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v}.$$

Pozor, pokud plocha není rovina, tak normála a tudíž i její velikost závisí na parametrech u, v, [2] str. 151.

Ve vektorovém zápisu je integrál (2. druhu) z vektorového pole $\boldsymbol{F}$ podél křivky k:

$$\int_k \boldsymbol{F} \cdot\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_\alpha^\beta \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\varphi}(s)) \cdot \boldsymbol{\varphi}'(s)\,\mathrm{d}s$$

Integrál vyjadřuje práci pole podél křivky, [2] str. 169. Podobně lze integrál (2. druhu) vektorového pole $\boldsymbol{F}$ skrze plochu S napsat:

$$\int_S \boldsymbol{F} \cdot\,\mathrm{d}\boldsymbol{n} = \int_M \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\varphi}(u, v)) \cdot \big(\partial_u \boldsymbol{\varphi} \times \partial_v \boldsymbol{\varphi}\big)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Tento integrál má význam celkového toku pole skrz plochu, [2] str. 192.

Stokesova věta: Pro plochu S ohraničenou uzavřenou křivkou k platí

$$\int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{F} \cdot\,\mathrm{d}\boldsymbol{n} = \int_k \boldsymbol{F} \cdot\,\mathrm{d}\boldsymbol{k}.$$

Gaussova věta: Pro objem V ohraničený plochou S platí

$$\int_V \mathrm{div}\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}V = \int_S \boldsymbol{F} \cdot\,\mathrm{d}\boldsymbol{n}.$$

Greenova věta (integrace per partes):

$$\int_V \partial_x uv\,\mathrm{d}V = \int_S uv\,\mathrm{d}n_x - \int_V u\partial_x v\,\mathrm{d}V$$

$$\int_V (\nabla u) \cdot \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V = \int_S uv \cdot\,\mathrm{d}n - \int_V u\mathrm{div}v\,\mathrm{d}V$$

([2] str. 208)

Reference

[1] K. Rektorys a spol. : *Přehled užité matematiky.* Prometheus, Praha, 1995.

[2] http://euler.fd.cvut.cz/predmety/ml2/files/MA2_CV.pdf(originál),
http://morf.matfyz.cz/vyuka/mft/MA2_CV.pdf(kopie)

[3] J. Veit: *Integrální transformace.* SNTL, Praha, 1979.

[4] R. Feynman: *Přednášky z fyziky II.*, Fragment, 2001

[5] B. Sedlák,I. Štoll :*Eletřina a magnetismus.* Academia, Praha, 2002..