

# Metoda konečných prvků – učební text

Jan Březina

Jan Stebel

23. listopadu 2016

## Obsah

<b>1</b>	<b>Opakování analýzy a lineární algebry</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Opakování plošných a křivkových integrálů</b>	<b>2</b>
2.1	Křivkový integrál 1. druhu . . . . .	2
2.2	Křivkový integrál 2. druhu . . . . .	3
2.3	Plošný integrál 1. druhu . . . . .	3
2.4	Plošný integrál 2. druhu . . . . .	4
2.5	Integrační věty: Stokesova, Gaussova, Greenova . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Zákony zachování, věta o transportu</b>	<b>5</b>
3.1	Eulerovy rovnice . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Odvození rovnice vedení tepla</b>	<b>6</b>
<b>5</b>	<b>Transportní procesy</b>	<b>6</b>
5.1	Proudění v porézním prostředí . . . . .	7
5.2	Transport chemických látek . . . . .	7
<b>6</b>	<b>Vlnová rovnice (akustika)</b>	<b>7</b>
<b>7</b>	<b>Mechanika</b>	<b>8</b>
<b>8</b>	<b>Elektromagnetismus</b>	<b>8</b>
<b>9</b>	<b>Klasifikace PDR</b>	<b>8</b>
9.1	Eliptické rovnice . . . . .	8
9.2	Parabolické rovnice rovnice . . . . .	9
9.3	Hyperbolické rovnice . . . . .	9
<b>10</b>	<b>Slabé řešení rovnice</b>	<b>10</b>
10.1	Slabé řešení pro eliptické rovnice . . . . .	10
10.2	Slabá formulace eliptické úlohy . . . . .	11
10.3	Odvození klasické formulace ze slabé . . . . .	12
10.4	Ekvivalentní minimalizační úloha . . . . .	12
<b>11</b>	<b>Úvod do funkcionální analýzy</b>	<b>12</b>
11.1	Normované lineární prostory . . . . .	13
11.1.1	Konvergence . . . . .	14
11.1.2	Úplnost . . . . .	15
11.1.3	Množiny v normovaném lineárním prostoru . . . . .	16
11.2	Prostory integrovatelných funkcí . . . . .	16
11.3	Prostory s integrovatelnými derivacemi . . . . .	18

<b>12 Abstraktní teorie slabých řešení</b>	<b>20</b>
12.1 Abstraktní variační úloha . . . . .	20
12.2 Aplikace na eliptické rovnice . . . . .	20
12.2.1 Nehomogenní Dirichletova podmínka . . . . .	20
12.2.2 Anizotropní difúze . . . . .	21
12.2.3 Advekce-difúze . . . . .	23
<b>13 Galerkinova metoda</b>	<b>24</b>

## 1 Opakování analýzy a lineární algebry

## 2 Opakování plošných a křivkových integrálů

### 2.1 Křivkový integrál 1. druhu

Jaká je hmotnost vlasu? Představme si natažený vlas a předpokládejme, že takto natažený má konstantní hustotu. Na vlasu si zavedeme souřadnici  $t$ ,  $t = 0$  je začátek vlasu  $t = 1$  je konec vlasu. V konkrétním bodě  $t$  na vlasu má vlas průřez  $S(t)$ . Pro malý přírůstek  $dt$  je hmotnost kousku vlasu  $dm = \rho S(t) dt$ . Celková hmotnost pak je:

$$m = \int_0^1 \rho S(t) dt = \int_0^1 \rho_t(t) dt, \quad \rho_t(t) = \frac{dm}{dt} = \rho S(t) \quad (2.1)$$

kde  $\rho_t$  je délková hustota. Když vlas pustíme, tak se trochu zkrátí a zkroutí do nějaké křivky v prostoru. Původní bod  $t$  má nyní v prostoru polohu  $\varphi(t)$ . Tím zkroucením se změní průřezy  $S$ , ale nezmění se délková hustota, takže hmotnost opět spočteme podle 2.1. Nyní si představme, že vlas je v tíhovém poli  $f(\mathbf{x})$ , pro jednoduchost si představujeme, že tíha působí pouze v směru  $z$  a má skalární velikost  $f$ , která se ovšem mění ve všech směrech. Jaká na vlas působí celková síla? Pro natažený vlas podél osy  $x$  máme,  $dF = f(\mathbf{x}) dm$ , a tedy:

$$F = \int_0^1 \rho_t(t) f[(t, 0, 0)] dt$$

a pro zkroucený vlas:

$$F = \int_k f \rho_t dk = \int_0^1 f(\varphi(t)) \rho_t(t) dt$$

Nakonec si představme, že jde o zkamenělý vlas uvnitř skalního bloku, jehož hustota  $\rho(\mathbf{x})$  je známá pro každý bod  $\mathbf{x}$ . Přírůstek síly působící pouze na ten zkamenělý vlas je  $dF = f(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}) S(t) dl$ , kde

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{(\varphi'_x)^2 + (\varphi'_y)^2 + (\varphi'_z)^2} dt = |\varphi'(t)| dt$$

je přírůstek délky křivky pro přírůstek parametru  $dt$ . Celková síla působící na vlas pak je:

$$F = \int_k f \rho dk = \int_0^1 f(\varphi(t)) \rho(\varphi(t)) |\varphi'(t)| dt =$$

Derivace  $\varphi'(t)$  je tečný vektor ke křivce  $k$  a jeho velikost je skutečný přírůstek v prostoru pro přírůstek  $dt$ . Tento typ integrálu nazýváme křivkový integrál 1. druhu ze skalárního pole  $f$  podél křivky  $k$ , která je dána parametricky:

$$k : \{\varphi(t); t \in (0, 1)\}$$

Integrál je vlastně definován pomocí substituce  $\mathbf{x} = \vec{\varphi}(t)$ :

$$\int_k f(\mathbf{x}) dk = \int_0^1 f(\varphi(t)) |\varphi'(t)| dt = \int_0^1 f(\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z) \sqrt{(\varphi'_x)^2 + (\varphi'_y)^2 + (\varphi'_z)^2} dt. \quad (2.2)$$

Integrál 1. druhu můžeme aplikovat i na vektorové pole, ale výsledkem pak bude vektor.

Další (fyzikální) příklady použití křivkového integrálu prvního druhu.

- **Moment síly** (vůči počátku),  $M(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \times \mathbf{x}$ . Celkový moment na ohnutém drátu:

$$M = \int_k \mathbf{F}(\mathbf{x}) \times \mathbf{x} dk = \int_0^1 \mathbf{F}(\varphi(t)) \times \varphi(t) |\varphi'(t)| dt$$

- **Délka křivky** je integrál (1. druhu) ze skalárního pole  $f(x, y, z) = 1$ , tj.

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} |\varphi'(t)| dt,$$

- **Průměrná teplota** na poledníku  $k$ . Poledník je myšlená křivka na povrchu země a tiše předpokládáme, že je hladká.

$$T = \frac{1}{L} \int_k T(\mathbf{x}) dk = \frac{1}{L} \int_0^1 T(\varphi(t)) |\varphi'(t)| dt,$$

kde  $L$  je (skutečná) délka poledníku (viz. bod 2.1).

- **Hmota křivky nebo plochy** je integrál (1. druhu) ze skalárního pole hustoty  $\rho(x, y, z)$ .

$$M = \int_k \rho(x, y, z) dk$$

- **Souřadnice těžiště** křivky je vektor  $(T_x, T_y, T_z)$  integrálů (1. druhu) z vektoru skalárních funkcí  $x\rho(x, y, z)$ ,  $y\rho(x, y, z)$ ,  $z\rho(x, y, z)$  dělený celkovou hmotou  $M$ . Např. pro plochu  $S$ :

$$\mathbf{T} = \frac{1}{M} \int_k \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) dk$$

- **Moment setrvačnosti** vzhledem k ose  $o$  je integrál (1. druhu) ze skalární funkce  $f(\mathbf{x}) = r^2 \rho(\mathbf{x})$ , kde  $r$  je vzdálenost bodu  $\mathbf{x}$  od osy  $o$ . Ideální je transformovat křivku i osu tak aby osa byla jedna ze souřadných os, např. pro  $o$  totožnou s osou  $z$  je

$$I_z = \frac{1}{M} \int_k (x_x^2 + x_y^2) \rho(\mathbf{x}) dk$$

## 2.2 Křivkový integrál 2. druhu

Ve vektorovém zápisu je integrál (2. druhu) z vektorového pole  $\mathbf{F}$  podél křivky  $k$ :

$$\int_k \mathbf{F} \cdot \mathbf{t}_k dk = \int_0^1 \mathbf{F}(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s) ds \quad (2.3)$$

Zde je  $\mathbf{t}_k$  tečný vektor. Přesněji pokud  $dk$  je velikost tečného vektoru jako pro integrál 1. druhu, tak  $\mathbf{t}_k$ , je vlastně jednotkový tečný vektor. Ovšem stále je třeba výrazy vlevo v (2.2), (2.3), (2.4), (2.5) jsou pouze symboly (zkratky), pro to co stojí vpravo. Pro některé druhy operací stačí manipulovat se zkratkami, ale někdy je potřeba se ponořit do definice.

Příklady:

- **Práce síly po křivce.** Integrál 2. druhu z vektorové funkce síly.

## 2.3 Plošný integrál 1. druhu

Podobně jako v případě křivky je plocha dána zobrazením  $\varphi(u, v)$  z množiny  $M \subset \mathbb{R}^2$  do  $\mathbb{R}^3$ . Normála  $\mathbf{N}$  k ploše v bodě daném parametry  $(u, v)$ , t.j. v bodě  $\varphi(u, v)$  je dána vektorovým součinem tečných vektorů:

$$\mathbf{N} = \mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v, \quad \mathbf{t}_u = \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \quad \mathbf{t}_v = \frac{\partial \varphi}{\partial v}.$$

Jednotková normála je pak  $\mathbf{n} = \mathbf{N}/|\mathbf{N}|$ .

Integrál (1. druhu) ze skalárního pole  $f$  přes plochu  $S = \{\mathbf{x} = \varphi(u, v), (u, v) \in M\}$  je definován:

$$\int_S f dS = \iint_M f(\varphi(u, v)) |\mathbf{N}(u, v)| du dv = \iint_M f(\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z) \sqrt{(N_x)^2 + (N_y)^2 + (N_z)^2} du dv, \quad (2.4)$$

Pozor, pokud plocha není rovina, tak normála a tudíž i její velikost jsou funkcí parametrů  $u, v$ , [?] str. 151.

- Velikost povrchu  $P$  plochy  $M$  je integrál (1. druhu) ze skalárního pole  $f(x, y, z) = 1$ , tj.

$$P = \int_M 1 \, dS = \int_M |\mathbf{n}(u, v)| \, du \, dv.$$

- **Hmota plochy** je integrál (1. druhu) ze skalárního pole hustoty  $\rho(x, y, z)$ .

$$M = \int_S \rho(x, y, z) \, dS$$

**Souřadnice těžiště plochy** je vektor  $\mathbf{T}$  integrálů (1. druhu) z vektoru skalárních funkcí  $\mathbf{x}\rho(\mathbf{x})$  dělený celkovou hmotou  $M$ . Např. pro plochu  $S$ :

$$\mathbf{T} = \frac{1}{M} \int_S \mathbf{x}\rho(\mathbf{x}) \, dS$$

**Moment setrvačnosti** vzhledem k ose  $o$  je integrál (1. druhu) ze skalární funkce  $f(\mathbf{x}) = r^2\rho(\mathbf{x})$ , kde  $r$  je vzdálenost bodu  $[x, y, z]$  od osy  $o$ . Pro osu  $z$ :

$$I_z = \frac{1}{M} \int_S (x_x^2 + x_y^2)\rho(\mathbf{x}) \, dS$$

**Práce síly po křivce.** Integrál 2. druhu z vektorové funkce síly. **Tok kapaliny skrze plochu za jednotkový čas.** Integrál 2. druhu z vektorového pole rychlosti.

## 2.4 Plošný integrál 2. druhu

Podobně lze integrál (2. druhu) vektorového pole  $\mathbf{F}$  skrze plochu  $S$  napsat:

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_M \mathbf{F}(\boldsymbol{\varphi}(u, v)) \cdot (\partial_u \boldsymbol{\varphi} \times \partial_v \boldsymbol{\varphi}) \, du \, dv \quad (2.5)$$

- Tento integrál má význam celkového toku pole skrz plochu. Například množství kapaliny, které proteče skrze plochu za jednotkový čas.

## 2.5 Integrační věty: Stokesova, Gaussova, Greenova

**Greenova věta** (integrace per partes): Pokud má oblast  $V$  hranici  $S$ , pak pro hladká skalární pole  $u$  a  $v$  platí:

$$\int_V \partial_x uv \, dV = \int_S uv n_x \, dS - \int_V u \partial_x v \, dV$$

kde  $n_x$  je složka jednotkové normály. Odtud pro hladké vektorové pole  $\mathbf{v}$  dostaneme:

$$\int_V (\nabla u) \cdot \mathbf{v} \, dV = \int_S uv \cdot \mathbf{n} \, dS - \int_V u \operatorname{div} \mathbf{v} \, dV$$

**Gaussova věta:** Pro objem  $V$  ohraničený plochou  $S$  platí

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV = \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

Můžeme odvodit z Greenovy věty, použitím  $u = 1$  a  $\mathbf{v} = \mathbf{F}$ :

$$0 = \int_V (\nabla 1) \cdot \mathbf{F} \, dV = \int_S 1 \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS - \int_V 1 \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV$$

**Stokesova věta:** Pro plochu  $S$  ohraničenou uzavřenou křivkou  $k$  platí

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_k \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} \, dk.$$

Hranici oblasti  $\Omega$  zapisujeme též jako  $\partial\Omega$ .

### 3 Zákony zachování, věta o transportu

Konzervativní veličina.

- Zachování hmoty.
- Zachování hybnosti.
- Zachování momentu hybnosti.
- Zachování energie. Zachování vnitřní energie, tepla.

Natahovací pytlík s vodou se třpytkama. Hustota třpytek v bodě  $\mathbf{x}$  v čase  $t$  je  $\rho(t, \mathbf{x})$ . Pytlík v čase  $t$ , je oblast (otevřená jednoduše souvislá množina)  $\Omega_t$ , takže ho můžeme různě deformovat. Počet třpytek v pytlíku je pořád stejný:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0.$$

Popis deformace v čase. Bod  $\mathbf{x}_0$  v čase 0 je přesunut do bodu  $\mathbf{x}_t$  v čase  $t$ .

$$\mathbf{x}_t = X(t, \mathbf{x}_0).$$

Rychlostní pole pak je  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}_t) = \partial_t \mathbf{X}(t, \mathbf{x}_0)$ .

**Věta 3.1** (Reynolds transport theorem). *Nechť  $q(t, \mathbf{x})$  je hladká skalární funkce na oblasti  $\Omega_t$ . Oblast  $\Omega_t$  je dána hladkým zobrazením  $X(t, \mathbf{X})$  a počáteční oblastí  $\Omega_0$ :*

$$\Omega_t = \{\mathbf{x}_t = \mathbf{X}(t, \mathbf{x}_0); \mathbf{x}_0 \in \Omega_0\}.$$

Pak platí:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} q(t, \mathbf{x}_t) d\mathbf{x}_t = \int_{\Omega_t} \partial_t q + \operatorname{div}(q\mathbf{u}) d\mathbf{x}_t. \quad (3.1)$$

*Důkaz.* Nechť  $\chi_0$  je hladká "klobouková" funkce nulová mimo  $\Omega_0$  a "skoro jednotková" uvnitř  $\Omega_0$ :

$$\chi_0(\mathbf{x}) = B(\operatorname{dist}(\mathbf{x}, \partial\Omega_0)),$$

kde vzdálenost  $\operatorname{dist}$  je kladná uvnitř  $\Omega_0$  a záporná vně. Funkce  $B$  je nulová na  $(-\infty, 0)$ ,  $B = 1$  na  $(\epsilon, \infty)$ , a je hladká a rostoucí na  $(0, \epsilon)$ . Tuto funkci necháme "unášet" rychlostním polem  $\mathbf{u}$ , takže se v čase  $t$  zdeformuje:

$$\chi(t, \mathbf{X}(t, \mathbf{x}_0)) = \chi_0(\mathbf{x}_0).$$

Pro materiálovou derivaci funkce  $\chi(t, \mathbf{X})$  platí:

$$\frac{d}{dt} \chi(t, \mathbf{X}) = \frac{d}{dt} \chi(t, \mathbf{X}(t, \mathbf{x}_0)) = \partial_t \chi(t, \mathbf{X}) + \sum_i \partial_{X_i} \chi(t, \mathbf{X}) \partial_t X_i(t, \mathbf{x}_0) = \partial_t \chi + \mathbf{u} \cdot \nabla \chi$$

Nyní spočítáme :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} q\chi d\mathbf{x} = \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} q\chi d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^3} (\partial_t q)\chi + q(\partial_t \chi) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^3} (\partial_t q)\chi - q(\mathbf{u} \cdot \nabla \chi) d\mathbf{x} = \int_{\Omega_t} [\partial_t q + \operatorname{div}(q\mathbf{u})] \chi d\mathbf{x}$$

Klobouková funkce  $\chi$  může být libovolně blízko *charakteristické funkci* oblasti  $\Omega_t$  z čehož plyne důsledek věty. □

Např. zákon zachování hmoty můžeme napsat jako:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega_t} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) d\mathbf{x} = 0$$

kde  $\mathbf{u}$  je rychlost plynu a  $\rho$  jeho hustota.

A jelikož toto platí pro libovolnou  $\Omega_t$ , pak pro hladké  $\rho$  a  $\mathbf{u}$  platí:

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) = 0$$

což je *rovnice kontinuity* pro hustotu stlačitelného plynu.

### 3.1 Eulerovy rovnice

Uvažujme materiál (tekutinu, nebo elastickou pevnou látku) s rychlostním polem  $u$ . Ze zákona zachování hybnosti  $\rho u$  plyne použitím rovnice kontinuity:

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}_i) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}_i \mathbf{u}) = -\nabla P,$$

kde  $P$  je tlak, a jeho záporný gradient je hustota síly, která způsobuje změnu hybnosti podle 2. Newtonova zákona. Tato rovnice spolu s rovnicí kontinuity pro plyn:

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0$$

tvoří systém tzv. Eulerových rovnic popisujících proudění neviskózní stlačitelné tekutiny.

## 4 Odvození rovnice vedení tepla

Rovnice kontinuity platí za předpokladu, že "pohyb veličiny"  $q$  je způsoben unášením v rychlostním poli  $u$ . Přirozená interpretace je, že se jedná o rychlostní pole média, např. tekutiny. To ovšem obecně neplatí. Například pro koncentraci soli v roztoku platí také zákon zachování a sůl se pohybuje i v (makroskopicky) stacionárním objemu vody pomocí difúze. Je tedy třeba  $u$  interpretovat jinak.

Definujeme plošný tok  $\mathbf{j}$  veličiny  $q$  jako množství veličiny, které projde jednotkovou elementární plochou za jednotku času. Tedy uvažujeme nekonečně malou plošku  $\Delta S$  v bodě  $\mathbf{x}$  s normálou  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_i$  (bázový vektor) a nekonečně malou změnu času  $\Delta t$ . Pokud mezi časy  $t$  a  $t + \Delta t$  projde skrz  $\Delta S$  množství  $\Delta Q$  veličiny  $q$ , platí

$$j_i(t, \mathbf{x}) = \frac{\Delta Q}{\Delta S \Delta t}$$

Pro pevnou oblast  $\Omega$  je pokles množství veličiny  $q$  v  $\Omega$  roven celkovému toku veličiny ven z  $\Omega$  přes její hranici:

$$-\frac{d}{dt} \int_{\Omega} q \, dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{j}$$

Odtud dostaneme bodovou formu obecné rovnice kontinuity:

$$\partial_t q + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0.$$

Ke stejnému výsledku dojdeme pokud použijeme Reynoldsovu větu pro rychlostní pole  $\mathbf{u} = \mathbf{j}/q$ .

Tok  $\mathbf{j}(t, \mathbf{x})$  je obecně nějakou funkcí závislou na lokálním chování veličiny  $q$  na okolí bodu  $(t, \mathbf{x})$ , může tedy záviset na  $q$ ,  $\nabla q$ , na  $\partial_t q$  a případně na vyšších prostorových a časových derivacích. Může také záviset na nějakých dalších veličinách, jako například na rychlosti média, viz. případ  $\mathbf{j} = q\mathbf{u}$ .

Nyní uvažujme specuálně zákon zachování pro energii pevného tělesa. Energie elementárního objemu  $\Delta V$  je dána jeho teplotou jako:

$$\Delta E = C \rho T \Delta V$$

kde  $C$  [ $J/K/kg$ ] je tepelná kapacita a  $T$  [ $K$ ] je teplota. Teplený tok  $\mathbf{j}$  [ $W/m^2$ ] je v nejjednodušší podobě dán Fourierovým zákonem:

$$\mathbf{j} = -k \nabla T$$

přičemž tepelná vodivost  $k$  [ $W/m/K$ ] může být případně funkcí teploty  $k(T)$ . Dostáváme tak rovnici vedení tepla:

$$\partial_t(C \rho T) - \operatorname{div}(k \nabla T) = 0$$

Pokud budou v materiálu nějaké objemové tepelné zdroje  $f$  [ $W/m^3$ ] dostaneme:

$$\partial_t(C \rho T) - \operatorname{div}(k \nabla T) = f$$

Pokud by se jednalo o vedení tepla v kapalině, musíme do  $\mathbf{j}$  zahrnout i transport kapalinou:

$$\partial_t(C \rho T) + \operatorname{div}(C \rho T \mathbf{u}) - \operatorname{div}(k \nabla T) = f.$$

## 5 Transportní procesy

Rovnice vedení tepla odvozená v předchozí kapitole je jedním z příkladů transportních procesů, které popisují transport nějaké veličiny a jsou odvozené ze zákona jejího zachování. Uvedeme pár dalších příkladů.

## 5.1 Proudění v porézním prostředí

Uvažujeme porézní prostředí, kde podíl pórů v referenčním objemu je  $\nu$  [–]. Tuto bezrozměrnou veličinu nazýváme porozita. Podíl tekutiny (vody) v referenčním objemu  $\theta$  [–] se nazývá saturace (opět bezrozměrná). Saturace se pohybuje od nějaké minimální (reziduální) saturace  $\theta_r$  po saturovaný podíl tekutiny  $\theta_s$  obvykle rovný porozitě  $\nu$ . Pro tekutinu se zachovává její hmota, resp. hustota v prostoru  $\rho_V = \rho\theta$ , kde  $\rho$  je hustota tekutiny. V nejjednodušším případě uvažujeme nestlačitelnou kapalinu, plně saturované porézní prostředí a uvažujeme malé tlaky. V tom případě je  $\rho$  i  $\theta$  konstanta. Pak z obecné rovnice kontinuity dostaneme:

$$-\operatorname{div} \mathbf{j} = f,$$

kde  $\mathbf{j}$  [ $kg/m^2/s$ ] je hustota toku tekutiny a  $f$  [ $kg/m^3/s$ ] je hustota objemových zdrojů tekutiny. Podobně jako v případě tepla je nejjednodušší vztah pro  $\mathbf{j}$  dán gradientem tlaku  $p$  [ $Pa$ ] = [ $kgm^2/s$ ] pomocí tzv. Darcyho zákona:

$$\mathbf{j} = -\rho k \mathbb{K} \nabla p.$$

Zde  $k = \kappa/\mu$  je hydraulická vodivost daná permeabilitou  $\kappa$  [ $m^2$ ], která je vlastností porézního média, a viskozitou  $\mu$  [ $Pa.s$ ], která je vlastností tekutiny. Tenzor  $\mathbb{K}$  je jednotkový v případě izotropního prostředí, ale v případě anisotropního prostředí je to obecně symetrický pozitivně definitní tenzor. Pokud má porézní materiál nějak orientované mikroskopické kapiláry, bude v jednom směru mít větší vodivost než ve směrech kolmých. Obecně může mít materiál tři různé vodivosti ve třech různých směrech  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_z$  a nakonec tento materiál může být libovolně natočen v prostoru pomocí matice rotace  $Q$ :

$$\mathbb{K} = Q^T \mathbb{D} Q, \quad \mathbb{D} = \begin{pmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{pmatrix}$$

Vodivosti v hlavních směrech jsou vlastní čísla matice  $\mathbb{K}$ , musí být kladné. Matice rotace  $Q$  je tvořena (ortogonálními) vlastními vektory. Zde máme příklad anisotropie hydraulické vodivosti. Podobně existují materiály s anisotropní tepelnou vodivostí, nebo anisotropní pevností etc.

Dále můžeme uvažovat stlačitelnou tekutinu, resp. stlačitelný materiál okolo pórů. Pro použití rovnice kontinuity potřebujeme spočítat derivaci hustoty hmoty tekutiny v prostoru podle času:

$$\partial_t \rho_V = \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} + \frac{\partial \theta}{\partial p} \right) \partial_t p = S \partial_t p.$$

Velichina  $S$  [ $kg/m^3/Pa$ ] se nazývá storativita a zahrnuje jak stlačitelnost tekutiny  $\partial_p \rho$  tak stlačitelnost prostředí  $\partial_p \theta$ . Pro nasycené, stlačitelné porézní prostředí tedy máme rovnici:

$$S \partial_t p - \operatorname{div} (\rho k \mathbb{K} \nabla p) = f$$

Pro nenasyčené prostředí pak dostáváme záporné (sací) tlaky  $p$  a pro ně saturaci  $\theta_r \leq \theta(p) \leq \theta_s$ , která je funkcí tlaku. Navíc i vodivost  $k$ , klesá s klesajícím nasycením, je tedy  $k(\theta)$  funkcí saturace. Dohromady dostaneme tzv. Richardsovu rovnici:

$$\partial_t \theta(p) - \operatorname{div} (\rho k(\theta(p)) \mathbb{K} \nabla p) = f$$

kde funkce  $\theta(p)$  a  $k(\theta)$  jsou obecně nelineární a dostáváme tak nelineární parciální diferenciální rovnici.

## 5.2 Transport chemických látek

$$\partial_t (\rho_i c_i) + \operatorname{div} (\rho_i c_i \frac{\mathbf{u}}{\nu}) - \operatorname{div} (\mathbb{D} \nabla c_i) = r_{ij}. \quad (5.1)$$

## 6 Vlnová rovnice (akustika)

Odvodíme rovnici pro kmitání struny. Stav struny v čase  $t$  a poloze  $x$  je dán výchylkou struny  $u(t, x)$ . Pro zjednodušení si představujeme, že struna může kmitat jen v jednom směru. Na element daný intervalem  $(a, b)$  působí síly v koncových bodech:

$$\mathbf{F}(t, a) = -T(t, a) \mathbf{t}(t, a), \quad \mathbf{F}(t, b) = T(t, b) \mathbf{t}(t, b)$$

kde  $T$  je napětí ve struně a  $\mathbf{t}$  je tečný vektor  $\mathbf{t}(t, x) = (1, \partial_x u(t, x))$ . Jelikož v horizontálním směru se struna nepohybuje musí být horizontální složka součtu sil rovna nule:

$$T(t, b) - T(t, a) = 0$$

a jelikož jsme body  $a$  a  $b$  volili libovolně, je napětí ve struně nezávislé na poloze:  $T(t, x) = T(t)$ . Proto pro vertikální složku síly platí

$$F_y = F_y(t, a) + F_y(t, b) = T(t)(\partial_x u(t, b) - \partial_x u(t, a))$$

Nyní použijeme 2. Newtonův zákon:

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \rho(x) \partial_t u(t, x) dx = F_y(t, x) = T(t)(\partial_x u(t, b) - \partial_x u(t, a)) = T(t) \int_a^b \partial_{xx} u(t, x) dx$$

A jelikož  $a$  a  $b$  jsou libovolné, dostáváme bodovou rovnici:

$$\rho(x) \partial_{tt} u(t, x) = T(t) \partial_{xx} u(t, x)$$

Pokud předpokládáme konstantní hustotu  $\rho(x) = \rho_0$  a zanedbáme změnu napětí struny při malé výchylce  $T(t) = T_0$  dostaneme vlnovou rovnici ve tvaru:

$$\partial_{tt} u(t, x) = c^2 \partial_{xx} u(t, x)$$

kde

$$c = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}$$

je rychlost šíření vlny. Mírně komplikovanější je odvození vlnové rovnice pro změny (akustického) tlaku v prostoru:

$$\partial_{tt} p(t, \mathbf{x}) = c^2 \Delta p(t, \mathbf{x})$$

kde pro rychlost zvuku  $c$  platí:

$$c = \sqrt{\frac{B}{\rho_0}}, \quad B = \rho_0 \frac{\partial P}{\partial \rho}$$

přičemž  $B$  je objemová stlačitelnost při adiabatické expanzi. Pro vzduch máme  $B = 1.45 \times 10^5 \text{ Pa}$  a hustotu  $\rho_0 = 1.2 \text{ kg/m}^3$  a dostáváme rychlost zvuku:

$$c = 347 \sqrt{\frac{\text{kg} \cdot \text{m} / \text{s}^2 / \text{m}^2}{\text{kg} / \text{m}^3}} = 1251 \text{ km/h}$$

Tabulková hodnota je  $340 \text{ m/s}$ .

## 7 Mechanika

...

## 8 Elektromagnetismus

## 9 Klasifikace PDR

### 9.1 Eliptické rovnice

Základním příkladem je Laplaceova rovnice:

$$\Delta u(\mathbf{x}) = 0$$

respektive Poissonova rovnice

$$\Delta u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}).$$



Dalšími příklady je stacionární rovnice vedení tepla:

$$\operatorname{div}(k\nabla T(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x}),$$

resp. stacionární rovnice Darcyho proudění:

$$\operatorname{div}(\mathbb{K}\nabla p(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x}).$$

Obečná rovnici druhého řádu:

$$\operatorname{div}(\mathbb{A}\nabla u(\mathbf{x})) + \mathbf{b}\nabla u(\mathbf{x}) + cu(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$$

je eliptická, pokud  $\mathbb{A}$  je symetrická pozitivně definitní matice.

Pro eliptické rovnice platí (za jistých omezení pro  $\mathbf{b}$  a  $c$ ) tzv. princip maxima. Pokud  $u$  je řešením eliptické rovnice na oblasti  $\Omega$  pak

$$\max_{\mathbf{x} \in \Omega} u(\mathbf{x}) \leq \max_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} u(\mathbf{x}).$$

Podobně pro minimum:

$$\min_{\mathbf{x} \in \Omega} u(\mathbf{x}) \geq \min_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} u(\mathbf{x}).$$

## 9.2 Parabolické rovnice rovnice

Příkladem je nestacionární rovnice vedení tepla:

$$\partial_t T - \operatorname{div}(k\nabla T) = f$$

Vlastnosti řešení:

- I zde platí princip maxima vzhledem k okrajové podmínce.
- Pokles řešení v čase:

$$\max_{\mathbf{x} \in \Omega} u(t, \mathbf{x}) \leq \max_{\mathbf{x} \in \Omega} u(s, \mathbf{x}), \quad \text{pro } t \geq s.$$

Rovnice "zhlazuje" počáteční podmínku. Nekonečná rychlost šíření změn.

## 9.3 Hyperbolické rovnice

Příklad je vlnová rovnice:

$$\partial_{tt} p(t, \mathbf{x}) = c^2 \Delta p(t, \mathbf{x})$$

Transportní rovnice (rovnice kontinuity), např. pro rozpuštěnou látku:

$$\partial_t(\rho c) + \operatorname{div}((\rho c)\mathbf{u}) = 0$$

Eulerovy rovnice:

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}_i) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}_i \mathbf{u}) = -\nabla P,$$

Kvalitativní vlastnosti řešení:

- Konečná rychlost šíření (vln).
- Nezhazuje.
- Nesplňuje princip maxima, řešení se může akumulovat v bodě (náraz vlny na pobřeží).

## 10 Slabé řešení rovnice

Uvažujme transportní rovnici na nekonečné oblasti  $\Omega = \mathbb{R}$  (pro  $x$ ):

$$\partial_t u(t, x) + v \partial_x u(t, x) = 0 \quad (10.1)$$

kde  $v$  je konstantní rychlost. Řešením je posunutá počáteční podmínka  $u_0(x)$ :

$$u(t, x) = u_0(x - vt)$$

pro libovolnou diferencovatelnou funkci  $u_0$  máme:

$$\partial_t u + v \partial_x u = u'_0(x - vt)(-v) + v u'_0(x - vt) = 0$$

Zdá se logické, že by toto mělo platit pro libovolnou počáteční podmínku  $u_0$ , ale rovnice je formulována tak, že to platí jen pokud je  $u_0$  diferencovatelná. Zkusme se vrátit k tomu jak jsme transportní rovnici odvodili. Pomocí Reynoldsovy věty jsme dostali:

$$\int_{\Omega_t} \partial_t u + \operatorname{div}(vu) \, dx = \int_{\Omega_t} \partial_t u + v \partial_x u \, dx = 0$$

pro libovolnou oblast  $\Omega_t$ . A bodovou rovnici (10.1) jsme dostali za předpokladu, že vnitřek integrálu je spojitý, tedy  $u$  je spojitě diferencovatelná v prostoru i čase. Tedy požadavek na diferencovatelnost je ve skutečnosti umělý a i bez něj platí:

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(\partial_t u + \partial_x(vu)) \, dx = 0$$

pro libovolnou hladkou funkci  $\varphi$  s kompaktním nosičem. Nosič funkce je množina, kde je funkce nenulová:

$$\operatorname{supp} \varphi = \{x, \varphi(x) > 0\}$$

a v našem případě jsou kompaktní všechny omezené a uzavřené intervaly. Jde tedy o to, že  $\varphi$  musí být *směrem k nekonečnu* nulová.

Nyní však nevíme co je  $\partial_t u$  pokud je  $u_0$  nespojitá, např.  $u_0(x) = \operatorname{sgn}(x)$ . Abychom se tohoto problému zbavili použijeme Greenovu větu (zde vlastně jen integraci per partes):

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t, x) (\partial_t u + \partial_x(vu)) \, dx \, dt = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} -\partial_t \varphi u - \partial_x \varphi v u \, dx \, dt = 0$$

pro libovolnou hladkou funkci  $\varphi(t, x)$  s kompaktním nosičem na  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Tato rovnice již skutečně platí pro libovolnou integrovatelnou počáteční podmínku  $u_0$ .

### 10.1 Slabé řešení pro eliptické rovnice

Budeme řešit rovnici

$$-\operatorname{div}(\mathbb{K} \nabla u) + \operatorname{div}(vu) = f + \sigma_f(u_f - u) \quad \text{na } \Omega. \quad (10.2)$$

Rovnice popisuje ustálené rozložení teploty v médiu, které se pohybuje rychlostním polem  $v$  a má obecně anisotropní tensor teplené vodivosti  $\mathbb{K}$ . Tento tenzor zahrnuje jak difúzi tepla, tak např. disperzi, t.j. zvýšenou vodivost ve směru proudění. Na levé straně máme postupně difúzní člen a konvektivní člen. Na pravé straně je hustota objemových zdrojů tepla  $f$  a kontaktní zdroj tepla. Kontaktní zdroj modeluje například přenos tepla z tělesa, které se dotýká kovového plátu. Zde je  $u_f$  teplota tělesa a  $\sigma_f \geq 0$  koeficient přestupu tepla z tělesa na plát. Tento člen však může modelovat také přenos tepla z horniny do podzemní vody.

Eliptickou rovnici na omezené oblasti  $\Omega$  je třeba doplnit okrajovými podmínkami na celé hranici  $\partial\Omega$ . Základní tři typy podmínek jsou:

**Dirichletova okrajová podmínka.**

$$u(\mathbf{x}) = u_d(\mathbf{x}) \quad \text{na } \Gamma_d$$

předepisuje teplotu  $u_d$  na části hranice  $\Gamma_d$ . Pevná teplota na hranici modeluje situaci, kdy se těleso  $\Omega$  dokonale vodivě dotýká termostatu - tělesa z velkou teplenou kapacitou.

### Neumannova okrajová podmínka.

$$(-\mathbb{K}\nabla u + \mathbf{v}u) \cdot \mathbf{n} = q_n \text{ na } \Gamma_n.$$

Člen vlevo se nazývá normálový tepelný tok, který je předepsán jako  $q_n$ . V teorii se obvykle uvažuje jako kladný tok ve směru ven z oblasti (vnější normála), nicméně z důvodu konzistence s objemovými zdroji se v praxi používá raději opačná konvence. Fyzikálně relevantní je případ kdy je hranice pevná  $\mathbf{v} = 0$  a tepelný tok je dán např. výkonem topidla na hranici.

### Robinova (Newtonova) okrajová podmínka.

$$(-\mathbb{K}\nabla u + \mathbf{v}u) \cdot \mathbf{n} = \sigma_r(u - u_r) \text{ na } \Gamma_r.$$

Opět je relevantní především případ  $\mathbf{v} = 0$ , kdy podmínka modeluje realistický přenos tepla s koeficientem  $\sigma_r \geq 0$  z tělesa o teplotě  $u_r$ . Zde je opět  $\mathbf{n}$  vnější normála, tedy vlevo je tok ven z oblasti, který je kladný pokud je  $u > u_r$  což souhlasí se znaménkem na pravé straně.

Mimo tyto základní podmínky se v reálných úlohách objevují nejrůznější další podmínky. Například pokud na části hranice vtéká do oblasti voda o dané teplotě  $U$ , bude, půjde o Neumannovu podmínku s  $\mathbf{v} \neq 0$  a  $q_n = U\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ . Pro výtok z oblasti však potřebujeme podmínku  $q_n = u\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ , což lze považovat za Robinovu podmínku s  $u_r = 0$  a  $\sigma_r = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ . Ovšem rychlost  $\mathbf{v}$  nemusí být na hranici dopředu známa, může být výsledkem řešení nějaké rovnice proudění, proto je obvykle tuto podmínku chýpat jako zvláštní typ. V praxi se také objevuje například kombinace Neumannovy a Robinovy okrajové podmínky:

$$(-\mathbb{K}\nabla u + \mathbf{v}u) \cdot \mathbf{n} = \sigma_r(u - u_r) + q_n$$

Z hlediska teorie lze obvykle tyto zvláštní případy popsat pomocí předchozích tří typů, ale jsou užitečné pro praxi.

Dále předpokládáme, že množiny  $\Gamma_d$ ,  $\Gamma_n$ , a  $\Gamma_r$  jsou navzájem diskjunktní (nemají průnik) a jejich sjednocení (respektive sjednocení jejich uzávěrů) je hranice  $\partial\Omega$ .

## 10.2 Slabá formulace eliptické úlohy

V této kapitole odvodíme slabou formulaci rovnice vedení tepla, spolu s aplikací klasických okrajových podmínek.

Prvně přenásobíme rovnici (10.2) libovolnou hladkou testovací funkcí  $\varphi(\mathbf{x}) \in C^\infty(\overline{\Omega})$  (hledá až do hranice) a integrujeme přes  $\Omega$ :

$$\int_{\Omega} \varphi \left( -\operatorname{div}(\mathbb{K}\nabla u - \mathbf{v}u) \right) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \varphi \left( f + \sigma_f(u_f - u) \right) d\mathbf{x}.$$

Dále v na levé straně použijeme Greenovu větu k přehození divergence na testovací funkci:

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot (\mathbb{K}\nabla u - \mathbf{v}u) d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} -\varphi(\mathbb{K}\nabla u - \mathbf{v}u) \cdot \mathbf{n} ds = \int_{\Omega} \varphi \left( f + \sigma_f(u_f - u) \right) d\mathbf{x}. \quad (10.3)$$

Než přistoupíme k aplikaci okrajových podmínek, zamysleme se jaké vlastnosti musí mít funkce  $u$ , aby tato rovnice vůbec měla smysl. Pokud budeme předpokládat, že všechny ostatní parametry jsou hladké, musí mít funkce  $u$  alespoň integrovatelné derivace ( $\partial_{x_i} u \in L_1(\Omega)$ ). Každopádně funkce  $u$  nemůže být libovolná, ale patří do nějakého vektorového prostoru funkcí  $H^1(\Omega)$ , který si přesně zavedeme až později, ale již víme, že jeho funkce mají integrovatelnou derivaci.

Pro začátek předpokládejme pouze *homogenní* Dirichletovu okrajovou podmínku  $u_d = 0$ . Pak je řešení  $u$  ve skutečnosti z podprostoru:

$$V_0 = \{u \in H^1(\Omega), u(\mathbf{x}) = 0 \text{ na } \Gamma_d\}$$

Jelikož už známe hodnotu řešení na hranici  $\Gamma_d$  nepotřebujeme (10.3) na této části hranice a proto se můžeme omezit na testovací funkce, které jsou na  $\Gamma_d$  nulové, t.j.

$$\varphi \in \mathcal{D}_0 = \{\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega}), \varphi(\mathbf{x}) = 0 \text{ na } \Gamma_d\}.$$

Nyní rozdělíme hraniční integrál na integrály přes části hranice odpovídající jednotlivým typům okrajových podmínek: Na  $\Gamma_d$  je  $\varphi = 0$  příslušná člen je tedy nulový:

$$\int_{\Gamma_d} -\varphi(\mathbb{K}\nabla u - \mathbf{v}u) \cdot \mathbf{n} ds = 0$$

Na  $\Gamma_n$  je tok roven  $q$ , máme tedy:

$$\int_{\Gamma_n} -\varphi(\mathbb{K}\nabla u - \mathbf{v}u) \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_{\Gamma_n} \varphi q \, ds.$$

Podobně známe tok na  $\Gamma_r$ :

$$\int_{\Gamma_r} -\varphi(\mathbb{K}\nabla u - \mathbf{v}u) \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_{\Gamma_r} \varphi \sigma_r(u - u_r) \, ds.$$

Dostáváme tak slabou formulaci rovnice (10.2). Slabým řešením bude každá funkce  $u$  z prostoru  $V_0$ , který splňuje

$$A(u, \varphi) := \int_{\Omega} (\mathbb{K}\nabla u - \mathbf{v}u) \cdot \nabla \varphi + \sigma_f u \varphi \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_r} \sigma_r u \varphi \, ds \quad (10.4)$$

$$= \int_{\Omega} (f + \sigma_f u_f) \varphi \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_r} \sigma_r u_r \varphi \, ds + \int_{\Gamma_n} -q \varphi \, ds =: \langle F, \varphi \rangle \quad (10.5)$$

pro všechna  $\varphi \in \mathcal{D}$ .

Nyní uvažujme případ s obecnou dirichletovou okrajovou podmínkou  $u_d \neq 0$ . Budeme předpokládat, že  $u_d$  lze prodloužit dovnitř oblasti  $\Omega$ . Tedy, že existuje funkce  $\tilde{u}_d$  z prostoru  $H^1(\Omega)$  taková, že  $\tilde{u}_d = u_d$  na  $\Gamma_d$  a jinak je  $\tilde{u}_d$  libovolná. Pak řešení s obecnou Dirichletovou podmínkou lze napsat jako  $u = \tilde{u}_d + u_0$ , kde  $u_0$  je na  $\Gamma_d$  nulová funkce, t.j.  $u_0$  je z prostoru  $V_0$ . Funkce  $u_0$  představuje neznámou část řešení, kterou dostaneme řešením problému:

$$A(u_0, \varphi) = \langle F, \varphi \rangle - A(\tilde{u}_d, \varphi) = \langle \tilde{F}, \varphi \rangle$$

### 10.3 Odvození klasické formulace ze slabé

Je třeba ověřit, že slabá formulace je ekvivalentní se silnou formulací v případě, že řešení je dostatečně hladké. Předpokládejme tedy, že  $u \in C^2(\Omega)$ . Použijeme v (10.4) testovací funkci s nosičem uvnitř  $\Omega$ , t.j.  $\varphi$  je nulová na hranici. Dále použijeme Greenovu větu, hraniční integrály budou nulové a dostaneme:

$$\int_{\Omega} -\operatorname{div}(\mathbb{K}\nabla u - \mathbf{v}u) \varphi \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (f + \sigma_f(u_f - u)) \varphi \, d\mathbf{x}. \quad (10.6)$$

Odtud plyne splnění bodové rovnice (10.2) v každém bodě uvnitř  $\Omega$ .

Dále potřebujeme odvodit splnění okrajových podmínek. Dirichletova podmínka je splněna přímo, jelikož  $u = \tilde{u}_d + u_0$  a  $u_0$  je nulová na  $\Gamma_d$ . Pro odvození Neumannovy a Robinovy okrajové podmínky uvažujeme libovolnou (hladkou) testovací funkci  $\psi$  s nosičem uvnitř  $\Gamma_{nr} = \Gamma_n \cup \Gamma_r$ . Dále tuto funkci hladce prodloužíme dovnitř  $\Omega$  a dostaneme (hladkou) testovací funkci  $\varphi_\epsilon \in \mathcal{D}_0$ , která má na  $\Gamma_{nr}$  hodnotu  $\psi$  a je nenulová pouze na tenkém proužku do vzdálenosti  $\epsilon$  od hranice. Nyní v (10.4) použijeme testovací funkci  $\varphi_\epsilon$  a použijeme Greenovu větu, dostaneme:

$$\int_{\Omega} X(u) \varphi_\epsilon \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_{nr}} (\mathbb{K}\nabla u - \mathbf{v}u) \cdot \mathbf{n} \varphi_\epsilon \, ds = \int_{\Gamma_r} \sigma_r(u_r - u) \varphi_\epsilon \, ds + \int_{\Gamma_n} -q \varphi_\epsilon \, ds$$

kde první člen obsahuje všechny členy z předchozí rovnice (10.6). Nyní provedeme limitu  $\epsilon \rightarrow 0$ . V této limitě se první intergál bude blížit nule, jelikož  $\varphi_\epsilon$  je nenulová na množině velikosti  $\epsilon \times |\Gamma_{nr}|$ , což konverguje k nule. Naproti tomu ve zbylých hraničních integrálech je  $\varphi_\epsilon = \psi$ , což na  $\epsilon$  nezávisí, tedy dostaneme:

$$\int_{\Gamma_{nr}} -(\mathbb{K}\nabla u - \mathbf{v}u) \cdot \mathbf{n} \psi \, ds = \int_{\Gamma_r} \sigma_r(u - u_r) \psi \, ds + \int_{\Gamma_n} q \psi \, ds$$

a odtud obě okrajové podmínky.

### 10.4 Ekvivalentní minimalizační úloha

## 11 Úvod do funkcionální analýzy

V této kapitole se budeme zabývat prostory funkcí, v nichž je vhodné hledat slabé řešení. Teorie těchto abstraktních prostorů je poměrně obsáhlá, pro zájemce o hlubší poznatky odkazujeme na knihu [1].

## 11.1 Normované lineární prostory

Pojmy skalární součin a norma lze zavést na různých množinách, např. na množině matic nebo reálných funkcí.

**Definice 11.1.** *Nechť  $V$  je vektorový prostor.*

(i) Řekneme, že zobrazení  $l : V \rightarrow \mathbb{R}$  je lineární forma na  $V$ , pokud pro každé  $u, v \in V$  a  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  platí:

$$l(\alpha u + \beta v) = \alpha l(u) + \beta l(v).$$

(ii) Zobrazení  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  nazveme bilineární formou, pokud  $a$  je lineární v obou proměnných, tj.

$$a(u, \alpha v + \beta w) = \alpha a(u, v) + \beta a(u, w), \quad a(\alpha u + \beta v, w) = \alpha a(u, w) + \beta a(v, w)$$

pro každé  $u, v, w \in V$  a  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

(iii) Bilineární forma  $a$  se nazývá symetrická, pokud

$$\forall u, v \in V : a(u, v) = a(v, u).$$

(iv) Skalární součin je symetrická bilineární forma  $a$ , která splňuje

$$\forall v \in V, v \neq \vec{0} : a(v, v) > 0.$$

(v) Norma indukovaná skalárním součinem  $a$  je definována výrazem

$$\|v\|_a := (a(v, v))^{1/2}, \quad v \in V.$$

Pro indukovanou normu platí Cauchyova-Schwarzova nerovnost:

$$\forall v, w \in V : |a(v, w)| \leq \|v\|_a \|w\|_a.$$

Norma obecně nemusí být indukovaná skalárním součinem, musí však splňovat následující vlastnosti.

**Definice 11.2.** Funkce  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$  se nazývá norma na vektorovém prostoru  $V$ , pokud pro každé  $u, v \in V$  a  $\alpha \in \mathbb{R}$  platí:

$$(i) \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = \vec{0},$$

$$(ii) \|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|,$$

$$(iii) \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

Je-li na  $V$  definována norma, nazývá se  $V$  normovaný lineární prostor.

Z definice normy vyplývá, že může nabývat jen nezáporných hodnot (dokažte!).

**Příklad 11.3.** Na množině  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , lze zavést normu  $\|(x_1, \dots, x_n)\|_p := (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$ ,  $p \in [1, \infty)$ , nebo  $\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty := \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$ . Norma  $\|\cdot\|_2$  je indukovaná standardním skalárním součinem vektorů.

V dalším textu bude  $\Omega$  oblast (otevřená souvislá množina) v  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \in \{1, 2, 3\}$ . Pro zjednodušení některých úvah také budeme předpokládat, že  $\Omega$  je omezená. Hranici  $\Omega$  budeme značit symbolem  $\partial\Omega$  a uzávěr symbolem  $\overline{\Omega} := \Omega \cup \partial\Omega$ .

**Příklad 11.4.** Na prostoru spojitých funkcí  $C(\overline{\Omega})$  definujeme skalární součin

$$(u, v) := \int_{\Omega} u(x)v(x) \, dx$$

a jím indukovanou normu

$$\|u\|_2 := \sqrt{(u, u)} = \left( \int_{\Omega} u^2(x) \, dx \right)^{1/2}.$$

Lze také zavést normu

$$\|u\|_\infty := \max_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)|.$$

**Příklad 11.5.** Na prostoru spojitě diferencovatelných funkcí

$$C^1(\overline{\Omega}) := \left\{ u \in C(\overline{\Omega}); \forall i = 1, \dots, d \frac{\partial u}{\partial x_i} \in C(\overline{\Omega}) \right\}$$

definujeme skalární součin

$$((u, v)) := (u, v) + \sum_{i=1}^d \left( \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right),$$

který indukuje normu

$$\|u\|_{1,2} := \sqrt{((u, u))} = \left( \int_{\Omega} u^2 + \sum_{i=1}^d \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Mimo to existuje také norma

$$\|u\|_{1,\infty} := \max \left\{ \|u\|_{\infty}, \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{\infty}, \dots, \left\| \frac{\partial u}{\partial x_d} \right\|_{\infty} \right\}.$$

**Příklad 11.6.** Uvažujme funkci

$$u(x) := \begin{cases} 10 \sin(1000\pi x) & \text{pro } x \in [0, \frac{1}{1000}] \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$

Snadno lze spočítat:

$$\|u\|_2 = \sqrt{\int_0^{1/1000} 100 \sin^2(1000\pi x) dx} = \sqrt{100 \left[ \frac{x}{2} - \frac{\sin(2000\pi x)}{4000\pi} \right]_{x=0}^{1/1000}} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \doteq 0,224,$$

$$\|u\|_{\infty} = \max_{x \in [0, 1/1000]} |10 \sin(1000\pi x)| = 10.$$

Norma  $\|\cdot\|_{\infty}$  se zdá být v jistém smyslu přirozenější, neboť měří maximální odchylku hodnot dvou spojitých funkcí. Přesto existují důvody, proč je vhodné používat normu  $\|\cdot\|_2$ . Předně,  $\|\cdot\|_2$  byla zavedena pomocí skalárního součinu. Skalární součin hraje v některých úlohách důležitou roli. Lze ukázat, že na množině spojitých funkcí nelze zavést skalární součin s rozumnými vlastnostmi, který by indukoval normu  $\|\cdot\|_{\infty}$ . Dalším důvodem je, že v mnoha aplikacích nevystačíme se spojitými funkcemi. Není snadné rozšířit normu  $\|\cdot\|_{\infty}$  na obecnější třídu funkcí, zatímco rozšíření normy  $\|\cdot\|_2$  je velmi jednoduché a vede přirozeně k vytvoření tzv. prostoru  $L^2$ .

### 11.1.1 Konvergence

**Definice 11.7.** Nechť  $V$  je normovaný lineární prostor. Řekneme, že posloupnost  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  prvků z  $V$  konverguje k  $u \in V$  v normě, jestliže

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\| = 0.$$

Říkáme, že  $u$  je limita posloupnosti  $\{u_n\}$  a píšeme

$$u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \text{ ve } V, \text{ nebo } u_n \rightarrow u \text{ ve } V.$$

Pro limitu v normovaném lineárním prostoru platí obdobná tvrzení jako pro limitu v  $\mathbb{R}^n$  známá ze základních kurzů matematiky. Např. každá posloupnost má nejvýše jednu limitu. Pokud posloupnost spojitých funkcí  $\{u_n\}$  konverguje k  $u$  v normě  $\|\cdot\|_2$  nebo  $\|\cdot\|_{\infty}$ , pak prvek  $u$  se skoro všude shoduje s bodovou limitou, tj.

$$\left( \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \right)(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n(x)).$$

Pro zjišťování konvergence posloupnosti funkcí je tedy vhodné nejprve zjistit, zda existuje bodová limita.

**Příklad 11.8.** Uvažujme posloupnost funkcí  $\{u_n\}$ ,

$$u_n(x) := \begin{cases} 10 \sin(n\pi x) & \text{pro } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

v prostoru  $C([0, 1])$ . Pro ověření, zda má daná posloupnost limitu, nejprve potřebujeme vhodného “kandidáta”. Spočteme proto nejprve bodovou limitu. Zřejmě  $\lim u_n(0) = 0$ . Je-li  $x \in (0, 1]$ , pak lze najít číslo  $n_0 \in \mathbb{N}$  takové, že  $x > \frac{1}{n_0}$ , takže pro  $n \geq n_0$  platí  $u_n(x) = 0$ , a proto musí být  $\lim u_n(x) = 0$ . Bodová limita posloupnosti je tedy nulová funkce. Lze ukázat, že

$$\|u_n - 0\|_2 = \sqrt{\frac{50}{n}}, \text{ takže } \lim \|u_n - 0\|_2 = 0,$$

a tedy

$$\lim u_n = 0 \text{ v prostoru } C([0, 1]) \text{ s normou } \|\cdot\|_2.$$

Dále platí

$$\|u_n - 0\|_\infty = 10,$$

z čehož plyne, že v prostoru  $C([0, 1])$  s normou  $\|\cdot\|_\infty$  není nulová funkce limitou posloupnosti  $\{u_n\}$  (ve skutečnosti posloupnost není v tomto prostoru konvergentní).

Uvedený příklad poukazuje na to, že existence limity v metrickém prostoru závisí na tom, jakou uvažujeme metriku.

**Definice 11.9.** Necht'  $\|\cdot\|_A$  a  $\|\cdot\|_B$  jsou normy na prostoru  $V$ . Jestliže existují konstanty  $\alpha, \beta > 0$  takové, že pro každé  $u \in V$  platí

$$\alpha\|u\|_A \leq \|u\|_B \leq \beta\|u\|_A,$$

pak říkáme, že  $\|\cdot\|_A$  a  $\|\cdot\|_B$  jsou na  $V$  ekvivalentní.

Jsou-li normy  $\|\cdot\|_A$  a  $\|\cdot\|_B$  ekvivalentní, pak platí

$$u_n \rightarrow u \text{ ve } (V, \|\cdot\|_A) \Leftrightarrow u_n \rightarrow u \text{ ve } (V, \|\cdot\|_B).$$

Příklad 11.8 ukazuje, že normy  $\|\cdot\|_2$  a  $\|\cdot\|_\infty$  nejsou na prostoru  $C(\overline{\Omega})$  ekvivalentní.

### 11.1.2 Úplnost

Skutečnost, že daná posloupnost v metrickém prostoru je konvergentní, závisí nejen na zvolené metrice, ale také na prostoru samotném. Existují například posloupnosti racionálních čísel, které mají za limitu iracionální číslo, tzn., že jsou konvergentní v prostoru  $\mathbb{R}$ , ale nejsou konvergentní v  $\mathbb{Q}$ . Množina  $\mathbb{Q}$  tedy v jistém smyslu není úplná.

Pojem úplnost souvisí s cauchyovskými posloupnostmi.

**Definice 11.10.** Posloupnost  $\{u_n\}$  v normovaném lineárním prostoru  $V$  se nazývá cauchyovská, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n \in \mathbb{N} : m, n > N \Rightarrow \|u_m - u_n\| < \varepsilon.$$

Cauchyovská posloupnost obecně nemusí mít limitu. Avšak každá konvergentní posloupnost je nutně cauchyovská.

**Definice 11.11.** Normovaný lineární prostor  $V$  se nazývá úplný (nebo také Banachův prostor), jestliže každá cauchyovská posloupnost má v tomto prostoru limitu. Úplný prostor se skalárním součinem se nazývá Hilbertův prostor.

**Příklad 11.12.** Prostory  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , s normami  $\|\cdot\|_p$ ,  $p \in [1, \infty]$  jsou úplné (díky Bolzanově-Cauchyově podmínce). Prostor  $\mathbb{Q}$  není úplný (např. posloupnost  $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}$  je v něm cauchyovská, ale její limita  $e \notin \mathbb{Q}$ ).

**Příklad 11.13.** Uvažujme posloupnost  $\{u_n\}$  na prostoru  $C([-1, 1])$  s normou  $\|\cdot\|_2$ , danou vztahem

$$u_n(x) := \sqrt[2n+1]{x}.$$

Bodová limita posloupnosti je  $\operatorname{sgn} x$ , což je nespojitá funkce, a proto posloupnost není v daném prostoru konvergentní. Platí ale

$$\|u_n - \operatorname{sgn}\|_2 = \sqrt{\frac{2}{(n+1)(2n+3)}}, \quad \text{a tedy} \quad \|u_n - \operatorname{sgn}\|_2 \rightarrow 0,$$

což znamená, že  $\{u_n\}$  je cauchyovská posloupnost. Prostor  $C([-1, 1])$  s normou  $\|\cdot\|_2$  proto není úplný. Zůstává otázka, zda existuje nějaký větší prostor s normou  $\|\cdot\|_2$ , ve kterém by byla posloupnost  $\{u_n\}$  konvergentní.

**Věta 11.14.** Prostor  $C(\overline{\Omega})$  s normou  $\|\cdot\|_\infty$  je úplný, s normou  $\|\cdot\|_2$  není úplný.

### 11.1.3 Množiny v normovaném lineárním prostoru

Podobně jako u euklidovské vzdálenosti v  $\mathbb{R}^n$ , lze definovat pojmy jako koule, okolí nebo otevřená množina pomocí normy.

**Definice 11.15.** *Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor s normou  $\|\cdot\|$ .*

- Koule se středem  $x \in X$  a poloměrem  $r > 0$  je množina

$$B_r(x) := \{y \in X; \|x - y\| < r\}.$$

- Množina  $M$  se nazývá otevřená, pokud pro každý bod  $x \in M$  existuje koule se středem  $x$ , která leží v  $M$ .
- Množina se nazývá uzavřená, pokud její doplněk v  $X$  je otevřený.

**Příklad 11.16.** *Koule v prostoru  $\mathbb{R}^2$  se středem v počátku souřadné soustavy má tvar*

- čtverce, jehož vrcholy leží na souřadných osách a těžiště v počátku, uvažujeme-li normu  $\|\cdot\|_1$ ;*
- kruhu se středem v počátku, uvažujeme-li euklidovskou normu  $\|\cdot\|_2$ ;*
- čtverce, jehož strany jsou rovnoběžné se souřadnými osami a těžiště leží v počátku, uvažujeme-li maximovou normu  $\|\cdot\|_\infty$ .*

**Definice 11.17.** *Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor,  $x \in X$  a  $M \subset M$ .*

- Bod  $x$  je vnitřním bodem množiny  $M$ , pokud existuje poloměr  $r > 0$  takový, že  $B_r(x) \subset M$ . Množinu všech vnitřních bodů  $M$  budeme značit  $\text{Int } M$ .
- Bod  $x$  je hraničním bodem množiny  $M$ , pokud každá koule se středem v  $x$  obsahuje alespoň jeden bod z  $M$  a alespoň jeden bod z  $X \setminus M$ . Množina všech hraničních bodů  $M$  se nazývá hranice  $M$  a značí se  $\partial M$ .
- Uzávěr množiny  $M$  je množina  $\overline{M} := M \cup \partial M$ .

Mezi právě definovanými množinami platí mnoho vztahů. Např.:

$$\text{Int } M \subset M \subset \overline{M}, \quad \text{Int } M \cap \partial M = \emptyset,$$

## 11.2 Prostory integrovatelných funkcí

V následující části zavedeme prostor funkcí, který obsahuje spojité funkce a zároveň je úplný vzhledem k normě  $\|\cdot\|_2$ , generované skalárním součinem  $(\cdot, \cdot)$ .

**Definice 11.18.** *Prostorem  $L^2(\Omega)$  rozumíme množinu funkcí*

$$L^2(\Omega) := \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \left| \int_{\Omega} u(x) \, dx \right| < \infty, \|u\|_2 < \infty \right\}.$$

*Spolu s normou  $\|\cdot\|_2$  tvoří  $L^2(\Omega)$  normovaný lineární prostor.*

Z definice plyne, že každá spojitá funkce v  $\overline{\Omega}$  patří do prostorů  $L^2(\Omega)$ . Do těchto prostorů ovšem patří i mnoho dalších funkcí, které mohou být nespojité nebo neomezené.

Poznamenejme, že pro správnost některých tvrzení je třeba uvažovat integrály v Definici 11.18 v tzv. Lebesgueově smyslu. Požadavek na integrovatelnost funkce  $u$  je splněn pro většinu "kulturních" funkcí (např. pro spojité funkce). Existují však tzv. neměřitelné funkce, jejichž druhá mocnina je integrovatelná, zatímco funkce samotná ne.

**Příklad 11.19.** *Uvažujme funkce*

$$u(x) := \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{a} \quad v(x) := \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

*na intervalu  $\Omega := (0, 1)$ . Platí:*

$$\begin{aligned} \|u\|_2 &= \sqrt{\int_0^1 \frac{1}{x} \, dx} = +\infty, \\ \|v\|_2^2 &= \int_0^1 |v(x)|^2 \, dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \, dx = 3. \end{aligned}$$

*Proto  $u \notin L^2(0, 1)$  a  $v \in L^2(0, 1)$ .*



**Příklad 11.20.** *Funkce*

$$\operatorname{sgn} x := \begin{cases} -1 & \text{pro } x < 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \\ 1 & \text{pro } x > 0 \end{cases}$$

je prvkem prostoru  $L^2(-1, 1)$ , neboť

$$\int_{-1}^1 |\operatorname{sgn} x|^2 dx = \int_{-1}^0 |\operatorname{sgn} x|^2 dx + \int_0^1 |\operatorname{sgn} x|^2 dx = \int_{-1}^0 1 dx + \int_0^1 1 dx = 2,$$

a tedy  $\|\operatorname{sgn} x\|_2 = \sqrt{2}$ . Podobně funkce

$$u(x) := \begin{cases} 0 & \text{pro } x \neq 0 \\ 10 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

patří do  $L^2(-1, 1)$  a její norma je  $\|u\|_2 = 0$ . Vidíme, že norma nezávisí na hodnotě funkce v bodě  $x = 0$ . Dokonce není nutné, aby byla funkce v bodě 0 definována.

Funkce, která je rovna nule všude až na hodnotu v jednom bodě, má nulovou normu a je v jistém smyslu ekvivalentní s nulovou funkcí. Obecněji postačí, když je funkce nulová všude v  $\Omega$  mimo množinu míry nula. Mezi množiny s nulovou mírou patří např. všechny konečné a spočetné množiny.

**Definice 11.21.** *Nechť funkce  $u, v \in L^2(\Omega)$  jsou si v oblasti  $\Omega$  rovny skoro všude, tj. všude mimo množinu míry nula (kde se buď jejich hodnoty liší nebo některá z funkcí není definována). Pak řekneme, že  $u$  a  $v$  jsou v prostoru  $L^2(\Omega)$  ekvivalentní. Píšeme  $u = v$  v  $L^2(\Omega)$ .*

Funkce  $u$  a  $v$  jsou tedy v tomto prostoru pokládány za sobě rovné. Dvě funkce  $u, v$  ekvivalentní v prostoru  $L^2(\Omega)$  jsou charakterizovány vlastností

$$\int_{\Omega} |u(x) - v(x)|^2 dx = 0.$$

**Věta 11.22.** *Prostor  $L^2(\Omega)$  s normou  $\|\cdot\|_2$  je Banachův prostor.*

Tak jako  $L^2(\Omega)$  je nejmenší úplný prostor s normou  $\|\cdot\|_2$  obsahující  $C(\overline{\Omega})$ , lze zavést také prostor

$$L^\infty(\Omega) := \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \left| \int_{\Omega} u(x) dx \right| < \infty, \exists C > 0 : |u(x)| \leq C \text{ skoro všude v } \Omega \right\}.$$

Norma na tomto prostoru je

$$\|u\|_\infty := \inf \{ C > 0; |u(x)| \leq C \text{ skoro všude v } \Omega \}.$$

Pro spojitě funkce tato definice splývá s původní definicí  $\|\cdot\|_\infty$ . Také  $L^\infty(\Omega)$  je Banachův prostor.

**Příklad 11.23.** *Poněkud specifickým případem je tzv. Dirichletova funkce*

$$D(x) = \begin{cases} 1; & x \in \mathbb{Q}, \\ 0; & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Protože množina  $\mathbb{Q}$  racionálních čísel je spočetná,  $D$  je skoro všude v  $\mathbb{R}$  nulová. Proto

$$\|D\|_\infty = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} D(x) dx = 0.$$

Na omezené oblasti  $\Omega$  platí následující vztah mezi limitami.

**Věta 11.24.** *Nechť  $\Omega$  je omezená oblast v  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \in \{1, 2, 3\}$ , a  $\{u_n\}$  je posloupnost funkcí definovaných v  $\Omega$ . Pak platí:*

- (i) *Jestliže  $u_n \rightarrow u$  v  $L^\infty(\Omega)$ , pak  $u_n \rightarrow u$  také v  $L^2(\Omega)$ .*
- (ii) *Jestliže  $u_n \rightarrow u$  v  $L^2(\Omega)$ , pak  $u_n(x) \rightarrow u(x)$  pro skoro všechna  $x \in \Omega$ .*

### 11.3 Prostory s integrovatelnými derivacemi

Pro funkce z prostoru  $L^2(\Omega)$  lze zavést pojem derivace. Uvažujme nejprve funkci  $u \in C^1([0, 1])$ . Díky pravidlu per partes pak platí pro každé  $v \in C^1([0, 1])$ ,  $v(0) = v(1) = 0$ :

$$\int_0^1 u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_{x=0}^1 - \int_0^1 u(x)v'(x) dx = - \int_0^1 u(x)v'(x) dx. \quad (11.1)$$

Jestliže tedy pro nějakou funkci  $g$  platí:

$$\forall v \in C^1([0, 1]), v(0) = v(1) = 0 : \int_0^1 g(x)v(x) dx = - \int_0^1 u(x)v'(x) dx,$$

pak z (11.1) víme, že  $g = u'$ . Tento poznatek je východiskem pro zavedení tzv. *zobecněné derivace*, která je vhodná i pro funkce  $u$ , které nemají derivace v klasickém smyslu.

**Definice 11.25.** *Nechť  $u \in L^2(\Omega)$ . Funkce  $g \in L^2(\Omega)$  se nazývá zobecněná parciální derivace funkce  $u$  podle  $i$ -té proměnné, pokud pro každé  $v \in C^1(\bar{\Omega})$ ,  $v|_{\partial\Omega} = 0$ , platí:*

$$\int_{\Omega} gv = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i}.$$

Píšeme  $g = \frac{\partial u}{\partial x_i}$  v  $L^2(\Omega)$ .

**Příklad 11.26.** *Spočtěme zobecněnou derivaci funkce  $u(x) := |x|$  na intervalu  $(-1, 1)$ . Pro  $v \in C^1([-1, 1])$ ,  $v(-1) = v(1) = 0$  platí:*

$$\begin{aligned} - \int_{-1}^1 |x|v'(x) dx &= - \int_{-1}^0 (-x)v'(x) dx - \int_0^1 xv'(x) dx \\ &= [xv(x)]_{x=-1}^0 - \int_{-1}^0 v(x) dx - [xv(x)]_{x=0}^1 + \int_0^1 v(x) dx = \int_{-1}^1 \operatorname{sgn} x v(x) dx. \end{aligned}$$

Je tedy  $u'(x) = \operatorname{sgn} x$  v  $L^2(-1, 1)$ .

**Příklad 11.27.** *Uvažujme funkci  $u(x) = \operatorname{sgn} x$ . Pro  $v \in C^1([-1, 1])$ ,  $v(-1) = v(1) = 0$  platí:*

$$\begin{aligned} - \int_{-1}^1 u(x)v'(x) dx &= - \int_{-1}^0 (-v'(x)) dx - \int_0^1 v'(x) dx \\ &= [v(x)]_{x=-1}^0 - [v(x)]_{x=0}^1 = 2v(0) = 2 \int_{-1}^1 \delta_0(x)v(x) dx, \end{aligned}$$

kde  $\delta_0$  se nazývá Diracova  $\delta$ -funkce (ve skutečnosti to není funkce, ale tzv. distribuce). V jistém smyslu tedy platí  $(\operatorname{sgn} x)' = 2\delta_0(x)$ , nicméně  $\delta_0 \notin L^2(\Omega)$ .

Ne každá funkce z  $L^2(\Omega)$  má zobecněnou derivaci v  $L^2(\Omega)$ .

Pro vektorové funkce  $\mathbf{u}, \mathbf{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  definujeme

$$\|\mathbf{u}\|_2 := \left( \sum_{i=1}^d \|u_i\|_2^2 \right)^{1/2}, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \sum_{i=1}^d (u_i, v_i).$$

Prostor  $L^2$  pro vektorové funkce budeme značit  $L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)$ .

**Definice 11.28.** *Prostor  $H^1(\Omega)$  je množina*

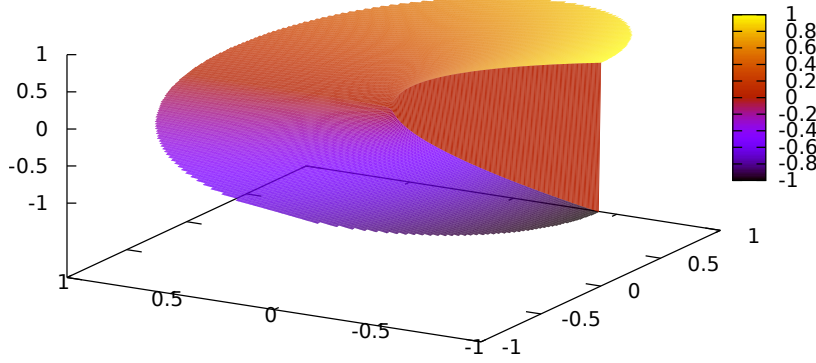
$$H^1(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega); \nabla u \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)\}.$$

*Na tomto prostoru je definována norma*

$$\|u\|_{1,2} := (\|u\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2)^{1/2}$$

*a skalární součin*

$$((u, v)) := (u, v) + (\nabla u, \nabla v).$$



Obrázek 1: Nespojité funkce z prostoru  $H^1(\Omega)$ .

**Věta 11.29.**  $H^1(\Omega)$  je Banachův prostor.

**Příklad 11.30.** Na oblasti  $\Omega = B_1(0) \setminus \{(x, 0); x \in (-1, 0)\}$  uvažujme funkci

$$u(x, y) = \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctg \frac{y}{x}.$$

Ukážeme, že  $u \in H^1(\Omega)$ :

$$\int_{\Omega} u^2 = \int_{-\pi/2}^{3/2\pi} \int_0^1 r^2 \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) r \, dr \, d\theta = \frac{\pi}{4},$$

$$\nabla u(x, y) = \frac{1}{2} r^{-3/2} \begin{pmatrix} x \sin \frac{\theta}{2} + y \cos \frac{\theta}{2} \\ y \sin \frac{\theta}{2} - x \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix},$$

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 = \frac{1}{4} \int_{-\pi/2}^{3/2\pi} \int_0^1 dr \, d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Přitom podél úsečky  $\{(x, 0); x \in (-1, 0)\}$  je  $u$  nespojitá (obr. 1). Pro tuto funkci  $u$  nelze jednoznačně definovat hodnoty na hranici  $\partial\Omega$ .

Aby bylo možné pro funkce z  $H^1(\Omega)$  definovat jejich stopu, tj. hodnotu na hranici, omezíme se v dalším na oblasti s Lipschitzovskou hranicí. Řekneme, že oblast  $\Omega$  má Lipschitzovskou hranici, jestliže ji lze lokálně popsat jako spojitou funkci s omezenými derivacemi. Pro funkci  $u \in C(\overline{\Omega})$  definujeme zobrazení  $\text{tr} : u \mapsto u|_{\partial\Omega}$ , kde  $u|_{\partial\Omega}$  je tzv. stopa funkce  $u$  (hodnota na hranici). Na hranici oblasti  $\Omega$ , resp. na její části, lze zavést prostor  $L^2(\partial\Omega)$  s obdobnými vlastnostmi jako  $L^2(\Omega)$ . Normu a skalární součin na hranici budeme značit symbolem  $\| \cdot \|_{2, \partial\Omega}$ , resp.  $(\cdot, \cdot)_{\partial\Omega}$ .

**Věta 11.31** (o stopách). Nechť  $\Omega$  má Lipschitzovskou hranici. Pak existuje lineární zobrazení  $\text{tr} : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$  s následujícími vlastnostmi:

$$\forall v \in C(\overline{\Omega}) : \text{tr } v = v|_{\partial\Omega},$$

$$\forall v \in H^1(\Omega) : \|\text{tr } v\|_{2, \partial\Omega} \leq C \|v\|_{1, 2},$$

kde konstanta  $C > 0$  závisí pouze na  $\Omega$ .

Poznamenejme, že ne každá funkce z  $L^2(\partial\Omega)$  je stopou funkce z  $H^1(\Omega)$ . Nyní můžeme zavést prostory funkcí s nulovou stopou:

**Definice 11.32.** Je-li  $\Gamma$  relativně otevřená část hranice  $\partial\Omega$ , pak definujeme

$$H_{\Gamma}^1(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega); \text{tr } u|_{\Gamma} = 0\}.$$

Speciálně pro  $\Gamma = \partial\Omega$  značíme tento prostor jako  $H_0^1(\Omega)$ , tj.

$$H_0^1(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega); \text{tr } u = 0 \text{ na } \partial\Omega\}.$$

**Věta 11.33** (Friedrichsova nerovnost). *Nechť  $\Omega$  má Lipschitzovskou hranici a  $\Gamma$  je relativně otevřená část  $\partial\Omega$ . Pak existuje konstanta  $C = C(\Omega, \Gamma) > 0$  taková, že pro každé  $u \in H^1(\Omega)$  platí nerovnost*

$$\|u\|_{1,2} \leq C(\|\nabla u\|_2 + \|u\|_{2,\Gamma}). \quad (11.2)$$

*Speciálně pro  $u \in H_0^1(\Omega)$  platí:*

$$\|u\|_{1,2} \leq C\|\nabla u\|_2. \quad (11.3)$$

## 12 Abstraktní teorie slabých řešení

V této kapitole se budeme zabývat otázkou, jak správně zavést slabou formulaci tak, aby úloha byla jednoznačně řešitelná.

### 12.1 Abstraktní variační úloha

Nechť  $V$  je Hilbertův prostor se skalárním součinem  $(\cdot, \cdot)$  a normou  $\|\cdot\|$ ,  $a$  a  $l$  je bilineární, resp. lineární forma na  $V$ . Úlohu

$$\text{Najdi } u \in V \text{ takové, že } \forall v \in V : a(u, v) = l(v), \quad (12.1)$$

budeme nazývat *abstraktní variační úloha*.

**Věta 12.1** (Lax-Milgram). *Nechť  $V$  je Hilbertův prostor, a je bilineární forma na  $V$ , pro niž existují konstanty  $\alpha, \beta > 0$  takové, že*

(i) *a je omezená, tj.*

$$\forall v, w \in V : a(v, w) \leq \beta \|v\| \|w\|,$$

(ii) *a je eliptická na  $V$ , tj.*

$$\forall v \in V : \alpha \|v\|^2 \leq a(v, v),$$

*a nechť  $l$  je omezená lineární forma na  $V$ , tj.*

(iii) *existuje konstanta  $\gamma > 0$  taková, že*

$$\forall v \in V : l(v) \leq \gamma \|v\|.$$

*Pak existuje právě jedno řešení  $u \in V$  variační úlohy (12.1). Navíc platí odhad:*

$$\|u\| \leq \frac{\gamma}{\alpha}.$$

### 12.2 Aplikace na eliptické rovnice

#### 12.2.1 Nehomogenní Dirichletova podmínka

Je dána oblast  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  a skalární funkce  $f$  na  $\Omega$  a  $u_d$  na  $\partial\Omega$ . Hledáme funkci  $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ , která splňuje:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \text{v } \Omega, \\ u &= u_d & \text{na } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Protože je předepsána Dirichletova podmínka na  $\partial\Omega$ , prostor, ve kterém budeme hledat slabé řešení, je  $V := H_0^1(\Omega)$ . Jelikož ale hodnota  $u$  na hranici je dána funkcí  $u_d$ , pak obecně  $u \notin H_0^1(\Omega)$ . Předpokládejme proto, že  $u_d$  lze rozšířit na celou oblast  $\Omega$  tak, aby  $u_d \in H^1(\Omega)$ . Pak  $u - u_d \in H_0^1(\Omega)$ . Řešení budeme hledat ve tvaru  $u = z + u_d \in H^1(\Omega)$ , kde  $z \in H_0^1(\Omega)$ , a

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) : a(z, v) = l(v),$$

kde

$$a(z, v) := (\nabla z, \nabla v)_{L^2(\Omega)}, \quad (12.2)$$

$$l(v) := (f, v)_{L^2(\Omega)} - (\nabla u_d, \nabla v)_{L^2(\Omega)}. \quad (12.3)$$

**Věta 12.2.** Pro bilineární formu  $a$  definovanou v (12.2) platí:

$$\forall v, w \in H^1(\Omega) : a(v, w) \leq \|v\|_{1,2} \|w\|_{1,2}.$$

Je-li navíc  $f \in L^2(\Omega)$ , pak existuje  $\gamma := \|f\|_2 + \|\nabla u_d\|_2$  takové, že

$$\forall v \in H^1(\Omega) : l(v) \leq \gamma \|v\|_{1,2},$$

kde lineární forma  $l$  je definována v (12.3).

*Důkaz.* Omezenost  $a$  plyne přímo z Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti a faktu, že  $\|\nabla v\|_2 \leq \|v\|_{1,2}$ . Dále

$$l(v) \leq \|f\|_2 \|v\|_2 + \|\nabla u_d\|_2 \|\nabla v\|_2 \leq (\|f\|_2 + \|\nabla u_d\|_2) \|v\|_{1,2}.$$

□

**Věta 12.3.** Bilineární forma  $a$  je eliptická na  $H_0^1(\Omega)$  s konstantou  $\alpha = 1/C^2$ , kde  $C = C(\Omega, \partial\Omega)$  je konstanta z Friedrichsovy nerovnosti (11.3).

*Důkaz.* Je-li  $v \in H_0^1(\Omega)$ , pak

$$a(v, v) = (\nabla v, \nabla v)_{L^2(\Omega)} = \|\nabla v\|_2^2 \geq \frac{1}{C^2} \|v\|_{1,2}^2.$$

□

### 12.2.2 Anizotropní difúze

Uvažujme úlohu vedení tepla ve čtvercové desce, která je z jedné strany zahřívána infračervenými lampami tepelným tokem  $f$  a z druhé strany předeřívána ocelovou maticí s tepelnou vodivostí  $\sigma$ , která je dále vyhřívána soustavou kanálků s vodou o teplotě  $u_f$ . Na dvou stranách čtverce je tepelná izolace, na druhých dvou stranách je konstantní teplota  $u = 0$  (toto je nereálné, ale je to jen příklad). Deska je kompozitní materiál složený z polymerové pryskyřice (vodivost 1W/mK) a uhlíkových vláken (vodivost 1000W/mK) s preferovaným směrem, tepelná vodivost desky je proto anizotropní.

Formulujme nyní úlohu abstraktněji.

Mějme oblast  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  (například čtverec  $d = 2$ ) s hranicí  $\partial\Omega = \bar{\Gamma}_d \cup \bar{\Gamma}_n$ , tedy s Dirichletovskou a Neumannovskou částí hranice. Na této oblasti hledáme teplotu  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ , která je řešením stacionární rovnice vední tepla:

$$-\operatorname{div}(\mathbb{K}\nabla u) = f + \sigma(u_f - u) \quad \text{v } \Omega, \quad (12.4)$$

$$u = 0 \quad \text{na } \Gamma_d, \quad (12.5)$$

$$-\mathbb{K}\nabla u \cdot \mathbf{n} = q \quad \text{na } \Gamma_n. \quad (12.6)$$

Zde  $\mathbb{K} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$  je maticová funkce pro tenzor tepelné vodivosti a  $f, \sigma, u_f$  jsou skalární funkce na  $\Omega$  a  $q$  skalární funkce na  $\Gamma_n$ .

Aby byla splněna Dirichletova podmínka na  $\Gamma_d$  a formy  $a, l$  měly konečnou hodnotu, budeme hledat slabé řešení v prostoru

$$V := H_{\Gamma_d}^1(\Omega) = \{\varphi \in H^1(\Omega), \varphi = 0 \text{ na } \Gamma_d\}$$

Nyní převedeme úlohu vedení tepla na abstraktní variační úlohu:

$$\text{Najdi } u \in H_{\Gamma_d}^1(\Omega) : \forall v \in H_{\Gamma_d}^1(\Omega) : a(u, v) = l(v),$$

kde formy  $a(\cdot, \cdot)$  a  $l(\cdot)$  mají tvar:

$$a(u, v) := (\mathbb{K}\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} + (\sigma u, v)_{L^2(\Omega)}, \quad (12.7)$$

$$l(v) := (f + \sigma u_f, v)_{L^2(\Omega)} - (q, v)_{L^2(\Gamma_n)}. \quad (12.8)$$

Pro použití Lax-Milgramova lemmatu potřebujeme ověřit omezenost forem  $a$  a  $l$ . To ovšem platí za nějakých předpokladů na další parametry úlohy. Konkrétně dokážeme následující větu.

**Věta 12.4.** *Nechť  $\mathbb{K} \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{d \times d})$  a  $\sigma \in L^\infty(\Omega)$ . Pak existuje konstanta  $\beta := \beta(\|\mathbb{K}\|_\infty, \|\sigma\|_\infty)$  taková, že*

$$\forall u, v \in H^1(\Omega) : a(u, v) \leq \beta \|u\|_{1,2} \|v\|_{1,2},$$

*kde bilineární forma  $a$  je definována v (12.7). Je-li navíc  $f, u_f \in L^2(\Omega)$  a  $q \in L^2(\Gamma_n)$ , pak existuje  $\gamma := \gamma(\|f\|_2, \|\sigma\|_\infty, \|u_f\|_2, \|q\|_{2,\Gamma_n})$  takové, že*

$$\forall v \in H^1(\Omega) : l(v) \leq \gamma \|v\|_{1,2},$$

*kde lineární forma  $l$  je definována v (12.8).*

*Důkaz.* Nejprve odhadneme postupně všechny výrazy v  $a$ . S využitím Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti a faktu, že  $\|w_i\|_2 \leq \|\mathbf{w}\|_2$  dostaneme:

$$\begin{aligned} (\mathbb{K} \nabla v, \nabla w) &= \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} k_{ij}(x) \partial_{x_j} v(x) \partial_{x_i} w(x) \, dx \\ (ab &\leq |a||b|) && \leq \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} |k_{ij}| |\partial_{x_j} v| |\partial_{x_i} w| \, dx \\ (\text{předpoklad o } \mathbb{K}) &&& \leq \|\mathbb{K}\|_\infty \sum_{i,j=1}^d (\|\partial_{x_j} v\|_2, \|\partial_{x_i} w\|_2)_{L^2(\Omega)} \\ (\text{Cauchy-Schwarzova nerovnost}) &&& \leq \|\mathbb{K}\|_\infty \left( \sum_{j=1}^d \|\partial_{x_j} v\|_2 \right) \left( \sum_{i=1}^d \|\partial_{x_i} w\|_2 \right) \\ (\|v_i\| &\leq \|\mathbf{v}\|) && \leq \|\mathbb{K}\|_\infty (d \|\nabla v\|_2) (d \|\nabla w\|_2) \\ (\text{definice } \|\cdot\|_{H^1(\Omega)}) &&& \leq d^2 \|\mathbb{K}\|_\infty \|v\|_{H^1(\Omega)} \|w\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

Obdobně lze odhadnout

$$(\sigma v, w) \leq \|\sigma\|_\infty (|v|, |w|) \leq \|\sigma\|_\infty \|v\|_2 \|w\|_2 \leq \|\sigma\|_\infty \|v\|_{1,2} \|w\|_{1,2}.$$

V souhrnu jsme dokázali, že

$$a(v, w) \leq (d \|\mathbb{K}\|_\infty + \|\sigma\|_\infty) \|v\|_{1,2} \|w\|_{1,2} =: \beta \|v\|_{1,2} \|w\|_{1,2}.$$

Nyní odhadneme výrazy ve formě  $l$ :

$$\begin{aligned} (f, v) &\leq \|f\|_2 \|v\|_2 \leq \|f\|_2 \|v\|_{1,2}, \\ (\sigma u_f, v) &\leq \|\sigma\|_\infty \|u_f\|_2 \|v\|_2 \leq \|\sigma\|_\infty \|u_f\|_2 \|v\|_{1,2}, \\ (q, v)_{\Gamma_n} &\leq \|q\|_{2,\Gamma_n} \|v\|_{2,\Gamma_n} \leq \|q\|_{2,\Gamma_n} \|v\|_{2,\partial\Omega} \leq C \|q\|_{2,\Gamma_n} \|v\|_{1,2}, \end{aligned}$$

kde  $C$  je konstanta z věty o stopách. Platí tedy

$$l(v) \leq (\|f\|_2 + \|\sigma\|_\infty \|u_f\|_2 + C \|q\|_{2,\Gamma_n}) \|v\|_{1,2} =: \gamma \|v\|_{1,2}.$$

□

**Věta 12.5.** *Nechť jsou splněny následující předpoklady:*

(i)  $\mathbb{K}$  je stejnoměrně pozitivně definitní na  $\Omega$ , tj.

$$\exists \underline{k} > 0 \, \forall \mathbf{x} \in \Omega \, \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^d : \mathbb{K}(\mathbf{x}) \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} \geq \underline{k} \|\mathbf{q}\|^2;$$

(ii)  $\sigma$  je nezáporná funkce, tj.

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega : \sigma(\mathbf{x}) \geq 0.$$

*Pak bilineární forma  $a$  je eliptická na  $H_{\Gamma_d}^1(\Omega)$  s konstantou  $\alpha = \underline{k}/C^2$ , kde  $C = C(\Omega, \Gamma_d) > 0$  je konstanta z (11.2).*

*Důkaz.*

$$a(v, v) = (\mathbb{K} \nabla v, \nabla v) + (\sigma v, v) \geq \underline{k} \|\nabla v\|_2^2 + \|\sqrt{\sigma} v\|_2^2 \geq \underline{k} \|\nabla v\|_2^2.$$

Díky Friedrichsově nerovnosti platí:

$$a(v, v) \geq \underline{k} \|\nabla v\|_2^2 \geq \frac{\underline{k}}{C^2} \|v\|_{1,2}^2.$$

□

### 12.2.3 Advekce-difúze

Je dána oblast  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  s hranicí  $\partial\Omega = \bar{\Gamma}_n \cup \bar{\Gamma}_r$ , vektorové pole  $\mathbf{q} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  a skalární funkce  $\sigma_r, u_r$  na  $\Gamma_r$ . Hledáme funkci  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ , která splňuje:

$$\begin{aligned} -\Delta u + \operatorname{div}(\mathbf{q}u) &= 0 && \text{v } \Omega, \\ -\nabla u \cdot \mathbf{n} &= 0 && \text{na } \Gamma_n, \\ (-\nabla u + \mathbf{q}u) \cdot \mathbf{n} &= \sigma_r(u - u_r) && \text{na } \Gamma_r. \end{aligned}$$

Slabá formulace:

Najdi  $u \in V := H^1(\Omega)$  takové, že  $\forall v \in H^1(\Omega) : a(u, v) = l(v)$ ,

kde

$$a(u, v) := (\nabla u - \mathbf{q}u, \nabla v) + (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}u, v)_{\Gamma_n} + (\sigma_r u, v)_{\Gamma_r}, \quad (12.9)$$

$$l(v) := (\sigma_r u_r, v)_{\Gamma_r}. \quad (12.10)$$

**Věta 12.6.** *Nechť  $\mathbf{q} \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^d)$ ,  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \in L^\infty(\Gamma_n)$  a  $\sigma_r \in L^\infty(\Gamma_r)$ . Pak existuje konstanta*

$$\beta := \beta(\|\mathbf{q}\|_\infty, \|\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}\|_{\infty, \Gamma_n}, \|\sigma_r\|_{\infty, \Gamma_r})$$

*taková, že*

$$\forall v, w \in H^1(\Omega) : a(v, w) \leq \beta \|v\|_{1,2} \|w\|_{1,2},$$

*kde bilineární forma  $a$  je definována v (12.9). Je-li navíc  $u_r \in L^2(\Gamma_r)$ , pak existuje  $\gamma := \gamma(\|\sigma_r\|_{\infty, \Gamma_r}, \|u_r\|_{2, \Gamma_r})$  takové, že*

$$\forall v \in H^1(\Omega) : l(v) \leq \gamma \|v\|_{1,2},$$

*kde lineární forma  $l$  je definována v (12.10).*

*Důkaz.* Nejprve odhadneme postupně všechny výrazy v  $a$ . S využitím Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti a faktu, že  $\|\partial_{x_i} w\|_2 \leq \|\nabla w\|_2$  dostaneme:

$$(\nabla v, \nabla w) \leq \|v\|_{1,2} \|w\|_{1,2},$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{q}v, \nabla w) &\leq \sum_{i=1}^d (|q_i| |v|, |\partial_{x_i} w|) \leq \|\mathbf{q}\|_\infty \sum_{i=1}^d (|v|, |\partial_{x_i} w|) \\ &\leq \|\mathbf{q}\|_\infty \|v\|_2 \sum_{i=1}^d \|\partial_{x_i} w\|_2 \leq d \|\mathbf{q}\|_\infty \|v\|_2 \|\nabla w\|_2 \\ &\leq d \|\mathbf{q}\|_\infty \|v\|_{1,2} \|w\|_{1,2}, \end{aligned}$$

Pro odhad hraničních členů použijeme navíc větu o stopách:

$$(\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}v, w)_{\Gamma_n} \leq \|\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}\|_{\infty, \Gamma_n} \|v\|_{2, \Gamma_n} \|w\|_{2, \Gamma_n} \leq C_1^2 \|\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}\|_{\infty, \Gamma_n} \|v\|_{1,2} \|w\|_{1,2},$$

$$\begin{aligned} (\sigma_r v, w)_{\Gamma_r} &\leq \|\sigma_r\|_{\infty, \Gamma_r} (|v|, |w|)_{\Gamma_r} \leq \|\sigma_r\|_{\infty, \Gamma_r} \|v\|_{2, \Gamma_r} \|w\|_{2, \Gamma_r} \\ &\leq \|\sigma_r\|_{\infty, \Gamma_r} \|v\|_{2, \partial\Omega} \|w\|_{2, \partial\Omega} \leq C_2^2 \|\sigma_r\|_{\infty, \Gamma_r} \|v\|_{1,2} \|w\|_{1,2}. \end{aligned}$$

Zde  $C_1 = C(\Omega, \Gamma_n)$  a  $C_2 = C(\Omega, \Gamma_r)$  jsou konstanty z Věty 11.31. V souhrnu jsme dokázali, že

$$a(v, w) \leq (1 + d \|\mathbf{q}\|_\infty + C_1^2 \|\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}\|_{\infty, \Gamma_n} + C_2^2 \|\sigma_r\|_{\infty, \Gamma_r}) \|v\|_{1,2} \|w\|_{1,2} =: \beta \|v\|_{1,2} \|w\|_{1,2}.$$

Nyní odhadneme formu  $l$ :

$$\begin{aligned} l(v) &= (\sigma_r u_r, v)_{\Gamma_r} \leq \|\sigma_r\|_{\infty, \Gamma_r} \|u_r\|_{2, \Gamma_r} \|v\|_{2, \Gamma_r} \\ &\leq \|\sigma_r\|_{\infty, \Gamma_r} \|u_r\|_{2, \Gamma_r} \|v\|_{2, \partial\Omega} \\ &\leq C_2 \|\sigma_r\|_{\infty, \Gamma_r} \|u_r\|_{2, \Gamma_r} \|v\|_{1,2} =: \gamma \|v\|_{1,2}. \end{aligned}$$

□

**Věta 12.7.** *Nechť jsou splněny následující předpoklady:*

(i)  $\mathbf{q}$  má nulovou divergenci,  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \geq 0$  na  $\Gamma_n$  a  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \leq 0$  na  $\Gamma_r$ ;

(ii) existuje konstanta  $\underline{\sigma}_r > 0$  taková, že

$$\forall \mathbf{x} \in \Gamma_r : \sigma_r(\mathbf{x}) \geq \underline{\sigma}_r \geq 0.$$

Pak bilineární forma  $a$  je eliptická na  $H^1(\Omega)$  s konstantou  $\alpha = \min\{1, \underline{\sigma}_r\}/(2C^2)$ , kde  $C > 0$  je konstanta z Věty 11.33.

Důkaz. Jelikož  $\operatorname{div} \mathbf{q} = 0$  a  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \leq 0$  na  $\Gamma_r$ , platí:

$$-(\mathbf{q}v, \nabla v) = -(\mathbf{q}, \nabla \frac{v^2}{2}) = -\frac{1}{2}(\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}v, v)_{\partial\Omega} + (\operatorname{div} \mathbf{q}, \frac{v^2}{2}) \geq -\frac{1}{2}(\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}v, v)_{\Gamma_n},$$

a proto také

$$\begin{aligned} a(v, v) &= \|\nabla v\|_2^2 - (\mathbf{q}v, \nabla v) + (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}v, v)_{\Gamma_n} + (\sigma_r v, v)_{\Gamma_r} \\ &\geq \|\nabla v\|_2^2 + \frac{1}{2}(\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}v, v)_{\Gamma_n} + (\sigma_r v, v)_{\Gamma_r} \\ &\geq \|\nabla v\|_2^2 + \underline{\sigma}_r \|v\|_{2, \Gamma_r}^2 \\ &\geq \min\{1, \underline{\sigma}_r\}(\|\nabla v\|_2^2 + \|v\|_{2, \Gamma_r}^2). \end{aligned}$$

Z nerovnosti  $A^2 + B^2 \geq \frac{1}{2}(A + B)^2$  vyplývá, že

$$a(v, v) \geq \frac{1}{2} \min\{1, \underline{\sigma}_r\}(\|\nabla v\|_2 + \|v\|_{2, \Gamma_r})^2.$$

Díky Friedrichsově nerovnosti máme

$$a(v, v) \geq \frac{\min\{1, \underline{\sigma}_r\}}{2C^2} \|v\|_{1,2}^2.$$

□

## 13 Galerkinova metoda

### Reference

- [1] K. Rektorys. Variační metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky. *SNTL, Praha*, 1974.