Cvičení 1

Definiční obor funkce více proměnných, vrstevnice apod.

---

1. Najděte definiční obor funkce $f(x,y)=\sqrt{x-y^2}+\sqrt{y-x^2}$.

Řešení: $D_f=\big\{x-y^2\ge 0\ \text{ a }\ y-x^2\ge 0\big\}$, což je konvexní množina omezená křivkami $x=y^2$ a $y=x^2$.

---

2. Najděte definiční obor funkce $f(x,y)=\arccos\dfrac{x}{x+y}$.

Řešení: Definiční obor je množina všech $[x;y]\in\mathbb{R}^2$, pro která platí $-1\le\dfrac{x}{x+y}\le 1$. Tato množina se skládá ze dvou tupých úhlů omezených přímkami $y=0$ a $y=-2x$ s hranicí, ale bez bodu $[0;0]$.

---

3. Najděte definiční obor funkce $f(x,y)=\sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$.

Řešení: Definiční obor je množina $1\le x^2+y^2\le 4$, což je uzavřené mezikruží se středem v počátku, s poloměrem vnitřního kruhu 1 a vnějšího 2.

---

4. Najděte definiční obor funkce $f_1(x,y)=\ln(xy)$ a $f_2(x,y)=\ln x+\ln y$.

Řešení: Definiční obor funkce f_1 je množina $xy>0$, což je otevřený první a třetí kvadrant, kdežto definiční obor funkce f_2 je množina $x>0$ a $y>0$, což je otevřený první kvadrant.

---

5. Najděte definiční obor funkce $f(x,y,z)=\ln\big(-1-x^2-y^2+z^2\big)$.

Řešení: Definiční obor je dán rovnicí $-1-x^2-y^2+z^2>0$, což je vnitřek dvojdílného hyperboloidu $x^2+y^2-z^2=-1$.

---

6. Najděte vrstevnice funkce $z=x^2+y^2$.

Řešení: Soustředné kružnice $x^2+y^2=C$ pro $C>0$; bod $[0;0]$ pro $C=0$; prázdná množina pro $C<0$.

---

7. Najděte vrstevnice funkce $z=\dfrac{1}{x^2+2y^2}$.

Řešení: Prázdná množina pro $C\le 0$; elipsy $Cx^2+2Cy^2=1$ pro $C>0$.

---

8. Najděte vrstevnice pro funkci $z=\min(x^2,y)$.

Řešení: Přímky $y=C$ pro $z=C<0$; přímka $y=0$ a polopřímka $x=0$, $y\ge 0$ pro $z=0$; polopřímky $y=C$, $x\ge\sqrt{C}$ a $x\le-\sqrt{C}$ a $x=\pm\sqrt{C}$, $y\ge C$ pro $C>0$.

---

9. Najděte hladiny konstantní úrovně funkce $u(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$.

Řešení: Máme popsat množinu $x^2+y^2-z^2=C$, kde C je konstanta. Pro $C>0$ je to množina jednodílných hyperboloidů; pro $C<0$ je to množina dvojdílných hyperboloidů; pro $C=0$ je to kužel.

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

10. Najděte funkci $f(x)$, jestliže $f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$ pro $x > 0$.

Řešení: Označme $u = \frac{y}{x}$. Pak je $y = ux$ a $f(u) = \frac{\sqrt{x^2+u^2x^2}}{x} = \sqrt{1+u^2}$. Tedy $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.

---

11. Najděte $f(x, y)$, jestliže $f\left(x+y, \frac{y}{x}\right) = x^2 - y^2$.

Řešení: Označme $u = x + y$ a $v = \frac{y}{x}$. Inverzní zobrazení je $x = \frac{u}{1+v}$ a $y = \frac{uv}{1+v}$. Z toho dostaneme

$$f(u, v) = \frac{u^2}{(1+v)^2} - \frac{u^2v^2}{(1+v)^2} = \frac{1-v^2}{(1+v)^2}\, u^2 = \frac{1-v}{1+v}\, u^2\,.$$

Tedy $f(x, y) = \frac{1-y}{1+y}\, x^2$.

Cvičení 2

Metrické prostory. Normované prostory. Prostory se skalárním součinem.

Definice 1. Nechť M je množina a $\rho:\ M\times M\to\mathbb{R}$ s následujícími vlastnostmi:

(1) $\rho(x,y)\geq 0\,,\quad \rho(x,y)=0\Leftrightarrow x=y,$
(2) $\rho(x,y)=\rho(y,x),$
(3) $\rho(x,y)\leq\rho(x,z)+\rho(y,z),$

pro každé x, y, $z\in M$. Pak se funkce ρ nazývá *metrika* a množina M s funkcí ρ se nazývá *metrický prostor*.
Vztah (3) se nazývá *trojúhelníková nerovnost*.

Definice 2. Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, resp. nad $\mathbb{C}$, a $\nu:\ V\to\mathbb{R}$ taková, že pro každé $x,y\in V$ a $\alpha\in\mathbb{R}$ platí:

(1) $\nu(x)\geq 0\,,\quad \nu(x)=0\Leftrightarrow x=0,$
(2) $\nu(\alpha x)=|\alpha|\nu(x),$
(3) $\nu(x+y)\leq\nu(x)+\nu(y).$

Funkce ν se nazývá *norma.*

Věta 1. *Nechť V je vektorový prostor a ν je norma na V. Pak je funkce $\rho:\ V\times V\to\mathbb{R}$ definovaná vztahem $\rho(x,y)=\nu(x-y)$ metrika na V.*

---

1. Dokažte větu 1.

Řešení: Máme ukázat, že pro funkci ρ platí (1)–(3) z definice 1.
Podle (1) z definice 2 platí $\rho(x,y)=\nu(x-y)\geq 0$ a $\rho(x,y)=\nu(x-y)=0\iff x-y=0\iff x=y$. Tedy platí (1).
Podle (2) platí $\rho(x,y)=\nu(x-y)=\nu\big((-1)\cdot(y-x)\big)=\nu(y-x)=\rho(y,x)$, a tedy platí (2).
Podle (3) z definice 2 je $\rho(x,y)=\nu(x-y)=\nu\big((x-z)+(z-y)\big)\leq\nu(x-z)+\nu(z-y)=\rho(x,z)+\rho(y,z)$, což je trojúhelníková nerovnost z definice 1.

Definice 3. Je-li V vektorový prostor a ν norma na V, pak nazýváme metrický prostor V s metrikou definovanou ve větě 2. *normovaný vektorový prostor.*

Definice 4. Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, resp. $\mathbb{C}$. *Skalární součin* nazýváme funkci $(\cdot,\cdot):\ V\times V\to\mathbb{R}$, resp. $\mathbb{C}$, která pro každé $x,y,z\in V$ a $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, resp. $\mathbb{C}$, má následující vlastnosti:

(1) $(\alpha x+\beta y,z)=\alpha(x,z)+\beta(y,z),$
(2) $(x,x)\geq 0\,,\quad (x,x)=0\Leftrightarrow x=0,$
(3) $(x,y)=\overline{(y,x)}.$

V (3) znamená $\overline{\alpha}$ komplexně sdružené číslo k α. Obvykle se značí $\sqrt{(x,x)}=\|x\|$.
Takový vektorový prostor se nazývá *prostor se skalárním součinem.*

Věta 2. *(Schwarzova nerovnost) Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem. Pak pro každé $x, y \in V$ platí $\big|(x,y)\big| \le \|x\| \cdot \|y\|$.*

---

2. Dokažte větu 2.

Řešení: Podle (2) z definice skalárního součinu platí pro každé x, $y \in V$ a $\lambda \in \mathbb{C}$ nerovnost $(x - \lambda y, x - \lambda y) \ge 0$. Přitom rovnost platí pouze tehdy, když $x - \lambda y = 0$, tedy je x násobek y. Když rozepíšeme tuto nerovnost, dostaneme

$$0 \le (x - \lambda y, x - \lambda y) = \|x\|^2 - \lambda(y,x) - \overline{\lambda}(x,y) + |\lambda|^2\|y\|^2 .$$

Jestliže je $y = 0$ platí v dokazovaném vztahu rovnost. Jestliže je $y \ne 0$, položíme $\lambda = \dfrac{(x,y)}{\|y\|^2}$. Pak je $\overline{\lambda} = \dfrac{(y,x)}{\|y\|^2}$ a předchozí vztah dává

$$0 \le \|x\|^2 - \frac{(y,x)(x,y)}{\|y\|^2} - \frac{(x,y)(y,x)}{\|y\|^2} + \frac{\big|(x,y)\big|^2}{\|y\|^2} = \|x\|^2 - \frac{\big|(x,y)\big|^2}{\|y\|^2} .$$

Odtud již plyne vztah $\big|(x,y)\big|^2 \le \|x\|^2\|y\|^2$, z něhož získáme po odmocnění Schwarzovu nerovnost.
Povšimněte si, že rovnost nastává pouze tehdy, když $x = \lambda y$ nebo když je $y = 0$, tj. právě tehdy, když jsou vektoru x a y lineárně závislé.

Věta 3. *Je-li V vektorový prostor se skalárním součinem, pak je funkce $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ norma na V.*

---

3. Dokažte větu 3.

Řešení: Máme ukázat, že funkce $\nu(x) = \|x\|$ má vlastnosti (1)–(3) z definice 2.
Protože pro každé $x \in V$ je $\|x\| = \sqrt{(x,x)} \ge 0$ a $\|x\| = 0$ právě tehdy, když $x = 0$, je splněna podmínka (1).
(2) plyne z rovnosti $\|ax\| = \sqrt{(ax,ax)} = \sqrt{|a|^2(x,x)} = |a| \cdot \|x\|$.
K důkazu (3) použijeme Schwarzovy nerovnosti. Protože pro každé komplexní číslo $a \in \mathbb{C}$ platí nerovnost $\operatorname{Re}(a) \le |a|$, dostaneme

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) &= \|x\|^2 + (x,y) + (y,x) + \|y\|^2 = \\ &= \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(x,y) + \|y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\big|(x,y)\big| + \|y\|^2 \le \\ &\le \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = \big(\|x\| + \|y\|\big)^2 .\end{aligned}$$

Po odmocnění tedy $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$, což je (3) z definice normy.

---

4. Nechť M je libovolná neprázdná množina. Dokažte, že funkce

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \ne y \\ 1 & \text{pro } x = y \end{cases}$$

je metrika na M.
Jak vypadají otevřené a uzavřené množiny v tomto metrickém prostoru?

Řešení: Musíme ověřit, že daná funkce ρ má vlastnosti (1)–(3) z definice metriky. Vztahy (1) a (2) jsou zřejmé. Abychom dokázali trojúhelníkovou nerovnost $\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(y,z)$, stačí uvažovat případy $x = y = z$, $x = y \ne z$, $x = z \ne y$ a $x \ne y \ne z \ne x$. Snadno se lze přesvědčit, že (3) je ve všech těchto případech splněno.
Nechť je X libovolná podmnožina M a $x \in X$. Protože každé okolí $U_\varepsilon(x)$, kde $\varepsilon < 1$ obsahuje jediný bod x a je tedy podmnožinou X. Tedy každý bod $x \in X$ je vnitřní bod X, a tedy každá podmnožina M je otevřená. Proto je také pro každou množinu $X \subset M$ její doplněk $M \setminus X$ otevřená množina. Tedy každá podmnožina M je také uzavřená.

Věta 4. *V prostoru $\mathbb{R}^n$ je pro každé $p \ge 1$ funkce*

$$\nu_p(\boldsymbol{x}) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

resp.

$$\nu_\infty(\boldsymbol{x}) = \max\bigl(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\bigr)$$

norma v $\mathbb{R}^n$. Prostor $\mathbb{R}^n$ s metrikou $\rho_p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \nu_p(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ je tedy normovaný prostor. Norma ν_2 vzniká ze skalárního součinu $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

---

5. Dokažte, že $\lim_{p\to\infty} \nu_p(\boldsymbol{x}) = \nu_\infty(\boldsymbol{x})$.

Řešení: Označme $X = \max\bigl(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\bigr)$. Je-li $X = 0$, je $x_k = 0$ pro každé k. Nechť $X \ne 0$. Pak pro každé $i = 1, 2, \dots, n$ platí nerovnost $0 \le y_i = \dfrac{|x_i|}{X} \le 1$. Pak ale pro každé $p \ge 1$ platí

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} = X \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p \right)^{1/p}.$$

Protože $|y_i| \le 1$, dostaneme z této rovnosti nerovnost

$$X \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} = \nu_p(\boldsymbol{x}) \le X n^{1/p}.$$

A protože $\lim_{p\to\infty} n^{1/p} = 1$, dostaneme limitním přechodem $p \to \infty$ vztah $X = \nu_\infty(\boldsymbol{x}) = \lim_{p\to\infty} \nu_p(\boldsymbol{x})$.

6. V prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou dány body $A = [1; 0; -1]$, $B = [2; 4; -5]$ a $C = [-3; 0; 3]$. Určete vzájemné vzdálenosti těchto bodů v prostorech s metrikami ρ_1, ρ_2 a ρ_∞. Ověřte v těchto případech trojúhelníkovou nerovnost.

Řešení: Podle definice je

$$
\begin{aligned}
\rho_1(A,B) &= |1| + |4| + |-4| = 9\,,\\
\rho_1(A,C) &= |-4| + |0| + |4| = 8\,,\\
\rho_1(B,C) &= |-5| + |-4| + |8| = 17\,;\\
\rho_2(A,B) &= \sqrt{1^2 + 4^2 + (-4)^2} = \sqrt{33}\,,\\
\rho_2(A,C) &= \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}\,,\\
\rho_2(B,C) &= \sqrt{(-5)^2 + (-4)^2 + 8^2} = \sqrt{105}\,;\\
\rho_\infty(A,B) &= \max\bigl(|1|, |4|, |-4|\bigr) = 4\,,\\
\rho_\infty(A,C) &= \max\bigl(|-4|, |0|, |4|\bigr) = 4\,,\\
\rho_\infty(B,C) &= \max\bigl(|-5|, |-4|, 8\bigr) = 8\,.
\end{aligned}
$$

Věta 5. *Nechť $\langle a,b\rangle$ je uzavřený omezený interval. Označme $C\bigl(\langle a,b\rangle\bigr)$ množinu všech spojitých funkcí na $\langle a,b\rangle$. Pak je funkce $\nu(f) = \sup\limits_{x\in\langle a,b\rangle} |f(x)|$ norma na prostoru $C\bigl(\langle a,b\rangle\bigr)$.*

---

7. V prostoru $C\bigl(\langle 0,1\rangle\bigr)$ najděte vzdálenost funkcí $f(x) = 2x^2 + x + 1$ a $g(x) = 1 + 2x$.

Řešení: Podle definice je

$$\rho(f,g) = \sup_{x\in\langle 0,1\rangle} \bigl|f(x) - g(x)\bigr| = \sup_{x\in\langle 0,1\rangle} \bigl|2x^2 - x\bigr|\,.$$

Tato funkce je spojitá na kompaktním intervalu $\langle 0,1\rangle$. Tedy má na tomto intervalu maximum. Pro $x \in \left\langle 0, \frac{1}{2}\right\rangle$ je $\bigl|2x^2 - x\bigr| = x - 2x^2$ a pro $x \in \left\langle \frac{1}{2}, 1\right\rangle$ platí $\bigl|2x^2 - x\bigr| = 2x^2 - x$. Protože derivace této funkce je rovna nule pouze v bodě $x = \frac{1}{4}$, může funkce nabývat maximum pouze v bodech $x_1 = \frac{1}{4}$, kde je derivace nulová, $x_2 = \frac{1}{2}$, kde derivace neexistuje, $x_3 = 0$ a $x_4 = 1$, což jsou krajní body intervalu. Největší hodnota této funkce je 1 v bodě $x_4 = 1$. Tedy $\rho(f,g) = 1$.

---

8. Najděte funkci tvaru $f(x) = ax$, která má v prostoru $C\bigl(\langle 0,1\rangle\bigr)$ nejmenší vzdálenost od funkce $g(x) = x^2$.

Řešení: Naším úkolem je najít $a \in \mathbb{R}$ tak, aby byla minimální hodnota funkce $F(a) = \sup\limits_{x \in \langle 0,1\rangle} \left|x^2 - ax\right|$. Označme $G(x,a) = \left|x^2 - ax\right| = x|x-a|$, kde $x \in \langle 0,1\rangle$ a $a \in \mathbb{R}$.

Pro $a \geq 1$ je $G(x,a) = x(a-x)$. Tato funkce může nabývat maxima v bodech $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ a $x_3 = \dfrac{a}{2}$. Přímým výpočtem se přesvědčíme, že $F(a) = a-1$ pro $a \in \langle 2, \infty)$ a $F(a) = \dfrac{a^2}{4}$ pro $a \in \langle 1, 2\rangle$.

Pro $a \in \langle 0,1\rangle$ je $G(x,a) = x(a-x)$ pro $x \in \langle 0,a\rangle$ a $G(x,a) = x(x-a)$ pro $x \in \langle a,1\rangle$. Tato funkce proměnné x může nabývat maxima v bodech $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{a}{2}$, $x_3 = a$ a $x_4 = 1$. Srovnáním funkčních hodnot v těchto bodech snadno zjistíme, že $F(a) = \dfrac{a^2}{4}$ pro $a \in \left\langle 2\sqrt{2}-2, 1\right\rangle$ a $F(a) = 1-a$ pro $\in \left\langle 0, 2\sqrt{2}-2\right\rangle$.

Pro $a < 0$ je $G(x,a) = x(x-a)$. Tato funkce proměnné x nabývá maxima $F(a) = 1-a$ v bodě $x = 1$.

Tedy našli jsme funkci

$$F(a) = \rho(x^2, ax) = \begin{cases} a-1 & \text{pro } a \in \langle 2, \infty) \\ \dfrac{a^2}{4} & \text{pro } a \in \left\langle 2\sqrt{2}-2, 2\right\rangle \\ 1-a & \text{pro } a \in \left(-\infty, 2\sqrt{2}-2\right\rangle \end{cases}$$

Naším úkolem je najít minimum této funkce. Ta je spojitá a je klesající v intervalu $\left(-\infty, 2\sqrt{2}-2\right)$ a rostoucí v intervalu $\left(2\sqrt{2}-2, \infty\right)$. Tedy tato funkce nabývá minimum $F_{\min} = 3 - 2\sqrt{2}$ v bodě $a = 2\sqrt{2}-2$.

Věta 6. *Nechť $\langle a,b\rangle$ je uzavřený omezený interval. Uvažujme vektorový prostor L_C všech reálných spojitých funkcí na $\langle a,b\rangle$. Pro každé $p \geq 1$ je funkce*

$$\nu_p(f) = \left(\int_a^b \left|f(x)\right|^p \, dx\right)^{1/p}$$

norma na L_C. Normovaný prostor L_C s normou ν_p budeme značit $L_C^p\big(\langle a,b\rangle\big)$.

Norma v $L_C^2\big(\langle a,b\rangle\big)$ vzniká ze skalárního součinu $(f,g) = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx$.

---

9. V prostorech $L_C^1\big(\langle 0, 2\pi\rangle\big)$ a $L_C^2\big(\langle 0, 2\pi\rangle\big)$ najděte $\|f\|$, $\|g\|$ a vzdálenost funkcí $f(x) = \sin x$ a $g(x) = \cos x$.

Řešení: Podle definice je

$$\|f\|_1 = \int_0^{2\pi} \bigl|\sin x\bigr|\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = 4\,,$$

$$\|g\|_1 = \int_0^{2\pi} \bigl|\cos x\bigr|\,\mathrm{d}x = 4\,,$$

$$\rho_1(f,g) = \int_0^{2\pi} \bigl|\sin x - \cos x\bigr|\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^{\pi/4} \bigl(\cos x - \sin x\bigr)\,\mathrm{d}x + \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \bigl(\sin x - \cos x\bigr)\,\mathrm{d}x + \int_{5\pi/4}^{2\pi} \bigl(\cos x - \sin x\bigr)\,\mathrm{d}x =$$

$$= 4\sqrt{2}\,;$$

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^{2\pi} \sin^2 x\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} = \sqrt{\pi}\,,$$

$$\|g\|_2 = \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 x\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} = \sqrt{\pi}\,,$$

$$\rho_2(f,g) = \left(\int_0^{2\pi} \bigl(\sin x - \cos x\bigr)^2\right)^{1/2} = \sqrt{2\pi}\,.$$

---

10. Najděte a tak, aby funkce $f(x) = ax$ měla v prostoru a) $L^1_C\bigl(\langle 0,1\rangle\bigr)$; b) v prostoru $L^2_C\bigl(\langle 0,1\rangle\bigr)$, nejmenší vzdálenost od funkce $g(x) = x^2$.

Řešení: Naším úkolem je najít minimum funkce $F(a) = \rho(x^2, ax)$. V případě $L^1_C\bigl(\langle 0,1\rangle\bigr)$ je $F(a) = \displaystyle\int_0^1 \bigl|x^2 - ax\bigr|\,\mathrm{d}x$.

Pro $a \ge 1$ je

$$F(a) = \int_0^1 \bigl(ax - x^2\bigr)\,\mathrm{d}x = \frac{a}{2} - \frac{1}{3}\,.$$

Pro $a \in \langle 0,1\rangle$ dostaneme

$$F(a) = \int_0^1 \bigl|x^2 - ax\bigr|\,\mathrm{d}x = \int_0^a \bigl(ax - x^2\bigr) + \int_a^1 \bigl(x^2 - ax\bigr)\,\mathrm{d}x = \frac{a^3}{3} - \frac{a}{2} + \frac{1}{3}$$

a pro $a < 0$ je

$$F(a) = \int_0^1 \bigl(x^2 - ax\bigr)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} - \frac{a}{2}\,.$$

Protože je funkce $F(a)$ klesající v intervalu $(-\infty, 0)$ a rostoucí v intervalu $(1, \infty)$, leží její minimum v intervalu $\langle 0,1\rangle$. Protože $F'(a) = a^2 - \dfrac{1}{2}$, může existovat extrém pouze v bodech $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ a $x_3 = 1$. Funkční hodnoty v těchto bodech jsou

$F(0) = \dfrac{1}{3}$, $F\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{2-\sqrt{2}}{6}$ a $F(1) = \dfrac{1}{6}$. Tedy $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ a pro toto a je vzdálenost $\rho\left(x^2, \dfrac{x}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{2-\sqrt{2}}{6}$.

V případě prostoru $L^2_C\big(\langle 0,1\rangle\big)$ je

$$F(a) = \left(\int_0^1 \big(x^2 - ax\big)^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{5} - \frac{a}{2} + \frac{a^2}{3}}\,.$$

Tato funkce má derivaci rovnou nule pouze v bodě $a = \dfrac{3}{4}$ a lze snadno ukázat, že funkce $F(a)$ nabývá v tomto bodě globálního minima $F\left(\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{1}{4\sqrt{5}}$.

Cvičení 3

Limita posloupnosti v metrickém prostoru.
Cauchy–Bolzanova podmínka. Úplný prostor.

Definice 1. Nechť M je metrický prostor s metrikou ρ a x_n je posloupnost v M. Říkáme, že posloupnost x_n má *limitu* x, jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$. Pak píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Posloupnost, která má limitu se nazývá *konvergentní.* Jestliže posloupnost nemá limitu, nazývá se *divergentní.*

Věta 1. *Posloupnost x_n v metrickém prostoru M má nejvýše jednu limitu.*

---

1. Dokažte větu 1.
Řešení: Nechť je $x \neq y$ a $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x, x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(y, x_n) = 0$. Pak ke každému $\varepsilon > 0$ existují n_x a x_y takové, že pro každé $n > n_x$ je $\rho(x, x_n) < \varepsilon$ a pro každé $n > n_y$ je $\rho(y, x_n) < \varepsilon$. Vezměme $\varepsilon = \dfrac{1}{3}\,\rho(x, y) > 0$. Pro příslušná n_x a n_y položme $n_0 = \max(n_x, n_y)$. Pak pro každé $n > n_0$ platí

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, x_n) + \rho(y, x_n) < \frac{2}{3}\,\rho(x, y)\,.$$

Ale to je spor. Tedy $\rho(x, y) = 0$, tj. $x = y$.

Věta 2. *Nechť $\boldsymbol{x}_n = \bigl(x_n^{(1)}, \ldots, x_n^{(k)}\bigr)$ je posloupnost prvků z $\mathbb{R}^k$ s metrikou ρ_p definovanou ve cvičení 2. Pak je posloupnost konvergentní, právě když jsou konvergentní všechny posloupnosti $x_n^{(i)}$, $i = 1, \ldots, k$ a platí $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}$, kde $x^{(i)} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n^{(i)}$, $i = 1, \ldots, k$*

---

2. Dokažte větu 2.
Řešení: Nechť je $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}$ v prostoru s metrikou ρ_p. Protože pro každé $i = 1, 2, \ldots, k$ a $p \in \langle 1, \infty)$ platí nerovnost

$$\bigl|x^{(i)} - x_n^{(i)}\bigr| \leq \left(\sum_{r=1}^{k} \bigl|x^{(r)} - x_n^{(r)}\bigr|^p\right)^{1/p}$$

je $\lim\limits_{n\to\infty} \bigl|x^{(i)} - x_n^{(i)}\bigr| = 0$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, k$, a tedy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{(i)} = x^{(i)}$.
Nechť naopak pro všechna $i = 1, 2, \ldots, k$ je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{(i)} = x^{(i)}$. Pak ke každému $\varepsilon > 0$ existují $n_0^{(i)}$ taková, že pro každé $n > n_0^{(i)}$ je $\bigl|x^{(i)} - x_n^{(i)}\bigr| < \dfrac{\varepsilon}{k^{1/p}}$. Vezměme $n_0 = \max\bigl(n_0^{(1)}, n_0^{(2)}, \ldots, n_0^{(k)}\bigr)$. Pak pro každé $n > n_0$ platí nerovnost

$$\sum_{i=1}^{k} \bigl|x^{(i)} - x_n^{(i)}\bigr|^p \leq \sum_{i=1}^{k} \frac{\varepsilon^p}{k} = \varepsilon^p\,.$$

Tedy pro $n > n_0$ je $\rho_p\big(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_n\big) < \varepsilon$.
Pro metriku generovanou normou $\nu_\infty(\boldsymbol{x}) = \max\big(|x^{(1)}|, |x^{(2)}|, \dots, |x^{(n)}|\big)$, platí pro každé i nerovnost

$$\big|x^{(i)} - x_n^{(i)}\big| \le \max_{i=1,2,\dots,k} \big(|x^{(i)} - x_n^{(i)}|\big)\,.$$

i v této metrice plyne, že z $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}$ vztah $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{(i)} = x^{(i)}$ pro každé i. Abychom dokázali opačnou implikaci zvolíme k danému $\varepsilon > 0$ čísla $n_0^{(i)}$ taková, že pro každé $n > n_0^{(i)}$ je $\big|x^{(i)} - x_n^{(i)}\big| < \varepsilon$ a $n_0 = \max\big(n_0^{(1)}, n_0^{(2)}, \dots, n_0^{(k)}\big)$.

---

3. Najděte limitu posloupnosti

$$\boldsymbol{x}_n = \left(\frac{2n^2+1}{n^2}, \left(\frac{n-4}{n+1}\right)^{n+2}, \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} n\right)^n\right)\,.$$

Řešení: Podle věty 2 stačí najít limity

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{n^2}\,, \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-4}{n+1}\right)^{n+2}\,, \quad \lim_{n\to\infty} \big(\sqrt{n^2+1} - n\big)\,, \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} n\right)^n.$$

První tři limity jsou

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{n^2} = 2 + \frac{1}{n^2} = 2\,;$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-4}{n+1}\right)^{n+2} = \left(1 - \frac{5}{n+1}\right)^{n+2} = \mathrm{e}^{-5}\,;$$

$$\lim_{n\to\infty} \big(\sqrt{n^2+1} - n\big) = \lim_{n\to\infty} \big(\sqrt{n^2+1} - n\big)\, \frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{n^2+1}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} = 0.$$

Poslední limitu nalezneme tak, že určíme limitu

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x\right)^x = \lim_{x\to\infty} \exp\Big(x \ln\big(2\pi^{-1} \operatorname{arctg} x\big)\Big) = \\ = \exp\Big(\lim_{x\to\infty} \big(x \ln(2\pi^{-1} \operatorname{arctg} x)\big)\Big).$$

Pokud tato limita existuje, je rovna hledané limitě posloupnosti. Limitu v exponentu nalezneme pomocí l'Hospitalova pravidla.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\operatorname{arctg} x) + \ln(2\pi^{-1})}{x^{-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x} = -\frac{2}{\pi}\,.$$

Tedy hledaná limita je $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \Big(2, \mathrm{e}^{-5}, 0, \mathrm{e}^{-2/\pi}\Big)$.

---

4. Nechť $f_n(x) = x^n$ a $0 < \eta < 1$. Najděte limitu posloupnosti f_n v prostoru $C\big(\langle 0, \eta\rangle\big)$ a v prostoru $C\big(\langle 0, 1)\big)$.

Řešení: Pro každé pevné $x \in (0, 1)$ je $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$. Tedy jestliže posloupnost konverguje, konverguje k funkci $f(x) = 0$.
Konvergence posloupnosti funkcí v prostoru $C(M)$ znamená, že

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in M} \big|f(x) - f_n(x)\big| = 0 \,.$$

Protože jsou funkce $f_n(x) = x^n$ spojité a intervalu $\langle 0, \eta\rangle$, nabývají na tomto intervalu maxima. Protože jsou to rostoucí funkce proměnné x, nabývají maxima v bodě $x = \eta < 1$. Tedy stačí ukázat, že $\lim\limits_{n\to\infty} \eta^n = 0$. Nechť je $0 < \varepsilon < 1$. Pak stačí zvolit n_0 tak, aby $\eta^{n_0} < \varepsilon$, tedy $n_0 > \dfrac{\ln\varepsilon}{\ln\eta}$. Pak je pro každé $n > n_0$ je $\eta^n < \eta^{n_0} < \varepsilon$, protože $\varepsilon < 1$. Tedy v prostoru $C\big(\langle 0, \eta\rangle\big)$ je $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$.
Ale v prostoru $C\big(\langle 0, 1)\big)$ je $\sup\limits_{x\in\langle 0,1)} \big|x^n\big| = 1$. Tedy pro $\varepsilon < 1$ nelze najít n_0 tak, aby pro $n > n_0$ bylo $\sup\limits_{x\in\langle 0,1)} \big|x^n\big|$. Proto v prostoru $C\big(\langle 0, 1)\big)$ limita $\lim\limits_{n\to\infty} x^n$ neexistuje.

Definice 2. Konvergence funkcí $f_n(x)$ v prostoru $C\big(\langle a, b\rangle\big)$ se nazývá *stejnoměrná konvergence v* $\langle a, b\rangle$. Jestliže posloupnost $f_n(x)$ konverguje stejnoměrně k funkci $f(x)$, píšeme $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$.

---

5. Dokažte, že $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ na $\langle a, b\rangle$ znamená, že

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists n_0 = n_0(\varepsilon)\,; \forall x \in \langle a, b\rangle\,, \forall n > n_0 \Rightarrow \big|f(x) - f_n(x)\big| < \varepsilon\,.$$

Řešení: Nechť je $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ v prostoru $C\big(\langle a, b\rangle\big)$. To znamená, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje n_0 takové, že pro každé $n > n_0$ je $\sup\limits_{x\in\langle a,b\rangle} \big|f(x) - f_n(x)\big| < \varepsilon$. Ale pro toto n_0 splňuje výše zmíněnou podmínku.
Nechť pro $\varepsilon > 0$ existuje n_0 takové, že pro každé $x \in \langle a, b\rangle$ platí $\big|f(x) - f_n(x)\big| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Ale pak je pro tato n také $\sup\limits_{x\in\langle a,b\rangle} \big|f(x) - f_n(x)\big| \le \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, a tedy $f(x)$ je limitou posloupnosti $f_n(x)$ v prostoru $C\big(\langle a, b\rangle\big)$.

Kromě stejnoměrné konvergence posloupnosti funkcí $f_n(x)$ lze definovat tzv. *bodovou konvergenci.* Tu definujeme takto:
Máme posloupnost funkcí $f_n(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$. Vezmeme pevné $x_0 \in \langle a, b\rangle$ a sestrojíme číselnou posloupnost $f_n(x_0)$. Pokud posloupnost $f_n(x_0)$ konverguje k $f(x_0)$ pro každé $x_0 \in \langle a, b\rangle$, říkáme, že funkce posloupnost funkcí $f_n(x)$ konverguje bodově k

funkci $f(x)$ nebo, že $f(x)$ je bodová limita posloupnosti funkcí $f(x)$. Obvykle se v takovém případě píše $f_n(x) \to f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$.
Definici bodové konvergence lze zapsat takto:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \forall x \in \langle a, b \rangle \, \exists n_0 = n_0(\varepsilon, x) \, ; \forall n > n_0 \Rightarrow \big| f(x) - f_n(x) \big| < \varepsilon \, .$$

Tedy n_0 může na rozdíl od stejnoměrné konvergence záviset na bodu x.

Věta 3. *Jestliže posloupnost funkcí $f_n(x)$ konverguje stejnoměrně k funkci $f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$, pak konverguje tato posloupnost konverguje také bodově k funkci $f(x)$.*

---

6. Dokažte větu 3.
Řešení: Tvrzení je zřejmé, protože jestli $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ existuje k danému $\varepsilon > 0$ n_0 takové, že pro každé $n > n_0$ a $x \in \langle a, b \rangle$ je $\big| f_n(x) - f(x) \big| < \varepsilon$ a v definici bodové konvergence stačí zvolit toto n_0.
Z věty plyne, že posloupnost funkcí $f_n(x)$ může stejnoměrně konvergovat k funkci $f(x)$ pouze tehdy, když k ní konverguje bodově.

---

7. Opak obecně neplatí. Ukažte, že posloupnost funkcí $f_n(x) = \dfrac{1}{1 + nx^2}$, $x \in \langle -1, 1 \rangle$ konverguje bodově, ale nekonverguje stejnoměrně.
Řešení: Při zkoumaní bodové konvergence zvolíme nejprve pevní $x \in \langle -1, 1 \rangle$. Je zřejmé, že pro $x = 0$ je $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(0) = 1$ a pro $x \neq 0$ je $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = 0$. Tedy bodově je $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$, kde $f(x) = 0$ pro $x \in \langle -1, 1 \rangle$, $x \neq 0$, a $f(0) = 1$.
Ukážeme z definice, že tato funkce je bodová limita posloupnosti funkcí $f_n(x)$. Nechť je dáno $\varepsilon \in (0, 1)$. (Pro $\varepsilon \geq 1$ stačí zvolit $n_0 = 1$). Máme tedy pro každé $x \in \langle -1, 1 \rangle$ najít n_0 takové, aby $\big| f_n(x) - f(x) \big| < \varepsilon$. Pro $x = 0$ je pro každé n $f_n(0) - f(0) = 0$ a stačí zvolit $n_0 = 1$. Je-li $x \neq 0$ zvolíme n_0 tak, aby $\dfrac{1}{1 + n_0 x^2} < \varepsilon$. Pro každé $n > n_0$ je totiž $\dfrac{1}{1 + nx^2} < \dfrac{1}{1 + n_0 x^2}$. Proto stačí zvolit $n_0 > \dfrac{1 - \varepsilon}{\varepsilon x^2} > 0$.
Jak je vidět, při zkoumaní bodové konvergence nám stačilo najít n_0 závislé na x. Jestliže budeme nahlížet na n_0 jako na funkci x, vidíme, že není omezená v okolí bodu $x = 0$. Proto lze očekávat, že posloupnost funkcí $f_n(x)$ nebude konvergovat k funkci $f(x)$ stejnoměrně. Dokážeme toto tvrzení. To ale přesněji znamená, že existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé n_0 existuje $n > n_0$ a $x \in \langle -1, 1 \rangle$, pro které je $\big| f_n(x) - f(x) \big| \geq \varepsilon$. Vezměme $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$. Pak přejde dokazovaná nerovnost pro $x \neq 0$ na $\dfrac{1}{1 + nx^2} \geq \dfrac{1}{2}$, neboli $|x| \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Tedy ať zvolíme jakékoliv n existuje $x \in \langle -1, 1 \rangle$ takové, že $\dfrac{1}{1 + nx^2} \geq \dfrac{1}{2}$. Tím jsme ale dokázali, že posloupnost $f_n(x)$ nekonverguje stejnoměrně k funkci $f(x)$.

Věta 4. *Nechť je $f_n(x)$ posloupnost funkcí na množině $M \subset \mathbb{R}$, které na M konvergují stejnoměrně k funkci $f(x)$. Nechť pro každé n existuje $\lim\limits_{x\to a} f_n(x) = A_n$ a nechť je $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$. Pak existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.*

Poznámka: Věta říká, že v takovém případě lze zaměnit limity, tj. že platí

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right) = \lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right).$$

---

8. Dokažte větu 4.
Řešení: K důkazu použijeme nerovnost

$$\begin{aligned}\bigl|f(x)-A\bigr| &= \bigl|\bigl(f(x)-f_n(x)\bigr)+\bigl(f_n(x)-A_n\bigr)+\bigl(A_n-A\bigr)\bigr| \le \\ &\le \bigl|f(x)-f_n(x)\bigr|+\bigl|f_n(x)-A_n\bigr|+\bigl|A_n-A\bigr|,\end{aligned}$$

kde $x \in M$. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Protože posloupnost funkcí $f_n(x)$ konverguje na množině M stejnoměrně k funkci $f(x)$, existuje n_1 takové, že pro každé $n > n_1$ a pro každé $x \in M$ je $\bigl|f(x)-f_n(x)\bigr| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Protože je $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$, existuje n_2 takové, že pro každé $n > n_2$ je $\bigl|A_n - A\bigr| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Zvolme pevné $n > \max\bigl(n_1, n_2\bigr)$. Protože pro toto n je $\lim\limits_{x\to a} f_n(x) = A_n$, existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $x \in M$ pro která je $0 < \bigl|a-x\bigr| < \delta$ platí nerovnost $\bigl|f_n(x)-A_n\bigr| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Ale pak pro všechna taková x platí nerovnost

$$\bigl|f(x)-A\bigr| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\,.$$

To ale znamená, že $\lim\limits_{x\to a} f(f) = A$.

Důsledek. *Jestliže je $f_n(x)$ posloupnost spojitých funkcí na množině M, která na M konverguje stejnoměrně k funkci $f(x)$, je funkce $f(x)$ spojitá.*

V příkladu 7 jsme zkoumali posloupnost spojitých funkci $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx^2}$, $x \in \langle -1, 1\rangle$. Protože bodová limita těchto funkcí byla $f(x) = 0$ pro $x \neq 0$ a $f(0) = 1$, tedy nespojitá funkce, nemohla posloupnost funkcí $f_n(x)$ konvergovat k funkci $f(x)$ stejnoměrně na $\langle -1, 1\rangle$.

Věta 5. *Nechť posloupnost x_n v metrickém prostoru M s metrikou ρ konverguje. Pak posloupnost x_n splňuje tzv. Cauchy–Bolzanovu podmínku:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\,;\ \forall m, n > n_0 \Rightarrow \rho(x_m, x_n) < \varepsilon\,. \tag{1}$$

---

9. Dokažte větu 5.

Řešení: Nechť je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Pak ke každému $\varepsilon > 0$ existuje n_0 takové, že pro každé m, $n > n_0$ platí $\rho(x, x_m) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ a $\rho(x, x_n) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Z trojúhelníkové nerovnosti plyne, že pro taková m a n platí nerovnost

$$\rho(x_m, x_n) \leq \rho(x_m, x) + \rho(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Definice 3. Posloupnost, která splňuje podmínku (1) se nazývá *Cauchyovská posloupnost.*

Obecně není pravda, že je každá Cauchyovská posloupnost konvergentní

---

10. Jeden z algoritmů, jakým lze počítat druhé odmocniny je tento: Nechť je $x \geq 0$. Sestrojme následující posloupnost $a_1 = 1$ a $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{x}{a_n}\right)$. Lze ukázat, že tato posloupnost konverguje a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{x}$.
Když pomocí tohoto algoritmu počítáte $\sqrt{2}$, získáte posloupnost racionálních čísel x_n, která je v prostoru racionálních čísel $\mathbb{Q}$ Cauchyovská, ale nemá v tomto prostoru limitu, protože $\sqrt{2}$ není racionální číslo.

Proto se zavádí

Definice 4. Metrický prostor M se nazývá *úplný*, jestliže je každá Cauchyovská posloupnost v M konvergentní.

Pojem úplnosti je v matematice velmi důležitý. Protože množina racionálních čísel není úplný prostor (viz příklad **10.**), zavádí se reálná čísla, která již jsou úplným prostorem.
Platí

Věta 6. *Pokud M je úplný metrický prostor, pak je posloupnost x_n v tomto prostoru konvergentní, právě když je Cauchyovská.*

Víte-li tedy, že M je úplný metrický prostor, stačí k důkazu konvergence posloupnosti x_n ukázat, že je posloupnost Cauchyovská.

Z věty 4 plyne, že prostor $C\big(\langle a, b\rangle\big)$ je úplný.
Naopak prostory $L^p_C\big(\langle a, b\rangle\big)$ úplné nejsou.

V úplných metrických prostorech platí

Věta 7. *(O pevném bodě v kontrahujícím zobrazení). Nechť M je úplný metrický prostor s metrikou ρ a $f : M \to M$, pro které platí: Existuje $K \in (0, 1)$ takové, že pro každé $x, y \in M$ je*

$$\rho\big(f(x), f(y)\big) \leq K\rho(x, y)\,.$$

Pak v M existuje právě jedno x, pro které platí $x = f(x)$.

---

11. Dokažte větu 7.
Řešení: Vezmeme libovolné $x_0 \in M$ a sestrojíme posloupnost $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1), \ldots, x_{n+1} = f(x_n), \ldots$. Protože zobrazení $f(x)$ je kontrahující, je $\rho(x_2, x_1) = \rho\big(f(x_1), f(x_0)\big) \le K\rho(x_1, x_0)$. Indukcí ukážeme, že pro každé $\in \mathbb{N}$ platí nerovnost

$$\rho(x_{n+1}, x_n) \le K^n \rho(x_1, x_0)\,. \tag{1}$$

Pro $n = 1$ jsme tento vztah již ukázali. Nechť platí (1) pro n. Pak je

$$\rho\big(x_{n+2}, x_{n+1}\big) = \rho\big(f(x_{n+1}), f(x_n)\big) \le K\rho\big(x_{x+1}, x_n\big) \le K^{n+1}\rho\big(x_1, x_0\big)\,,$$

kde jsme v poslední nerovnosti použili indukční předpoklad.
Nyní ukážeme, že posloupnost x_n je Cauchyovská. Nechť $m > n$. Pak z trojúhelníkové nerovnosti plyne

$$\begin{aligned}\rho\big(x_m, x_n\big) &\le \sum_{r=n}^{m-1} \rho\big(x_{r+1}, x_r\big) \le \sum_{r=n}^{m-1} K^r \rho\big(x_1, x_0\big) < \\ &< \sum_{r=n}^{\infty} K^r \rho\big(x_1, x_0\big) = \frac{K^n}{1-K}\,\rho\big(x_1, x_0\big)\,.\end{aligned}$$

Protože $K \in (0,1)$ je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{K^n}{1-K}\,\rho\big(x_1, x_0\big) = 0$, a tedy ke každému $\varepsilon >$ existuje n_0 takové, že pro každé $m > n > n_0$ je $\rho\big(x_m, x_n\big) < \varepsilon$. Tedy posloupnost x_n je Cauchyovská, a protože jsme předpokládali, že metrický prostor M je úplný, existuje $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in M$.
Protože

$$\rho\big(x, f(x)\big) = \lim_{n\to\infty} \rho\big(x_{n+1}, f(x)\big) = \lim_{n\to\infty} \rho\big(f(x_n), f(x)\big) \le K \lim_{n\to\infty} \rho\big(x_n, x\big) = 0\,,$$

dostaneme $x = f(x)$.
Nakonec dokážeme jednoznačnost řešení rovnice $x = f(x)$. Nechť jsou x a y dvě libovolná řešení dané rovnice. Pak platí

$$\rho\big(x, y\big) = \rho\big(f(x), f(y)\big) \le K\rho\big(x, y\big)\,.$$

A protože $K \in (0,1)$ plyne z tohoto vztahu $\rho(x, y) = 0$, tj. $x = y$.

---

12. Ukažte, že rovnice $x = 1 + \varepsilon \sin x$, kde $|\varepsilon| < 1$ má právě jedno řešení.
Řešení: Uvažujme funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definované vztahem $f(x) = 1 + \varepsilon \sin x$. Protože platí nerovnost

$$\begin{aligned}\big|f(x) - f(y)\big| &= |\varepsilon| \cdot \big|\sin x - \sin y\big| = 2|\varepsilon| \left|\cos \frac{x+y}{2}\right| \cdot \left|\sin \frac{x-y}{2}\right| \le \\ &\le 2|\varepsilon| \left|\sin \frac{x-y}{2}\right| \le |\varepsilon| \cdot \big|x - y\big|\,,\end{aligned}$$

kde jsme v posledním vztahu použili nerovnost $\sin x < x$, která platí pro $x > 0$, dává funkce $f(x)$ kontrahující zobrazení $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Protože je $\mathbb{R}$ úplný metrický prostor, plyne existence a jednoznačnost řešení rovnice $x = f(x) = 1 + \varepsilon \sin x$.

Pomocí Věty 7. se často dokazuje existence a jednoznačnost řešení rovnic v mnohých případech.

---

13. Nalezněte funkci $f \in C\big(\langle 0,1\rangle\big)$, která splňuje rovnici $f(x) = x + \displaystyle\int_0^1 xtf(t)\,\mathrm{d}t$.

Řešení: Uvažujme zobrazení $F : C\big(\langle 0,1\rangle\big) \to C\big(\langle 0,1\rangle\big)$, které je definováno vztahem $F\big(f(x)\big) = x + \displaystyle\int_0^1 xtf(t)\,\mathrm{d}t$. Metrika v prostoru $C\big(\langle 0,1\rangle\big)$ je definována vztahem $\|f-g\| = \sup\limits_{x\in\langle 0,1\rangle} \big|f(x)-g(x)\big|$. Pak ale je

$$\big\|F(f)-F(g)\big\| = \sup_{x\in\langle 0,1\rangle}\left|\int_0^1 xt\big(f(t)-g(t)\big)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_0^1 t\big(f(t)-g(t)\big)\,\mathrm{d}t\right| \le$$
$$\le \int_0^1 t \sup_{x\in\langle 0,1\rangle}\big|f(x)-g(x)\big|\,\mathrm{d}t = \big\|f-g\big\|\cdot\int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,\big\|f-g\big\|\,,$$

a tedy F je kontrahující zobrazení úplného metrického prostoru $C\big(\langle 0,1\rangle\big)$ do sebe. Existuje tedy právě jedno řešení rovnice

$$f(x) = x + \int_0^1 xtf(f)\,\mathrm{d}t\,.$$

Toto řešení lze sestrojit postupnými aproximacemi podobně, jak jsme dokázali větu **7**. Nechť $f_0(x) = 0$. Pak $f_1(x) = F\big(f_0(x)\big) = x$.

$$f_2(x) = F\big(f_1(x)\big) = x + \int_0^1 xt^2\,\mathrm{d}t = \left(1+\frac{1}{3}\right)x\,,$$
$$f_3(x) = x + \int_0^1 x\left(1+\frac{1}{3}\right)t^2\,\mathrm{d}t = \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)x\,.$$

Indukcí se ukáže, že $f_n(x) = x\displaystyle\sum_{r=0}^{n-1}\frac{1}{3^r}$, a tedy $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = x\displaystyle\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{3^r} = \frac{3}{2}\,x$.

Cvičení 4.

Limita a spojitost funkcí více proměnných

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{f} : M \to \mathbb{R}^n$ a $\boldsymbol{a} \in M'$. Řekneme, že limita funkce $\boldsymbol{f}$ v bodě $\boldsymbol{a}$ je rovna $\boldsymbol{A}$, tj.

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\,,$$

jestliže platí následující tvrzení:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\,; \forall \boldsymbol{x}\,; 0 < \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) < \delta \Rightarrow \sigma(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{A}) < \varepsilon\,,$$

kde ρ a σ jsou příslušné metriky v $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{R}^n$.

Ekvivalentní definice je: Pro každé okolí U bodu $\boldsymbol{A}$ existuje prstencové okolí $P \subset M$ bodu $\boldsymbol{a}$ takové, že pro každý bod $\boldsymbol{x} \in P$ je $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in U$.
Je-li metrika σ generována některou z norem ν_p, $1 \le p < \infty$ [Cvičení 2], stačí vyšetřovat limity jednotlivých složek funkce $\boldsymbol{f}$, neboli stačí uvažovat limity zobrazení $f : M \to \mathbb{R}$.
Pro limitu funkce více proměnných platí podobné věty jako pro limitu funkce jedné proměnné, a to zejména:
Nechť existují $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = A$ a $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x}) = B$. Pak platí
1) $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \alpha f(\boldsymbol{x}) = \alpha A$, kde α je reálná konstanta.
2) $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \big[f(\boldsymbol{x}) \pm g(\boldsymbol{x})\big] = A \pm B$.
3) $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \big[f(\boldsymbol{x}) \cdot g(\boldsymbol{x})\big] = A \cdot B$.
4) Je-li $B \neq 0$, pak $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \dfrac{f(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x})} = \dfrac{A}{B}$.
Dále platí *věta o sevření*: Nechť na nějakém prstencovém okolí bodu $\boldsymbol{a}$ platí nerovnosti $g(\boldsymbol{x}) \le f(\boldsymbol{x}) \le h(\boldsymbol{x})$ a nechť existují limity

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x}) = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} h(\boldsymbol{x}) = A\,.$$

Pak existuje $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = A$.

Spojitost funkcí více proměnných:

Nechť $M \subset \mathbb{R}^m$ a $\boldsymbol{a} \in M$. Pak se funkce $f : M \to \mathbb{R}^n$ nazývá *spojitá v bodě* $\boldsymbol{a}$, je-li:
1) $\boldsymbol{a}$ izolovaný bod nebo
2) $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a})$.
Funkce, která je spojitá v každém bodě množiny M, se nazývá *spojitá na množině* M.

Limita složené funkce

Nechť $\boldsymbol{f} : M \to N$ a $\boldsymbol{g} : N \to P$, kde $M \subset \mathbb{R}^m$, $N \subset \mathbb{R}^n$ a $P \subset \mathbb{R}^p$, a $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}$, $\lim\limits_{\boldsymbol{y}\to\boldsymbol{A}} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{B}$ a existuje prstencové okolí $P \subset M$ bodu $\boldsymbol{a}$ takové, že $\forall \boldsymbol{x} \in P$ je $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{A}$, pak

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{g}\big[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\big] = \boldsymbol{B}\,. \tag{1}$$

Vztah (1) platí také v případě, že funkce $\boldsymbol{g}$ je spojitá v bodě $\boldsymbol{A}$.

---

1. Najděte limitu $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln\big(x+\mathrm{e}^y\big)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Řešení: Limitu daného výrazu najdeme jako podíl limit. Limita čitatele je

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \ln\big(x+\mathrm{e}^y\big) = \ln 2\,,$$

protože funkce $\ln x$, x a e^x jsou spojité funkce. Z podobného důvodu je limita jmenovatele $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = 1$. Tedy hledaná limita je rovna $\ln 2$.

---

2. Najděte limitu $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}$.

Řešení: Jestliže dosadíme dostaneme vztah "0/0". Jedná se tedy o neurčitý výraz. Ale funkce lze upravit

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}-1} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\big(x^2+y^2\big)\Big(\sqrt{1+x^2+y^2}+1\Big)}{1+x^2+y^2-1} = 2\,.$$

---

3. Najděte limitu $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$.

Řešení: Po dosazení dostaneme neurčitý výraz "0/0". Ale protože $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$, je $x^2+y^2 \geq 2|xy|$. Proto platí:

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{|x|\big(x^2+y^2\big)}{2\big(x^2+y^2\big)} = \frac{|x|}{2}\,.$$

A protože $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \big|x\big| = 0$ je hledaná limita rovna 0.

Vztah s dvojnými limitami

Existuje-li vlastní limita $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = q$ a pro každé x z nějakého prstencového okolí bodu a existuje limita $\displaystyle\lim_{y\to b} f(x,y) = \varphi(x)$, pak existuje také limita $\displaystyle\lim_{x\to a} \varphi(x) = q$.

Podobné tvrzení platí také pro $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x,y) = \psi(y)$ a $\displaystyle\lim_{y\to b} \psi(y) = q$.

Tedy existuje-li vlastní limita $f(x,y) \to q$ pro $(x,y) \to (a,b)$ a vnitřní limity, pak

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{x\to a}\left[\lim_{y\to b} f(x,y)\right] = \lim_{y\to b}\left[\lim_{x\to a} f(x,y)\right].$$

Jestliže $f(x,y) \rightrightarrows \varphi(x)$ pro $y \to b$ v M, tj. funkce konverguje v M stejnoměrně, a pro každé $y \neq b$ existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x,y) = \psi(y)$, pak platí

$$\lim_{x\to a}\left[\lim_{y\to b} f(x,y)\right] = \lim_{y\to b}\left[\lim_{x\to a} f(x,y)\right].$$

Jestliže $\lim\limits_{y\to b} f(x,y) = \varphi(x)$ stejnoměrně v M a existuje-li $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = q$, pak existuje také limita $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = q$.

---

4. Ukažte, že $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-y}{x+y}$ neexistuje.

Řešení: Protože $\lim\limits_{x\to 0}\left[\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right] = 1$ a $\lim\limits_{y\to 0}\left[\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right] = -1$, nemůže existovat dvojná limita.

---

5. Ukažte, že $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ neexistuje, ačkoliv

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} f(x,y)\right] = \lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} f(x,y)\right] = 0\,.$$

Řešení: Stačí najít limitu po přímce $x = y$. Ta je $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4}{x^4} = 1 \neq 0$.

---

6. Najděte limitu $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$.

Řešení: Pro žádné $x \neq 0$ neexistuje $\lim\limits_{y\to 0}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$. Ale protože je funkce $\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$ omezená a $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y) = 0$, je hledaná limita rovna nule. limita rovna nule.

---

7. Najděte limitu $\lim\limits_{(x,y)\to(0,a)} \dfrac{\sin xy}{x}$.

Řešení: Hledanou limitu lze napsat ve tvaru

$$\lim_{(x,y)\to(0,a)} \left(y\cdot\frac{\sin xy}{xy}\right) = \lim_{(x,y)\to(0,a)} y \cdot \lim_{(x,y)\to(0,a)} \frac{\sin xy}{xy} = a \lim_{(x,y)\to(0,a)} \frac{\sin xy}{xy}\,.$$

Protože je funkce $F(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ pro $x \neq 0$ a $F(0) = 1$ spojitá v bodě $x = 0$, je hledaná rovna a.

---

8. Najděte limitu $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2+y^2\right)^{x^2y^2}$

Řešení: Protože je funkce e^x spojitá, je

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2+y^2\right)^{x^2y^2} = \exp\left(\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2y^2\ln\left(x^2+y^2\right)\right).$$

Z rovností $x^2 - |xy| + y^2 \geq 0$ plyne nerovnost $\left|xy\right| \leq \left(x^2+y^2\right)$. Tedy $x^2y^2 \leq \left(x^2+y^2\right)^2$. Z této nerovnosti dostaneme $x^2y^2\ln\left(x^2+y^2\right) \leq \left(x^2+y^2\right)^2\ln\left(x^2+y^2\right)$. Pomocí l'Hospitalova pravidla se snadno ukáže, že $\lim\limits_{x\to 0_+} x^2\ln x = 0$. A protože pro každé $(x,y) \neq (0,0)$ je $x^2+y^2 \neq 0$, je hledaná limita rovna $\mathrm{e}^0 = 1$.

---

9. Najděte body nespojitosti funkce $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x^3+y^3}$.

Řešení: Funkce $f(x,y)$ má body nespojitosti na množině $x^3+y^3=0$, tj. na přímce $x+y=0$. Ale

$$\frac{x+y}{x^3+y^3} = \frac{1}{x^2-xy+y^2}.$$

Protože v bodech $[a;-a]$, $a \neq 0$, existuje $\lim\limits_{(x,y)\to(a,-a)} \dfrac{x+y}{x^3+y^3} = \dfrac{1}{3a^2}$, má funkce v těchto bodech odstranitelnou nespojitost. Na druhé straně je $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y}{x^3+y^3} = +\infty$, je v bodě $[0,0]$ nekonečná nespojitost.

---

10. Najděte $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$.

Řešení: Jestliže budeme hledat limitu po přímkách $y = kx$, dostaneme $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{kx}{x^2+k^2}$. Tato limita je pro každé k rovna nule. Také po přímce $x = 0$ je tato limita nulová. Tedy podél všech přímek jdoucích počátkem je tato limita rovna nule. Ale přesto tato limita není rovna nule a dokonce ani neexistuje, protože na parabole $y = x^2$ je $\dfrac{x^2y}{x^4+y^2} = \dfrac{1}{2}$.

Cvičení 5.

Derivace podle vektoru. Derivace ve směru. Parciální derivace

Nechť $f : M \to \mathbb{R}$, kde $M \subset \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \in M^\circ$ a $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$. Definujme funkci $F(t) = f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}t)$. *Derivací podle vektoru* $\boldsymbol{v}$ funkce f v bodě $\boldsymbol{x}$, značí se $f'_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x})$, nazýváme derivaci funkce $F(t)$ v bodě $t = 0$, tj.

$$f'_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}.$$

Obecně platí $f'_{\alpha\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) = \alpha f'_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x})$, ale nemusí platit rovnost $f'_{\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2}(\boldsymbol{x}) = f'_{\boldsymbol{v}_1}(\boldsymbol{x}) + f'_{\boldsymbol{v}_2}(\boldsymbol{x})$.

Je-li $\boldsymbol{v}$ jednotkový vektor, tj. $\big|\boldsymbol{v}\big| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2} = 1$, udává takový vektor směr v $\mathbb{R}^n$ a derivace podle takového vektoru se nazývá *derivace ve směru* $\boldsymbol{v}$.
V $\mathbb{R}^3$ se často pro takové vektory používají směrové kosiny $\boldsymbol{v} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, kde $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Úhly α, β a γ jsou úhlu, které svírá vektor $\boldsymbol{v}$ se souřadnicovými osami Ox, Oy a Oz.
Ve speciálním případě, když je směr rovnoběžný s i–tou souřadnicovou osou, tj. $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_i$, se derivace v tomto směru nazývá *parciální derivace podle* x_i a značí se

$$f_{\boldsymbol{e}_i}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}\big(\boldsymbol{x}\big) = f'_i(\boldsymbol{x}).$$

1. Pro funkci $f(x,y) = x + (y-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$ najděte $f'_x(x,1)$.

Řešení: Parciální derivaci funkce $f(x,y)$ podle proměnné x v bodě $(x,1)$ počítáme tak, že nejprve položíme $y = 1$ a funkci jedné proměnné $F(x) = f(x,1)$ derivujeme podle x. V našem případě je $F(x) = x$, a tedy $f'_x(x,1) = F'(x) = 1$.

---

2. Najděte derivaci funkce $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ v bodě $M = [1;1]$, ve směru $\boldsymbol{v}$, který svírá s kladným směrem osy Ox úhel α. Ve kterém směru je tato derivace: a) největší; b) nejmenší; c) rovna nule?

Řešení: Jak je známo, má v rovině směrový vektor $\boldsymbol{v}$, který svírá s kladným směrem osy úhel α souřadnice $\boldsymbol{v} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, $\alpha \in \langle 0, 2\pi\rangle$. Abychom našli derivaci dané funkce v bodě $[1;1]$ ve směru vektoru $\boldsymbol{v}$, sestrojíme funkci jedné proměnné $F(t) = f(1 + t\cos\alpha, 1 + t\sin\alpha)$ a najdeme její derivaci v bodě $t = 0$. V našem případě je $F(t) = (1 + t\cos\alpha)^2 - (1 + t\cos\alpha)(1 + t\sin\alpha) + (1 + t\sin\alpha)^2$. Protože její derivace v bodě $t = 0$ je $F'(0) = f'_{\boldsymbol{v}}(1,1) = \cos\alpha + \sin\alpha$. Protože funkce $f(x,y)$ má na celém $\mathbb{R}^2$ spojité obě parciální derivace má diferenciál. Proto jsme mohli směrovou derivaci počítat podle vztahu $f'_{\boldsymbol{v}} = f'_1(1,1)\cos\alpha + f'_2(1,1)\sin\alpha = \operatorname{grad} f(1,1)\cdot\boldsymbol{v}$. Protože $f'_1(1,1) = f'_2(1,1) = 1$, dostali bychom opět $f'_{\boldsymbol{v}}(1,1) = \cos\alpha + \sin\alpha$.
V případě a), resp. b), je najím úkolem najít maximum, resp. minimum, funkce $F(\alpha) = \cos\alpha + \sin\alpha$ na množině $\alpha \in \langle 0, 2\pi\rangle$. Protože je $F'(\alpha) = -\sin\alpha + \cos\alpha$

nabývá tato funkce extrém v jednom z bodů $\alpha = 0$, $\alpha = 2\pi$, $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ nebo $\alpha = \dfrac{5}{4}\pi$. Protože je $F(0) = F(2\pi) = 1$, $F(\pi/4) = \sqrt{2}$ a $F(5\pi/4) = -\sqrt{2}$ je maximum této funkce ve směru $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ a minimum ve směru $\alpha = \dfrac{5}{4}\pi$. Všimněte si, že jsou to směry rovnoběžné se směrem gradientu funkce $f(x, y)$ v bodě $[1; 1]$.
Derivace je nulová ve směru $\alpha = \dfrac{3}{4}\pi$ a $\alpha = \dfrac{7}{4}\pi$, což jsou směry kolmé na směr gradientu funkce $f(x, y)$ v bodě $[1; 1]$.

---

3. Najděte derivaci funkce $f(x, y) = \dfrac{xy(x + y)}{x^2 + y^2}$ pro $x^2 + y^2 \neq 0$ a $f(0, 0) = 0$ v bodě $M = [0; 0]$ podle vektorů $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1)$ a $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 = (1, 1)$.
Řešení: Podle definice je

$$
\begin{aligned}
f'_x(0,0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0 \\
f'_y(0,0) & \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0 \\
f'_{\boldsymbol{v}}(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(t,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{2t^3}{2t^3} = 1\,.
\end{aligned}
$$

Tedy v tomto případě je $f'_{\boldsymbol{v}}(0, 0) \neq \boldsymbol{v} \cdot \operatorname{grad} f(0, 0)$.

---

4. Ukažte, že funkce $f(x, y) = \dfrac{x^2y^4}{x^4 + y^8}$ pro $x^2 + y^2 \neq 0$ a $f(0, 0) = 0$ není spojitá v bodě $M = [0; 0]$. Najděte její derivaci podle vektoru $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ v bodě M.
Řešení: Protože $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x^2y^4}{x^4 + y^8}\right) = 0$, musí být limita, jestliže existuje, rovna nule. Ale na parabole $x = y^2$ je $f(y^2, y) = \dfrac{1}{2} \neq 0$. Proto limita funkce $f(x, y)$ v bodě $M = [0; 0]$ neexistuje, a tedy funkce není v bodě M spojitá.
Derivaci této funkce podle vektoru $\boldsymbol{v} = \big(v_1, v_2\big)$ v bodě $M = [0; 0]$ najdeme podle definice. Podle ní je

$$
f'_{\boldsymbol{v}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f\big(v_1t, v_2t\big)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{v_1^2v_2^4t^6}{t\big(v_1^4t^4 + v_2^8t^8\big)} = \lim_{t\to 0} \frac{v_1^2v_2^4t}{v_1^4 + v_2^8t^4} = 0\,.
$$

Tedy daná funkce má v bodě $M = [0; 0]$ derivace podle každého vektoru. Dokonce platí $f'_{\boldsymbol{v}}(0, 0) = \boldsymbol{v} \cdot \operatorname{grad} f(0, 0)$, ale přesto není tato funkce v bodě M spojitá.

Najděte parciální derivace následujících funkcí:

5. $u = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ **6.** $u = x^y\,, \quad x > 0$

7. $u = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$ **8.** $u = \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

9. $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ **10.** $u = x^{(y^z)}$

Řešení:

5. $u'_x = \dfrac{y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$, $u'_y = -\dfrac{xy}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$.

6. $u'_x = yx^{y-1}$; $u'_y = x^y \ln x$.

7. $u'_x = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $u'_y = \dfrac{x}{x^2+y^2}$.

8. $u'_x = \dfrac{|y|}{x^2+y^2}$, $u'_y = -\dfrac{x \operatorname{sgn} y}{x^2+y^2}$.

9. $u'_x = -\dfrac{x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$, $u'_y = -\dfrac{y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$, $u'_z = -\dfrac{z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$.

10. $u'_x = y^z x^{(y^z)-1}$, $u'_y = uzy^{z-1}\ln x$, $u'_z = uy^z \ln x \ln y$.

Cvičení 6.

Totální diferenciál

Definice: Nechť $f : M \to \mathbb{R}$, kde $M \subset \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a} \in M^\circ$ a $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$. Jestliže existují čísla A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ taková, že

$$f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) = A_1 h_1 + A_2 h_2 + \cdots + A_n h_n + \eta(\boldsymbol{h}),$$

kde $\lim\limits_{\boldsymbol{h} \to 0} \dfrac{\eta(\boldsymbol{h})}{|\boldsymbol{h}|} = 0$, říkáme, že funkce $f(\boldsymbol{x})$ má *totální diferenciál* v bodě $\boldsymbol{a}$. Totální diferenciálem funkce $f(\boldsymbol{x})$ v bodě $\boldsymbol{a}$ je pak lineární funkce proměnné $\boldsymbol{h}$

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{h}) = \sum_{i=1}^{n} A_i h_i = A_1 h_1 + A_2 h_2 + \cdots + A_n h_n . \tag{1}$$

Funkce, která má diferenciál v bodě $\boldsymbol{a}$ se nazývá *diferencovatelná* v bodě $\boldsymbol{a}$.

Věta: *Má-li funkce $f(\boldsymbol{x})$ v bodě $\boldsymbol{a}$ totální diferenciál, je*

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{h}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}) h_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) h_n .$$

Často se píše místo h_i v (1) $\mathrm{d}x_i$ a pak

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{a}; \mathrm{d}\boldsymbol{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a})\, \mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{a})\, \mathrm{d}x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})\, \mathrm{d}x_n .$$

Definice: Je-li $\boldsymbol{f} : M \to \mathbb{R}^n$, kde $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \big(f_1(\boldsymbol{x}), \ldots, f_n(\boldsymbol{x})\big)$ nazýváme tuto funkci diferencovatelnou v bodě $\boldsymbol{a}$, je-li diferencovatelná v bodě $\boldsymbol{a}$ každá funkce f_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Definice: Funkce, která je diferencovatelná v každém bodě množiny M se nazývá diferencovatelná na množině M.

Věta: *Má-li funkce $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ v bodě $\boldsymbol{a}$ totální diferenciál, je v tomto bodě spojitá.*

Věta: *Jsou-li všechny parciální derivace $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, spojité v bodě $\boldsymbol{a}$, je funkce $f(\boldsymbol{x})$ diferencovatelná v bodě $\boldsymbol{a}$.*

Věta: *Je-li funkce diferencovatelná v bodě $\boldsymbol{a}$, pak pro každé $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_2)$ platí*

$$f'_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) v_i . \tag{2}$$

Definice: Nechť funkce $f : M \to \mathbb{R}^n$ je diferencovatelná na množině M. Pak vektorovou funkci

$$\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

nazýváme *gradient* funkce f.

Vztah (2) pak lze psát jako $f_{\boldsymbol{v}}(a) = \operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{v}$, kde násobení znamená skalární součin.

Definice: Má-li funkce $f(\boldsymbol{x})$ spojité všechny parciální derivace v otevřené množině M, říkáme, že je funkce $f(\boldsymbol{x})$ *třídy* C_1 *na množině* M; značí se $f \in C_1(M)$.

Najděte totální diferenciály funkcí

$$\textbf{1.}\;\; u = x^m y^n \qquad \textbf{2.}\;\; u = \ln \sqrt{x^2+y^2} \qquad \textbf{3.}\;\; u = \frac{z}{x^2+y^2}\,.$$

Řešení:
1. Protože parciální derivace $u'_x = m x^{m-1} y^n$ a $u'_y = n x^m y^{n-1}$ jsou spojité v celém $\mathbb{R}^2$ diferenciál funkce $u = x^m y^n$ existuje a je $\mathrm{d}u = m x^{m-1} y^n \,\mathrm{d}x + n x^m y^{n-1} \,\mathrm{d}y$.
2. Parciální derivace jsou $u'_x(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ a $u'_y(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}$. Tyto parciální derivace jsou spojité na množině $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{[0;0]\}$. Proto je diferenciál $\mathrm{d}u = \dfrac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ na M. V bodě $[0;0]$ není funkce $u(x,y)$ spojitá, a proto nemá v tomto bodě diferenciál.
3. Parciální derivace

$$u'_x(x,y,z) = \frac{-2xz}{\left(x^2+y^2\right)^2}\,, \quad u'_y(x,y,z) = \frac{-2yz}{\left(x^2+y^2\right)^2}\,, \quad u'_z(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2}$$

jsou spojité na množině $M = \mathbb{R}^3 \setminus N$, kde $N = \big\{[0;0;z]\,,\ z \in \mathbb{R}\big\}$. Proto je diferenciál funkce $u(x,y,z)$ roven $\mathrm{d}u = -\dfrac{2xz\,\mathrm{d}x + 2yz\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^2} + \dfrac{\mathrm{d}z}{x^2+y^2}$ na množině M. V bodech množiny N není funkce $u(x,y,z)$ spojitá, a proto v těchto bodech diferenciál neexistuje.

---

4. Najděte totální diferenciál funkce $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ pro $[x;y] \neq [0;0]$ a $f(0,0) = 0$.

Řešení: Na množině $\mathbb{R}^2 \setminus \big\{[0;0]\big\}$ jsou parciální derivace $f'_x(x,y) = \dfrac{y^3}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$ a $f'_y(x,y) = \dfrac{x^3}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$ spojité. Proto v bodech této množiny existuje diferenciál funkce $f(x,y)$ a je roven $\mathrm{d}f = \dfrac{y^3\mathrm{d}x + x^3\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$.

Hledejme diferenciál funkce $f(x,y)$ v bodě $[0;0]$. Protože parciální derivace v bodě $[0;0]$ existují a $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$, musí být $\lim\limits_{[x;y]\to[0;0]} \dfrac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$. Ale $\lim\limits_{[x;y]\to[0;0]} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ neexistuje; například ze směru $y=0$ je tato limita rovna nule, kdežto ze směru $x=y$ je rovna $\dfrac{1}{2}$. Tedy diferenciál funkce $f(x,y)$ v bodě $[x;y] = [0;0]$ neexistuje.

Geometrický význam diferenciálu

Diferencovatelné zobrazení $\boldsymbol{f} : M \to \mathbb{R}^3$, kde $M \subset \mathbb{R}$, definuje za jistých předpokladů křivku v $\mathbb{R}^3$. Představte si parametr t jako čas. Pak rovnice $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$ a $z = f_3(t)$ udávají polohu bodu v čase t v prostoru. Měníme-li parametr t, dostaneme křivku, po níž se pohybuje daný bod.

Tečný vektor k takto dané křivce je $\boldsymbol{t} = \left(\dfrac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}t}, \dfrac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}t}, \dfrac{\mathrm{d}f_3}{\mathrm{d}t}\right)$ a parametrické rovnice tečny v bodě $(x_0, y_0, z_0) = \boldsymbol{f}(t_0)$ jsou

$$\begin{aligned} x &= x_0 + t\frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}t}(t_0) \\ y &= y_0 + t\frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}t}(t_0) \\ z &= z_0 + t\frac{\mathrm{d}f_3}{\mathrm{d}t}(t_0)\,, \end{aligned}$$

kde t je parametr, resp.

$$\frac{x-x_0}{f'_1(t_0)} = \frac{y-y_0}{f'_2(t_0)} = \frac{z-z_0}{f'_3(t_0)}\,.$$

Normálová rovina v tomto bodě má rovnici

$$\frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}t}(t_0)\cdot\big(x-x_0\big) + \frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}t}(t_0)\cdot\big(y-y_0\big) + \frac{\mathrm{d}f_3}{\mathrm{d}t}(t_0)\cdot\big(z-z_0\big) = 0\,.$$

V definici totálního diferenciálu jsme se vlastně pokusili nahradit v jistém smyslu nejlépe graf funkce $f(\boldsymbol{x})$ v bodě $\boldsymbol{a}$ tečnou nadrovinou. Jestliže tečná nadrovina v bodě $\boldsymbol{a}$ existovala, nazvali jsme funkci diferencovatelnou v bodě $\boldsymbol{a}$. Jestliže se omezím na plochy, které jsou dány jako graf funkce dvou proměnných, tj. $z = f(x,y)$, je rovnice tečné roviny ke grafu této funkce v bodě $\boldsymbol{x}_0 = \big[x_0; y_0; z_0\big] = \big[x_0; y_0; f(x_0,y_0)\big]$ dána rovnicí

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot\big(x-x_0\big) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot\big(y-y_0\big)\,.$$

Obecně v prostoru $\mathbb{R}^n$ je rovnice tečné nadroviny ke grafu funkce $y = f(\boldsymbol{x})$ v bodě $\boldsymbol{a}$ dána rovnicí

$$y - f(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) \cdot \big(x_i - a_i\big)\,.$$

Rovnice normály k takové ploše je v případě $\mathbb{R}^3$ dána rovnicemi

$$\frac{z - z_0}{-1} = \frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)}$$

a v obecném případě $\mathbb{R}^n$

$$\frac{y - f(\boldsymbol{a})}{-1} = \frac{x_1 - a_1}{f'_1(\boldsymbol{a})} = \frac{x_2 - a_2}{f'_2(\boldsymbol{a})} = \cdots = \frac{x_n - a_n}{f'_n(\boldsymbol{a})}\,.$$

---

5. Najděte tečnu a normálovou rovinu ke křivce dané parametrickými rovnicemi $x = a\sin^2 t$, $y = b\sin t\cos t$, $z = c\cos^2 t$ v bodě $t_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

Řešení: Tečnu budeme hledat v bodě $\big[x_0; y_0; z_0\big] = \big[a/2; b/2; c/2\big]$. Protože $x'(t) = a\sin 2t$, $y'(t) = b\cos 2t$, $z'(t) = -c\sin 2t$, je tečný vektor k dané křivce v bodě $\big[x_0; y_0; z_0\big]$ úměrný vektoru $\boldsymbol{t} = (a, 0, -c)$. Tedy parametrické rovnice tečny jsou $x = \dfrac{a}{2}\,(1 + 2t)$, $y = \dfrac{b}{2}$, $z = \dfrac{c}{2}\,(1 - 2t)$.
Normálová rovina má proto rovnici $\boldsymbol{t} \cdot \big(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\big) = 0$, tedy $2ax - 2cx = a^2 - c^2$.

---

6. Najděte tečnou rovinu a normálu ke grafu funkce $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ v bodě $M = [1; 1; ?]$.

Řešení: Nejprve nalezneme bod dotyku. Z rovnice grafu funkce plyne, že $z_0 = \dfrac{\pi}{4}$. Protože parciální derivace $z'_x(x, y) = \dfrac{-y}{x^2 + y^2}$, resp. $z'_y(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$, jsou v bodě dotyku $z'_x(1, 1) = -\dfrac{1}{2}$, resp. $z'_y(1, 1) = \dfrac{1}{2}$, je rovnice tečné roviny v tomto bodě $z - \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{1}{2}\,(x - 1) + \dfrac{1}{2}\,(y - 1)$, tj. $2x - 2y + 4z = \pi$.
Normálový vektor v bodě $\big[x_0; y_0; z_0\big]$ je rovnoběžný s vektorem, kolmým k tečné rovině, tj. $\boldsymbol{n} = (1, -1, 2)$. Tedy normála má parametrické rovnice $x = 1 + t$, $y = 1 - t$, $z = \dfrac{\pi}{4} + 2t$.

Cvičení 7

Derivace složené funkce

Věta: *Nechť $\boldsymbol{f} : M \to N$ a $\boldsymbol{g} : N \to P$, kde $M \subset \mathbb{R}^m$, $N \subset \mathbb{R}^n$ a $P \subset \mathbb{R}^p$, jsou diferencovatelné. Pak je na M diferencovatelná funkce $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}$ a platí*

$$dh_i = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial y_j} \big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\big) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_k} (\boldsymbol{x})\, dx_k\,.$$

Jako zvláštní případ tohoto vztahu je derivace složené funkce, tj. $\boldsymbol{f} : M \to N$ a $g : N \to \mathbb{R}$. Jsou-li funkce $\boldsymbol{f}$ a g diferencovatelné, pak je složená funkce $h(\boldsymbol{x}) = g\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\big)$ diferencovatelná a platí

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_j} \big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\big) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\,.$$

Najděte parciální derivace funkcí

1. $u = f(t)$ $\qquad t = \dfrac{y}{x}$

2. $u = f(\xi, \eta)$ $\qquad \xi = x + y\,,\ \eta = x - y$

3. $u = f\left(\dfrac{x}{y}, \dfrac{y}{z}\right)$

4. $u = f(\xi, \eta, \zeta)$ $\qquad \xi = x^2 + y^2\,,\ \eta = x^2 - y^2\,,\ \zeta = 2xy$

Řešení:

1. V tomto případě je funkce u funkcí dvou proměnných tvaru $u(x,y) = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$. Podle věty o derivaci složené funkce je $u'_x(x,y) = -\dfrac{y}{x^2} f'(t)$ a $u'_y(x,y) = \dfrac{1}{x} f'(t)$, kde $t = \dfrac{y}{x}$.

2. Jedná se o funkci dvou proměnných $u(x,y) = f(x+y, x-y)$. Podle věty o derivaci složené funkce je $u'_x(x,y) = f'_\xi(x+y, x-y) + f'_\eta(x+y, x-y)$ a $u'_y(x,y) = f'_\xi(x+y, x-y) - f'_\eta(x+y, x-y)$.

3. Funkce u je funkcí tří proměnných. Věta o derivaci složené funkce dává

$$u'_x(x,y,z) = \frac{1}{y} f'_1 \left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right),$$

$$u'_y(x,y,z) = -\frac{x}{y^2} f'_1 \left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right) + \frac{1}{z} f'_2 \left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right),$$

$$u'_z(x,y,z) = -\frac{y}{z^2} f'_2 \left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right).$$

4. Funkce u je funkcí dvou proměnných. Podle věty o derivaci složené funkce je $u'_x(x,y) = 2\big(xf'_1 + xf'_2 + yf'_3\big)$, $u'_y(x,y) = 2\big(yf'_1 - yf'_2 + xf'_3\big)$.

---

5. Nechť je funkce $f(x,y)$ diferencovatelná. Definujme funkce

$$F(r,\varphi) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,.$$

V podstatě jde o transformaci funkce do polárních souřadnic, tj. transformaci $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Najděte vztah mezi parciálními derivacemi funkcí $f(x,y)$ a $F(r,\varphi)$

Řešení: Jedna z možností je tato

$$\mathrm{d}f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}F(r,\varphi) = \frac{\partial F}{\partial r}\,\mathrm{d}r + \frac{\partial F}{\partial \varphi}\,\mathrm{d}\varphi\,. \tag{1}$$

Z definičních vztahů plyne pro diferenciály

$$\mathrm{d}x = \cos\varphi\,\mathrm{d}r - r\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,, \qquad \mathrm{d}y = \sin\varphi\,\mathrm{d}r + r\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Když tyto vztahy dosadíme do (1), dostaneme

$$\begin{aligned} &f'_x(\cos\varphi\,\mathrm{d}r - r\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi) + f'_y(\sin\varphi\,\mathrm{d}r + r\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi) = \\ &\qquad = \big(f'_x\cos\varphi + f'_y\sin\varphi\big)\,\mathrm{d}r + \big(-rf'_x\sin\varphi + rf'_y\cos\varphi\big)\,\mathrm{d}\varphi = F'_r\,\mathrm{d}r + F'_\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,. \end{aligned}$$

Z této rovnice pak získáme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} F'_r &= f'_x\cos\varphi + f'_y\sin\varphi \\ F'_\varphi &= -rf'_x\sin\varphi + rf'_y\sin\varphi\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Řešením této soustavy dostaneme

$$\begin{aligned} f'_x &= F'_r\cos\varphi - \frac{\sin\varphi}{r}\,F'_\varphi \\ f'_y &= F'_r\sin\varphi + \frac{\cos\varphi}{r}\,F'_\varphi \end{aligned}$$

Možná že by bylo dobré si všimnout, že jsme museli řešit soustavu rovnic (2). Jak si asi nepamatujete, má tato soustava rovnic právě jedno řešení, je-li determinant této soustavy různý od nuly. Tento determinant

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = r$$

se nazývá *jakobián* zobrazení a aby byla transformace jistým způsobem rozumná, musí být jakobián nenulový, viz dále *regulární zobrazení* nebo *implicitní funkce.*

6. Ukažte, že funkce $z = x^n f\left(\dfrac{y}{x^2}\right)$, kde f je libovolná diferencovatelná funkce, splňuje rovnici

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y} = nz\,.$$

Řešení: $z'_x = nx^{n-1}f - 2x^{n-3}yf'$, $z'_y = x^{n-2}f'$.

---

7. Ukažte, že funkce $z = \dfrac{y^2}{3x} + \varphi(xy)$, kde φ je diferencovatelná funkce, splňuje rovnici

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x} - xy\frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0\,.$$

Řešení: $z'_x = -\dfrac{y^2}{3x^2} + y\varphi'$, $z'_y = \dfrac{2y}{3x} + x\varphi'$.

---

8. Ukažte, že pro každou diferencovatelnou funkci φ je funkce $u = x^n\varphi\left(\dfrac{y}{x^\alpha}, \dfrac{z}{x^\beta}\right)$ řešením diferenciální rovnice

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha y\frac{\partial u}{\partial y} + \beta z\frac{\partial u}{\partial z} = nu$$

Řešení: $u'_x = nx^{n-1}\varphi - \alpha x^{n-\alpha-1}y\varphi'_1 - \beta x^{n-\beta-1}z\varphi'_2$; $u'_y = x^{n-\alpha}\varphi'_1$, $u'_z = x^{n-\beta}\varphi'_2$.

---

9. Nechť

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{l}_1 &= (\cos\alpha_1, \cos\beta_1, \cos\gamma_1)\\
\boldsymbol{l}_2 &= (\cos\alpha_2, \cos\beta_2, \cos\gamma_2)\\
\boldsymbol{l}_3 &= (\cos\alpha_3, \cos\beta_3, \cos\gamma_3)
\end{aligned}$$

jsou navzájem ortonormální vektory, tj. $\boldsymbol{l}_i \cdot \boldsymbol{l}_j = \delta_{ij}$, kde $\delta_{ij} = 0$ pro $i \neq j$ a $\delta_{ij} = 1$ pro $i = j$, je tzv. Kroneckerovo delta. Ukažte, že platí

$$\left(f'_{\boldsymbol{l}_1}\right)^2 + \left(f'_{\boldsymbol{l}_2}\right)^2 + \left(f'_{\boldsymbol{l}_3}\right)^2 = \left(f'_x\right)^2 + \left(f'_y\right)^2 + \left(f'_z\right)^2$$

Řešení: $f_{\boldsymbol{l}_i} = \displaystyle\sum_{j=1}^{3} A_{ij}f'_j$, kde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1\\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2\\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 \end{pmatrix}$ je ortogonální matice.

---

10. Najděte funkci $z = z(x,y)$, která je řešením rovnice $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2y$ a splňuje podmínku $z(x, x^2) = 1$.

Řešení: Funkce $z(x,y)$ musí mít tvar $z(x,y) = \displaystyle\int \left(x^2 + 2y\right) \mathrm{d}y + f(x) = x^2y + y^2 + f(x)$, kde $f(x)$ je funkce pouze proměnné x. Z podmínky $z\big(x, x^2\big) = x^4 + x^4 - f(x) = 1$ plyne, že $f(x) = 2x^4 - 1$. Tedy $z(x,y) = x^2y + y^2 - 2x^4 + 1$.

Cvičení 8

Parciální derivace a diferenciály vyšších řádů

Nechť $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}^n$ a $\boldsymbol{x} \in M^\circ$. Má-li funkce f parciální derivaci $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ na množině M, pak se můžeme pokusit najít parciální derivaci funkce $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ podle proměnné x_j, tj. funkce $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$. I když existují druhé parciální derivace neplatí obecně rovnost $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right)$. Ale platí následující

Věta: *Nechť je f funkce n proměnných. Nechť existují $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ a $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ v nějakém okolí $U(\boldsymbol{a}, \varepsilon)$ bodu $\boldsymbol{a}$ a nechť je derivace $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ spojitá v bodě $\boldsymbol{a}$. Pak existuje v bodě $\boldsymbol{a}$ také derivace $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right)$ a platí rovnost*

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right).$$

Má-li funkce f v nějakém okolí bodu $\boldsymbol{a}$ derivaci řádu $n-1$, $\dfrac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{i_{n-1}} \dots \partial x_{i_1}}$, pak se definuje derivace řádu n rekurentně vztahem

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_n}}\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{i_{n-1}} \dots \partial x_{i_1}}\right) = \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n} \partial x_{i_{n-1}} \dots \partial x_{i_1}},$$

pokud derivace vlevo existuje (doufám, že je jasné, co tím myslím).
Zhruba řečeno, platí tato

Věta: *Jsou-li všechny parciální derivace funkce f, které počítáme, v bodě $\boldsymbol{a}$ spojité, nezávisí výsledek parciálního derivování na pořadí, ve kterém derivujeme.*

Definice: Nechť f je funkce definovaná na otevřené množině $M \subset \mathbb{R}^n$, která na M má spojité všechny parciální derivace až do řádu k. Pak tuto funkci nazveme *funkcí třídy C_k* na množině M; značí se $f \in C_k(M)$. Je-li funkce $f \in C_k(M)$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, říkáme, že f je třídy C_∞ na množině M, $f \in C_\infty(M)$.

Definice: Nechť $k \geq 1$. Budeme říkat, že funkce n proměnných f má v bodě $\boldsymbol{a}$ *totální diferenciál k–tého řádu*, pokud platí toto:
1) Všechny parciální derivace funkce f všech řádů m, $0 \leq m \leq k-2$, mají totální diferenciál prvního řádu v nějakém okolí bodu $\boldsymbol{a}$.
2) Všechny parciální derivace funkce f řádu $k-1$ mají totální diferenciál prvního řádu v bodě $\boldsymbol{a}$.

Má-li funkce f totální diferenciál řádu k, pak jej značíme $\mathrm{d}^k f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{h})$ a definujeme jej vztahem

$$\mathrm{d}^k f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{h}) = \sum_{\substack{i_1\geq 0,\dots,i_n\geq 0\\ i_1+\cdots+i_n=k}} \frac{k!}{i_1!\dots i_n!}\,\frac{\partial^k f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1^{i_1}\dots\partial x_n^{i_n}}\,h_1^{i_1}\dots h_n^{i_n} = \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\,h_i\right)^k f(\boldsymbol{x})\,.$$

Speciálně je-li f funkce dvou proměnných, tj. $f = f(x,y)$, která má totální diferenciál k–tého řádu, je

$$\mathrm{d}^k f(x,y;h_1,h_2) = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\frac{\partial^k f(x,y)}{\partial x^i\partial y^{k-i}}\,h_1^i h_2^{k-i}\,.$$

Věta: *Je-li $f\in C_k(M)$, má totální diferenciál řádu k v každém bodě množiny M.*

Najděte totální diferenciály prvního a druhého řádu pro funkce

1. $u = x^m y^n$ **2.** $u = \mathrm{e}^{xy}$

3. $u = X(x)Y(y)$ **4.** $u = xy + yz + xz$

Řešení:
1. Protože parciální derivace jsou $u'_x = mx^{m-1}y^n$, $u'_y = nx^m y^{n-1}$, $u'_{xx} = m(m-1)x^{m-2}y^n$, $u'_{xy} = mnx^{m-1}y^{n-1}$ a $u'_{yy} = n(n-1)x^m y^{n-2}$ jsou spojité v celém $\mathbb{R}^2$ existuje diferenciál prvního i druhého řádu a jsou

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u &= mx^{m-1}y^n\mathrm{d}x + nx^m y^{n-1}\mathrm{d}y\,,\\ \mathrm{d}^2u &= m(m-1)x^{m-2}y^n\mathrm{d}x^2 + 2mnx^{m-1}y^{n-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + n(n-1)x^m y^{n-2}\mathrm{d}y^2\,.\end{aligned}$$

2. Parciální derivace funkce $u(x,y)$ jsou $y'_x = y\mathrm{e}^{xy}$, $u'_y = x\mathrm{e}^{xy}$, $u'_{xx} = y^2\mathrm{e}^{xy}$, $u'_{xy} = (1+xy)\mathrm{e}^{xy}$ a $u'_{yy} = x^2\mathrm{e}^{xy}$. Protože jsou spojité na celém $\mathbb{R}^2$ existují diferenciály prvního a druhého řádu a jsou

$$\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{xy}(y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y)\,,\quad \mathrm{d}^2u = \mathrm{e}^{xy}(y^2\,\mathrm{d}x^2 + 2(xy+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + x^2\,\mathrm{d}y^2)\,.$$

3. Jestliže předpokládáme, že funkce $X(x)$ a $Y(y)$ mají derivace druhého řádu, pak jsou parciální derivace funkce $u(x,y)$ rovny $u'_x = X'(x)Y(y)$, $u'_y = X(x)Y'(y)$, $u'_{xx} = X''(x)Y(y)$, $u'_{xy} = X'(x)Y'(y)$ a $u'_{yy} = X(x)Y''(y)$. Omezíme se na množinu $M\subset\mathbb{R}^2$, kde mají funkce $X(x)$ a $Y(y)$ derivace druhého řádu. Pak pro každý bod $\left[x_0;y_0\right]\in M$ existují okolí J, resp. K bodu x_0, resp. y_0, taková, že funkce $X(x)$, resp. $Y(y)$ mají na těchto okolích derivace prvního řádu, které jsou spojité v bodě x_0, resp. y_0, a proto na okolích J, resp. K omezené. Z Taylorovy věty pak

plyne, že pro každé $x \in J$ a $y \in K$ je $X(x+h) = X(x) + X'(x)h + h\eta(x,h)$ a $Y(y+k) = Y(y) + Y'(y)k + k\omega(y,k)$, kde $\lim\limits_{h\to 0} \eta(x,h) = \lim\limits_{k\to 0} \omega(y,k) = 0$. Pak je ale $u(x+h,y+k) - u(x,y) = X(x+h)Y(y+k) - X(x)Y(y) = X'(x)Y(y)h + X(x)Y'(y)k + \bigl(|h|+|k|\bigr)\psi(x,y;h,k)$, kde $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \psi(x,y;h,k) = 0$. Tedy pro každé (x,y) z jistého okolí bodu $\bigl[x_0;y_0\bigr] \in M$ existuje diferenciál prvního řádu $\mathrm{d}u = X'(x)Y(y)\,\mathrm{d}x + X(x)Y'(y)\,\mathrm{d}y$.
Ještě musíme ukázat, že funkce $u'_x(x,y) = X'(x)Y(y)$ a $u'_y(x,y) = X(x)Y'(y)$ mají diferenciál prvního řádu v bodě $\bigl[x_0;y_0\bigr] \in M$. Protože jsme předpokládali, že funkce $X(x)$ má v bodě $x_0 \in J$ derivaci druhého řádu, platí podle Taylorovy věty $X'\bigl(x_0+h\bigr) - X'\bigl(x_0\bigr) = X''\bigl(x_0\bigr)h + h\eta(x_0,h)$, kde $\lim\limits_{h\to 0} \eta(x_0,h) = 0$. Jestliže tento vztah násobíme rovností $Y(y_0+k) = Y(y_0) + Y'(y_0)k + k\omega(y_0,k)$, který jsme odvodili dříve, zjistíme, že parciální derivace $u'_x(x,y)$ má v bodě $\bigl[x_0;y_0\bigr]$ diferenciál prvního řádu. Podobně se ukáže, že v bodě $\bigl[x_0,y_0\bigr]$ existuje diferenciál parciální derivace $u'_y(x,y)$. Tedy funkce $u(x,y)$ má na množině M diferenciál druhého řádu, který je $\mathrm{d}^2u = X''(x)Y(y)\,\mathrm{d}x^2 + 2X'(x)Y'(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + X(x)Y''(y)\,\mathrm{d}y^2$.
4. Parciální derivace funkce $u(x,y,z)$ jsou $u'_x = y+z$, $u'_y = x+z$, $u'_z = x+y$, $u'_{xx} = u'_{yy} = u'_{zz} = 0$ a $u'_{xy} = u'_{xz} = u'_{yz} = 1$. Protože jsou spojité na celém $\mathbb{R}^3$ existují diferenciály prvního i druhého řádu a jsou

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u &= (y+z)\,\mathrm{d}x + (x+z)\,\mathrm{d}y + (x+y)\,\mathrm{d}z\,, \\ \mathrm{d}^2u &= 2(\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z)\,. \end{aligned}$$

Najděte

5. $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$ pro funkci $u = x\ln(xy)$

6. $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$ pro funkci $u = \mathrm{e}^{xyz}$

Řešení:
5. Definiční obor funkce $u(x,y)$ je množina $M = \bigl\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ xy > 0\bigr\}$. Na této množině jsou všechny parciální derivace funkce $u(x,y)$ spojité, a proto můžeme derivovat v libovolném pořadí. Postupně dostaneme: $u'_y(x,y) = \dfrac{x}{y}$, $u'_{xy}(x,y) = \dfrac{1}{y}$ a $u'_{xxy}(x,y) = 0$.
6. Definiční obor funkce $u(x,y,z)$ je celá množina $\mathbb{R}^3$ na funkce má na $\mathbb{R}^3$ spojité parciální derivace všech řádů. Proto lze derivovat v libovolném pořadí. Pak dostaneme $u'_x(x,y,z) = yz\mathrm{e}^{xyz}$, $u'_{xy}(x,y,z) = (z + xyz^2)\mathrm{e}^{xyz}$ a $u'_{xyz}(x,y,z) = (1 + 3xyz + x^2y^2z^2)\mathrm{e}^{xyz}$.

Najděte

7. d^3u pro funkci $u = \sin\bigl(x^2+y^2\bigr)$

8. d^3u pro funkci $u = \ln\bigl(x^x y^y z^z\bigr)$

Řešení:
7. Definiční obor funkce $u(x,y)$ je celá rovina $\mathbb{R}^2$ a funkce má na ní spojité všechny parciální derivace. Postupně dostaneme $\mathrm{d}u = 2\cos\bigl(x^2+y^2\bigr)\bigl(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y\bigr)$, $\mathrm{d}^2u = -4\sin\bigl(x^2+y^2\bigr)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)^2 + 2\cos\bigl(x^2+y^2\bigr)(\,\mathrm{d}x^2 + \,\mathrm{d}x^2)$ a $\mathrm{d}^3u = -8\cos(x^2+y^2)(x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y)^3 - 12\sin(x^2+y^2)(x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y)(\,\mathrm{d}x^2+\,\mathrm{d}y^2)$.
8. Funkce $u(x,y,z)$ má na celém svém definičním oboru $x>0$, $y>0$ a $z>0$ spojité parciální derivace všech řádů. Proto má diferenciál libovolného řádu. Postupně dostaneme $\mathrm{d}u = (1+\ln x)\mathrm{d}x + (1+\ln y)\mathrm{d}y + (1+\ln z)\mathrm{d}z$, $\mathrm{d}^2u = \dfrac{\mathrm{d}x^2}{x} + \dfrac{\mathrm{d}y^2}{y} + \dfrac{\mathrm{d}z^2}{z}$ a $\mathrm{d}^3u = -\dfrac{\mathrm{d}x^3}{x^2} - \dfrac{\mathrm{d}y^3}{y^2} - \dfrac{\mathrm{d}z^3}{z^2}$.

---

9. Ověřte, že funkce $u(x,t) = \varphi(x-at) + \psi(x+at)$, kde φ a ψ jsou dvakrát diferencovatelné funkce, je řešením *vlnové rovnice* $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Řešení: Protože funkce jedné proměnné $\varphi(x)$ a $\psi(x)$ mají podle předpokladu derivace druhého řádu a funkce $v(x,t) = x - at$ a $w(x,t) = x + at$ mají derivace všech řádů na celém $\mathbb{R}^2$, má i funkce $u(x,t)$ parciální derivace druhého řádu. Ty jsou $u'_x(x,t) = \varphi'(x-at) + \psi'(x+at)$, $u'_t(x,t) = -a\varphi'(x-at) + a\psi'(x+at)$, $u'_{xx}(x,t) = \varphi''(x-at) + \psi''(x+at)$ a $u_{tt} = a^2\bigl(\varphi''(x-at) + \psi''(x+at)\bigr)$.

---

10. Ověřte, že funkce $u(x,y) = x\varphi(x+y) + y\psi(x+y)$, kde φ a ψ jsou dvakrát diferencovatelné funkce, je řešením rovnice $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Řešení: Protože funkce jedné proměnné $\varphi(x)$ a $\psi(x)$ mají podle předpokladu derivace druhého řádu a funkce $v(x,y) = x+y$ má derivace všech řádů na celém $\mathbb{R}^2$, má i funkce $u(x,y)$ parciální derivace druhého řádu. Ty jsou $u'_x(x,y) = x\varphi'(x+y) + y\psi'(x+y) + \varphi(x+y)$, $u'_y(x,y) = x\varphi'(x+y) + y\psi'(x+y) + \psi(x+y)$, $u'_{xx}(x,y) = x\varphi''(x+y) + y\psi''(x+y) + 2\varphi'(x+y)$, $u'_{xy}(x,y) = x\varphi''(x+y) + y\psi''(x+y) + \varphi'(x+y) + \psi'(x+y)$, $u'_{yy}(x,y) = x\varphi''(x+y) + y\psi''(x+y) + 2\psi'(x+y)$.

---

11. Ověřte, že funkce $u(x,y) = \varphi\bigl(x+\psi(y)\bigr)$, kde φ a ψ jsou dvakrát diferencovatelné funkce, vyhovuje rovnici $\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Řešení: Podle předpokladů mají funkce jedné proměnné $\varphi(x)$ a $\psi(y)$ derivace druhého řádu. Proto má funkce $u(x,y)$ také parciální derivace prvního a druhého řádu. Ty jsou $u'_x(x,y) = \varphi'\bigl(x+\psi(y)\bigr)$, $u'_y(x,y) = \psi'(y)\cdot\varphi'\bigl(x+\psi(y)\bigr)$, $u'_{xx}(x,y) = \varphi''\bigl(x+\psi(y)\bigr)$, $u'_{xy}(x,y) = \psi'(y)\cdot\varphi''\bigl(x+\psi(y)\bigr)$.

Cvičení 9

TAYLOROVA VĚTA. IMPLICITNÍ FUNKCE.

Věta: *Nechť je $f(\boldsymbol{x})$ v nějakém okolí $U(\boldsymbol{a})$ bodu $\boldsymbol{a}$ třídy C_{n+1}. Pak pro $\boldsymbol{h}$ takové, že $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h} \in U(\boldsymbol{a})$ lze psát:*

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}\,\mathrm{d}^i f(\boldsymbol{a};\boldsymbol{h}) + \frac{1}{(n+1)!}\,\mathrm{d}^{n+1} f(\boldsymbol{a}+\Theta_n \boldsymbol{h})\,, \tag{1}$$

kde $\Theta_n \in (0,1)$.

Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{d}^n f(\boldsymbol{a};\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) = 0$, pak lze funkci zapsat pomocí mocninné řady, *Taylorova řada*

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\mathrm{d}^n f(\boldsymbol{a};\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\,.$$

Je-li $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$, nazývá se tato Taylorova *MacLaurinovou řadou.*

Taylorův, resp. MacLaurinův, rozvoj slouží k přibližnému vyjádření funkce $f(\boldsymbol{x})$,

---

1. Najděte přírůstek funkce $f(x,y) = x^2y + xy^2 - 2xy$ při změně bodu $A = [1;-1]$ k bodu $B = [1+h;-1+k]$.

Řešení: Protože podle definice je $\triangle f(x,y;k;h) = f(x+h,y+k) - f(x,y)$ dostaneme po úpravách $\triangle f = h - 3k - 2hk - h^2 + k^2 + h^2k + hk^2$.

---

2. Odvoďte přibližné vyjádření pro malé $|x|$ a $|y|$ do členů druhého řádu včetně pro funkce

$$\text{a)}\quad \frac{\cos x}{\cos y}\,; \qquad\qquad \text{b)}\quad \operatorname{arctg}\frac{1+x+y}{1-x+y}\,.$$

Řešení: K řešení použijeme vztah (1), kde položíme $\boldsymbol{x} = (0,0)$, $\boldsymbol{h} = (x,y)$ a $n = 2$.
a) Funkce $f(x,y)$ má v okolí bodu $(0,0)$ spojité parciální derivace všech řádů. Proto v tomto bodě existují její diferenciály. Parciální derivace jsou $f'_x(x,y) = -\dfrac{\sin x}{\cos y}$, $f'_y(x,y) = \dfrac{\cos x \sin y}{\cos^2 y}$, $f'_{xx}(x,y) = -\dfrac{\cos x}{\cos y}$, $f'_{xy}(x,y) = -\dfrac{\sin x \sin y}{\cos^2 y}$ a $f'_{yy}(x,y) = \dfrac{\cos x(1+\sin^2 y)}{\cos^3 y}$. Tedy diferenciály jsou $\mathrm{d}f(0,0;x,y) = 0$ a $\mathrm{d}^2 f(0,0;x,y) = -x^2 + y^2$. Protože $f(0,0) = 1$ je hledaný rozvoj $\dfrac{\cos x}{\cos y} \approx 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2}$.
b) Funkce má v okolí bodu $(0,0)$ spojité parciální derivace všech řádů, a tedy i všechny diferenciály. Parciální derivace jsou

$$f'_x(x,y) = \frac{1+y}{x^2+(1+y)^2}\,, \qquad f'_y(x,y) = \frac{-x}{x^2+(1+y)^2}\,,$$

$$
\begin{aligned}
f'_{xx}(x,y) &= \frac{-2x(1+y)}{\left(x^2+(1+y)^2\right)^2}\,, \\
f'_{xy}(x,y) &= \frac{x^2-(1+y)^2}{\left(x^2+(1+y)^2\right)^2}\,, \\
f'_{yy}(x,y) &= \frac{2x(1+y)}{\left(x^2+(1+y)^2\right)^2}\,.
\end{aligned}
$$

Tedy diferenciály v bodě $(0,0)$ jsou $\mathrm{d}f(0,0;x,y) = x$ a $\mathrm{d}^2 f(0,0;x,y) = -2xy$. A protože $f(0,0) = \dfrac{\pi}{4}$ je hledaný rozvoj $f(x,y) \approx \dfrac{\pi}{4} + x - xy$.

---

3. Napište první tři členy MacLaurinovy řady funkce $f(x,y) = \displaystyle\int_0^1 (1+x)^{t^2 y}\,\mathrm{d}t$.

Řešení: Integrovanou funkci $\varphi(x,y,t) = (1+x)^{t^2 y}$ rozvineme do MacLaurinovy řady v proměnných x a y. Protože $\varphi'_x = t^2 y(1+x)^{t^2y-1}$, $\varphi'_y = t^2(1+x)^{t^2y}\ln(1+x)$, $\varphi'_{xx} = t^2y(t^2y-1)(1+x)^{t^2y-2}$, $\varphi'_{xy} = t^2(1+x)^{t^2y-1} + t^4y(1+x)^{t^2y-1}\ln(1+x)$, $\varphi'_{yy} = t^4(1+x)^{t^2y}\ln^2(1+x)$, $\varphi'_{xxx} = t^2y(t^2y-1)(t^2y-2)(1+x)^{t^2y-3}$, $\varphi'_{xxy} = t^2(2t^2y-1)(1+x)^{t^2y-2} + t^2y(t^2y-1)(1+x)^{t^2y-2}\ln(1+x)$, $\varphi'_{xyy} = t^6y(1+x)^{t^2y-1}\ln^2(1+x) + 2t^4(1+x)^{t^2y-1}\ln(1+x)$ a $\varphi'_{yyy} = t^6(1+x)^{t^2y}\ln^3(1+x)$. Z těchto parciálních derivací v bodě $(0,0)$ dostaneme $\mathrm{d}\varphi(0,0;x,y) = 0$, $\mathrm{d}^2\varphi(0,0;x,y) = 2t^2xy$ a $\mathrm{d}^3\varphi(0,0;x,y) = -3t^2x^2y$. Tedy rozvoj integrované funkce do třetího řádu v proměnných x a y je $\varphi(x,y,t) \approx 1 + t^2xy - \dfrac{t^2}{2}x^2y$. Integrací pak získáme $f(x,y) \approx 1 + \dfrac{1}{3}xy - \dfrac{1}{6}x^2y$.

Implicitní funkce 1.

Problém implicitních funkcí spočívá v této úloze: Je dáno k funkcí $n+k$ proměnných. Máme zjistit, zda existuje řešení rovnic

$$
\begin{aligned}
F_1(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_k) &= 0 \\
F_2(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_k) &= 0 \\
\dots \\
F_k(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_k) &= 0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

V podstatě se ptáme, kdy jsou soustavou rovnic (1) jednoznačně určeny funkce

$$
\begin{aligned}
y_1 &= f_1(x_1,\dots,x_n) \\
&\dots \\
y_k &= f_k(x_1,\dots,x_n)
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Platí tato

Věta: *(o implicitních funkcích). Nechť n a k jsou přirozená čísla a nechť je dán bod*

$$\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_k) \, .$$

Nechť funkce $F_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = F_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k)$, $i = 1, \ldots, k$, mají v nějakém okolí bodu $\boldsymbol{\alpha}$ spojité parciální derivace až do řádu $m \geq 1$ včetně. Nechť je

$$F_i(\boldsymbol{\alpha}) = 0 \, , \quad i = 1, \ldots, k \tag{3}$$

a

$$\left(\frac{\partial(F_1, \ldots, F_k)}{\partial(y_1, \ldots, y_k)} \right) \Bigg|_{[\boldsymbol{\alpha}]} = \left| \begin{matrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_k}{\partial y_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial y_k} & \cdots & \dfrac{\partial F_k}{\partial y_k} \end{matrix} \right|_{[\boldsymbol{\alpha}]} \neq 0 \, . \tag{4}$$

Pak existují $\delta > 0$ a $\Delta > 0$ s těmito vlastnostmi: Ke každému bodu $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ z intervalu

$$(a_1 - \delta, a_1 + \delta) \times \cdots \times (a_n - \delta, a_a + \delta) \tag{5}$$

existuje právě jeden bod $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_k)$ v intervalu $(b_1 - \Delta, b_1 + \Delta) \times \cdots \times (b_k - \Delta, b_k + \Delta)$ takový, že platí (1). Souřadnice tohoto bodu se tedy dají vyjádřit jako funkce (2). Funkce (2) mají navíc v intervalu (5) spojité parciální derivace až do řádu m.

---

1. Nechť je y funkcí proměnné x. Najděte všechna řešení rovnice $y^2 - y = 0$.
Řešení: Funkce $y = y(x)$ může nabývat pouze dvě hodnoty $y = 0$ nebo $y = 1$. Tedy každá funkce, která nabývá pouze těchto dvou hodnot je řešením dané úlohy. Například jedno z řešení je *Dirichletova funkce*

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \text{ racionální} \\ 0 & \text{pro } x \text{ iracionální} \end{cases} .$$

Kdybychom z věty o implicitních funkcích vynechali zdánlivě nepodstatnou poznámku o tom, že řešení $y = y(x)$ je z jistého okolí bodu b, tj. vlastně to, že hledáme spojitá řešení, mohli bychom v obecném případě najít i lokálně mnoho řešení soustavy (1).

---

2. Nechť je funkce $f(x)$ definována v intervalu (a, b). Kdy má rovnice $f(x)y = 0$ v intervalu (a, b) jediné spojité řešení $y = 0$.
Řešení: Z rovnice plyne, že je buď $y = y(x) = 0$ nebo je $f(x) = 0$. Protože hledáme spojitá řešení, nevadí nám, když je funkce $f(x_0) = 0$ v bodě x_0, který je hromadný bod množiny $f(x) \neq 0$. V tom případě totiž z předpokladu spojitosti funkce $y = y(x)$ plyne, že musíme položit $y = y(x_0) = 0$. Ale pokud je bod bod x_0 vnitřní bod množiny $M = \big\{x\,;\ f(x) = 0\big\}$, lze funkci $y = y(x)$ definovat libovolně. Tedy aby

měla uvedená rovnice právě jedno spojité řešení, nesmí množina bodů x, pro které je $f(x) = 0$, obsahovat žádný otevřený interval $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$.

---

3. Nechť je dána rovnice

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{1}$$

a

$$y = y(x)\,, \qquad -1 \leq x \leq 1 \tag{2}$$

je jednoznačná funkce, která splňuje rovnici (1).

a) Kolik funkcí (2) splňuje rovnici (1)?
b) Kolik spojitých funkcí (2) splňuje rovnici (1)?
c) Kolik spojitých funkcí (2) splňuje rovnici (1), je-li $y(0) = 1$?
d) Kolik spojitých funkcí (2) splňuje rovnici (1), je-li $y(1) = 0$?

Řešení: Všechna řešení dané rovnice lze zapsat ve tvaru $y = \epsilon(x)\sqrt{1 - x^2}$, kde $\epsilon(x)$ je funkce definovaná na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$, která v intervalu $(-1, 1)$ nabývá pouze hodnot 1 nebo -1. Protože v bodech $x = \pm 1$ musí být $y = 0$, nezáleží v těchto bodech na hodnotě funkce $\epsilon(x)$.
a) V případě, že nepředpokládáme spojitost funkce (2), nekonečně mnoho funkcí $\epsilon(x)$, a tedy i nekonečně mnoho funkcí $y = y(x)$.
b) V bodě $x = 0$ musí být $y(0) = 1$ nebo $y(0) = -1$. Protože pro $x \in (-1, 1)$ je $\sqrt{1 - x^2} \neq 0$, je z důvodů spojitosti funkce $y = y(x)$ na tomto intervalu stále kladná nebo stále záporná. Tedy existují pouze dvě spojité funkce $y = \sqrt{1 - x^2}$ a $y = -\sqrt{1 - x^2}$
c) V tomto případě musí být funkce $y = y(x)$ na intervalu $x \in (-1, 1)$ kladná. Tedy existuje pouze jedna funkce, která splňuje dané požadavky, a to $y = \sqrt{1 - x^2}$.
d) V tomto případě je dána funkce $y = y(x)$ v bodě, kde $y(x) = 0$. Nevíme tedy, zda je kladná nebo záporná. Protože $y(0) = 1$ nebo $y(0) = -1$, existují stejně jako v případě b) dvě hledané funkce.

Cvičení 10

Derivace funkcí daných implicitně

Jestliže funkce $F_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = F_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k)$, $i = 1, \ldots, k$, splňují v bodě $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_k)$ předpoklady věty o implicitních funkcích, existuje na nějakém okolí bodu $\boldsymbol{a}$ k diferencovatelných funkcí

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\cdots \\ y_k &= f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,, \end{aligned} \tag{1}$$

pro které platí $F_i\big(x_1, \ldots, x_n, f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_k(x_1, \ldots, x_n)\big) = 0$, $i = 1, \ldots, k$. Parciální derivace funkcí (1) lze pak určit řešením soustavy rovnic

$$\mathrm{d}F_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_j}\, \mathrm{d}x_j + \sum_{r=1}^{k} \frac{\partial F_i}{\partial y_r}\, \mathrm{d}y_r = 0\,, \quad i = 1, \ldots, k\,,$$

jejíž determinant je v nějakém okolí bodu $\boldsymbol{\alpha}$ nenulový.

---

1. Najděte y', y'' a y''' v bodě $x = 0$, $y = 1$ pro funkci $y(x)$, která je definována implicitní rovnicí $x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 1 = 0$.

Řešení: Funkce $F(x, y) = x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 1$ má spojité všechny parciální derivace v celém $\mathbb{R}^2$. Protože $F'_y(0, 1) = 3 \neq 0$ definuje rovnice $F(x, y) = 0$ v jistém okolí bodu $[0; 1]$ funkci $y = y(x)$. Její derivace najdeme derivováním rovnice $F(x, y) = 0$. První derivace dává

$$2x - y + 1 + (4y - x - 1)y'(x) = 0\,, \tag{1}$$

ze které plyne $y'(0) = 0$. Druhou derivaci lze najít derivováním vztahu (1). Tím dostaneme

$$2 - y'(x) + \big(4y'(x) - 1\big)y'(x) + \big(4y - x - 1\big)y''(x) = 0\,. \tag{2}$$

Dosazení $x = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ dostaneme $y''(0) = -\dfrac{2}{3}$. Derivací rovnice (2) získáme vztah

$$-y''(x) + 4y''(x)y'(x) + \big(4y'(x) - 1\big)y''(x) + \big(4y'(x) - 1\big)y''(x) + \big(4y - x - 1\big)y'''(x) = 0\,.$$

Po dosazení daných hodnot dostaneme $y'''(0) = -\dfrac{2}{3}$.

Najděte y' a y'' funkce $y(x)$, která je dána rovnicí

$$\textbf{2.}\ \ x^2 + 2xy - y^2 = a^2\,; \qquad \textbf{3.}\ \ \ln\sqrt{x^2+y^2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,.$$

Řešení:
2. Funkce $F(x,y) = x^2 + 2xy - y^2 - a^2$ má spojité parciální derivace všech řádů. Proto v okolí bodů, kde $F'_y(x,y) \neq 0$ a $F(x,y) = 0$, lze vyjádřit y jako funkci proměnné x, tj. $y = y(x)$. První dvě derivace rovnice $F\big(x, y(x)\big) = 0$ dávají

$$\begin{aligned}&2x + 2y + 2xy' - 2yy' = 0 \iff x + y + (x-y)y' = 0\\ &1 + y' + (1-y')y' + (x-y)y'' = 0\end{aligned}$$

Z těchto rovnic najdeme $y' = \dfrac{y+x}{y-x}$ a $y'' = \dfrac{2a^2}{(x-y)^3}$, kde jsme použily rovnosti $x^2 + 2xy - y^2 = a^2$.

3. Na množině M, kde má funkce $F(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2} - \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ spojité druhé parciální derivace a $F'_y(x,y) \neq 0$ lze z rovnice $F(x,y) = 0$ vyjádřit y jako funkci x, tj. $y = y(x)$. Derivace této funkce nalezneme derivování rovnosti $F\big(x, y(x)\big) = 0$. Ty dávají

$$\begin{aligned}&\frac{x + yy'}{x^2+y^2} - \frac{-y + xy'}{x^2+y^2} = 0 \iff x + y + (y-x)y' = 0\\ &1 + \big(y'\big)^2 + (y-x)y'' = 0\,.\end{aligned}$$

Jestliže je $x \neq y$ (v těchto bodech je $F'_y = 0$) dostaneme $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$ a $y'' = \dfrac{2\big(x^2+y^2\big)}{(x-y)^3}$.

---

4. Najděte $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ a $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ v bodě $x = 1$, $y = -2$, $z = 1$ funkce $z = z(x,y)$ definované implicitně rovnicí

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0\,.$$

Řešení: Uvažujme funkci $F(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9$. Tato funkce má spojité parciální derivace všech řádů. Protože $F(1,-2,1) = 0$ a $F'_z(1,-2,1) = 5 \neq 0$, lze z rovnice $F(x,y,z) = 0$ najít v jistém okolí bodu $[1;-2;1]$ právě jednu funkci $z = z(x,y)$ takovou, že $z(1,-2) = 1$. Parciální derivace této funkce najdeme diferencováním rovnice $F\big(x,y,z(x,y)\big) = 0$. Tím získáme vztahy

$$\begin{aligned}&(2x+y)\,\mathrm{d}x + (4y+x)\,\mathrm{d}y + (6z-1)\,\mathrm{d}z = 0 \Longrightarrow -7\,\mathrm{d}y + 5\,\mathrm{d}z = 0\\ &2\,\mathrm{d}x^2 + 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 4\,\mathrm{d}y^2 + 6\,\mathrm{d}z^2 + (6z-1)\,\mathrm{d}^2 z = 0 \Longrightarrow\\ &\qquad \Longrightarrow 2\,\mathrm{d}x^2 + 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 4\,\mathrm{d}y^2 + 6\,\mathrm{d}z^2 + 5\,\mathrm{d}^2 z = 0\,.\end{aligned}$$

Z těchto rovnic pak najdeme $z'_x(1,-2) = 0$, $z'_y(1,-2) = \dfrac{7}{5}$, $z'_{xx}(1,-2) = -\dfrac{2}{5}$, $z'_{xy}(1,-2) = -\dfrac{1}{5}$, $z'_{yy}(1,-2) = -\dfrac{394}{125}$.

Najděte parciální derivace prvního a druhého řádu pro funkci $z = z(x,y)$, která je řešením rovnice

$$\textbf{5.}\ \ z^3 - 3xyz = a^3\,; \qquad \textbf{6.}\ \ x + y + z = \mathrm{e}^z\,.$$

Řešení:
5. Derivace budeme hledat v bodech, kde je $F(x,y,z) = z^3 - 3xyz - a^3 = 0$ a kde je první derivace $F'_z(x,y,z)$ různá od nuly, tj. v bodech, kro které je $z^2 - xy \neq 0$. K výpočtu použijeme metody diferenciálů.
První diferenciál funkce $F(x,y,z)$ dává

$$-3yz\,\mathrm{d}x - 3xz\,\mathrm{d}y + 3\bigl(z^2 - xy\bigr)\,\mathrm{d}z = 0 \iff yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y - \bigl(z^2 - xy\bigr)\,\mathrm{d}z = 0 \iff$$
$$\iff \mathrm{d}z = \frac{z(y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y)}{z^2 - xy}\,.$$

Tedy první derivace jsou $z'_x = \dfrac{yz}{z^2 - xy}$, $z'_y = \dfrac{xz}{z^2 - xy}$.
Pro druhý diferenciál dostaneme

$$2z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 2y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + 2x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - 2z\,\mathrm{d}z^2 - \bigl(z^2 - xy\bigr)\mathrm{d}^2 z = 0\,.$$

Do tohoto vztahu musíme ještě dosadit za $\mathrm{d}z$. To po úpravách dává

$$-\frac{2xy^3z\,\mathrm{d}x^2}{\bigl(z^2 - xy\bigr)^2} + \frac{2z\bigl(z^4 - 2xyz^2 - x^2y^2\bigr)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\bigl(z^2 - xy\bigr)^2} - \frac{2x^3yz\,\mathrm{d}y^2}{\bigl(z^2 - xy\bigr)^2} - \bigl(z^2 - xy\bigr)\,\mathrm{d}^2 z = 0\,.$$

Z tohoto vztahu dostaneme $z'_{xx} = -\dfrac{2xy^3z}{(z^2 - xy)^3}$, $z'_{xy} = \dfrac{z\bigl(z^4 - 2xyz^2 - x^2y^2\bigr)}{(z^2 - xy)^3}$, $z_{yy}\prime = -\dfrac{2x^3yz}{(z^2 - xy)^3}$.
6. Derivace budeme počítat v bodech, kde je $F(x,y,z) = x + y + z - \mathrm{e}^z = 0$ a kde $F'_z(x,y,z) = 1 - \mathrm{e}^z \neq 0$. Když použijeme metodu diferenciálů dostaneme

$$\mathrm{d}x + \mathrm{d}y + \bigl(1 - \mathrm{e}^z\bigr)\,\mathrm{d}z = 0 \iff \mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}x + \mathrm{d}y}{\mathrm{e}^z - 1}\,.$$

Z toho dostaneme $z'_x = z'_y = \dfrac{1}{\mathrm{e}^z - 1}$.
Abychom našli druhé derivace, určíme druhý diferenciál funkce $F(x,y,z)$. Ten je

$$-\mathrm{e}^z\,\mathrm{d}z^2 + \bigl(1 - \mathrm{e}^z\bigr)\,\mathrm{d}^2 z = 0 \Longrightarrow -\mathrm{e}^z\left(\frac{\mathrm{d}x + \mathrm{d}y}{\mathrm{e}^z - 1}\right)^2 + \bigl(1 - \mathrm{e}^z\bigr)\,\mathrm{d}^2 z = 0 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \mathrm{d}^2 z = -\frac{\mathrm{e}^z}{\bigl(\mathrm{e}^z - 1\bigr)^3}\bigl(\,\mathrm{d}x^2 + 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \mathrm{d}y^2\bigr)\,.$$

Z toho již snadno určíme $z''_{xx} = z''_{xy} = z''_{yy} = -\dfrac{\mathrm{e}^z}{\left(\mathrm{e}^z - 1\right)^3}$.

---

7. Najděte $\mathrm{d}z$ a $\mathrm{d}^2 z$ funkce $z(x, y)$, která je definována rovnicí

$$\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y} + 1 .$$

Řešení: Diferenciály budeme hledat v bodech, kde je $F(x, y, z) = \dfrac{x}{z} - \ln \dfrac{z}{y} - 1 = 0$ a kde první parciální derivace $F'_z(x, y, z) = -\dfrac{x+z}{z^2} \neq 0$. Pro první diferenciál dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}x}{z} + \frac{\mathrm{d}y}{y} - \frac{x+z}{z^2}\,\mathrm{d}z = 0 \Longrightarrow z(y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y) - y(x+z)\,\mathrm{d}z = 0 \Longrightarrow \mathrm{d}z = \frac{z(y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y)}{y(x+z)} .$$

Když spočítáme diferenciál druhé z těchto rovnic, dostaneme

$$z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + (z-x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - y\,\mathrm{d}z^2 - y(x+z)\,\mathrm{d}^2 z = 0 .$$

Jestliže do této rovnice dosadíme již vypočítané $\mathrm{d}z$, dostaneme po algebraických úpravách $\mathrm{d}^2 z = -\dfrac{z^2(y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y)^2}{y^2(x+z)^3}$.

---

8. Nechť funkce $x = x(y, z)$, $y = y(x, z)$ a $z = z(x, y)$ jsou definovány rovnicí $F(x, y, z) = 0$. Dokažte, že platí

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1 .$$

Řešení: Derivace budeme počítat v bodě $[x; y; z]$, kde platí

$$F(x, y, z) = 0 , \quad F'_x(x, y, z) \neq 0 , \quad F'_y(x, y, z) \neq 0 , \quad F'_z(x, y, z) \neq 0 .$$

Jestliže budeme považovat x za funkci proměnných y a z, tj. $x = x(y, z)$, pak derivací rovnice $F\big(x(y, z), y, z\big) = 0$ podle proměnné y dostaneme

$$F_x(x, y, z) \cdot \frac{\partial x}{\partial y} + F'_y(x, y, z) = 0 \Longrightarrow \frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_x}(x, y, z) .$$

Podobně odvodíme vztahy

$$\frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{F'_z}{F'_y}(x, y, z) , \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}(x, y, z) .$$

Po vynásobení pak dostaneme dokazovaný vztah.

---

9. Najděte $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}$ a $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}$, je-li $x+y+z=0$ a $x^2+y^2+z^2=1$.

Řešení: Předpokládejme, že je $x=x(z)$ a $y=y(z)$. Derivace těchto funkcí budeme hledat v bodech, kde jsou splněny rovnice $F_1(x,y,z)=x+y+z=0$ a $F_2(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1=0$. Když derivujeme tyto rovnice podle proměnné z, dostaneme

$$x'+y'+1=0 \quad \text{a} \quad 2xx'+2yy'+2z=0\,.$$

To je soustava dvou lineárních rovnic pro dvě neznámé funkce x' a y'. V bodech, kde determinant matice této soustavy $D=2(y-x)\neq 0$, má tato soustava řešení $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}=\dfrac{z-y}{y-x}$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}=\dfrac{z-x}{x-y}$.

---

10. Najděte $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}$, $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}z^2}$ a $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}z^2}$ v bodě $x=1$, $y=-1$ a $z=2$, je-li

$$x^2+y^2=\frac{z^2}{2} \quad \text{a} \quad x+y+z=2\,.$$

Řešení: Funkce $F_1(x,y,z)=x^2+y^2-\dfrac{z^2}{2}$ a $F_2(x,y,z)=x+y+z-2$ mají v celém prostoru $\mathbb{R}^3$ spojité parciální derivace všech řádů. Protože platí $F_1(1-1,2)=F_2(1,-1,2)=0$, má smysl zkoumat funkce $x=x(z)$ a $y=y(z)$, pro které platí $x(2)=1$ a $y(2)=-1$ a které splňují rovnice $F_1(x,y,z)=F_2(x,y,z)=0$. Jestliže předpokládáme, že $x=x(z)$ a $y=y(z)$ a derivujeme rovnosti $F_1\big(x(z),y(z),z\big)=0$ a $F_2\big(x(z),y(z),z\big)=0$ podle proměnné z, dostaneme

$$2xx'+2yy'-z=0 \quad \text{a} \quad x'+y'+1=0\,. \tag{1}$$

Tedy v bodě $[1;-1;2]$ dostaneme soustavu rovnic

$$2x'-2y'-2=0 \quad \text{a} \quad x'+y'+1=0\,.$$

Protože determinant matice této soustavy rovnic je $D=4\neq 0$, existuje právě jedno řešení této soustavy $x'=0$, $y'=-1$.
Když zderivujeme podle proměnné z obě rovnice soustavy (1) dostaneme

$$2\big(x'\big)^2+2xx''+2\big(y'\big)^2+2yy''-1=0 \quad \text{a} \quad x''+y''=0\,.$$

V bodě $[1;-1;2]$ již známe první derivace. Proto je do této soustavy můžeme dosadit a získat soustavu dvou lineárních rovnic pro x'' a y''

$$2x''-2y''+1=0 \quad \text{a} \quad x''+y''=0\,,$$

jejíž řešení je $x''=-\dfrac{1}{4}$, $y''=\dfrac{1}{4}$.

---

11. Najděte $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ a $\dfrac{\partial v}{\partial y}$, je-li $xu - yv = 0$ a $yu + xv = 1$.

Řešení: Obě funkce $F_1(x, y, u, v) = xu - yv$ a $F_2(x, y, u, v) = yu + xv - 1$ mají na celém $\mathbb{R}^4$ spojité parciální derivace všech řádů. Protože je $D = \dfrac{D(F_1, F_2)}{D(u, v)} = x^2 + y^2$, lze mimo bodu $[x; y] = [0; 0]$ najít funkce $u = u(x, y)$ a $v = v(x, y)$, které splňují soustavu rovnic $F_1(x, y, u, v) = F_2(x, y, u, v) = 0$. Derivování soustavy těchto rovnic podle proměnné x a y dostaneme dvě soustavy lineárních rovnic pro parciální derivace prvního řádu

$$\begin{aligned} xu'_x - yv'_x + u &= 0\,, &\qquad xu'_y - yv'_y - v &= 0\,,\\ yu'_x + xv'_x + v &= 0\,, &\qquad yu'_y + xv'_y + u &= 0\,. \end{aligned}$$

Protože determinant matice těchto soustav je $D = x^2 + y^2 \neq 0$, existuje jejich jediné řešení $u_x = -\dfrac{xu + yv}{x^2 + y^2}$, $u_y = \dfrac{xv - yu}{x^2 + y^2}$, $v_x = \dfrac{yu - xv}{x^2 + y^2}$, $v_y = -\dfrac{xu + yv}{x^2 + y^2}$.

---

12. Nechť $x = t + t^{-1}$, $y = t^2 + t^{-2}$ a $z = t^3 + t^{-3}$. Najděte $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$, $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ a $\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}$.

Řešení: Uvažujme funkce $F_1(x, y, z, t) = x - t - t^{-1}$, $F_2(x, y, z, t) = y - t^2 - t^{-2}$ a $F_3(x, y, z, t) = z - t^3 - t^{-3}$. Protože $D = \dfrac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(y, z, t)} = 1 - t^{-2}$, lze pro $t \neq \pm 1$ najít funkce $y = y(x)$, $z = z(x)$ a $t = t(x)$, která jsou řešením soustavy $F_1(x, y, z, t) = F_2(x, y, z, t) = F_3(x, y, z, t) = 0$. Derivací této soustavy podle proměnné x získáme soustavu tří lineárních rovnic pro y', z' a t'

$$1 - \bigl(1 - t^{-2}\bigr)t' = 0\,, \quad y' - 2\bigl(t - t^{-3}\bigr)t' = 0\,, \quad z' - 3\bigl(t^2 - t^{-4}\bigr)t' = 0\,.$$

Z ní plyne, že $y' = 2\bigl(t + t^{-1}\bigr) = 2x$ a $z' = 3\bigl(t^2 + 1 + t^{-2}\bigr) = 3(y + 1)$. Derivací těchto vztahů podle proměnné x dostaneme $y'' = 2$, $z'' = 3y' = 6x$.
V tomto příkladu se vlastně jedná o parametrické vyjádření křivky v prostoru $\mathbb{R}^3$, kde t je parametr.

---

13. Nalezněte $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ a $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ v bodě $u = 1$, $v = 1$, je-li $x = u + \ln v$, $y = v - \ln u$, $z = 2u + v$.

Řešení: Uvažujme funkce $F_1(x, y, z, u, v) = x - u - \ln v$, $F_2(x, y, z, u, v) = y + \ln u - v$ a $F_3(x, y, z, u, v) = z - 2u - v$. Protože bodu $u = v = 1$ odpovídá bod $x = y = 1$, $z = 3$, má smysl v okolí tohoto bodu zkoumat funkci $z = z(x, y)$. Derivací funkcí F_1, F_2 a F_3 v tomto bodě podle proměnných x a y dostaneme

$$\begin{array}{ll} u'_x + v'_x = 1 & \qquad u'_y + v'_y = 0\\ u'_x - v'_x = 0 & \qquad u'_y - v'_y = -1\\ z'_x = 2u'_x + v'_x & \qquad z'_y = 2u'_y + v'_y \end{array}$$

Z těchto soustav dostaneme $z'_x = \dfrac{3}{2}$, $z'_y = -\dfrac{1}{2}$.

14. Najděte $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ v bodě $u = 2$, $v = 1$, jestliže $x = u + v^2$, $y = u^2 - v^3$, $z = 2uv$.

Řešení: Uvažujme funkce $F_1(x, y, z, u, v) = x - u - v^2$, $F_2(x, y, z, u, v) = y - u^2 + v^3$ a $F_3(x, y, z, u, v) = z - 2uv$. Protože bodu $u = 2$, $v = 1$ odpovídá bod $x = y = 3$, $z = 4$, má smysl v okolí tohoto bodu zkoumat funkci $z = z(x, y)$. Derivací funkcí F_1, F_2 a F_3 dostaneme

$$\begin{array}{ll} u'_x + 2vv'_x = 1 & \qquad u'_y + 2vv'_y = 0 \\ 2uu'_x - 3v^2 v'_x = 0 & \qquad 2uu'_y - 3v^2 v'_y = 1 \\ z'_x = 2vu'_x + 2uv'_x & \qquad z'_y = 2vu'_y + 2uv'_y \end{array}$$

Řešení této soustavy v bodě $u = 2$, $v = 1$ je $u'_x = \dfrac{3}{11}$, $v'_x = \dfrac{4}{11}$, $u'_y = \dfrac{2}{11}$ a $v'_y = -\dfrac{1}{11}$.
Jestliže derivujeme první soustavu podle proměnné y dostaneme

$$\begin{array}{l} u'_{xy} + 2vv'_{xy} + 2v'_x v'_y = 0 \\ 2uu'_{xy} - 3v^2 v'_{xy} + 2u'_x u'_y - 6vv'_x v'_y = 0 \\ z'_{xy} = 2vu'_{xy} + 2uv'_{xy} + 2u'_x v'_y + 2u'_y v'_x \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} u'_{xy} + 2v'_{xy} = \dfrac{8}{121} \\ 4u'_{xy} - 3v'_{xy} = -\dfrac{36}{121} \end{array}$$

Řešením této soustavy rovnic získáme $u'_{xy} = -\dfrac{48}{1331}$, $v'_{xy} = \dfrac{68}{1331}$ a $z_{xy} = \dfrac{26}{121}$.

---

15. Nechť $z = z(x, y)$ je funkce definovaná soustavou rovnic

$$x = \mathrm{e}^{u+v}\,, \qquad y = \mathrm{e}^{u-v}\,, \qquad z = uv\,,$$

kde u a v jsou parametry. Najděte $\mathrm{d}z$ a $\mathrm{d}^2 z$ v bodě $u = 0$, $v = 0$.

Řešení: Bodu $u = v = 0$ odpovídá bod $x = y = 1$, $z = 0$. Jestliže najdeme diferenciál definičních rovnic, dostaneme

$$\begin{array}{l} \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{u+v}\big(\mathrm{d}u + \mathrm{d}v\big) \\ \mathrm{d}y = \mathrm{e}^{u-v}\big(\mathrm{d}u - \mathrm{d}v\big) \\ \mathrm{d}z = v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} \mathrm{d}x = \mathrm{d}u + \mathrm{d}v \\ \mathrm{d}y = \mathrm{d}u - \mathrm{d}v \\ \mathrm{d}z = 0\,. \end{array}$$

Z prvních dvou rovnic plyne, že v daném bodě je $\mathrm{d}u = \dfrac{1}{2}\big(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y\big)$ a $\mathrm{d}v = \dfrac{1}{2}\big(\mathrm{d}x - \mathrm{d}y\big)$.
Jestliže spočítáme druhý diferenciál vztahu $z = uv$ v bodě $u = v = 0$, dostaneme $\mathrm{d}^2 z = 2\mathrm{d}u\mathrm{d}v$. Po dosazení za $\mathrm{d}u$ a $\mathrm{d}v$ dostaneme $\mathrm{d}^2 z = \dfrac{1}{2}\,(\mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2)$.

---

16. Najděte $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ a $\dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2}$, jestliže $z = x^2 + y^2$, kde funkce $y = y(x)$ je definována rovnicí $x^2 - xy + y^2 = 1$.

Řešení: Ze vztahu $x^2 - xy + y^2 = 1$ plyne, že funkce splňují vztah $z = 1 + xy$. Derivací tohoto vztahu a definiční rovnice podle proměnné x dostaneme

$$z' = y + xy'\,, \quad 2x - y + (2y - x)y' = 0 \Longrightarrow y' = \frac{2x - y}{x - 2y}\,, \quad z' = 2\,\frac{x^2 - y^2}{x - 2y}\,.$$

Z druhých derivací pak dostaneme

$$z'' = 2y' + xy''\,, \quad 2 - y' + \big(2y' - 1\big)y' - (x - 2y)y'' = 2\Big(1 - y' + \big(y'\big)^2\Big) - (x - 2y)y'' = 0\,.$$

Po dosazení do rovnice pro y'' za první derivaci, dostaneme

$$(x - 2y)y'' = 6\,\frac{x^2 - xy + y^2}{(x - 2y)^2} = \frac{6}{(x - 2y)^2}\,.$$

Z tohoto vztahu pak plyne $z'' = \dfrac{4x - 2y}{x - 2y} + \dfrac{6x}{(x - 2y)^3}$.

---

17. Ukažte, že funkce $z = z(x, y)$ definovaná rovnicí $ax + by + cz = \Phi\big(x^2 + y^2 + z^2\big)$, kde $\Phi(u)$ je libovolná diferencovatelná funkce proměnné u a a, b, c jsou konstanty, splňuje rovnici

$$(cy - bz)\frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx)\frac{\partial z}{\partial y} = bx - ay\,.$$

Řešení: Jestliže předpokládáme, že je $z = z(x, y)$ a derivujeme podle proměnných x a y, dostaneme

$$a + cz'_x = 2\big(x + zz'_x\big)\Phi' \Longrightarrow z'_x = -\frac{a - 2x\Phi'}{c - 2z\Phi'}$$

$$b + cz'_y = 2\big(y + zz'_y\big)\Phi' \Longrightarrow z'_y = -\frac{b - 2y\Phi'}{c - 2z\Phi'}\,.$$

Daný vztah se pak ověří dosazením.

---

18. Nalezněte $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ a $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, je-li $F(x - y, y - z, z - x) = 0$.

Řešení: Protože předpokládáme, že $z = z(x, y)$ dostaneme derivací podle proměnných x a y

$$F'_1 - z'_x F'_2 + \big(z'_x - 1\big)F'_3 = 0 \Longrightarrow z'_x = \frac{F'_1 - F'_3}{F'_2 - F'_3}\,,$$

$$-F'_1 + \big(1 - z'_y\big)F'_2 + z'_y F'_3 = 0 \Longrightarrow z_y = \frac{F'_1 - F'_2}{F'_3 - F'_2}\,.$$

---

19. Nalezněte $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, je-li $F(xz, yz) = 0$.

Řešení: Když předpokládáme, že $z = z(x, y)$ a derivujeme dvakrát rovnici

$$F\bigl(xz(x,y), yz(x,y)\bigr) = 0$$

podle proměnné x, dostaneme

$$\bigl(z + xz'_x\bigr)F'_1 + yz'_x F'_2 = 0 \Longrightarrow z'_x = -\frac{zF'_1}{xF'_1 + yF'_2}$$

a

$$\bigl(z + xz_x\bigr)^2 F'_{11} + 2yz'_x\bigl(z + xz'_x\bigr)F'_{12} + \bigl(yz'_x\bigr)^2 F'_{22} + 2z'_x F'_1 + \bigl(xF'_1 + yF'_2\bigr)z'_{xx} = 0\,.$$

Po dosazení za z'_x pak po úpravách dostaneme

$$z'_{xx} = \frac{2zF_1^2}{(xF_1 + yF_2)^2} - z^2y^2\,\frac{F_{11}F_2^2 - 2F_{12}F_1F_2 + F_{22}F_1^2}{(xF_1 + yF_2)^3}\,.$$

---

20. Najděte $\mathrm{d}^2 z$, je-li $F(x + z, y + z) = 0$.

Řešení: Když předpokládáme, že $z = z(x, y)$, stačí najít první a druhý diferenciál funkce $F\bigl(x + z(x,y), y + z(x,y)\bigr) = 0$. Z prvního diferenciálu dostaneme

$$\mathrm{d}F = F'_1(\mathrm{d}x + \mathrm{d}z) + F'_2(\mathrm{d}y + \mathrm{d}z) = 0 \Longrightarrow \mathrm{d}z = -\frac{F'_1\mathrm{d}x + F'_2\mathrm{d}y}{F'_1 + F'_2}\,.$$

Při výpočtu druhého diferenciálu si musíme uvědomit, že x a y jsou nezávisle proměnné, a tedy $\mathrm{d}^2x = \mathrm{d}^2y = 0$. Pak dostaneme

$$\mathrm{d}^2F = F'_{11}(\mathrm{d}x + \mathrm{d}z)^2 + 2F'_{12}(\mathrm{d}x + \mathrm{d}z)(\mathrm{d}y + \mathrm{d}z) + F'_{22}(\mathrm{d}y + \mathrm{d}z)^2 + \bigl(F'_1 + F'_2\bigr)\mathrm{d}^2z = 0\,.$$

Jestliže dosadíme za $\mathrm{d}z$, dostaneme po snadných úpravách

$$\mathrm{d}^2z = -\frac{F_{11}F_2^2 - 2F_{12}F_1F_2 + F_{22}F_1^2}{(F_1 + F_2)^3}\,(\mathrm{d}x - \mathrm{d}y)^2\,.$$

Cvičení 11

Regulární zobrazení. Záměna proměnných.

Nechť $\boldsymbol{f}$ je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$. To znamená, že každému bodu $\boldsymbol{x} = \big[x_1, \ldots, x_n\big]$ jisté množiny M je přiřazen jistý bod $\boldsymbol{y} = \big[y_1, \ldots, y_n\big] = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. Jeho souřadnice jsou dány rovnicemi

$$y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n)\,, \quad \ldots\,, \quad y_n = f_n(x_1, \ldots, x_n)\,. \tag{1}$$

Definice: Budeme říkat, že takové zobrazení $\boldsymbol{f}$ je *regulární* v množině $M \in \mathbb{R}^n$, jestliže platí:

(1) M je otevřená.
(2) Funkce $f_1, \ldots, f_n$ mají v M spojité parciální derivace prvního řádu; jsou třídy $C_1(M)$.
(3) Determinant $\dfrac{D\big(f_1, \ldots, f_n\big)}{D\big(x_1, \ldots, x_n\big)} \neq 0$ v každém bodě $\boldsymbol{x} \in M$.

Věta: *Nechť je zobrazení $\boldsymbol{f}$ dané rovnicemi* (1) *regulární v množině M. Potom platí:*

(1) *Ke každému bodu $\boldsymbol{a} \in M$ existuje okolí $N \subset M$, takové, že zúžení zobrazení $\boldsymbol{f}$ na N je prosté.*
(2) *Je-li $A \subset M$ otevřená, je také $\boldsymbol{f}(A)$ otevřená.*
(3) *Je-li $\boldsymbol{f}$ prosté, je inverzní zobrazení $\boldsymbol{\Phi}$ regulárním zobrazením množiny $\boldsymbol{f}(M)$ na M.*

Záměna nezávislých proměnných (speciální případ $n = 2$; pro obecné n je to podobné). Nechť $z = z(x, y)$, $x = \varphi(u, v)$ a $y = \psi(u, v)$, kde u a v jsou nové nezávisle proměnné. Je-li $Z = F(x, y)$ libovolná funkce proměnných x a y, dostaneme po dosazení za x a y novou funkci $G(u, v) = F\big(\varphi(u, v), \psi(u, v)\big)$. Derivací podle u a v dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial u} &= \frac{\partial Z}{\partial x}\,\varphi_u + \frac{\partial Z}{\partial y}\,\psi_u \\ \frac{\partial Z}{\partial v} &= \frac{\partial Z}{\partial x}\,\varphi_v + \frac{\partial Z}{\partial y}\,\psi_v \end{aligned}\,, \qquad A = \begin{vmatrix} \varphi_u & \psi_u \\ \varphi_v & \psi_v \end{vmatrix} \neq 0\,. \tag{2}$$

Zde značí $\dfrac{\partial Z}{\partial x} = \dfrac{\partial F}{\partial x}$ a $\dfrac{\partial Z}{\partial u} = \dfrac{\partial G}{\partial u}$ atd. Z rovnic (2) dostaneme

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{1}{A}\left(\frac{\partial Z}{\partial u}\,\psi_v - \frac{\partial Z}{\partial v}\,\psi_u\right) \quad \text{a} \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{1}{A}\left(-\frac{\partial Z}{\partial u}\,\varphi_v + \frac{\partial Z}{\partial v}\,\varphi_u\right). \tag{3}$$

Odtud pro $Z(x, y) = z(x, y)$ dostaneme

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{A}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\,\psi_v - \frac{\partial z}{\partial v}\,\psi_u\right) \quad \text{a} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{A}\left(-\frac{\partial z}{\partial u}\,\varphi_v + \frac{\partial z}{\partial v}\,\varphi_u\right). \tag{4}$$

Chceme-li počítat např. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, dosadíme např. do druhého vztahu v (3) $Z = \dfrac{\partial z}{\partial x}$ ze vztahu (4) atd.

Do následujících rovnic zaveďte nové nezávisle proměnné u a v:

1.	$y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$	$u = x\,,\ v = x^2 + y^2$
2.	$x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$	$u = x\,,\ v = \dfrac{y}{x}$
3.	$(x+y)\dfrac{\partial z}{\partial x} - (x-y)\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$	$u = \ln\sqrt{x^2+y^2}\,,\ v = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$

Řešení:

1. Označme $z(x,y) = Z(u,v) = Z\big(x, x^2+y^2\big)$. Pak podle věty o derivaci složené funkce platí

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial Z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = Z'_u + 2xZ'_v\\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial Z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = 2yZ'_v\,.\end{aligned}$$

Po dosazení pak dostaneme

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Longrightarrow y\big(Z'_u + 2xZ'_v\big) - 2xyZ'_v = yZ'_u = 0 \Longrightarrow Z_u = 0\,.$$

2. Označme $z(x,y) = Z(u,v) = Z\left(x, \dfrac{y}{x}\right)$. Pak podle věty o derivaci složené funkce platí

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial Z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = Z'_u - \frac{y}{x^2}\,Z'_v\\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial Z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{x}\,Z'_v\,.\end{aligned}$$

Po dosazení pak dostaneme

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z \Longrightarrow x\big(Z'_u - \frac{y}{x^2}\,Z'_v\big) + \frac{y}{x}\,Z'_v = uZ'_u = Z\,.$$

3. Označme $z(x,y) = Z(u,v) = Z\left(\sqrt{x^2+y^2}, \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\right)$. Pak podle věty o derivaci složené funkce platí

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial Z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2}\,Z'_u - \frac{y}{x^2+y^2}\,Z'_v\\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial Z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2}\,Z'_u + \frac{x}{x^2+y^2}\,Z'_v\,.\end{aligned}$$

Po dosazení pak dostaneme

$$(x+y)\frac{\partial z}{\partial x}-(x-y)\frac{\partial z}{\partial y}=0 \Longrightarrow Z'_u - Z'_v = 0\,.$$

Následující rovnice transformujte do nezávislých proměnných u a v

4. $2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$

$$u=x+2y+2\,,\quad v=x-y-1$$

5. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0 \qquad u=\dfrac{x}{x^2+y^2}\,,\quad v=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$

6. $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0 \qquad u=xy\,,\quad v=\dfrac{x}{y}$

Řešení:
4. Označme $z(x,y)=Z(u,v)=Z(x+2y+2,x-y-1)$. Podle věty o derivaci složené funkce je

$$\begin{aligned}
&z'_x = Z'_u\cdot u'_x + Z'_v\cdot v'_x = Z'_u + Z'_v\,,\quad z'_y = Z'_u\cdot u'_y + Z'_v\cdot v'_y = 2Z'_u - Z'_v\,,\\
&z'_{xx} = Z'_{uu}+2Z'_{uv}+Z'_{vv}\,,\\
&z'_{xy} = 2Z'_{uu}+Z'_{uv}-Z'_{vv}\,,\\
&z'_{yy} = 4Z'_{uu}-4Z'_{uv}+Z'_{vv}\,,
\end{aligned}$$

Po dosazení do dané rovnice dostaneme $3Z'_{uv}+Z'_u=0$.
5. Zavedeme funkci $z(x,y)=Z(u,v)=Z\left(\dfrac{x}{x^2+y^2},-\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$. Podle věty o derivaci složené funkce je

$$\begin{aligned}
z'_x =& \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\,Z'_u+\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\,Z'_v\,,\\
z'_y =& -\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\,Z'_u+\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\,Z'_v\,,\\
z'_{xx} =& \frac{\left(y^2-x^2\right)^2}{\left(x^2+y^2\right)^4}\,Z'_{uu}+\frac{4xy\left(y^2-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^4}\,Z'_{uv}+\frac{4x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^4}\,Z'_{vv}+\\
&+\frac{2x\left(x^2-3y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^3}\,Z'_u+\frac{2y\left(y^2-3x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^3}\,Z'_v\,,\\
z'_{yy} =& \frac{4x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^4}\,Z'_{uu}-\frac{4xy\left(y^2-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^4}\,Z'_{uv}+\frac{\left(y^2-x^2\right)^2}{\left(x^2+y^2\right)^4}\,Z'_{vv}-\\
&-\frac{2x\left(x^2-3y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^3}\,Z'_u-\frac{2y\left(y^2-3x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^3}\,Z'_v
\end{aligned}$$

Po dosazení do dané rovnice dostaneme $Z'_{uu} + Z'_{vv} = 0$.

6. Zavedeme funkci $z(x,y) = Z(u,v) = Z\left(xy, \dfrac{x}{y}\right)$. Podle věty o derivaci složené funkce dostaneme

$$
\begin{aligned}
z'_x &= yZ'_u + \frac{1}{y}\, Z'_v\,,\\
z'_y &= xZ'_u - \frac{x}{y^2}\, Z'_v\,,\\
z'_{xx} &= y^2 Z'_{uu} + 2Z'_{uv} + \frac{1}{y^2}\, Z'_{vv}\,,\\
z'_{yy} &= x^2 Z'_{uu} - 2\frac{x^2}{y^2}\, Z'_{uv} + \frac{x^2}{y^4}\, Z'_{vv} + 2\frac{x}{y^3}\, Z'_v\,.
\end{aligned}
$$

Po dosazení do dané rovnice dostaneme $2uZ'_{uv} - Z'_v = 0$.

Transformujte do polárních souřadnic r a φ výrazy

7. $x\dfrac{\partial u}{\partial y} - y\dfrac{\partial u}{\partial x}$ **8.** $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y}$

9. $\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}$ **10.** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

Řešení: Polární souřadnice $r > 0$ a $\varphi \in (0, 2\pi)$ jsou definovány vztahy

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,.$$

Definujme funkci předpisem $f(x,y) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = F(r,\varphi)$. Podle věty o derivaci složené funkce platí

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} = \cos\varphi\, f'_x + \sin\varphi\, f'_y\\
\frac{\partial F}{\partial \varphi} &= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi\, f'_x + r\cos\varphi\, f'_y
\end{aligned}
$$

Řešením těchto rovnic dostaneme

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \cos\varphi\, F'_r - \frac{\sin\varphi}{r}\, F'_\varphi\,,\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \sin\varphi\, F'_r + \frac{\cos\varphi}{r}\, F'_\varphi\,.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

7. Když použijeme (1) na funkci $u(x,y) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = U(r,\varphi)$ dostaneme $xu'_y - yu'_x = U'_\varphi$.

8. Podobně jako v příkladu 7 dostaneme rU'_r.

9. V tomto případě po dosazení vyjde $\dfrac{1}{r}\left(U'_r V'_\varphi - U'_\varphi V'_r\right)$.

10. V tomto případě musíme určit ještě druhé derivace funkce $u(x,y)$. Ze vzorce (1) plyne

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \cos\varphi\,\frac{\partial u'_x}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\,\frac{\partial u'_x}{\partial \varphi} = \\
&= \cos\varphi\frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\varphi U'_r - \frac{\sin\varphi}{r}\,U'_\varphi\right) - \frac{\sin\varphi}{r}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi U'_r - \frac{\sin\varphi}{r}\,U'_\varphi\right) = \\
&= \cos^2\varphi\,U'_{rr} - \frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{r}\,U'_{r\varphi} + \frac{\sin^2\varphi}{r^2}\,U'_{\varphi\varphi} + \frac{\sin^2\varphi}{r}\,U'_r + \frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2}\,U'_\varphi \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \sin\varphi\,\frac{\partial u'_y}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r}\,\frac{\partial u'_y}{\partial \varphi} = \\
&= \sin\varphi\frac{\partial}{\partial r}\left(\sin\varphi U'_r + \frac{\cos\varphi}{r}\,U'_\varphi\right) + \frac{\cos\varphi}{r}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi U'_r + \frac{\cos\varphi}{r}\,U'_\varphi\right) = \\
&= \sin^2\varphi\,U'_{rr} + \frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{r}\,U'_{r\varphi} + \frac{\cos^2\varphi}{r^2}\,U'_{\varphi\varphi} + \frac{\cos^2\varphi}{r}\,U'_r - \frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2}\,U'_\varphi
\end{aligned}$$

Po dosazení do daného výrazu dostaneme $U'_{rr} + \dfrac{1}{r}\,U'_r + \dfrac{1}{r^2}\,U'_{\varphi\varphi}$.

---

11. Transformujte rovnici $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + m^2 z = 0$ do nezávislých proměnných u, v daných rovnicemi $x = \mathrm{e}^u\cos v$, $y = \mathrm{e}^u \sin v$.

Řešení: Jestliže označíme $z(x,y) = z\left(\mathrm{e}^u\cos v, \mathrm{e}^u\sin v\right) = Z(u,v)$, dostaneme podle věty o derivaci složené funkce

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} = \mathrm{e}^u\cos v z'_x + \mathrm{e}^u \sin v z'_y \\
\frac{\partial Z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} = -\mathrm{e}^u\sin v z'_x + \mathrm{e}^u \cos v z'_y\,.
\end{aligned}$$

Z této soustavy rovnic najdeme

$$z'_x = \mathrm{e}^{-u}\left(\cos v Z'_u - \sin v Z'_v\right) \quad \text{a} \quad z'_y = \mathrm{e}^{-u}\left(\sin v Z'_u + \cos v Z'_v\right).$$

Nyní najdeme druhé derivace. Ty jsou

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(z'_x\right) = \mathrm{e}^{-u}\left(\cos v\frac{\partial}{\partial u}\left(z'_x\right) - \sin v\frac{\partial}{\partial v}\left(z'_x\right)\right) = \\
&= \mathrm{e}^{-u}\left(\cos v\frac{\partial}{\partial u}\left(\mathrm{e}^{-u}\left(\cos v Z'_u - \sin v Z'_v\right)\right) - \sin v\frac{\partial}{\partial v}\left(\mathrm{e}^{-u}\left(\cos v Z'_u - \sin v Z'_v\right)\right)\right) = \\
&= \mathrm{e}^{-2u}\left(\cos^2 v Z'_{uu} - \sin 2v Z'_{uv} + \sin^2 v Z'_{vv} - \cos 2v Z'_u + \sin 2v Z'_v\right)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(z'_y\right) = \mathrm{e}^{-u}\left(\sin v \frac{\partial}{\partial u}\left(z'_y\right) + \cos v \frac{\partial}{\partial v}\left(z'_y\right)\right) =$$
$$= \mathrm{e}^{-u}\left(\sin v \frac{\partial}{\partial u}\Big(\mathrm{e}^{-u}\big(\sin v Z'_u + \cos v Z'_v\big)\Big) + \cos v \frac{\partial}{\partial v}\Big(\mathrm{e}^{-u}\big(\sin v Z'_u + \cos v Z'_v\big)\Big)\right) =$$
$$= \mathrm{e}^{-2u}\Big(\sin^2 v Z'_{uu} + \sin 2v Z'_{uv} + \cos^2 v Z'_{vv} + \cos 2v Z'_u - \sin 2v Z'_v\Big)$$

Po dosazení do dané rovnice, dostaneme $\mathrm{e}^{-2u}\big(Z'_{uu} + Z'_{vv}\big) + m^2 Z = 0$ neboli $Z'_{uu} + Z'_{vv} + \mathrm{e}^{2u} m^2 Z = 0$.

---

12. Dokažte, že se tvar *Laplaceovy rovnice*

$$\triangle z \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

nemění při libovolné regulární transformaci proměnných $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$ pro kterou platí

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial \psi}{\partial v} \quad \text{a} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = -\frac{\partial \psi}{\partial u}\,. \tag{1}$$

Řešení: Označme $Z(u,v) = z(x,y) = z\big(\varphi(x,y), \psi(x,y)\big)$. Podle věty o derivaci složené funkce je

$$\frac{\partial Z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial u} = \varphi'_u z'_x - \varphi'_v z'_y$$
$$\frac{\partial Z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial v} = \varphi'_v z'_x + \varphi'_u z'_y\,,$$

kde jsme použili vztahy $\psi'_u = -\varphi'_v$ a $\psi'_v = \varphi'_u$. Pro druhé derivace dostaneme

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial Z}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\Big(\varphi'_u z'_x - \varphi'_v z'_y\Big) = \varphi'_u \frac{\partial z'_x}{\partial u} - \varphi'_v \frac{\partial z'_y}{\partial u} + \varphi'_{uu} z'_x - \varphi'_{uv} z'_y =$$
$$= \big(\varphi'_u\big)^2 z'_{xx} - 2\varphi'_u \varphi'_v z'_{xy} + \big(\varphi'_v\big)^2 z'_{yy} + \varphi'_{uu} z'_x - \varphi'_{uv} z'_y$$
$$\frac{\partial^2 Z}{\partial v^2} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial Z}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\Big(\varphi'_v z'_x + \varphi'_u z'_y\Big) = \varphi'_v \frac{\partial z'_x}{\partial v} + \varphi'_u \frac{\partial z'_y}{\partial v} + \varphi'_{vv} z'_x + \varphi'_{uv} z'_y =$$
$$= \big(\varphi'_v\big)^2 z'_{xx} + 2\varphi'_u \varphi'_v z'_{xy} + \big(\varphi'_u\big)^2 z'_{yy} + \varphi'_{vv} z'_x + \varphi'_{uv} z'_y$$

Jestliže tyto rovnice sečteme, dostaneme

$$Z'_{uu} + Z'_{vv} = \Big(\big(\varphi'_u\big)^2 + \big(\varphi'_v\big)^2\Big)\big(z'_{xx} + z'_{yy}\big) + \big(\varphi'_{uu} + \varphi'_{vv}\big) z'_x\,.$$

Protože funkce $z = z(x,y)$ splňuje rovnici $z'_{xx} + z'_{yy} = 0$ a pro funkce φ a ψ plyne z (1)

$$\varphi'_{uu} + \varphi'_{vv} = -\psi'_{uv} + \psi'_{uv} = 0\,,$$

vyhovuje funkce $Z = Z(u,v)$ Laplaceově rovnici $Z'_{uu} + Z'_{vv} = 0$.

---

13. Nechť $u(x,y) = f(r)$, kde $r = \sqrt{x^2+y^2}$ a u splňuje rovnice

$$\text{a)} \quad \triangle u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,, \qquad \text{b)} \quad \triangle\bigl(\triangle u\bigr) = 0\,.$$

Jakou rovnici splňuje funkce $f(r)$?

Řešení: Podle věty o derivaci složené funkce jsou první a druhé derivace funkce $u(x,y) = f(r)$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, f'(r)\,,\\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, f'(r)\,,\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{x^2}{x^2+y^2}\, f''(r) + \frac{y^2}{\bigl(x^2+y^2\bigr)^{3/2}}\, f'(r)\,,\\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{y^2}{x^2+y^2}\, f''(r) + \frac{x^2}{\bigl(x^2+y^2\bigr)^{3/2}}\, f'(r)\,.
\end{aligned}$$

Tedy $u'_{xx} + u'_{yy} = f'' + \dfrac{f'}{r} = 0$.

Protože je $\triangle u$ funkce pouze proměnné r, lze na výraz $\triangle\bigl(\triangle u\bigr)$ použít výsledků části a). Tedy

$$\triangle\bigl(\triangle u\bigr) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\left(f'' + \frac{1}{r}\,f'\right) + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(f'' + \frac{1}{r}\,f'\right) = f^{(4)} + \frac{2}{r}\,f^{(3)} - \frac{1}{r^2}\,f'' + \frac{1}{r^3}\,f' = 0\,.$$

---

14. Transformujte výraz $A = x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial x}$ do proměnných X a Y, které jsou definovány rovnicemi $x + y = X$ a $y = XY$.

Řešení: Z definičních vztahů plyne $x = X(1-Y)$ a $y = XY$. K výpočtu derivací funkce $U(X,Y) = u(x,y) = u\bigl(X(1-Y), XY\bigr)$ budeme potřebovat parciální derivace

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y} = 1\,, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = -\frac{Y}{X}\,, \quad \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{1-Y}{X}\,,$$

které jsme dostali derivací vztahů $x + y = X$ a $y = XY$.

Podle věty o derivaci složené funkce je

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial U}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial X} - \frac{Y}{X}\frac{\partial U}{\partial Y}\\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial U}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{1-Y}{X}\,\frac{\partial U}{\partial Y}
\end{aligned}$$

Druhé derivace jsou

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u'_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X}\left(U'_X - \frac{Y}{X}\,U'_Y\right) - \frac{Y}{X}\,\frac{\partial}{\partial Y}\left(U'_X - \frac{Y}{X}\,U'_Y\right) =$$
$$= U'_{XX} - \frac{2Y}{X}\,U'_{XY} + \frac{Y^2}{X^2}\,U'_{YY} + \frac{2Y}{X^2}\,U'_Y$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u'_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial X}\left(U'_X - \frac{Y}{X}\,U'_Y\right) + \frac{1-Y}{X}\,\frac{\partial}{\partial Y}\left(U'_X - \frac{Y}{X}\,U'_Y\right) =$$
$$= U'_{XX} + \frac{1-2Y}{X}\,U'_{XY} - \frac{Y(1-Y)}{X^2}\,U'_{YY} - \frac{1-2Y}{X^2}\,U'_Y\,.$$

Dosazením do daného výrazu dostaneme $A = XU'_{XX} - YU'_{XY} + U'_X$.

---

15. Ukažte, že rovnice

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy^2\frac{\partial z}{\partial x} + 2\big(y - y^3\big)\frac{\partial z}{\partial y} + x^2y^2z = 0$$

nemění svůj tvar při transformaci $x = uv$, $y = \dfrac{1}{v}$.

Řešení: Z definičních rovnic plyne, že $u = xy$ a $v = \dfrac{1}{y}$. Jestliže označíme $z(x,y) = z\left(uv, \dfrac{1}{v}\right) = Z(u,v)$ plyne z věty o derivaci složené funkce

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = yZ'_u = \frac{1}{v}\,Z'_u\,,$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = xZ'_u - \frac{1}{y^2}\,Z'_v = uvZ'_u - v^2Z'_v\,.$$

Potřebujeme ještě najít derivaci $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$. Proto zderivujeme podle proměnné x první z těchto rovnic.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\big(yZ'_u\big) = y\frac{\partial Z'_u}{\partial x} = y^2Z'_{uu} = \frac{1}{v^2}\,Z'_{uu}\,.$$

Dosazením do dané rovnice dostaneme

$$\frac{1}{v^2}\,Z'_{uu} + \frac{2u}{v^2}\,Z'_u + 2\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v^3}\right)\big(uvZ'_u - v^2Z'_v\big) + u^2Z =$$
$$= \frac{1}{v^2}\Big(Z'_{uu} + 2uv^2Z'_u + 2\big(v - v^3\big)Z'_v + u^2v^2Z\Big) = 0\,.$$

Cvičení 12

EXTRÉMY FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH.

Definice: Je-li funkce $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ definována v nějakém okolí bodu $\boldsymbol{a} = \big[a_1, \dots, a_n\big]$ a existuje-li $\delta > 0$ takové, že

$$\Big(\forall x \in \mathbb{R}^n\,;\; 0 < \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < \delta\Big) \Rightarrow \Big(f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{a})\Big)\,, \tag{1}$$

říkáme, že funkce f má v bodě $\boldsymbol{a}$ *lokální minimum.* Lze-li v (1) nahradit nerovnost $f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{a})$ ostrou nerovností $f(\boldsymbol{x}) > f(\boldsymbol{a})$, říkáme, že f má v bodě $\boldsymbol{a}$ *ostré lokální minimum.*

Obdobně se definují *lokální maxima*; místo $f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{a})$, po příp. $f(\boldsymbol{x}) > f(\boldsymbol{a})$ se píše $f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{a})$, po příp. $f(\boldsymbol{x}) < f(\boldsymbol{a})$.
Společný název pro lokální minima a maxima je *lokální extrémy.*

Věta: *Jestliže aspoň pro jednu hodnotu j, $1 \leq j \leq n$, existuje nenulová derivace $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\big(a_1, \dots, a_n\big)$, nemá funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$ lokální extrém, ani ostrý a ni neostrý.*

Proto nás při hledání extrémů funkce $f(\boldsymbol{x})$ zajímají pouze ty body, v nichž je buď

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \tag{2}$$

nebo v nichž některá z těchto derivací neexistuje. V bodech, kde platí (2), lze často o existenci a druhu lokálního extrému usoudit z této věty:

Věta: *Nechť má funkce $f(x_1, \dots, x_n)$ v bodě $\boldsymbol{a} = \big[a_1, \dots, a_n\big]$ totální diferenciál druhého řádu a v bodě $\boldsymbol{a}$ nechť jsou splněny rovnice (2). Sestrojme kvadratickou formu*

$$\Phi\big(h_1, \dots, h_n\big) = \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f\big(a_1, \dots, a_n\big)}{\partial x_i \partial x_k}\, h_i h_k\,. \tag{3}$$

Potom platí:

I. *Je-li kvadratická forma (3) pozitivně definitní, má funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$ ostré lokální minimum.*
II. *Je-li kvadratická forma (3) negativně definitní, má funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$ ostré lokální maximum.*
III. *Je-li kvadratická forma (3) indefinitní, nemá funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$ lokální extrém; ani ostrý ani neostrý.*

Poznámka: Kvadratická forma

$$Q(\boldsymbol{x}) = Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,k=1}^{n} \alpha_{ik} x_i x_k\,,$$

kde $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$ jsou reálná čísla se nazývá *pozitivně definitní*, jestliže pro všechna $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ je $Q(\boldsymbol{x}) > 0$; jestliže pro všechna taková $\boldsymbol{x}$ platí nerovnost $Q(\boldsymbol{x}) < 0$, nazývá se kvadratická forma Q *negativně definitní*; existují-li $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ takové, že $Q(\boldsymbol{x}) > 0$ a $Q(\boldsymbol{y}) < 0$, nazývá se kvadratická forma Q *indefinitní*.
Je-li kvadratická forma pozitivně definitní nebo negativně definitní nebo indefinitní, lze poznat pomocí *Sylvestrova kritéria*.

Najděte lokální extrémy následujících funkcí

1. $z = x^2 + (y-1)^2$

2. $z = x^2 - (y-1)^2$

3. $z = (x-y+1)^2$

4. $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$

5. $z = x^3 + y^3 - 3xy$

6. $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$

7. $z = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y}\,, \quad x > 0\,,\ y > 0$

8. $z = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$

9. $z = x - 2y + \ln\sqrt{x^2+y^2} + 3\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x}$

10. $z = \big(x^2+y^2\big)\exp\big[-(x^2+y^2)\big]$

Řešení:
1. Funkce $z = z(x,y)$ má spojité parciální derivace všech řádů na celém $\mathbb{R}^2$. Proto mohou být její lokální extrémy pouze v bodech, kde $z'_x = z'_y = 0$. Z toho dostaneme

$$\begin{aligned} z'_x &= 2x = 0 \\ z'_y &= 2(y-1) = 0 \end{aligned} \implies \begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 1 \end{aligned} \implies \mathrm{d}^2 z(0,1) = 2\mathrm{d}x^2 + 2\mathrm{d}y^2\,.$$

Protože je kvadratické forma $\mathrm{d}^2 z(0,1)$ pozitivně definitní, má funkce ostré lokální minimum $z = 0$ v bodě $x = 0$, $y = 1$.
2. Funkce $z = z(x,y)$ má spojité parciální derivace všech řádů na celém $\mathbb{R}^2$. Proto mohou být její lokální extrémy pouze v bodech, kde $z'_x = z'_y = 0$. Z toho dostaneme

$$\begin{aligned} z'_x &= 2x = 0 \\ z'_y &= -2(y-1) = 0 \end{aligned} \implies \begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 1 \end{aligned} \implies \mathrm{d}^2 z(0,1) = 2\mathrm{d}x^2 - 2\mathrm{d}y^2\,.$$

Protože je kvadratické forma $\mathrm{d}^2 z(0,1)$ indefinitní, nemá funkce lokální extrém.
3. Funkce $z = z(x,y)$ má spojité parciální derivace všech řádů na celém $\mathbb{R}^2$. Proto mohou být její lokální extrémy pouze v bodech, kde $z'_x = z'_y = 0$. Z toho dostaneme

$$\begin{aligned} z'_x &= 2(x-y+1) = 0 \\ z'_y &= -2(x-y+1) = 0 \end{aligned} \implies y = x+1 \implies \mathrm{d}^2 z(x,x+1) = 2\big(\mathrm{d}x - \mathrm{d}y\big)^2\,.$$

Protože je kvadratické forma $\mathrm{d}^2 z(x,x+1)$ pozitivně semidefinitní, může mít funkce $z = (x-y+1)^2$ v bodech přímky $y = x+1$ lokální minima. Protože $z(x,y) \geq 0$ a $z(x,x+1) = 0$ má funkce $z(x,y)$ v bodech přímky $y = x+1$ neostré lokální minimum $z = 0$.

4. Funkce $z = z(x,y)$ má spojité parciální derivace všech řádů na celém $\mathbb{R}^2$. Proto mohou být její lokální extrémy pouze v bodech, kde $z'_x = z'_y = 0$. Z toho dostaneme

$$\begin{array}{l} z'_x = 2x - y - 2 = 0 \\ z'_y = -x + 2y + 1 = 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 0 \end{array}.$$

Druhý diferenciál funkce $z(x,y)$ v bodě $x = 1$, $y = 0$ je

$$\mathrm{d}^2 z(0,1) = 2\big(\mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \mathrm{d}y^2\big) = 2\left(\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\,\mathrm{d}y\right)^2 + \frac{3}{2}\,\mathrm{d}y^2\,.$$

Protože je kvadratické forma $\mathrm{d}^2 z(1,0)$ pozitivně definitní, má funkce ostré lokální minimum $z = -1$ v bodě $x = 1$, $y = 0$.

5. Funkce $z = z(x,y)$ má spojité parciální derivace všech řádů na celém $\mathbb{R}^2$. Proto mohou být její lokální extrémy pouze v bodech, kde $z'_x = z'_y = 0$. Z toho dostaneme

$$\begin{array}{l} z'_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ z'_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} x = y = 0 \\ x = y = 1 \end{array}.$$

Druhý diferenciál funkce $z(x,y)$ v bodě $x = 0$, $y = 0$ je $\mathrm{d}^2 z(0,0) = -6\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Tato kvadratická forma je indefinitní, a proto nemá funkce $z(x,y)$ v bodě $x = y = 0$ lokální extrém.

Druhý diferenciál funkce $z(x,y)$ v bodě $x = y = 1$ je

$$\mathrm{d}^2 z(1,1) = 6\big(\mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \mathrm{d}y^2\big) = 6\left(\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\,\mathrm{d}y\right)^2 + \frac{9}{2}\,\mathrm{d}y^2\,.$$

Tato kvadratická forma je pozitivně definitní, a proto má funkce $z(x,y)$ v bodě $x = y = 1$ ostré lokální minimum $z = -1$.

6. Funkce $z = z(x,y)$ má spojité parciální derivace všech řádů na celém $\mathbb{R}^2$. Proto mohou být její lokální extrémy pouze v bodech, kde $z'_x = z'_y = 0$. Z toho dostaneme

$$\begin{array}{l} z'_x = 4x^3 - 2x - 2y = 0 \\ z'_y = 4y^3 - 2x - 2y = 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} x = y = 0 \\ x = y = \pm 1 \end{array}.$$

Druhý diferenciál funkce $z(x,y)$ v bodě $x = y = \pm 1$ je $\mathrm{d}^2 z(\pm 1, \pm 1) = 10\mathrm{d}x^2 - 4\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 10\mathrm{d}y^2$. Protože je $D_1 = a_{11} = 10 > 0$ a $D_2 = \det\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} = 96 > 0$ je kvadratická forma $\mathrm{d}^z(\pm 1, \pm 1)$ pozitivně definitní, a proto má funkce $z(x,y)$ v bodech $x = y = \pm 1$ ostrá lokální minima $z = -2$.

Druhý diferenciál funkce $z(x,y)$ v bodě $x = y = 0$ je $\mathrm{d}^2 z(0,0) = -\big(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y\big)^2$. Tato kvadratická forma je negativně semidefinitní, a proto by mohla mít funkce $z(x,y)$ v bodě $x = y = 0$ lokální maximum. Ale funkce $z(x,y) = x^4 + y^4 - (x+y)^2$. Tedy na přímce $x + y = 0$ je $z(x,-x) = 2x^4$. Ale tato funkce jedné proměnné má v bodě $x = 0$ lokální minimum, ne maximum. Tedy v bodě $x = y = 0$ není lokální extrém.

7. Funkce $z = z(x,y)$ má na množině $x > 0$, $y > 0$ spojité parciální derivace všech řádů. Proto mohou být její lokální extrémy pouze v bodech, kde $z'_x = z'_y = 0$. Z toho dostaneme

$$\begin{aligned} z'_x &= y - \frac{50}{x^2} = 0 \\ z'_y &= x - \frac{20}{y^2} = 0 \end{aligned} \Longrightarrow x = 5\,,\ y = 2 \Longrightarrow \mathrm{d}^2 z(5,2) = \frac{4}{5}\,\mathrm{d}x^2 + 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 5\mathrm{d}y^2\,.$$

Protože $D_1 = \dfrac{4}{5} > 0$ a $D_2 = \det \begin{pmatrix} 4/5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = 3 > 0$ je kvadratické forma $\mathrm{d}^2 z(5,2)$ pozitivně definitní. Tedy má funkce ostré lokální minimum $z = 30$ v bodě $x = 5$, $y = 2$.

8. Definiční obor funkce $z(x,y)$ je $x > 0$ a $y > 0$ Funkce $z = z(x,y)$ na definičním oboru spojité parciální derivace všech řádů. Proto mohou být její lokální extrémy pouze v bodech, kde $z'_x = z'_y = 0$. Z toho dostaneme

$$\begin{aligned} z'_x &= 2x + y - \frac{4}{x} = 0 \\ z'_y &= x + 2y - \frac{10}{y} = 0 \end{aligned} \Longrightarrow x = 1\,,\ y = 2 \Longrightarrow \mathrm{d}^2 z(1,2) = 6\mathrm{d}x^2 + 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{9}{2}\,\mathrm{d}y^2\,.$$

Protože $D_1 = 6 > 0$ a $D_2 = \det \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 9/2 \end{pmatrix} = 26 > 0$ je kvadratické forma $\mathrm{d}^2 z(1,2)$ pozitivně definitní. Tedy má funkce ostré lokální minimum $z = 7 - \ln 2$ v bodě $x = 5$, $y = 2$.

9. Definiční obor funkce $z(x,y)$ je celá rovina bez přímky $x = 0$. Funkce má na definičním oboru spojité parciální derivace všech řádů. Proto mohou být její lokální extrémy pouze v bodech, kde $z'_x = z'_y = 0$. Z toho dostaneme

$$\begin{aligned} z'_x &= 1 + \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{3y}{x^2 + y^2} = 0 \\ z'_y &= -2 + \frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{3x}{x^2 + y^2} = 0 \end{aligned} \Longrightarrow x = y = 1\,.$$

Druhý diferenciál funkce $z(x,y)$ v bodě $x = y = 1$ je $\mathrm{d}^2 z(1,1) = \dfrac{3}{2}\,\mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \dfrac{3}{2}\,\mathrm{d}y^2$. Protože $D_1 = \dfrac{3}{2} > 0$ a $D_2 = \det \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & -3/2 \end{pmatrix} = -\dfrac{5}{2} < 0$ je kvadratické forma $\mathrm{d}^2 z(1,2)$ indefinitní. Tedy funkce $z(x,y)$ nemá v bodě $x = y = 1$ lokální extrém.

10. Funkce $z = z(x,y)$ má spojité parciální derivace všech řádů na celém $\mathbb{R}^2$. Proto mohou být její lokální extrémy pouze v bodech, kde $z'_x = z'_y = 0$. Z toho dostaneme

$$\begin{aligned} z'_x &= 2x\big(1 - x^2 - y^2\big)\mathrm{e}^{-x^2-y^2} = 0 \\ z'_y &= 2y\big(1 - x^2 - y^2\big)\mathrm{e}^{-x^2-y^2} = 0 \end{aligned} \Longrightarrow \begin{array}{l} x = y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array}.$$

Druhý diferenciál funkce $z(x,y)$ v bodě $x = y = 0$ je $\mathrm{d}^2 z(0,0) = 2\mathrm{d}x^2 + 2\mathrm{d}y^2$. Protože je kvadratická forma $\mathrm{d}^z(0,0)$ pozitivně definitní má funkce $z(x,y)$ v bodě $x = y = 0$ ostrá lokální minimum $z = 0$.
Druhý diferenciál funkce $z(x,y)$ v bodech $x^2 + y^2 = 1$ je $\mathrm{d}^2 z(x,y) = -4\mathrm{e}^{-1}\big(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y\big)^2$. Tato kvadratická forma je negativně semidefinitní, a proto by mohla mít funkce $z(x,y)$ v bodě $x = y = 0$ lokální maximum. Jestliže označíme $r = x^2 + y^2$, lze funkci zapsat ve tvaru $z(x,y) = f(r) = r\mathrm{e}^{-r}$. Protože $f'(r) = (1-r)\mathrm{e}^{-r}$ je rovna nule v bodě $r = 1$ a $f''(1) = -\mathrm{e}^{-1} < 0$, má funkce $f(r)$ v bodě $r = 1$ lokální maximum $f(1) = \mathrm{e}^{-1}$. Tedy funkce $z(x,y)$ má na kružnici $x^2 + y^2 = 1$ neostré lokální maximum $z = \mathrm{e}^{-1}$.

Najděte extrémy následujících funkcí

11. $u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$

12. $u = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$

13. $u = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}; \quad x > 0\,,\ y > 0\,,\ z > 0\,.$

14. $u = \dfrac{4}{x} + \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{z} + 8z^2; \quad x > 0\,,\ y > 0\,,\ z > 0\,.$

Řešení:
11. Protože je funkce $u(x,y,z) \in C_\infty\big(\mathbb{R}^3\big)$, mohou být lokální extrémy pouze v bodech, kde $u'_x = u'_y = u'_z = 0$. Tedy lokální extrémy budeme hledat v bodech

$$\begin{aligned} u'_x &= 2x + 2 = 0 \\ u'_y &= 2y + 4 = 0 \\ u'_z &= 2z - 6 = 0 \end{aligned} \implies x = -1\,,\ y = -2\,,\ z = 3\,.$$

Protože kvadratická forma $\mathrm{d}^2 u(-1,-2,3) = 2\big(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2\big)$ je pozitivně definitní má funkce $u(x,y,z)$ ostré lokální minimum $u = -14$ v bodě $x = -1$, $y = -2$, $z = 3$.
12. Protože je funkce $u(x,y,z) \in C_\infty\big(\mathbb{R}^3\big)$, mohou být lokální extrémy pouze v bodech, kde $u'_x = u'_y = u'_z = 0$. Tedy lokální extrémy budeme hledat v bodech

$$\begin{aligned} u'_x &= 3x^2 + 12y = 0 \\ u'_y &= 2y + 12x = 0 \\ u'_z &= 2z + 2 = 0 \end{aligned} \implies \begin{aligned} &x = y = 0\,,\ z = -1 \\ &x = 24\,,\ y = -144\,,\ z = -1 \end{aligned}$$

Protože kvadratická forma

$$\mathrm{d}^2 u(0,0,-1) = 24\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2\mathrm{d}y^2 + 2\mathrm{d}z^2 = 2\mathrm{d}z^2 + 2(\mathrm{d}y + 6\mathrm{d}x)^2 - 72\mathrm{d}x^2$$

je indefinitní, nemá funkce $u(x,y,z)$ v bodě $x = y = 0$, $z = -1$ lokální extrém.
Protože kvadratická forma

$$\mathrm{d}^2 u(24,-144,-1) = 144\mathrm{d}x^2 + 24\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2\mathrm{d}y^2 + 2\mathrm{d}z^2 = 2\mathrm{d}z^2 + 2(\mathrm{d}y + 6\mathrm{d}x)^2 + 72\mathrm{d}x^2$$

je pozitivně definitní, má funkce $u(x,y,z)$ v bodě $x=24$, $y=-144$, $z=-1$ ostré lokální minimum $u=-6913$.

13. Protože je funkce $u(x,y,z)$ spojitě diferencovatelná na množině $x>0$, $y>0$ a $z>0$, mohou být lokální extrémy pouze v bodech, kde $u'_x=u'_y=u'_z=0$. Tedy lokální extrémy budeme hledat v bodech

$$\begin{aligned} u'_x &= 1-\frac{y^2}{4x^2}=0 \\ u'_y &= \frac{y}{2x}-\frac{z^2}{y^2}=0 \implies x=\frac{1}{2}\,,\ y=z=1\,. \\ u'_z &= \frac{2z}{y}-\frac{2}{z^2}=0 \end{aligned}$$

Budeme zkoumat kvadratickou formu $\mathrm{d}^2u\left(\frac{1}{2},1,1\right)=4\mathrm{d}x^2-4\mathrm{d}x\mathrm{d}y+3\mathrm{d}y^2-4\mathrm{d}y\mathrm{d}z+6\mathrm{d}z^2$. Protože

$$D_1=4>0\,,\qquad D_2=\det\begin{pmatrix}4&-2\\-2&3\end{pmatrix}=8>0\,,$$
$$D_3=\det\begin{pmatrix}4&-2&0\\-2&3&-2\\0&-2&6\end{pmatrix}=32>0\,,$$

je tato kvadratická forma pozitivně definitní. Proto má funkce $u(x,y,z)$ v bodě $x=\frac{1}{2}$, $y=z=1$ ostré lokální minimum $u=\frac{9}{2}$.

14. Protože je funkce $u(x,y,z)$ spojitě diferencovatelná na množině $x>0$, $y>0$ a $z>0$, mohou být lokální extrémy pouze v bodech, kde $u'_x=u'_y=u'_z=0$. Tedy lokální extrémy budeme hledat v bodech

$$\begin{aligned} u'_x &= -\frac{4}{x^2}+\frac{2x}{y}=0 \\ u'_y &= -\frac{x^2}{y^2}+\frac{2y}{z}=0 \implies x=1\,,\ y=\frac{1}{2}\,,\ z=\frac{1}{4}\,. \\ u'_z &= -\frac{y^2}{z^2}+16z=0 \end{aligned}$$

Budeme zkoumat kvadratickou formu $\mathrm{d}^2u\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)=4\big(3\mathrm{d}x^2-4\mathrm{d}x\mathrm{d}y+6\mathrm{d}y^2-8\mathrm{d}y\mathrm{d}z+12\mathrm{d}z^2\big)$. Protože

$$D_1=3>0\,,\qquad D_2=\det\begin{pmatrix}3&-2\\-2&6\end{pmatrix}=14>0\,,$$
$$D_3=\det\begin{pmatrix}3&-2&0\\-2&6&-4\\0&-4&12\end{pmatrix}=120>0\,,$$

je tato kvadratická forma pozitivně definitní. Proto má funkce $u(x,y,z)$ v bodě $x=1$, $y=\dfrac{1}{2}$, $z=\dfrac{1}{4}$ ostré lokální minimum $u=\dfrac{15}{2}$.

Najděte extrémy funkce $z=z(x,y)$, která je dána implicitně rovnicí

15. $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$

16. $x^2+y^2+z^2-xz-yz+2x+2y+2z-2=0$

Řešení:
15. Funkce $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10$ má v $\mathbb{R}^3$ spojité derivace všech řádů. Proto definuje v okolí bodů $\bigl[x_0;y_0;z_0\bigr]$, ve kterých je $F\bigl(x_0,y_0,z_0\bigr)=0$ a $F'_z\bigl(x_0,y_0,z_0\bigr)=2\bigl(z_0-2\bigr)\neq 0$, implicitně funkci $z=z(x,y)$, pro kterou je $z_0=z\bigl(x_0,y_0\bigr)$. Ta má spojité derivace všech řádů. Proto budeme její lokální extrémy hledat v bodech, kde je $z'_x(x,y)=z'_y(x,y)=0$. Tyto parciální derivace splňují rovnice

$$2x+2zz'_x-2-4z_x=0\,,\quad 2y+2zz'_y+2-4z_y=0\,. \tag{1}$$

Protože hledáme body, kde $z'_x=z'_y=0$ a $F(x,y,z)=0$ dostaneme soustavu rovnic

$$x-1=y+1=x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0 \Longrightarrow \begin{array}{l} x=1\,,\ y=-1\,,\ z=6 \\ x=1\,,\ y=-1\,,\ z=-2 \end{array}$$

Protože $z\neq 2$ jsou v okolí těchto bodu definována implicitně dvě funkce $z(x,y)$. Jejich druhé parciální derivace najdeme derivací rovnic (1). Takto dostaneme

$$1+\bigl(z'_x\bigr)^2+(z-2)z'_{xx}=0\,,\quad z'_xz'_y+(z-2)z'_{yx}=0\,,\quad 1+\bigl(z'_y\bigr)^2+(z-2)z'_{yy}=0\,.$$

Protože $z'_x(1,-1)=z'_y(1,-1)=0$ jsou druhé diferenciály těchto funkcí v bodě $[1;-1]$ rovny

$$\mathrm{d}^2z(1,-1)=-\frac{1}{4}\bigl(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2\bigr)\quad \text{pro funkci } z(1,-1)=6$$
$$\mathrm{d}^2z(1,-1)=\frac{1}{4}\bigl(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2\bigr)\qquad \text{pro funkci } z(1,-1)=-2$$

Protože kvadratická forma $\mathrm{d}^2z(1,-1)$ je v prvním případě negativně definitní, je maximum $z=6$ v bodě $x=1$, $y=-1$. Ve druhém případě je $\mathrm{d}^2(1,-1)$ pozitivně definitní, a tedy funkce má minimum $z(x,y)=-2$ také v bodě $x=1$, $y=-1$.
16. Funkce $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-xz-yz+2x+2y+2z-2$ má spojité parciální derivace na celém prostoru $\mathbb{R}^3$. Proto v okolí bodů $\bigl[x_0;y_0;z_0\bigr]$, pro které je $F\bigl(x_0,y_0,z_0\bigr)=0$ a $F'_z\bigl(x_0,y_0,z_0\bigr)=2z_0-x_0-y_0+2\neq 0$, implicitně definuje funkci $z=z(x,y)$ takovou, že $z_0=z\bigl(x_0,y_0\bigr)$. Tato funkce má spojité parciální derivace všech řádů, a proto její lokální extrémy budeme hledat v bodech, kde $\mathrm{d}z(x,y)=0$ a $F(x,y,z)=0$. Z prvního diferenciálu funkce $F(x,y,z)$ dostaneme

$$(2x-z+2)\mathrm{d}x+(2y-z+2)\mathrm{d}y+(2z-x-y+2)\mathrm{d}z=0\,. \tag{1}$$

Tedy máme hledat body $[x;y;z]$, pro které je

$$2x-z+2=0\,,\quad 2y-z+2=0\,,\quad x^2+y^2+z^2-xz-yz+2x+2y+2z-2=0\,.$$

Tato soustava rovnic má dvě řešení $x=y=-3+\sqrt{6}$, $z=-4+2\sqrt{6}$ a $x=y=-3-\sqrt{6}$, $z=-4-2\sqrt{6}$. Protože v těchto bodech je $F'_z\neq 0$, jsou v okolí těchto bodů implicitně definovány dvě funkce $z=z(x,y)$. Druhý diferenciál těchto funkcí $z(x,y)$ v daných bodech najdeme z (1). Protože platí $\mathrm{d}z\bigl(-3\pm\sqrt{6},-3\pm\sqrt{6}\bigr)=0$ je

$$\begin{aligned} 2\mathrm{d}x^2+2\mathrm{d}y^2 &= -2\sqrt{6}\,\mathrm{d}^2z \quad \text{pro } x=y=-3+\sqrt{6},\ z=-4+2\sqrt{6}\\ 2\mathrm{d}x^2+2\mathrm{d}y^2 &= 2\sqrt{6}\,\mathrm{d}^2z \qquad \text{pro } x=y=-3-\sqrt{6},\ z=-4-2\sqrt{6}\end{aligned}$$

Protože je kvadratická forma $\mathrm{d}^2z\bigl(-3+\sqrt{6},-3+\sqrt{6}\bigr)$ negativně definitní je v bodě $x=y=-3+\sqrt{6}$ lokální maximum $z=-4+2\sqrt{6}$. Na druhou stranu je kvadratická forma $\mathrm{d}^2z\bigl(-3-\sqrt{6},-3-\sqrt{6}\bigr)$ negativně definitní je v bodě $x=y=-3-\sqrt{6}$ lokální minimum $z=-4-2\sqrt{6}$.

---

17. Ukažte, že funkce $f(x,y)=\bigl(x-y^2\bigr)\bigl(2x-y^2\bigr)$ má v bodě $M=[0;0]$ minimum podél každé přímky, která prochází tímto bodem, ale přesto nemá v tomto bodě minimum.
Řešení: Parametrické rovnice přímky procházející počátkem jsou $x=t\cos\alpha$, $y=t\sin\alpha$, $\alpha\in\langle 0,\pi)$ je směrnice, $t\in\mathbb{R}$. Na každé z těchto přímek je

$$f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=F(t)=2t^2\cos^2\alpha-3t^3\cos\alpha\sin^2\alpha+t^4\sin^4\sin\alpha\,.$$

Jestliže $\cos\alpha\neq 0$ je $F'(0)=0$ a $F''(0)=2\cos^2\alpha>0$. Tedy na těchto přímkách má funkce $F(t)$ v bodě $t=0$, tj. $x=y=0$, lokální minimum $f(0,0)=0$. Je-li $\cos\alpha=0$, je na této přímce, tj. $x=0$, $f(0,t)=t^4$. I tato funkce má v bodě $t=0$ minimum rovno 0. Tedy podél každé přímky, která prochází počátkem má funkce $f(x,y)$ v bodě $x=y=0$ lokální minimum $f(0,0)=0$. Ale na množině $M=\bigl\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,;\ x<y^2<2x\bigr\}$ nabývá funkce $f(x,y)$ záporných hodnot. Protože bod $[0;0]$ je hromadný bod množiny M, nabývá funkce $f(x,y)$ v jakémkoliv okolí bodu $[0;0]$ záporných hodnot. Tedy v bodě $x=y=0$ nemůže mít funkce $f(x,y)$ lokální extrém $f(0,0)=0$.

Cvičení 13 a 14

Vázané extrémy. Globální extrémy.

Definice: Nechť je dána funkce $f(\boldsymbol{x})$, množina $M \subset \mathbb{R}^n$ a bod $\boldsymbol{a} \in M$; nechť je funkce f definována v bodě $\boldsymbol{a}$. Existuje-li $\delta > 0$ takové, že pro všechny body $\boldsymbol{x}$ množiny M, které splňují nerovnosti $0 < \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\| < \delta$, platí nerovnost $f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{a})$, říkáme, že funkce f má v bodě $\boldsymbol{a}$ *lokální minimum vzhledem k množině* M. Lze-li nerovnost $f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{a})$ nahradit ostrou nerovností $f(\boldsymbol{x}) > f(\boldsymbol{a})$, říkáme, že funkce f má v bodě $\boldsymbol{a}$ *ostré lokální minimum vzhledem k množině* M.
Obdobně se definují *lokální maxima vzhledem k množině* M.

Vázané extrémy. Nechť je dána funkce $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ a s funkcí, $0 < s < n$, $g_1(x_1, \dots, x_n)$, ... , $g_s(x_1, \dots, x_n)$. Znakem M označme množinu všech bodů $\boldsymbol{x} = \big[x_1, \dots, x_n\big]$, které vyhovují rovnicím

$$g_1(x_1, \dots, x_n) = 0\,, \quad \dots \quad q_s(x_1, \dots, x_n) = 0\,. \tag{1}$$

Budeme hledat lokální extrémy funkce f vzhledem k množině M; mluví se také o "lokálních extrémech funkce f, vázaných podmínkami (1)", čili o *vázaných extrémech.*
Úlohu najít vázaný extrém funkce f na množině dané rovnicemi (1), lze převést na úlohu najít obyčejný extrém, tzv. *Lagrangeovy funkce*

$$L(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{k=1}^{s} \lambda_k g_k(x_1 \dots, x_n)\,,$$

kde λ_k, $k = 1, \dots, s$, jsou konstanty.
Otázku existence a charakteru vázaného extrému lze řešit na základě vyšetřování znaménka druhého diferenciálu $\mathrm{d}^2 L(\boldsymbol{a})$ ve stacionárním bodě $\boldsymbol{a}$ funkce $L(\boldsymbol{x})$ za podmínky, že proměnné $\mathrm{d}x_1$, ... , $\mathrm{d}x_n$ splňují rovnice

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_i(\boldsymbol{a})}{\partial x_k}\,\mathrm{d}x_k = 0\,; \qquad i = 1, \dots, s\,.$$

Globální extrémy. Funkce $f(\boldsymbol{x})$ spojitá na omezené a uzavřené podmnožině $M \subset \mathbb{R}^n$ nabývá na množině M své nejmenší a největší hodnoty. Je-li funkce f diferencovatelná, nabývá tyto hodnoty ve stacionárním bodě nebo v hraničním bodě množiny M.

Najděte body, v nichž mají následující funkce vázaný extrém:

1. $z = xy$ $\qquad$ $x + y = 1$

2. $z = \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}$ $\qquad$ $x^2 + y^2 = 1\,;\; a > 0\,,\, b > 0$

3.	$z = x^2 + y^2$	$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1\,;\ a > 0\,,\, b > 0$
4.	$z = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$	$x^2 + y^2 = 1$
5.	$u = x - 2y + 2z$	$x^2 + y^2 + z^2 = 1$
6.	$u = x^m y^n z^p$	$x + y + z = a\,;\quad m \ge 1\,,\ n \ge 1\,,\ p \ge 1\,,\ a > 0$
7.	$u = \sin x \sin y \sin z$	$x + y + z = \dfrac{\pi}{2}\,;\quad x > 0\,,\ y > 0\,,\ z > 0$

Řešení:

1. Na tomto příkladu ukážeme dva přístupy k řešení. Jestliže vazbovou podmínku $x + y = 1$ napíšeme ve tvaru $y = 1 - x$ a dosadíme do funkce $z(x, y) = xy$, dostaneme funkci jedné proměnné $F(x) = x(1 - x)$. Danou úlohu jsme převedli na hledání extrému funkce jedné proměnné $F(x)$. Protože $F'(x) = 1 - 2x$, může nabývat funkce $F(x)$ extrém v pouze v bodě, kde $F'(x) = 0$, tj. v bodě $x = \dfrac{1}{2}$. Protože $F''\left(\dfrac{1}{2}\right) = -2 < 0$ nabývá funkce $F(x)$ bodě $x = \dfrac{1}{2}$ lokální maximum $\dfrac{1}{4}$. Proto funkce $z(x, y)$ nabývá v bodě $x = y = \dfrac{1}{2}$ vzhledem k množině $x + y = 1$ lokální maximum $z_{\max} = \dfrac{1}{4}$ v bodě $x = y = \dfrac{1}{2}$.

Jiná možnost je použít metody Lagrangeových multiplikátorů. Sestrojíme funkci $L(x, y) = xy + \lambda(x + y - 1)$. Protože tato funkce má spojité parciální derivace všech řádů na celém $\mathbb{R}^2$ budeme hledat extrémy v bodech, kde je

$$\left.\begin{aligned} &L'_x(x, y) = y + \lambda = 0 \\ &L'_y(x, y) = x + \lambda = 0 \\ &x + y = 1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow x = y = -\lambda = \frac{1}{2}\,.$$

Druhý diferenciál funkce $L(x, y)$ je $\mathrm{d}^2 L(x, y) = 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Kvadratická forma $\mathrm{d}^2 L = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ je indefinitní. Ale z vazbové podmínky plyne, že $\mathrm{d}x + \mathrm{d}y = 0$, tj. $\mathrm{d}y = -\mathrm{d}x$. Proto budeme zkoumat kvadratickou formu $\Psi(\mathrm{d}x) = -2\mathrm{d}x^2$. Ta je negativně definitní, a proto má funkce $z = xy$ v bodě $x = y = \dfrac{1}{2}$ lokální maximum vzhledem k množině $x + y = 1$, které je $z_{\max} = \dfrac{1}{4}$.

2. K řešení použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů. Lagrangeova funkce $L(x, y) = \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \lambda\bigl(x^2 + y^2 - 1\bigr)$ má na celém $\mathbb{R}^2$ spojité parciální derivace všech řádů. Proto mohou být lokální extrémy pouze v bodech, kde platí

$$\left.\begin{aligned} &L'_x(x, y) = \frac{1}{a} + 2\lambda x = 0 \\ &L'_y(x, y) = \frac{1}{b} + 2\lambda y = 0 \\ &x^2 + y^2 = 1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned} &\lambda = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2ab}\,,\ x = -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,,\ y = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &\lambda = -\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2ab}\,,\ x = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,,\ y = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,. \end{aligned}$$

Protože druhý diferenciál funkce $L(x, y) = 2\lambda\bigl(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2\bigr)$ je pro $\lambda > 0$ pozitivně definitní a pro $\lambda < 0$ negativně definitní má funkce $z(x, y)$ v bodě $x = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$,

$y = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ lokální maximum vzhledem ke kružnici $x^2+y^2=1$ rovné $z_{\max} = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$, a lokální minimum $z_{\min} = -\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$ v bodě $x = -\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $y = -\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

3. Použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů. Protože Lagrangeova funkce $L(x,y) = x^2+y^2+\lambda\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}-1\right)$ má spojité parciální derivace všech řádů, mohou existovat lokální extrémy pouze v bodech, kde je

$$\left.\begin{aligned} L'_x(x,y) &= 2x+\frac{\lambda}{a}=0 \\ L'_y(x,y) &= 2y+\frac{\lambda}{b}=0 \\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b} &= 1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \lambda = -\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}\,,\ x = \frac{ab^2}{a^2+b^2}\,,\ y = \frac{a^2b}{a^2+b^2}\,.$$

Protože druhý diferenciál $\mathrm{d}^2L(x,y) = 2\bigl(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2\bigr)$ je pozitivně definitní, má funkce $z(x,y)$ v bodě $x = \dfrac{ab^2}{a^2+b^2}$, $y = \dfrac{a^2b}{a^2+b^2}$ lokální minimum vzhledem k množině $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$, které je $z_{\min} = \dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

4. Lagrangeova funkce $L(x,y) = Ax^2+2Bxy+Cy^2-\lambda\bigl(x^2+y^2\bigr)$ má na celém $\mathbb{R}^2$ spojité derivace všech řádů. Proto budeme hledat extrémy v bodech, ve kterých je

$$\left.\begin{aligned} L'_x(x,y) &= 2Ax+2By-2\lambda x=0 \\ L'_y(x,y) &= 2Bx+2Cy-2\lambda y=0 \\ x^2+y^2 &= 1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ B & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix} = \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}\,. \tag{1}$$

Číslo λ musí být tedy vlastním číslem matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C\end{pmatrix}$, a tedy musí splňovat rovnici

$$\det\bigl(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}\bigr) = \det\begin{pmatrix} A-\lambda & B \\ B & C-\lambda\end{pmatrix} = \lambda^2-(A+C)\lambda+AC-B^2=0\,.$$

Řešení této kvadratické rovnice je $\lambda_\pm = \dfrac{A+C\pm\sqrt{4B^2+(A-C)^2}}{2}$. Pro hodnoty $\lambda=\lambda_\pm$ jsou obě rovnice soustavy (1) lineárně závislé a redukují se tedy na jednu rovnici. Z toho dostaneme, že $x_\pm = \cos\alpha_\pm$ a $y_\pm = \sin\alpha_\pm$, kde $\operatorname{tg}\alpha_\pm = \dfrac{C-A\pm\sqrt{4B^2-(A-C)^2}}{2B}$ jsou jednotkové vlastní vektory matice $\mathbf{A}$. Hodnotu funkce $z(x,y)$ v těchto bodech lze získat tak, že rovnost $\mathbf{A}\boldsymbol{x}_\pm = \lambda_\pm\boldsymbol{x}_\pm$ vynásobíme skalárně vektorem $\boldsymbol{x}_\pm$. Takto dostaneme

$$Ax_\pm^2+2Bx_\pm y_\pm+C^2y_\pm^2 = \bigl(x_\pm,y_\pm\bigr)\begin{pmatrix} A & B \\ B & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_\pm \\ y_\pm\end{pmatrix} = \lambda_\pm\bigl(x_\pm^2+y_\pm^2\bigr) = \lambda_\pm\,.$$

Protože kružnice $x^2 + y^2 = 1$ je kompaktní množina, nabývá na ní spojitá funkce $z(x, y)$ maxima a minima. To ale muže být pouze v bodech $x = x_\pm$ a $y = y_\pm$. $z_{\max} = \lambda_+$, $z_{\min} = \lambda_-$.

5. K řešení použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů. Lagrangeova funkce $L(x, y, z) = x - 2y + 2z + \lambda\bigl(x^2 + y^2 + z^2\bigr)$ má spojité parciální derivace všech řádů na celém $\mathbb{R}^3$. Proto mohou extrémy existovat pouze v bodech, kde

$$\left.\begin{aligned} &L'_x(x,y,z) = 1 + 2\lambda x = 0 \\ &L'_y(x,y,z) = -2 + 2\lambda y = 0 \\ &L'_z(x,y,z) = 2 + 2\lambda z = 0 \\ &x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned} &\lambda = \frac{3}{2}\,,\ x = -\frac{1}{3}\,,\ y = \frac{2}{3}\,,\ z = -\frac{2}{3} \\ &\lambda = -\frac{3}{2}\,,\ x = \frac{1}{3}\,,\ y = -\frac{2}{3}\,,\ z = \frac{2}{3}\,. \end{aligned}$$

Druhý diferenciál funkce $u(x, y, z)$

$$\mathrm{d}^2u(x,y,z) = 2\lambda\bigl(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2\bigr)$$

je pozitivně definitní pro $\lambda = \dfrac{3}{2}$ a negativně definitní pro $\lambda = -\dfrac{3}{2}$. Tedy funkce $u(x, y, z)$ má v bodě $x = \dfrac{1}{3}$, $y = -\dfrac{2}{3}$, $z = \dfrac{2}{3}$ vázané lokální maximum $u_{\max} = 3$ a v bodě $x = -\dfrac{1}{3}$, $y = \dfrac{2}{3}$, $z = -\dfrac{2}{3}$ vázané lokální minimum $u_{\min} = -3$.

6. K řešení použijeme metody Lagrangeových multiplikátorů. Lagrangeova funkce $L(x, y, z) = x^m y^n z^p - \lambda(x + y + z)$ má na spojité parciální derivace všech řádů. Proto budeme hledat extrémy v bodech, kde je

$$\begin{aligned} &L'_x(x,y,z) = mx^{m-1}y^n z^p - \lambda = 0 \\ &L'_y(x,y,z) = nx^m y^{n-1} z^p - \lambda = 0 \\ &L'_z(x,y,z) = px^m y^n z^{p-1} - \lambda = 0 \\ &x + y + z = a \end{aligned}$$

Jestliže první tři rovnice vynásobíme postupně x, y, z a sečteme, dostaneme vzhledem vazbové podmínce $\lambda = \dfrac{m+n+p}{a}\, x^m y^n z^p$. Po dosazení do prvních tří rovnic soustavy dostaneme řešení

$$x_0 = \frac{ma}{m+n+p}\,,\quad y_0 = \frac{na}{m+n+p}\,,\quad z_0 = \frac{pa}{m+n+p} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow u\bigl(x_0, y_0, z_0\bigr) = m^m n^n p^p \left(\frac{a}{m+n+p}\right)^{m+n+p}.$$

Parciální derivace Lagrangeovy funkce $L(x, y, z)$ v bodě $\bigl[x_0; y_0; z_0\bigr]$ jsou

$$L'_{xx}\bigl(x_0, y_0, z_0\bigr) = \frac{m-1}{m} \left(\frac{a}{m+n+p}\right)^{m+n+p-2} m^m n^m p^p\,,$$

$$L'_{yy}\bigl(x_0,y_0,z_0\bigr) = \frac{n-1}{n}\,\left(\frac{a}{m+n+p}\right)^{m+n+p-2} m^m n^m p^p\,,$$

$$L'_{zz}\bigl(x_0,y_0,z_0\bigr) = \frac{p-1}{p}\,\left(\frac{a}{m+n+p}\right)^{m+n+p-2} m^m n^m p^p\,,$$

$$L'_{xy}\bigl(x_0,y_0,z_0\bigr) = \left(\frac{a}{m+n+p}\right)^{m+n+p-2} m^m n^m p^p\,,$$

$$L'_{xz}\bigl(x_0,y_0,z_0\bigr) = \left(\frac{a}{m+n+p}\right)^{m+n+p-2} m^m n^m p^p\,,$$

$$L'_{yz}\bigl(x_0,y_0,z_0\bigr) = \left(\frac{a}{m+n+p}\right)^{m+n+p-2} m^m n^m p^p\,.$$

Tedy druhý diferenciál Lagrangeovy funkce v daném bodě je

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2L\bigl(x_0,y_0,z_0\bigr) = &\left(\frac{a}{m+n+p}\right)^{m+n+p-2} m^m n^m p^p \times\\ &\times\left[\frac{1-m}{m}\,\mathrm{d}x^2+\frac{1-n}{n}\,\mathrm{d}y^2+\frac{1-p}{p}\,\mathrm{d}z^2+2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+2\mathrm{d}x\mathrm{d}z+2\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right].\end{aligned}$$

Z vazbové podmínky plyne, že do druhého diferenciálu Lagrangeovy funkce musíme dosadit $\mathrm{d}z = -\mathrm{d}x - \mathrm{d}y$. Takto získáme kvadratickou formu

$$\begin{aligned}\Psi = &\left(\frac{a}{m+n+p}\right)^{m+n+p-2} m^m n^m p^p \times\\ &\times\left(\frac{1}{p}\,\bigl(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y\bigr)^2+\frac{1}{m}\,\mathrm{d}x^2+\frac{1}{n}\,\mathrm{d}y^2-4\bigl(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\mathrm{d}y^2\bigr)\right)\end{aligned}$$

Protože m, n, $p \geq 1$, platí

$$\begin{aligned}\Psi \leq &\left(\frac{a}{m+n+p}\right)^{m+n+p-2} m^m n^m p^p \times\\ &\times\left[(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)^2+\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2-4(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\mathrm{d}y^2)\right] =\\ = &-2\left(\frac{a}{m+n+p}\right)^{m+n+p-2} m^m n^m p^p\bigl(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\mathrm{d}y^2\bigr).\end{aligned}$$

Jak snadno nahlédneme, je tato kvadratická forma negativně definitní. Tedy funkce $u(x,y,z)$ na vázané lokální maximum $u_{\max} = \dfrac{m^m n^n p^p}{(m+n+p)^{m+n+p}}\,a^{m+n+p}$ v bodě $x = \dfrac{am}{m+n+p}$, $y = \dfrac{an}{m+n+p}$, $z = \dfrac{ap}{m+n+p}$.

7. Lagrangeova funkce $L(x,y,z) = \sin x \sin y \sin z - \lambda(x+y+z)$ má spojité parciální derivace všech řádů. Proto může vázaný extrém existovat pouze v bodech, kde

$$\left.\begin{array}{l} L'_x(x,y,z) = \cos x \sin y \sin z - \lambda = 0 \\ L'_y(x,y,z) = \sin x \cos y \sin z - \lambda = 0 \\ L'_z(x,y,z) = \sin x \sin y \cos z - \lambda = 0 \\ x+y+z = \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y = \operatorname{tg} z \Longrightarrow x = y = z = \frac{\pi}{6}\,.$$

Protože druhé parciální derivace Lagrangeovy funkce v tomto bodě jsou

$$L'_{xx} = L'_{yy} = L'_{zz} = -\frac{1}{8}\,, \quad L'_{xy} = L'_{xz} = L'_{yz} = \frac{3}{8}\,,$$

je druhý diferenciál Lagrangeovy funkce

$$\mathrm{d}^2 L = -\frac{1}{8}\big(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 - 6\mathrm{d}x\mathrm{d}y - 6\mathrm{d}x\mathrm{d}z - 6\mathrm{d}y\mathrm{d}z\big)$$

indefinitní. Protože z vazbové podmínky plyne rovnost $\mathrm{d}z = -\mathrm{d}x - \mathrm{d}y$, zajímá nás kvadratická forma

$$\Psi = -\big(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \mathrm{d}y^2\big)\,,$$

která je negativně definitní. Proto má funkce $u(x,y,z)$ na dané množině lokální maximum $u_{\max} = \dfrac{1}{8}$ v bodě $x = y = z = \dfrac{\pi}{6}$.

Najděte body, ve kterých mají následující funkce vázaný extrém:

8.	$u = xyz$	$x^2+y^2+z^2 = 1$	$x+y+z = 0$
9.	$u = xy + yz$	$x^2+y^2 = 2$	$y+z = 2\,, \quad y\,,\ z > 0$

Řešení:

8. Lagrangeova funkce $L(x,y,z) = xyz - \lambda\big(x^2+y^2+z^2\big) - \mu(x+y+z)$ má v celém $\mathbb{R}^3$ spojité parciální derivace všech řádů. Lokální extrémy proto mohou být pouze v bodech, kde

$$\left.\begin{array}{l} L'_x = yz - 2\lambda x - \mu = 0 \\ L'_y = xz - 2\lambda y - \mu = 0 \\ L'_z = xy - 2\lambda z - \mu = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \\ x+y+z = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} (x-y)(z+2\lambda) = 0 \\ (x-z)(y+2\lambda) = 0 \\ (y-z)(x+2\lambda) = 0 \\ \mu = \frac{1}{3}\,(xy+xz+yz) \\ \lambda = \frac{3}{2}\,xyz \end{array}$$

Tato soustava rovnic má šest řešení $x = y = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$, $z = -\dfrac{2}{\sqrt{6}}$, $\mu = -\dfrac{1}{6}$, $\lambda = -\dfrac{1}{2\sqrt{6}}$ nebo $x = y = -\dfrac{1}{\sqrt{6}}$, $z = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$, $\mu = -\dfrac{1}{6}$, $\lambda = \dfrac{1}{2\sqrt{6}}$ a další čtyři dostaneme tak, že mezi sebou zaměníme souřadnice x, y a z. Druhý diferenciál Lagrangeovy funkce je

$$\mathrm{d}^2 L(x,y,z) = 2\big(z\mathrm{d}x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x\mathrm{d}z + x\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \lambda\mathrm{d}x^2 - \lambda\mathrm{d}y^2 - \lambda\mathrm{d}z^2\big)\,.$$

Z vazbových podmínek plynou mezi diferenciály $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ a $\mathrm{d}z$ vztahy

$$\left.\begin{array}{l} x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z = 0 \\ \mathrm{d}x + \mathrm{d}y + \mathrm{d}z = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} \mathrm{d}x + \mathrm{d}y - 2\mathrm{d}z = 0 \\ \mathrm{d}x + \mathrm{d}y + \mathrm{d}z = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} \mathrm{d}y = -\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}z = 0 \end{array}$$

Proto nás zajímá kvadratická forma $\Phi(\mathrm{d}x) = -4(z+\lambda)\,\mathrm{d}x^2$. Protože v bodě $x = y = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$, $z = -\dfrac{2}{\sqrt{6}}$, $\lambda = -\dfrac{1}{2\sqrt{6}}$ je Φ pozitivně definitní má funkce $u(x,y,z)$ v tomto bodě lokální minimum $u_{\min} = -\dfrac{1}{3\sqrt{6}}$. Podobně zjistíme, že v bodě $x = y = -\dfrac{1}{\sqrt{6}}$, $z = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$ má funkce $u(x,y,z)$ lokální maximum $u_{\max} = \dfrac{1}{3\sqrt{6}}$.

9. Lagrangeova funkce $L(x,y,z) = xy + yz - \lambda\big(x^2+y^2\big) - \mu(y+z)$ má na množině $y > 0$, $z > 0$ spojité parciální derivace všech řádů. Proto budeme lokální extrémy hledat v bodech, kde je

$$\left.\begin{array}{l} L'_x(x,y,z) = y - 2\lambda x = 0 \\ L'_y(x,y,z) = x + z - 2\lambda y - \mu = 0 \\ L'_z(x,y,z) = y - \mu = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \\ y + z = 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} x = 1\,,\ y = z = 1\,,\ \mu = 1\,,\ \lambda = \frac{1}{2} \\ x = -1\,,\ y = z = 1\,,\ \mu = 1\,,\ \lambda = -\frac{1}{2} \end{array}$$

Druhý diferenciál Lagrangeovy funkce je

$$\mathrm{d}^2L(x,y,z) = -2\lambda\mathrm{d}x^2 + 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y - 2\lambda\mathrm{d}y^2 + 2\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,.$$

Tato kvadratická forma je obecně indefinitní. Ale z vazbových podmínek plynou vztahy

$$x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = 0\,,\quad \mathrm{d}y + \mathrm{d}z = 0\,.$$

V bodě $x = y = z = 1$, $\lambda = \frac{1}{2}$ je $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}y = \mathrm{d}z$, a protože kvadratická forma $\Phi = -6\mathrm{d}x^2$ je negativně definitní má funkce $u(x,y,z)$ lokální maximum $u_{\max} = 2$ v bodě $x = y = z = 1$.
V bodě $x = -1$, $y = z = 1$, $\lambda = -\frac{1}{2}$ je kvadratická forma $\Phi = 2\mathrm{d}x^2$ pozitivně definitní. Proto má funkce $u(x,y,z)$ lokální minimum $u_{\min} = 0$ v bodě $x = -1$ $y = z = 1$.

---

10. Najděte extrémy kvadratické formy $u = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$, $a_{ij} = a_{ji}$ při podmínce $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$.

Řešení: Lagrangeova funkce $L(\boldsymbol{x}) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j - \lambda\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$ ma na celém $\mathbb{R}^n$ spojité derivace všech řádů. Proto budeme lokální extrémy hledat v bodech, kde je

$$\left.\begin{array}{l} L'_k(\boldsymbol{x}) = 2\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ki}x_i - 2\lambda x_k = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}\,,$$

kde $\mathbf{A}$ je symetrická matice s prvky a_{ij}. To je rovnice n–tého stupně a tedy má n kořenů, když budeme počítat jejich násobnost. Tato čísla λ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ se nazývají vlastní čísla matice $\mathbf{A}$. Protože je matice $\mathbf{A}$ symetrická jsou všechna vlastní čísla reálná. Pak jsou $\boldsymbol{x}_k$ jednotkové vlastní vektory, příslušné k vlastním číslům λ_k. Tedy λ_k jsou řešení rovnice

$$\det\bigl(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\bigr) = 0\,,$$

kde $\mathbf{I}$ je jednotková matice.
Funkci $u(\boldsymbol{x})$ lze zapsat jako $u(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T\mathbf{A}\boldsymbol{x}$, kde $\boldsymbol{x}^T = \bigl(x_1, x_2, \ldots, x_n\bigr)$, a vazbovou podmínku jako $\boldsymbol{x}^T \cdot \boldsymbol{x} = 1$. Tedy její hodnota v bodě $\boldsymbol{x}_k$ je

$$u\bigl(\boldsymbol{x}_k\bigr) = \boldsymbol{x}_k^T\mathbf{A}\boldsymbol{x}_k = \lambda_k\boldsymbol{x}_k^T \cdot \boldsymbol{x}_k = \lambda_k\,.$$

Druhý diferenciál Lagrangeovy funkce je

$$\mathrm{d}^2L = 2\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_i - 2\lambda\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}x_i^2\,.$$

Z vazbové podmínky plyne, že $\mathrm{d}x_i$ musí splňovat rovnici

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\mathrm{d}x_i = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{x}^T \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0\,,$$

tj. vektory $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ jsou ortogonální k vektoru $\boldsymbol{x}$. Jak je známo, vlastní vektory $\boldsymbol{x}_k$ symetrické matice $\mathbf{A}$ lze vybrat tak, aby byly ortogonální. Tedy lze předpokládat, že platí $\boldsymbol{x}_i \cdot \boldsymbol{x}_k = \delta_{ik}$, kde $\delta_{ik} = 0$ pro $i \neq k$ a $\delta_{ik} = 1$ pro $i = k$.
Uvažujme řešení $\lambda = \lambda_k$ a $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_k$. Pak musí být $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ ortogonální k $\boldsymbol{x}_k$, a tedy lze psát

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \sum_{i\neq k} h_i\boldsymbol{x}_i\,.$$

Kvadratická forma $\Phi(\mathrm{d}\boldsymbol{x})$, která odpovídá druhému diferenciálu Lagrangeovy funkce je pro $\lambda = \lambda_k$ a $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_k$ rovna

$$\Phi = 2\bigl(\mathrm{d}\boldsymbol{x}^T\mathbf{A}\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \lambda_k\mathrm{d}x^T \cdot \boldsymbol{x}\bigr) = 2\left(\sum_{i,j\neq k} h_ih_j\boldsymbol{x}_i^T\mathbf{A}\boldsymbol{x}_j - \lambda_k\sum_{i,j,\neq k} h_ih_j\boldsymbol{x}_i^T \cdot \boldsymbol{x}_j\right) =$$
$$= 2\sum_{i\neq k}\bigl(\lambda_i - \lambda_k\bigr)h_i^2\,,$$

protože $\mathbf{A}\boldsymbol{x}_j = \lambda_j\boldsymbol{x}_j$ a $\boldsymbol{x}_i^T \cdot \boldsymbol{x}_j = \delta_{ij}$. Tedy pokud $\lambda_k = \lambda_{\max} > \lambda_i$ pro $i \neq k$ je kvadratická forma Φ negativně definitní a funkce $u(\boldsymbol{x})$ má lokální maximum $u_{\max} = \lambda_{\max}$.

Pokud pro všechna $i \neq k$ platí $\lambda_k = \lambda_{\min} < \lambda_i$, je kvadratická forma Φ negativně definitní a funkce $u(\boldsymbol{x})$ nabývá lokální minimum $u_{\min} = \lambda_{\min}$.
Pokud existují i a j takové, že $\lambda_i < \lambda_k < \lambda_j$, je kvadratická forma Φ indefinitní a funkce $u(\boldsymbol{x})$ nemá v bodě $\boldsymbol{x}_k$ extrém.

Najděte supremum a infimum následujících funkcí v daných oblastech:

11. $z = x - 2y - 3$	$0 \le x \le 1\,,\ 0 \le y \le 1\,,\ 0 \le x + y \le 1$
12. $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$	$x^2 + y^2 \le 25$
13. $z = x^2 - xy + y^2$	$\lvert x\rvert + \lvert y\rvert \le 1$
14. $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2$	$x^2 + y^2 + z^2 \le 100$
15. $u = x + y + z$	$x^2 + y^2 \le z \le 1$

Řešení:
11. Funkce $z = z(x,y) = x - 2y - 3$ je spojitá na kompaktní množině $M = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le 1,\, 0 \le x + y \le 1\big\}$. Proto má na M maximum a minimum. Ve vnitřních bodech množiny M může být extrém pouze v bodech $z'_x(x,y) = z'_y(x,y) = 0$. Ale takové body neexistují. Hranice ∂M je složena z množin $M_1 = \big\{(0,y)\,;\ 0 \le y \le 1\big\}$, $M_2 = \big\{(x,0)\,;\ 0 \le x \le 1\big\}$ a $M_3 = \big\{(x,1-x)\,;\ 0 \le x \le 1\big\}$. Na množině M_1 máme funkci $F_1(y) = -2y - 3$. Protože $F_1'(y) = -2 \neq 0$, může funkce nabývat největší a nejmenší hodnoty v krajních bodech, tj. v bodech $\boldsymbol{x}_1 = [0;0]$ nebo $\boldsymbol{x}_2 = [0;1]$. Podobné úvahy pro funkce $F_2(x)$ a $F_3(x)$ vedou k tomu, že extremální hodnotu může funkce $z(x,y)$ nabývat ještě v bodě $\boldsymbol{x}_3 = [1;1]$. Protože $z(0,0) = -3$, $z(0,1) = -5$ a $z(1,0) = -2$ je $\sup z = -2$ a $\inf z = -5$.
12. Funkce $z = z(x,y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ je spojitá na kompaktní množině $M = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ x^2 + y^2 \le 25\big\}$. Proto nabývá na M největší a nejmenší hodnoty. Ve vnitřku M° musí být v bodech, kde funkce nabývá extrém,

$$\left.\begin{aligned} z'_x(x,y) &= 2x - 12 = 0 \\ z'_y(x,y) &= 2y + 16 = 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow x = 6\,,\ y = -8\,.$$

Ale bod $[6;-8] \notin M$.
Hranice ∂M je dána rovnicí $x^2 + y^2 = 25$. Jedná se tedy o vázané extrémy, které lze najít například metodou Lagrangeových multiplikátorů. Na ∂M je $z(x,y) = 25 - 12x + 16y$. Proto lze vzít Lagrangeovu funkci ve tvaru $L(x,y) = 25 - 12x + 16y + \lambda\big(x^2 + y^2\big)$. Extrémy mohou být pouze v bodech, kde je

$$\left.\begin{aligned} &L'_x(x,y) = -12 + 2\lambda x = 0 \\ &L'_y(x,y) = 16 + 2\lambda y = 0 \\ &x^2 + y^2 = 25 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned} &\lambda = 2\,,\ x = 3\,,\ y = -4\,;\ z(3,-4) = -75 \\ &\lambda = -2\,,\ x = -3\,,\ y = 4\,;\ z(-3,4) = 125 \end{aligned}$$

Tedy $\sup z = 125$ a $\inf z = -75$.

13. Funkce $z = z(x,y) = x^2 - xy + y^2$ je spojitá na kompaktní množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ |x| + |y| \le 1\}$. Proto nabývá na M největší a nejmenší hodnoty. Této hodnoty může nabývat na vnitřku M° v bodech, kde

$$\left.\begin{array}{l} z'_x(x,y) = 2x - y = 0 \\ z'_y(x,y) = -x + 2y = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \boldsymbol{x}_0 = [0;0]\,,$$

nebo na hranici ∂M. Hranice se skládá ze čtyř částí:

$$\begin{array}{lll} y = 1 - x\,, & x \in \langle 0,1 \rangle & \Longrightarrow F_1(x) = 3x^2 - 3x + 1 \\ y = x - 1\,, & x \in \langle 0,1 \rangle & \Longrightarrow F_2(x) = x^2 - x + 1 \\ y = 1 + x\,, & x \in \langle -1,0 \rangle & \Longrightarrow F_3(x) = x^2 + x + 1 \\ y = -1 - x\,, & x \in \langle -1,0 \rangle & \Longrightarrow F_4(x) = 3x^2 + 3x + 1 \end{array}$$

Protože funkce $F_k(x)$ mají derivaci, může být extrém pouze v bodech, kde $F'_k(x) = 0$ nebo v krajních bodech intervalu. Takto získáme dalších možných 8 bodů:

$$\begin{array}{llll} \boldsymbol{x}_1 = \left[\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right], & \boldsymbol{x}_2 = \left[\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right], & \boldsymbol{x}_3 = \left[-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right], & \boldsymbol{x}_4 = \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right], \\ \boldsymbol{x}_5 = [1,;0]\,, & \boldsymbol{x}_6 = [0;1]\,, & \boldsymbol{x}_7 = [-1;0]\,, & \boldsymbol{x}_8 = [0;-1]\,. \end{array}$$

Protože $z(\boldsymbol{x}_0) = 0$, $z(\boldsymbol{x}_1) = z(\boldsymbol{x}_3) = \dfrac{1}{4}$, $z(\boldsymbol{x}_2) = z(\boldsymbol{x}_4) = \dfrac{3}{4}$, $z(\boldsymbol{x}_5) = z(\boldsymbol{x}_6) = z(\boldsymbol{x}_7) = z(\boldsymbol{x}_8) = 1$ je $\sup z = 1$ a $\inf z = 0$.

14. Protože je funkce $u = u(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ spojitá a množina $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x^2 + y^2 + z^2 \le 100\}$ kompaktní, existují v M body $\boldsymbol{x}_M$ a $\boldsymbol{x}_m$, ve kterých nabývá funkce $u(x,y,z)$ na množině M svého maxima a minima. V otevřené množině M° musí tyto body splňovat

$$\left.\begin{array}{l} u'_x(x,y,z) = 2x = 0 \\ u'_y(x,y,z) = 4y = 0 \\ u'_z(x,y,z) = 6z = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow x = y = z = 0\,.$$

Protože hranice ∂M je dána rovnicí $x^2 + y^2 + z^2 = 100$, lze extrémy na hranici hledat pomocí Lagrangeových multiplikátorů. Lagrangeova funkce je $L(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - \lambda(x^2 + y^2 + z^2)$. Funkce může nabývat extrémy v bodech, kde platí

$$\left.\begin{array}{l} L'_x(x,y,z) = 2x(1-\lambda) = 0 \\ L'_y(x,y,z) = 2y(2-\lambda) = 0 \\ L'_z(x,y,z) = 2z(3-\lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 100 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} \lambda = 1\,,\ x = \pm 10\,,\ y = z = 0 \\ \lambda = 2\,,\ y = \pm 10\,,\ x = z = 0 \\ \lambda = 3\,,\ z = \pm 10\,,\ x = y = 0 \end{array}$$

Protože u(0,0,0)=0, $u(\pm 10,0,0) = 100$, $u(0,\pm 10,0) = 200$ a $u(0,0,\pm 10) = 300$ je $\sup u = 300$ a $\inf u = 0$.

15. Protože je funkce $u = u(x, y, z) = x + y + z$ spojitá a množina $M = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x^2 + y^2 \le z \le 1\big\}$ je kompaktní, existují v M body $\boldsymbol{x}_M$ a $\boldsymbol{x}_m$, ve kterých nabývá funkce $u(x, y, z)$ svého maxima a minima. Množinu M rozdělíme na čtyři množiny, na nichž budeme hledat body, v nichž mohou být extrémy funkce $u(x, y, z)$.

$$\begin{aligned}
M_1 &= \big\{(x, y, z) \subset \mathbb{R}^3\,;\ x^2 + y^2 < z < 1\big\}\\
M_2 &= \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x^2 + y^2 = z < 1\big\}\\
M_3 &= \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\ z = 1\,,\ x^2 + y^2 < 1\big\}\\
M_4 &= \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\ z = 1\,,\ x^2 + y^2 = 1\big\}
\end{aligned}$$

Na otevřené množině M_1 mohou být extrémy pouze v bodech, kde

$$u'_x(x, y, z) = u'_y(x, y, z) = u'_z(x, y, z) = 0\,.$$

Tato množina je prázdná.
Na množině M_2 nabývá funkce $u(x, y, z)$ hodnot $F(x, y) = u\big(x, y, x^2 + y^2\big) = x + y + x^2 + y^2$. Funkce $F(x, y)$ může mít extrémy pouze v bodech, kde

$$\left.\begin{aligned} F'_x(x, y) = 1 + 2x = 0\\ F'_y(x, y) = 1 + 2y = 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow x = y = -\frac{1}{2}\,,\ z = \frac{1}{2}\,;\ u\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\,.$$

Na množině M_3 nabývá funkce $u(x, y, z)$ hodnot $F(x, y) = u(x, y, 1) = x + y + 1$. Funkce $F(x, y)$ může mít extrémy pouze v bodech, kde je $F'_x(x, y) = F'_y(x, y) = 0$. Takové body neexistují.
Na množině M_4 budeme hledat extrémy funkce $F(x, y) = u(x, y, 1) = x + y + 1$ s podmínkou $x^2 + y^2 = 1$. Úlohu můžeme řešit pomocí Lagrangeových multiplikátorů. Lagrangeova funkce je $L(x, y) = x + y + 1 - \lambda\big(x^2 + y^2\big)$. Extrémy mohou být pouze v bodech, kde

$$\left.\begin{aligned} &L'_x(x, y) = 1 - 2\lambda x = 0\\ &L'_y(x, y) = 1 - 2\lambda y = 0\\ &x^2 + y^2 = 1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned} &x = y = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,,\ z = 1\,,\ u\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 1\right) = 1 + \sqrt{2}\\ &x = y = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\,,\ z = 1\,,\ u\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 1\right) = 1 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

Tedy $\sup u = 1 + \sqrt{2}$ a $\inf u = -\dfrac{1}{2}$.

---

16. Dané kladné číslo a napište jakou součin n kladných činitelů tak, aby byl součet jejich převrácených hodnot nejmenší.

Řešení: Nechť $\boldsymbol{x} = \big(x_1, x_2, \ldots, x_n\big)$ kde $x_k > 0$. Naší úlohou je najít čísla x_k tak, aby $x_1 x_2 \ldots x_n = a$ a funkce $S(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \cdots + \dfrac{1}{x_n}$ nabývala nejmenší hodnoty. Jde tedy o nalezení minima funkce

$$S(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \quad \text{za podmínky} \ \ x_1 x_2 \ldots x_n = \prod_{i=1}^{n} x_i = a\,, \quad x_i > 0\,.$$

Tuto úlohu můžeme řešit pomocí metody Lagrangeových multiplikátorů. Lagrangeova funkce je $L(\boldsymbol{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x_i} + \lambda \prod\limits_{i=1}^{n} x_i$. Extrémy mohou být pouze v bodech, kde

$$\left.\begin{array}{l} L'_k(\boldsymbol{x}) = -\dfrac{1}{x_k^2} + \lambda \prod\limits_{i \neq k} x_i = 0 \\ \prod\limits_{i=1}^{n} x_i = a \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{1}{x_k} = \lambda a \Longrightarrow x_k = \frac{1}{\lambda a} \Longrightarrow x_k = \sqrt[n]{a}\,.$$

To, že v tomto bodě má funkce $S(\boldsymbol{x})$, plyne z toho, že například pro $x_1 \to 0_+$ je $S(\boldsymbol{x}) \to \infty$.

---

17. Dané kladné číslo a napište jako součet n čísel tak, aby byl součet jejich kvadrátů nejmenší.

Řešení: Nechť $\boldsymbol{x} = \bigl(x_1, x_2, \ldots, x_n\bigr)$. Naší úlohou je najít čísla x_k tak, aby $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = a$ a funkce $F(\boldsymbol{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$ nabývala nejmenší hodnoty. Jde tedy o nalezení minima funkce

$$F(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \quad \text{za podmínky} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = a\,, \quad x_i > 0\,.$$

Tuto úlohu můžeme řešit pomocí metody Lagrangeových multiplikátorů. Lagrangeova funkce je $L(\boldsymbol{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \lambda \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$. Extrémy mohou být pouze v bodech, kde

$$\left.\begin{array}{l} L'_k(\boldsymbol{x}) = 2x_k - \lambda = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = a \end{array}\right\} \Longrightarrow x_k = \frac{\lambda}{2} = \frac{a}{n}\,,\ F_{\min} = \frac{a^2}{n}\,.$$

---

18. V rovině je dáno n hmotných bodů $P_1 = [x_1; y_1]$, $P_2 = [x_2; y_2]$, $\ldots$, $P_n = [x_n; y_n]$ s hmotnostmi m_1, m_2, $\ldots$, m_n. Pro jaký bod $P = [x; y]$ je moment setrvačnosti tohoto systému hmotných bodů vzhledem k bodu P nejmenší?

Řešení: Moment setrvačnosti tohoto systému hmotných bodů vzhledem k bodu $[x; y]$ je

$$S(x, y) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Bigl(\bigl(x - x_i\bigr)^2 + \bigl(y - y_i\bigr)^2\Bigr)\,.$$

Naším úkolem je najít x a y tak, aby funkce $S(x,y)$ nabývala v tomto bodě minima. Protože má funkce $S(x,y)$ spojité parciální derivace všech řádů, musí být

$$\left.\begin{aligned} S'_x(x,y) &= 2\sum_{i=1}^{n} m_i\bigl(x-x_i\bigr) = 0 \\ S'_y(x,y) &= 2\sum_{i=1}^{n} m_i\bigl(y-y_i\bigr) = 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow x = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i\,,\ y = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i\,,$$

kde $M = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i$. Protože druhý diferenciál funkce $S(x,y)$

$$\mathrm{d}^2 S(x,y) = 2M\bigl(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2\bigr)$$

je pozitivně definitní, nabývá funkce $S(x,y)$ v tomto bodě lokálního minima. Jestliže budeme hledat globální extrémy funkce $S(x,y)$ na kompaktní množině $|x| \le K$, $|y| \le K$ pro dostatečně velké K, lze ukázat, že v tomto bodě nabývá funkce $S(x,y)$ nejmenší hodnoty na celém $\mathbb{R}^2$.

---

19. Jaké jsou rozměry pravoúhlého otevřeného bazénu, který má při daném objemu V nejmenší povrch?

Řešení: Označme a, b a c délku, šířku a výšku bazénu. Pro tyto tři veličiny má platit vztah $abc = V$. Povrch bazénu je $P(a,b,c) = ab + 2ac + 2bc$. Jedná se tedy o nalezení minima funkce $P(a,b,c)$ při podmínce $abc = V$, kde a, b, $c > 0$. Úlohu lze řešit pomocí Lagrangeových multiplikátorů. Lagrangeova funkce $L(a,b,c) = ab + 2ac + 2bc - \lambda abc$ má na celém $\mathbb{R}^3$ spojité parciální derivace všech řádů. Proto může mít extrémy pouze v bodech, kde

$$\left.\begin{aligned} &L'_a(a,b,c) = b + 2c - \lambda bc = 0 \\ &L'_b(a,b,c) = a + 2c - \lambda ac = 0 \\ &L'_c(a,b,c) = 2a + 2b - \lambda ab = 0 \\ &abc = V \end{aligned}\right\} \Longrightarrow a = b = \sqrt[3]{2V}\,,\ c = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}\,.$$

Lze se snadno přesvědčit, že funkce $P(a,b,c)$ nabývá na dané množině v tomto bodě minimum $P_{\min} = 3\sqrt[3]{4V^2}$.

---

20. Na kulové ploše $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ najděte bod, který má nejmenší součet čtverců vzdáleností od n daných bodů $P_i = [x_i; y_i; z_i]$, $i = 1, \dots, n$.

Řešení: Daná úloha je najít extrém funkce

$$f(x,y,z) = \sum_{i=1}^{n}\Bigl[\bigl(x-x_i\bigr)^2 + \bigl(y-y_i\bigr)^2 + \bigl(z-z_i\bigr)^2\Bigr]$$

při podmínce $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Protože je funkce $f(x,y,z)$ spojitá a množina $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ kompaktní, má daná úloha řešení. Úlohu lze řešit například metodou Lagrangeových multiplikátorů. Lagrangeova funkce

$$L(x,y,z) = \sum_{i=1}^{n} \Big[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 \Big] - \lambda \big(x^2 + y^2 + z^2 \big)$$

má na celém $\mathbb{R}^3$ spojité derivace všech řádů. Proto budeme hledat extrémy v bodech, kde

$$\begin{aligned}
L'_x(x,y,z) &= 2 \left(\sum_{i=1}^{n} (x - x_i) - \lambda x \right) = 2\Big((n - \lambda)x - n\overline{x} \Big) = 0 \\
L'_y(x,y,z) &= 2 \left(\sum_{i=1}^{n} (y - y_i) - \lambda y \right) = 2\Big((n - \lambda)y - n\overline{y} \Big) = 0 \\
L'_z(x,y,z) &= 2 \left(\sum_{i=1}^{n} (z - z_i) - \lambda z \right) = 2\Big((n - \lambda)z - n\overline{z} \Big) = 0 \\
x^2 + y^2 + z^2 &= 1
\end{aligned}$$

kde $\overline{x} = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\overline{y} = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i$, $\overline{z} = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} z_i$. Z této soustavy plyne

$$x = \frac{\overline{x}}{N}\,,\ y = \frac{\overline{y}}{N}\,,\ z = \frac{\overline{z}}{N}\,;$$

$$x = -\frac{\overline{x}}{N}\,,\ y = -\frac{\overline{y}}{N}\,,\ z = -\frac{\overline{z}}{N}\,,$$

kde $N = \sqrt{\overline{x}^2 + \overline{y}^2 + \overline{z}^2}$.
Dosazením do funkce $f(x,y,z)$ se snadno přesvědčíme, že minimum je v bodě $x = \dfrac{\overline{x}}{N}$, $y = \dfrac{\overline{y}}{N}$, $z = \dfrac{\overline{z}}{N}$.

---

21. Do polokoule s poloměrem R vepište kvádr s největším objemem.

Řešení: Je zřejmé, že jedna stěna hledaného kvádru bude ležet v rovině, která dělí kouli na dvě polokoule a střed této stěny bude ve středu koule. Označme a, b délky hran této stěny a c délku třetí hrany kvádru. Objem kvádru je $V = abc$. Protože je kvádr vepsán do polokoule musí pro kvádr s největším objemem platit $\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{b^2}{4} + c^2 = R^2$. Naším úkolem je najít maximum funkce $V(a,b,c) = abc$ při podmínce $a^2 + b^2 + 4c^2 = 4R^2$, kde a, b, $c \geq 0$. Protože je funkce $V(a,b,c)$ spojitá a množina M, na které hledáme extrém je kompaktní, řešení této úlohy existuje. Úlohu lze řešit pomocí Lagrangeových multiplikátorů. Lagrangeova funkce

$$L(a,b,c) = abc - \lambda \big(a^2 + b^2 + 4c^2 \big)$$

má spojité parciální derivace všech řádů na celém $\mathbb{R}^3$. Proto může nabývat extrém pouze v bodech, kde

$$\left.\begin{array}{l} L'_a(a,b,c) = bc - 2\lambda a = 0 \\ L'_b(a,b,c) = ac - 2\lambda b = 0 \\ L'_c(a,b,c) = ab - 8\lambda c = 0 \\ a^2 + b^2 + 4c^2 = 4R^2 \end{array}\right\} \Longrightarrow a = b = \frac{2R}{\sqrt{3}}\,,\ c = \frac{R}{\sqrt{3}} \Longrightarrow V = \frac{4}{3\sqrt{3}}\,R^3$$

nebo na hranici množiny M, tj. v bodech kde $a = 0$ nebo $b = 0$ nebo $c = 0$. Ale v těchto bodech je $V(a,b,c) = 0$. Tedy maximum nastane pro $a = b = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$, $c = \dfrac{R}{\sqrt{3}}$ a je $V_{\max} = \dfrac{4}{3\sqrt{3}}\,R^3$.

---

22. Do daného rotačního kužele vepište kvádr s největším objemem.

Řešení: Označme R poloměr a h výšku daného rotačního kužele. Z názoru je zřejmé, že jedna stěna hledaného kvádru leží v podstavě a vrcholy protější stěny leží na kuželové ploše (a co když ne?). Označme a a b délky hran stěny, která leží v podstavě a v délky třetí hrany. Pak je objem kvádru roven $V(a,b,v) = abv$. Z podobnosti trojúhelníků plyne, že $\dfrac{h}{R} = \dfrac{2v}{2R - \sqrt{a^2+b^2}}$, tj. $2Rv + h\sqrt{a^2+b^2} = 2Rh$. Naším úkolem je najít maximum funkce $V(a,b,v) = abv$ na množině M, která je dáno vztahy $2Rv + h\sqrt{a^2+b^2} = 2Rh$, a, b, $v \ge 0$. Protože je funkce $V(a,b,v)$ spojitá a množina M kompaktní, maximum existuje. Lze jej najít například metodou Lagrangeových multiplikátorů. Lagrangeova funkce

$$L(a,b,v) = abv - \lambda\big(2Rv + h\sqrt{a^2+b^2}\big)$$

má na množině M° spojité parciální derivace všech řádů. Proto může být její maximum pouze v bodech, kde

$$\left.\begin{array}{l} L'_a(a,b,v) = bv - \dfrac{\lambda h a}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0 \\ L'_b(a,b,v) = av - \dfrac{\lambda h b}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0 \\ L'_v(a,b,v) = ab - 2\lambda R = 0 \\ 2vR + h\sqrt{a^2+b^2} = 2Rh \end{array}\right\} \Longrightarrow a = b = \frac{2\sqrt{2}}{3}\,R\,,\ v = \frac{h}{3}\ ;\ V = \frac{8}{27}\,R^2 h\,.$$

nebo v bodech na hranici, tj. v bodech, kde $a = 0$ nebo $b = 0$ nebo $v = 0$. Ale v bodech hranice je $V = 0$. Tedy největší objem $V_{\max} = \dfrac{8}{27}\,R^2 h$ má kvádr pro $a = b = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\,R$, $c = \dfrac{h}{3}$.

---

23. Do elipsoidu $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ vepište kvádr s největším objemem.

Řešení: Označme souřadnice vrcholu kvádru, který leží v prvním oktantu, x, y a z, tj. x, y, $z > 0$. Je zřejmé, že ostatní vrcholy jsou $\pm x$, $\pm y$ a $\pm z$. Objem tohoto kvádru je $V(x,y,z) = 8xyz$. Protože vrcholy leží na danám elipsoidu, platí pro souřadnice vrcholů rovnost $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$. Budeme tedy hledat maximum funkce $V(x,y,z) = 8xyz$ na množině $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, kde x, y, $z \geq 0$. Jde tedy o maximum spojité funkce na kompaktní množině. Proto maximum existuje. Lagrangeova funkce

$$L(x,y,z) = 8xyz - \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)$$

má v $\mathbb{R}^3$ spojité parciální derivace všech řádů. Tedy maximum může být pouze v bodech, kde

$$\left.\begin{aligned} &L'_x(x,y,z) = 8yz - \frac{2\lambda x}{a^2} = 0 \\ &L'_y(x,y,z) = 8xz - \frac{2\lambda y}{b^2} = 0 \\ &L'_z(x,y,z) = 8xy - \frac{2\lambda z}{c^2} = 0 \\ &\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow x = \frac{a}{\sqrt{3}}\,,\ y = \frac{b}{\sqrt{3}}\,,\ z = \frac{c}{\sqrt{3}}\,;\ V = \frac{8}{3\sqrt{3}}\,abc\,,$$

nebo na hranici, tj. v bodech, ke $x = 0$, $y = 0$ nebo $z = 0$. Ale v těchto bodech je $V = 0$. Tedy maximum je $V_{\max} = \dfrac{8}{3\sqrt{3}}\,abc$.

---

24. Do rotačního kužele s délkou hrany l, která svírá se základnou úhel α, vepište kvádr s největším povrchem.

Řešení: Označme a, b délky stran stěny hranolu, která leží v podstavě kužele a c výšku hranolu. Povrch hranolu je $P(a,b,c) = 2(ab + ac + bc)$. Protože je hranol vepsán do kužele musí pro a, b a c platit vztah $\sqrt{a^2+b^2}\operatorname{tg}\alpha + 2c = 2l\sin\alpha$. Máme tedy najít extrém funkce $P(a,b,c)$ na množině M, která je dána vztahy $\sqrt{a^2+b^2}\operatorname{tg}\alpha + 2c = 2l\sin\alpha$, a, b, $c \geq 0$. Protože je funkce $P(a,b,c)$ spojitá a množina M je kompaktní, hledané maximum existuje. Lagrangeova funkce

$$L(a,b,c) = 2(ab + ac + bc) - \lambda\bigl(\sqrt{a^2+b^2}\operatorname{tg}\alpha + 2c\bigr)$$

má pro $a^2 + b^2 \neq 0$ spojité derivace všech řádů. Proto maxima může nabývat v bodech, kde

$$\left.\begin{aligned} &L'_a = 2(b+c) - \frac{\lambda a\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0 \\ &L'_b = 2(a+c) - \frac{\lambda b\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0 \\ &L'_c = 2(a+b) - 2\lambda = 0 \\ &\sqrt{a^2+b^2}\operatorname{tg}\alpha + 2c = 2l\sin\alpha \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned} a = b &= \frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha - 1}\,l\,, \\ c &= \frac{\operatorname{tg}\alpha - \sqrt{2}}{2\operatorname{tg}\alpha - \sqrt{2}}\,l\sin\alpha \end{aligned}$$

nebo na hranici množiny M, tj. pro $a = 0$, $b = 0$ nebo $c = 0$. Dosazením se lze přesvědčit, že pro $\operatorname{tg}\alpha > \sqrt{2}$ je maximum v bodě $a = b = \dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha - 1}$, $c = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \sqrt{2}}{2\operatorname{tg}\alpha - \sqrt{2}}\, l\sin\alpha$ a pro $\operatorname{tg}\alpha \le \sqrt{2}$ je maximum v bodě $a = b = \sqrt{2}l\cos\alpha$, $c = 0$.

---

25. Do části eliptického paraboloidu $\dfrac{z}{c} = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$, $0 \le z \le c$, vepište kvádr s největším objemem.

Řešení: Označme x, y a z souřadnice bodu kvádru, který leží na plášti eliptického paraboloidu, tj. platí rovnost $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z}{c}$. Strany hledaného kvádru pak jsou $2x$, $2y$ a $(c - z)$. Tedy jeho objem je $V(x, y, z) = 4xy(c - z)$. Máme tedy najít maximum funkce $V(x, y, z)$ na množině M, která je dána vztahy $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z}{c}$, kde $0 \le z \le c$. Protože je funkce $V(x, y, z)$ spojitá a množina M je kompaktní, maximum existuje. Lagrangeova funkce

$$L(x, y, z) = 4xy(c - z) - \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z}{c}\right)$$

má spojité derivace všech řádů na celém $\mathbb{R}^3$. Proto může funkce $V(x, y, z)$ nabývat maxima pouze v bodech, kde

$$\left.\begin{aligned} L'_x &= 4y(c - z) - \frac{2\lambda x}{a^2} = 0 \\ L'_y &= 4x(c - z) - \frac{2\lambda y}{b^2} = 0 \\ L'_z &= -4xy + \frac{\lambda}{c} = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} &+ \frac{y^2}{b^2} - \frac{z}{c} = 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow x = \frac{a}{2}\,,\ y = \frac{b}{2}\,,\ z = \frac{c}{2}\,;\ V = \frac{abc}{2}$$

nebo v bodech, kde $z = c$, resp. $x = y = z = 0$. Ale protože v těchto bodech je $V = 0$, jsou hrany kvádru $2x = a$, $2y = b$ a $z = \dfrac{c}{2}$. Objem hledaného kvádru je $V_{\max} = \dfrac{abc}{2}$.

---

26. Najděte vzdálenost bodu $M = [x_0; y_0; z_0]$ od roviny $Ax + By + Cz + D = 0$.

Řešení: Nechť je $P = [x; y; z]$ libovolný bod roviny $Ax+By+Cz+D = 0$. Vzdálenost bodu P od bodu M je $d = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$. Máme tedy hledat minimum funkce $d(x, y, z) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ s podmínkou $Ax + By + Cz + D = 0$, tedy vázaný extrém. Protože $d(x, y, z) \ge 0$, má funkce $d(x, y, z)$ extrémy ve stejných bodech jako funkce $d^2(x, y, z) = (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2$. Z technických důvodů budeme hledat extrémy této funkce. Lagrangeova funkce je

$$L(x, y, z) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - \lambda(Ax + By + Cz + D)\,.$$

Protože $L(x,y,z)$ má spojité derivace všech řádů, mohou být extrémy v bodech, kde

$$\left.\begin{aligned} L'_x &= 2(x-x_0) - A\lambda = 0 \\ L'_y &= 2(y-y_0) - B\lambda = 0 \\ L'_z &= 2(z-z_0) - C\lambda = 0 \\ Ax + By &+ Cz + D = 0 \end{aligned}\right\} \implies \begin{aligned} x &= x_0 - \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2+B^2+C^2}\,A \\ y &= y_0 - \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2+B^2+C^2}\,B \\ z &= z_0 - \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2+B^2+C^2}\,C \end{aligned}$$

Je zřejmé, že v tomto bodě nabývá funkce $d^2(x,y,z)$ své nejmenší hodnoty. Tedy $d = \dfrac{\bigl|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\bigr|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

---

27. Najděte vzdálenost mezi dvěmi přímkami v prostoru

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{a} \quad \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}\,.$$

Řešení: Parametrické rovnice daných přímek jsou

$$\begin{aligned} x &= x_1 + m_1 t_1\,, \quad y = y_1 + n_1 t_1\,, \quad z = z_1 + p_1 t_1\,, \\ x &= x_2 + m_2 t_2\,, \quad y = y_2 + n_2 t_2\,, \quad z = z_2 + p_2 t_2\,. \end{aligned}$$

Čtverec vzdálenosti mezi body ležícími na první a druhé přímce je

$D\bigl(t_1,t_2\bigr) = \bigl(x_1 - x_2 + m_1 t_1 - m_2 t_2\bigr)^2 + \bigl(y_1 - y_2 + n_1 t_1 - n_2 t_2\bigr)^2 + \bigl(z_1 - z_2 + p_1 t_1 - p_2 t_2\bigr)^2$.

Naším úkolem je najít minimum této funkce. V bodě, kde nabývá tato funkce minimum, musí být $D'_{t_1}\bigl(t_1,t_2\bigr) = 0$ a $D'_{t_2}\bigl(t_1,t_2\bigr) = 0$. Z toho plyne

$$\begin{aligned} &\bigl(m_1^2 + n_1^2 + p_1^2\bigr)t_1 - \bigl(m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2\bigr)t_2 = \\ &\qquad = m_1\bigl(x_2 - x_1\bigr) + n_1\bigl(y_2 - y_1\bigr) + p_1\bigl(z_2 - z_1\bigr) \\ &-\bigl(m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2\bigr)t_1 + \bigl(m_2^2 + n_2^2 + p_2^2\bigr)t_2 = \\ &\qquad = m_2\bigl(x_1 - x_2\bigr) + n_2\bigl(y_1 - y_2\bigr) + p_2\bigl(z_1 - z_2\bigr)\,. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy rovnic je

$$\begin{aligned} t_1 = \frac{1}{\Delta^2}\Bigl[&\Bigl(n_2\bigl(m_1 n_2 - m_2 n_1\bigr) + p_2\bigl(m_1 p_2 - m_2 p_1\bigr)\Bigr)\bigl(x_2 - x_1\bigr) + \\ &+ \Bigl(m_2\bigl(n_1 m_2 - n_2 m_1\bigr) + p_2\bigl(n_1 p_2 - n_2 p_1\bigr)\Bigr)\bigl(y_2 - y_1\bigr) + \\ &+ \Bigl(m_2\bigl(p_1 m_2 - p_2 m_1\bigr) + n_2\bigl(p_1 n_2 - p_2 n_1\bigr)\Bigr)\bigl(z_2 - z_1\bigr)\Bigr] \\ t_2 = \frac{1}{\Delta^2}\Bigl[&\Bigl(n_1\bigl(n_1 m_2 - n_2 m_1\bigr) + p_1\bigl(p_1 m_2 - p_2 m_1\bigr)\Bigr)\bigl(x_1 - x_2\bigr) + \\ &+ \Bigl(m_1\bigl(m_1 n_2 - m_2 n_1\bigr) + p_1\bigl(p_1 n_2 - p_2 n_1\bigr)\Bigr)\bigl(y_1 - y_2\bigr) + \\ &+ \Bigl(m_1\bigl(m_1 p_2 - m_2 p_1\bigr) + n_1\bigl(n_1 p_2 - n_2 p_1\bigr)\Bigr)\bigl(z_1 - z_2\bigr)\Bigr] \end{aligned}$$

kde

$$\Delta^2 = \big(m_1n_2 - m_2n_1\big)^2 + \big(m_1p_2 - m_2p_1\big)^2 + \big(n_1p_2 - n_2p_1\big)^2 .$$

Po dosazení pak dostaneme pro čtverec minimální vzdálenosti vztah

$$d^2 = \frac{1}{\triangle^2} \det \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}^2 ,$$

kde $\triangle^2 = \det \begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix}^2 + \det \begin{vmatrix} p_1 & m_1 \\ p_2 & m_2 \end{vmatrix}^2 + \det \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 .$

---

28. Najděte vzdálenost mezi parabolou $y = x^2$ a přímkou $x - y - 2 = 0$.

Řešení: Označme $\big[x_1; y_1\big]$, resp. $\big[x_2; y_2\big]$, libovolný bod paraboly $y_1 = x_1^2$, resp. přímky $y_2 = x_2 - 2$. Čtverec vzdálenosti mezi těmito body je

$$D\big(x_1, x_2\big) = \big(x_1 - x_2\big)^2 + \big(y_1 - y_2\big)^2 = \big(x_1 - x_2\big)^2 + \big(x_1^2 - x_2 + 2\big)^2 .$$

Naším úkolem je najít minimum této funkce. To může nastat pouze v bodech, kde $D_1'\big(x_1, x_2\big) = D_2'\big(x_1, x_2\big) = 0$. Z této soustavy plyne

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - x_2 + 2x_1\big(x_1^2 - x_2 + 2\big) = 0 \\ 2x_2 - x_1^2 - x_1 - 2 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow x_1 = \frac{1}{2} ,\ x_2 = \frac{11}{8} .$$

Je zřejmé, že funkce $D\big(x_1, x_2\big)$ nabývá v tomto bodě minimum. Vzdálenost tedy je $d = \dfrac{7}{4\sqrt{2}}$.

---

29. Najděte poloosy křivky druhého řádu $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$.

Řešení: Nechť je $[x; y]$ bodem křivky $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$. Poloosa této křivky bude procházet bodem $[x; y]$ právě tehdy, když bude vzdálenost bodu $[x; y]$ od počátku nabývat extrém. Tedy budeme hledat extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ za podmínky $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$. Lagrangeova funkce

$$L(x, y) = x^2 + y^2 - \lambda\big(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2\big)$$

má spojité parciální derivace všech řádů. Proto může nabývat extrém pouze v bodech, kde

$$\left.\begin{array}{l} L_x'(x, y) = 2x - 2\lambda\big(Ax + By\big) = 0 \\ L_y'(x, y) = 2y - 2\lambda\big(Bx + Cy\big) = 0 \\ Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \boldsymbol{x} = \lambda \mathbf{A} \boldsymbol{x} ,$$

kde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ a $\boldsymbol{x}^T = (x, y)$. Čísla λ_1 a λ_2 jsou řešením kvadratické rovnice

$$\det \begin{pmatrix} \lambda A - 1 & \lambda B \\ \lambda B & \lambda C - 1 \end{pmatrix} = \big(\lambda A - 1\big)\big(\lambda C - 1\big) - \lambda^2 B^2 = 0 .$$

Vazbovou podmínku $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$ lze zapsat jako $\boldsymbol{x}^T \mathbf{A} \boldsymbol{x} = 1$. Tedy extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 = \boldsymbol{x}^T \cdot \boldsymbol{x}$ jsou

$$\boldsymbol{x}^T \cdot \boldsymbol{x} = \lambda_{1,2} \boldsymbol{x}^T \mathbf{A} \boldsymbol{x} = \lambda_{1,2}\,.$$

Proto jsou délky poloos dané křivky rovny $a^2 = \lambda_1$ a $b^2 = \lambda_2$.

---

30. Najděte poloosy plochy druhého řádu $Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz = 1$.

Řešení: Podobně jako v příkladě **29** dostaneme, že délky poloos jsou $a^2 = \lambda_1$, $b^2 = \lambda_2$ a $c^2 = \lambda_3$, kde λ_1, λ_2 a λ_3 jsou řešení rovnice

$$\det \begin{pmatrix} A\lambda - 1 & D\lambda & E\lambda \\ D\lambda & B\lambda - 1 & F\lambda \\ E\lambda & F\lambda & C\lambda - 1 \end{pmatrix} = 0\,.$$

---

31. Určete plochu elipsy vytvořené průnikem válce $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1$ a roviny $Ax + By + Cz = 0$.

Řešení: Průnik eliptického válce $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ a roviny $Ax + By + Cz = 0$, je elipsa se středem v počátku. Protože obsah elipsy s poloosami α a β je $S = \pi\alpha\beta$, stačí najít poloosy dané elipsy. Ty lze najít tak, že určíme největší a nejmenší vzdálenost na průniku daných ploch od počátku. Tedy budeme hledat extrémy funkce $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ za podmínek $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ a $Ax + By + Cz = 0$. Lagrangeova funkce

$$L(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) - \mu\big(Ax + By + Cz\big)$$

má spojité derivace všech řádů. Extrémy tedy budou v bodech, kde

$$\begin{aligned}
&L'_x(x,y,z) = 2x - \frac{2\lambda x}{a^2} - \mu A = 0 \\
&L'_y(x,y,z) = 2y - \frac{2\lambda y}{b^2} - \mu B = 0 \\
&L'_z(x,y,z) = 2z - \mu C = 0 \\
&\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\
&Ax + By + Cz = 0
\end{aligned}$$

Jestliže první rovnici vynásobíme x, druhou y, třetí z a sečteme, dostaneme vzhledem k vazbovým podmínkám vztah $\lambda = x^2 + y^2 + z^2$. Z prvních tří rovnic plyne

$$x = \frac{Aa^2\mu}{2\big(a^2 - \lambda\big)}\,, \quad y = \frac{Bb^2\mu}{2\big(b^2 - \lambda\big)}\,, \quad z = \frac{C\mu}{2}\,.$$

Dosazení do vazbových podmínek dává pro λ rovnici

$$\lambda^2 - \frac{a^2\bigl(A^2+C^2\bigr)+b^2\bigl(B^2+C^2\bigr)}{C^2}\,\lambda + a^2b^2\,\frac{A^2+B^2+C^2}{C^2} = 0\,.$$

Z této rovnice plyne, že $\lambda_1\lambda_2 = a^2b^2\,\dfrac{A^2+B^2+C^2}{C^2}$. Protože poloosy jsou $\sqrt{\lambda_{1,2}}$, je hledaný obsah plochy roven $S = \dfrac{\pi ab}{|C|}\sqrt{A^2+B^2+C^2}$.

---

32. Podle *Fermatova principu* se světelný paprsek vycházející z bodu A a dopadající do bodu B pohybuje po dráze, na níž potřebuje ke svému pohybu nejkratší čas. Předpokládejte, že dva body A a B jsou v různých optických prostředích, které jsou odděleny rovinou. Rychlost světla v prvním prostředí je v_1 a rychlost světla v druhém prostředí je v_2. Odvoďte zákon lomu světla.
Řešení: Zvolme systém souřadnic tak, že rovina mezi dvěma prostředími je $x=0$, bod A má souřadnice $A=\bigl[-x_A;0;0\bigr]$, $x_A>0$, a bod B souřadnice $B=\bigl[x_B;y_B;0\bigr]$, $x_B>0$. Bod, v němž paprsek z bodu A do bodu B protne rovinu dopadu označme $C=\bigl[0;y;z\bigr]$. Pak paprsek z bodu A do bodu B dorazí za dobu

$$T(y,z) = \frac{\sqrt{x_A^2+y^2+z^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{x_B^2+\bigl(y-y_B\bigr)^2+z^2}}{v_2}\,.$$

Podle Fermatova principu se paprsek pohybuje tak, že funkce $T(y,z)$ nabývá minimum. Tedy y a z musí splňovat soustavu rovnic

$$T'_y(y,z) = \frac{1}{v_1}\,\frac{y}{\sqrt{x_A^2+y^2+z^2}} + \frac{1}{v_2}\,\frac{y-y_B}{\sqrt{x_B^2+\bigl(y-y_B\bigr)^2+z^2}} = 0$$

$$T'_z(y,z) = \frac{1}{v_1}\,\frac{z}{\sqrt{x_A^2+y^2+z^2}} + \frac{1}{v_2}\,\frac{z}{\sqrt{x_B^2+\bigl(y-y_B\bigr)^2+z^2}} = 0$$

Z této soustavy dostaneme $z=0$ a pro y rovnici

$$\frac{1}{v_1}\,\frac{y}{\sqrt{x_A^2+y^2}} + \frac{1}{v_2}\,\frac{y-y_B}{\sqrt{x_B^2+\bigl(y-y_B\bigr)^2}} = 0\,.$$

Jestliže označíme α_1, resp. α_2, úhel mezi směrem dopadajícího, resp. lomeného, paprsku a normálou k rovině dopadu, lze tento vztah přepsat jako

$$\frac{\sin\alpha_1}{v_1} + \frac{\sin\alpha_2}{v_2} = 0\,.$$

---

33. Proměnné x a y splňují lineární rovnici $y = ax+b$, jejíž koeficienty je třeba určit. V řadě měření veličin x a y byly zjištěny hodnoty $[x_i; y_i]$, $i = 1, \dots, n$. Metodou nejmenších čtverců najděte nejpravděpodobnější hodnoty a a b.
Řešení: Podle metody nejmenších čtverců jsou nejpravděpodobnější ty hodnoty a a b, pro které je nejmenší výraz

$$D(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \triangle_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \big(ax_i + b - y_i\big)^2 .$$

Extrém funkce $D(a,b)$ je v bodě, kde

$$\left.\begin{aligned} D'_a(a,b) &= 2\sum_{i=1}^{n} x_i\big(ax_i + b - y_i\big) = 0 \\ D'_b(a,b) &= 2\sum_{i=1}^{n} \big(ax_i + b - y_i\big) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned} a &= \frac{\overline{x}\cdot\overline{y} - \overline{xy}}{\big(\overline{x}\big)^2 - \overline{\big(x^2\big)}} \\ b &= \overline{y} - a\overline{x}\,, \end{aligned}$$

kde $\overline{f(x,y)} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)$.

---

34. V rovině je dán systém n bodů $M_i = [x_i; y_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$. Pro jakou přímku $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ je součet čtverců vzdáleností daných bodů od této přímky nejmenší?
Řešení: Nejprve nalezneme čtverec vzdálenosti bodu $\big[x_0; y_0\big]$ od přímky $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$, tj. najdeme minimum funkce $f(x,y) = \big(x-x_0\big)^2 + \big(y-y_0\big)^2$ za podmínky $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$. Lagrangeova funkce je

$$L(x,y) = \big(x-x_0\big)^2 + \big(y-y_0\big)^2 - \lambda\big(x\cos\alpha + y\sin\alpha - p\big)\,.$$

Minimum funkce $f(x,y)$ může ležet pouze v bodech, kde

$$\left.\begin{aligned} &L'_x(x,y) = 2\big(x-x_0\big) - \lambda\cos\alpha = 0 \\ &L'_y(x,y) = 2\big(y-y_0\big) - \lambda\sin\alpha = 0 \\ &x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned} &x = x_0 + \frac{\lambda}{2}\cos\alpha \\ &y = y_0 + \frac{\lambda}{2}\sin\alpha \\ &x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p + \frac{\lambda}{2} = 0 \end{aligned}$$

Dosazením pak dostaneme, že čtverec vzdálenosti je

$$d^2 = \big(p - x_0\cos\alpha - y_0\sin\alpha\big)^2 .$$

Naším úkolem tedy je najít minimum funkce

$$D(\alpha,p) = \sum_{i=1}^{n} \big(p - x_i\cos\alpha - y_i\sin\alpha\big)^2 .$$

Extrémy mohou ležet pouze v bodech, kde $D'_\alpha(\alpha, p) = D'_p(\alpha, p) = 0$. Z toho dostaneme

$$\sum_{i=1}^{n}\big(x_i \sin\alpha - y_i\cos\alpha\big)\big(p - x_i\cos\alpha - y_i\sin\alpha\big) =$$
$$= p\big(\overline{x}\sin\alpha - \overline{y}\cos\alpha\big) - \big(\overline{(x^2)} - \overline{(y^2)}\big)\cos\alpha\sin\alpha + \overline{xy}\big(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\big) = 0$$
$$\sum_{i=1}^{n}\big(p - x_i\cos\alpha - y_i\sin\alpha\big) = p - \overline{x}\cos\alpha - \overline{y}\sin\alpha = 0\,.$$

Řešení této soustavy rovnic je

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2(\overline{xy} - \overline{x}\cdot\overline{y})}{\Big[\overline{(x^2)} - (\overline{x})^2\Big] - \Big[\overline{(y^2)} - (\overline{y})^2\Big]}\,,$$
$$p = \overline{x}\cos\alpha + \overline{y}\sin\alpha\,.$$

---

35. Na intervalu $\langle 1, 3\rangle$ nahraďte funkci x^2 přímkou $ax + b$ tak, aby absolutní odchylka $\triangle = \big|x^2 - (ax + b)\big|$, $1 \le x \le 3$, byla nejmenší.

Řešení: Protože odchylka Δ dvou spojitých funkcí $f(x)$ a $g(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$ je definována vztahem $\Delta = \sup\limits_{x\in\langle a,b\rangle}\big|f(x) - g(x)\big|$, je naším úkolem najít minimum funkce

$$F(a, b) = \max_{x\in\langle 1,3\rangle}\big|x^2 - ax - b\big|\,,$$

kde a, $b \in \mathbb{R}$. Protože funkce $\big|x^2 - ax - b\big|$ může na intervalu $x \in \langle 1, 3\rangle$ nabývat největší hodnotu pouze v bodech $x = 1$, $x = 3$, $x = \dfrac{a}{2} \in \langle 1, 3\rangle$ nebo $x^2 - ax - b = 0$, je funkce $F(a, b)$ rovna

$$F(a,b) = \begin{cases} \max\Big(\big|1 - a - b\big|, \big|9 - 3a - b\big|\Big) & a \notin (2, 6) \\ \max\left(\big|1 - a - b\big|, \big|9 - 3a - b\big|, \dfrac{\big|a^2 + 4b\big|}{4}\right) & a \in (2, 6) \end{cases}$$

Na množině $M = \big\{(a, b) \in \mathbb{R}^2;\ a \in (-\infty, 1)\,, |1 - a - b| > |9 - 3a - b|\big\}$ je $F(a, b) = |1 - a - b|$. Protože $F'_a = \pm 1 \ne 0$. Nemá funkce $F(a, b)$ na této množině minimum. Z podobných úvah plyne, že minimum může být pouze v bodech, pro které platí

$$\big|1 - a - b\big| = \big|9 - 3a - b\big|\,, \quad a = 2,\, 6$$

nebo

$$\big|1 - a - b\big| = \big|9 - 3a - b\big| = \frac{\big|a^2 + 4b\big|}{4}\,, \quad a \in (2, 6)\,.$$

Tato soustava rovnic má řešení $a = 2$, $b = 1$; $a = 6$, $b = -7$ nebo $a = 4$, $b = -\dfrac{7}{2}$. Protože je $F(2,1) = 2$, $F(6,-7) = 2$ a $F\left(4, -\dfrac{7}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$, je odchylka minimální pro $a = 4$, $b = -\dfrac{7}{2}$ a je rovna $\triangle = \dfrac{1}{2}$.

Cvičení 15

Integrál funkce více proměnných. Fubiniova věta.

Jak je definován integrál funkce více proměnných, se pokusím ukázat pro funkci tří proměnných. Zobecnění na jiný počet proměnných by mohlo být jasné.

Nechť je omezená funkce $f(x,y,z)$ definována v kvádru $\mathcal{V} = \langle a_1, a_2\rangle \times \langle b_1, b_2\rangle \times \langle c_1, c_2\rangle$. Dělením $\mathcal{D}$ nazvu jakékoliv rozdělení kvádru $\mathcal{V}$ rovinami $x = x_i$, $y = y_j$, $z = z_k$, pro které platí $a_1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = a_2$, $b_1 = y_0 < y_1 < \cdots < y_q = b_2$, $c_1 = z_0 < z_1 < \cdots < z_r = c_2$, kde $p, q, r \in \mathbb{N}$, na podkvádry $\mathcal{V}_{ijk} = \langle x_{i-1}, x_i\rangle \times \langle y_{j-1}, y_j\rangle \times \langle z_{k-1}, z_k\rangle$, $i = 1, \ldots, p$, $j = 1, \ldots, q$, $k = 1, \ldots, r$, s objemem $V_{ijk} = (x_i - x_{i-1}) \cdot (y_j - y_{j-1}) \cdot (z_k - z_{k-1})$.
Množinu všech dělení označme $\mathfrak{D}$.
Označme dále $M_{ijk} = \sup\limits_{\mathcal{V}_{ijk}} f(x,y,z)$ a $M_{ijk} = \inf\limits_{\mathcal{V}_{ijk}} f(x,y,z)$. Pro dané dělení $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$ definujme dolní součet $s_{\mathcal{D}}(f)$ a horní součet $S_{\mathcal{D}}(f)$ funkce $f(x,y,z)$ pro dělení $\mathcal{D}$ vztahy

$$s_{\mathcal{D}}(f) = \sum_{\substack{i=1,\ldots,p\\ j=1,\ldots,q\\ k=1,\ldots,r}} m_{ijk} V_{ijk} \qquad \text{a} \qquad S_{\mathcal{D}}(f) = \sum_{\substack{i=1,\ldots,p\\ j=1,\ldots,q\\ k=1,\ldots,r}} M_{ijk} V_{ijk}\,.$$

Lze ukázat, že existují dolní Riemannův integrál $s(f)$ a horní Riemannův integrál $S(f)$ funkce $f(x,y,z)$, které jsou definovány vztahy

$$s(f) = \sup_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} s_{\mathcal{D}}(f) \qquad \text{a} \qquad S(f) = \inf_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} S_{\mathcal{D}}(f)\,.$$

Jestliže platí rovnost $s(f) = S(f)$ nazývá se tato společná hodnota *Riemannův integrál funkce* $f(x,y,z)$ přes kvádr $\mathcal{V}$ a značí se

$$\iiint_{\mathcal{V}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

a funkce $f(x,y,z)$ se nazývá *integrovatelná* (v Riemannově smyslu) na kvádru $\mathcal{V}$.

Je-li Ω omezená množina, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\mathcal{V}$ je kvádr takový, že $\Omega \subset \mathcal{V}$ a $f^* : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$, pro které je $f^*(x,y,z) = 0$ na $\mathcal{V} \setminus \Omega$, píšeme

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{\mathcal{V}} f^*(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,,$$

pokud integrál vpravo existuje. Taková funkce $f(x,y,z)$ se nazývá *integrovatelná* (v Riemannově smyslu) *na množině* Ω.

Jedna z metod, jak počítat vícenásobné integrály, je převedení počítaného integrálu na integrály nižších řádů. Platí

Věta *(Fubiniova)***.** *Nechť* $f : \Omega \to \mathbb{R}$, *kde* $\Omega \subset \mathbb{R}^{m+n}$. *Budeme psát* $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, *kde* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$ *a* $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$. *Pro pevné* $\boldsymbol{x}$, *resp.* $\boldsymbol{y}$, *definujme funkce* $f_{\boldsymbol{x},*} : \Omega_{\boldsymbol{x}} \to \mathbb{R}$, *kde* $\Omega_{\boldsymbol{x}} = \big\{ y \in \mathbb{R}^n\,;\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \Omega \big\}$ *a* $f_{\boldsymbol{x},*}(\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, *resp.* $f_{*,\boldsymbol{y}} : \Omega_{\boldsymbol{y}} \to \mathbb{R}$, *kde* $\Omega_{\boldsymbol{y}} = \big\{ x \in \mathbb{R}^m\,;\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \Omega \big\}$ *a* $f_{*,\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.
Nechť $\mathcal{E} = \big\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m\,;\ \Omega_{\boldsymbol{x}} \neq 0 \big\}$ *a* $\mathcal{F} = \big\{ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n\,;\ \Omega_{\boldsymbol{y}} \neq 0 \big\}$.
Nechť je funkce f *integrovatelná na* Ω. *Pak pro skoro všechna* $\boldsymbol{x} \in \mathcal{E}$ *a skoro všechna* $\boldsymbol{y} \in \mathcal{F}$ *existují*

$$E(\boldsymbol{x}) = \int_{\Omega_{\boldsymbol{x}}} f_{\boldsymbol{x},*}(\boldsymbol{y})\, dy_1 \,\ldots\, dy_n \quad \text{a} \quad F(\boldsymbol{y}) = \int_{\Omega_{\boldsymbol{y}}} f_{*,\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x})\, dx_1 \,\ldots\, dx_m$$

a platí

$$\int_\Omega f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, dx_1 \,\ldots\, dx_m\, dy_1 \,\ldots\, dy_n = \int_{\mathcal{E}} E(\boldsymbol{x})\, dx_1 \,\ldots\, dx_m = \int_{\mathcal{F}} F(\boldsymbol{y})\, dy_1 \,\ldots\, dy_n\,.$$

Speciální případy:
a) Nechť $\Omega = \big\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\ a \le x \le b\,,\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \big\}$, kde y_1 a y_2 jsou spojité funkce na $\langle a, b\rangle$. Je-li f integrovatelná na Ω, pak

$$\iint_\Omega f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y\,.$$

b) Nechť $\Omega = \big\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\ a \le x \le b\,,\ y_1(x) \le y \le y_2(x)\,,\ z_1(x, y) \le z \le z_2(x, y) \big\}$, kde y_1, y_2, z_1 a z_2 jsou spojité funkce. Je-li f integrovatelná na Ω, je

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z\,.$$

Někdy je vhodné použít vztah

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_a^b \mathrm{d}x \iint_{S(x)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,,$$

kde $S(x)$ je řez oblasti Ω rovinou $x = \text{konst.}$

Určete oblast integrace pro obě pořadí integrování:

1. Ω je trojúhelník s vrcholy $O = [0; 0]\,,\ A = [1, 0]\,,\ B = [1, 1]$
2. Ω je trojúhelník s vrcholy $O = [0; 0]\,,\ A = [2; 1]\,,\ B = [-2; 1]$
3. Ω je kruh $x^2 + y^2 \le 1$
4. Ω je kruh $x^2 + y^2 \le y$
5. Ω část roviny ohraničená křivkami $y = x^2\,,\ y = 1$

6. Ω je mezikruží $1 \le x^2 + y^2 \le 4$

Řešení: Nejlepší je si ve všech případech nakreslit oblast Ω. Ale řešení lze najít i algebraicky.

1. Oblast Ω lze zapsat jako průnik polorovin $y \ge 0$, $x \le 1$ a $x - y \ge 0$. Tedy body oblasti Ω musí splňovat nerovnosti $0 \le y \le x \le 1$.

Pro pevné $x \in \langle 0, 1\rangle$ musí být $0 \le y \le x$ a pro $x \notin \langle 0, 1\rangle$ žádné y neexistuje. Tedy $\int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y$.

Pro pevné $y \in \langle 0, 1\rangle$ musí být $y \le x \le 1$ a pro $y \notin \langle 0, 1\rangle$ žádné x neexistuje. Tedy $\int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_x^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x$.

2. Trojúhelník Ω je průnikem tří polorovin $x + 2y \ge 0$, $x - 2y \le 0$ a $y \le 1$, neboli $-2y \le x \le 2y$, $y \le 1$.

Pro pevné $y \in \langle 0, 1\rangle$ je $x \in \langle -2y, 2y\rangle$. Pro $y \notin \langle 0, 1\rangle$ je $\Omega_{*,y} = \emptyset$. Tedy

$$\int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{-2y}^{2y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,.$$

Jestliže napíšeme nerovnosti, které definují Ω ve tvaru $\frac{x}{2} \le y \le 1$ a $-\frac{x}{2} \le y \le 1$, je zřejmé, že $x \in \langle -2, 2\rangle$. Pro $x \in \langle 0, 2\rangle$ musí být $y \in \left\langle \frac{x}{2}, 1 \right\rangle$ a pro $x \in \langle -2, 0\rangle$ je $y \in \left\langle -\frac{x}{2}, 1 \right\rangle$. Tedy platí

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{-2}^0 \mathrm{d}x \int_{-x/2}^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_0^2 \mathrm{d}x \int_{x/2}^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y = \\ &= \int_{-2}^2 \mathrm{d}x \int_{|x|/2}^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,.\end{aligned}$$

3. Nerovnost $x^2 + y^2 \le 1$ lze zapsat jako $-\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}$ a $-1 \le x \le 1$, resp. $-\sqrt{1-y^2} \le x \le \sqrt{1-y^2}$ a $-1 \le y \le 1$. Proto je

$$\int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^1 \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^1 \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,.$$

4. Nerovnost, která definuje kruh Ω lze zapsat ve tvaru $-\sqrt{y-y^2} \le x \le \sqrt{y-y^2}$ a $0 \le y \le 1$. Proto je

$$\int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,.$$

Jiná možnost je zapsat Ω pomocí nerovností $\dfrac{1-\sqrt{1-4x^2}}{2} \le y \le \dfrac{1+\sqrt{1-4x^2}}{2}$ a $-\dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{1}{2}$. Z tohoto vyjádření dostaneme

$$\int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1/2}^{1/2} \mathrm{d}x \int_{\left(1-\sqrt{1-4x^2}\right)/2}^{\left(1+\sqrt{1-4x^2}\right)/2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,.$$

5. V tomto případě se oblastí Ω myslí omezená část roviny, pro kterou platí nerovnosti $y \le 1$ a $y \ge x^2$, tj. $x^2 \le y \le 1$.
Jedna z možností, jak zapsat tyto nerovnice je $x^2 \le y \le 1$ a $-1 \le x \le 1$. Tento zápis vede k vyjádření

$$\int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_{x^2}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Jiná možnost je napsat nerovnosti ve tvaru $-\sqrt{y} \le x \le \sqrt{y}$ a $0 \le y \le 1$. Odsud dostaneme

$$\int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,.$$

6. Oblast Ω je dána dvěma nerovnostmi $x^2+y^2 \le 4$ a $x^2+y^2 \ge 1$. Z první nerovnosti plyne, že $-2 \le x \le 2$ a $-\sqrt{4-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2}$. Pro $x \in \langle -2,-1\rangle$ **nebo** $x \in \langle 1,2\rangle$ je druhá nerovnost splněna vždy. Ale pro $x \in \langle -1,1\rangle$ musí navíc platit $y \ge \sqrt{1-x^2}$ **nebo** $y \le -\sqrt{1-x^2}$. Tedy pro $x \in \langle -1,1\rangle$ dostaneme nerovnosti $-\sqrt{4-x^2} \le y \le -\sqrt{1-x^2}$ **nebo** $\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2}$. Protože jsou všechny tyto množiny disjunktní, je

$$\int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-2}^{-1} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_1^2 \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y +$$
$$+ \int_{-1}^{1} \left[\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right].$$

---

7. Vypočtěte $\displaystyle\iint_\Omega xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde Ω je oblast ohraničená parabolou $y^2 = 2px$ a přímkou $x = \dfrac{p}{2}$, kde $p > 0$.

Řešení: Máme integrovat přes omezenou oblast Ω v rovině danou nerovnostmi $y^2 \le 2px$ a $x \le \dfrac{p}{2}$. Jedna z možností je, že nerovnosti, které určují oblast Ω napíšeme ve tvaru $-\sqrt{2px} \le y \le \sqrt{2px}$ a $0 \le x \le \dfrac{p}{2}$. Pak dostaneme

$$\int_\Omega xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{p/2} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}} xy^2\,\mathrm{d}y = \frac{1}{3}\int_0^{p/2} 2x\left(\sqrt{2px}\right)^3 \mathrm{d}x =$$
$$= \frac{4p\sqrt{2p}}{3}\int_0^{p/2} x^{5/2}\,\mathrm{d}x = \frac{p^5}{21}\,.$$

Kdybychom zapsali oblast Ω pomocí nerovností $\dfrac{y^2}{2p} \le x \le \dfrac{p}{2}$ a $-p \le y \le p$, dostaneme

$$\int_\Omega xy^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_{-p}^{p} \mathrm{d}y \int_{y^2/(2p)}^{p/2} xy^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{-p}^{p} y^2 \left(\frac{p^2}{4} - \frac{y^4}{4p^2} \right) \mathrm{d}y = \frac{p^5}{21} \, .$$

---

8. Vypočtěte $\displaystyle\iint_\Omega \frac{\mathrm{d}x \, \mathrm{d}y}{\sqrt{2a - x}}$, $a > 0$, kde Ω je oblast omezená kratším obloukem kružnice se středem v bodě $[a; a]$ a poloměrem a a osami souřadnic.
Řešení: Rovnice dané kružnice je $(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$. Jestliže si třeba načrtnete obrázek (ale lze to i jinak), zjistíte, že integrační oblast Ω je dána nerovnostmi $0 \le x \le a$ a $0 \le y \le a - \sqrt{2ax - x^2}$. Podle Fubiniovy věty tedy platí

$$\iint_\Omega \frac{\mathrm{d}x \, \mathrm{d}y}{\sqrt{2a - x}} = \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^{a - \sqrt{x(2a-x)}} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{2a - x}} = \int_0^a \left(\frac{a}{\sqrt{2a - x}} - \sqrt{x} \right) \mathrm{d}x =$$
$$= \left[-2a\sqrt{2a - x} - \frac{2}{3} \, x^{3/2} \right]_0^a = \left(2\sqrt{2} - \frac{8}{3} \right) a^{3/2} \, .$$

---

9. Vypočtěte $\displaystyle\iint_\Omega |xy| \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, kde Ω je kruh s poloměrem a se středem v počátku souřadnic.
Řešení: Integrační oblast Ω je kruh $x^2 + y^2 \le a^2$. Protože je integrovaná funkce $f(x, y) = \bigl|xy\bigr|$ stejná ve všech čtyřech kvadrantech stejně jako oblast Ω, platí

$$\iint_\Omega \bigl|xy\bigr| \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = 4 \iint_{\Omega_+} xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, ,$$

kde Ω_+ je čtvrtkruh $x^2 + y^2 \le a^2$, $x \ge 0$ a $y \ge 0$. Tato oblast je dána nerovnostmi $0 \le y \le \sqrt{a^2 - x^2}$ a $0 \le x \le a$. Podle Fubiniovy věty tedy platí

$$\iint_\Omega \bigl|xy\bigr| \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = 4 \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} xy \, \mathrm{d}y = 2 \int_0^a x\bigl(a^2 - x^2\bigr) \, \mathrm{d}x = \frac{a^4}{2} \, .$$

---

10. Vypočtěte $\displaystyle\iint_\Omega \bigl(x^2 + y^2\bigr) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, kde Ω je rovnoběžník se stranami $x = y$, $y = x + a$, $y = a$ a $y = 3a$, kde $a > 0$.
Řešení: Oblast Ω je dána nerovnostmi $x \le y \le x + a$ a $a \le y \le 3a$ (načrtněte si obrázek). Protože lze tyto nerovnosti upravit na tvar $y - a \le x \le y$ a $a \le y \le 3a$, je podle Fubiniovy věty

$$\iint_\Omega \bigl(x^2 + y^2\bigr) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_a^{3a} \mathrm{d}y \int_{y-a}^{y} \bigl(x^2 + y^2\bigr) \, \mathrm{d}x =$$
$$= \int_a^{3a} \left(\frac{1}{3} \, y^3 - \frac{1}{3} \, (y - a)^3 + ay^2 \right) \mathrm{d}y = \int_a^{3a} \left(2ay^2 - a^2 y + \frac{1}{3} \, a^3 \right) \mathrm{d}y = 14a^4 \, .$$

11. Vypočtěte integrál $\iiint_V xy^2z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde V je oblast omezená plochami $z = xy$, $y = x$, $x = 1$, $y = 0$ a $z = 0$.

Řešení: Integrační oblast Ω je dána nerovnostmi $0 \le z \le xy$, $0 \le y \le x$ a $0 \le x \le 1$ (pokuste si ji načrtnout). Proto je podle Fubiniovy věty

$$\iiint_\Omega xy^2z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x \mathrm{d}y \int_0^{xy} xy^2z^3\,\mathrm{d}z = \frac{1}{4}\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x x^5y^6\,\mathrm{d}y =$$
$$= \frac{1}{28}\int_0^1 x^{12}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{364}$$

---

12. Vypočtěte integrál $\iiint_V \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}$, kde V je oblast omezená plochami $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Řešení: Integrační oblast Ω je dána nerovnostmi $0 \le z \le 1 - x - y$, $0 \le y \le 1 - x$, $0 \le x \le 1$. Podle Fubiniovy věty platí

$$\int_\Omega \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3} = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y \int_0^{1-x-y} \frac{\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3} =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \left(\frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4}\right)\mathrm{d}y =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2} - \frac{1-x}{4}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{16}\,.$$

---

13. Vypočtěte integrál $\iiint_V xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde V je oblast omezená plochami $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Řešení: Oblast Ω je osmina koule se středem v počátku a poloměrem 1, která leží v prvním oktantu. Je dána nerovnostmi $0 \le z \le \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $0 \le y \le \sqrt{1 - x^2}$ a $0 \le x \le 1$. Tedy podle Fubiniovy věty je

$$\iiint_\Omega xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz\,\mathrm{d}z =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy\big(1 - x^2 - y^2\big)\,\mathrm{d}y =$$
$$= \frac{1}{8}\int_0^1 x\big(1 - x^2\big)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{48}\,.$$

Zaměňte následující trojné integrály jednoduchými

14. $\displaystyle\int_0^x \mathrm{d}\xi \int_0^\xi \mathrm{d}\eta \int_0^\eta f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\,;$ **15.** $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y \int\limits_0^{x+y} f(z)\,\mathrm{d}z\,.$

Řešení:
14. Jestliže převedeme tento integrál na integrál přes oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, dostaneme podle Fubiniovy věty rovnost

$$\int_0^x \mathrm{d}\xi \int_0^\xi \mathrm{d}\eta \int_0^\eta f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \iiint_\Omega f(\zeta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta\,,$$

kde integrační oblast Ω lze zapsat pomocí nerovností ve tvaru $0 \le \zeta \le \eta \le \xi \le x$. Jestliže zaměníme pořadí integrace, tj. budeme nejprve integrovat přes ξ, pak přes η a nakonec přes ζ, plyne z Fubiniovy věty rovnost

$$\begin{aligned}\int_0^x \mathrm{d}\xi \int_0^\xi \mathrm{d}\eta \int_0^\eta f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta &= \int_0^x \mathrm{d}\zeta \int_\zeta^x \mathrm{d}\eta \int_\eta^x f(\zeta)\,\mathrm{d}\xi = \\ &= \int_0^x \mathrm{d}\zeta \int_\zeta^x (x-\eta) f(\zeta)\,\mathrm{d}\eta = \frac{1}{2}\int_0^x (x-\zeta)^2 f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\,.\end{aligned}$$

15. Jestliže převedeme tento integrál na integrál přes oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, dostaneme podle Fubiniovy věty rovnost

$$I = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y \int\limits_0^{x+y} f(z)\,\mathrm{d}z = \iiint_\Omega f(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,,$$

kde integrační oblast Ω je dána nerovnostmi $0 \le z \le x+y$, $0 \le x \le 1$ a $0 \le y \le 1$. Tento integrál spočítáme pomocí integrace v jiném pořadí. Uvedené nerovnosti jsou ekvivalentní nerovnostem $z - x \le y$, $z \ge 0$, $0 \le x \le 1$ a $0 \le y \le 1$. Pokud je $z - x \le 0$, dostaneme nerovnosti $0 \le y \le 1$ a $0 \le z \le x \le 1$. Ale pro $z - x \ge 0$ dostaneme nerovnosti $z - x \le y \le 1$, $x \le z$, $0 \le x \le 1$ a $z \ge 0$. Tedy lze psát $I = I_1 + I_2$, kde

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_0^1 \mathrm{d}z \int_z^1 \mathrm{d}x \int_0^1 f(z)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}z \int_z^1 f(z)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-z) f(z)\,\mathrm{d}z \\ I_2 &= \iint_{\Omega_1} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z \int_{z-x}^1 f(z)\,\mathrm{d}y = \iint_{\Omega_1} (1+x-z) f(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,,\end{aligned}$$

kde je $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^2$ oblast dána nerovnostmi $z - x \le 1$, $x \le z$, $0 \le x \le 1$ a $z \ge 0$. Tyto nerovnosti lze přepsat ve tvaru $z - 1 \le x \le z$, $0 \le x \le 1$ a $z \ge 0$. V případě, že $z - 1 \le 0$ dostaneme nerovnosti $0 \le x \le z \le 1$. V případě, že $z - 1 \ge 0$ dostaneme nerovnosti $z-1 \leq x \leq 1$ a $1 \leq z \leq 2$. Proto lze integrál I_2 napsat ve tvaru $I_2 = I_3 + I_4$, kde

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \int_0^1 \mathrm{d}z \int_0^z (1+x-z) f(z)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(2z - z^2\right) f(z)\,\mathrm{d}z \\
I_4 &= \int_1^2 \mathrm{d}z \int_{z-1}^1 (1+x-z) f(z)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^2 \left(4 - 4z + z^2\right) f(z)\,\mathrm{d}z
\end{aligned}
$$

Tedy platí

$$
I = I_1 + I_3 + I_4 = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(2 - z^2\right) f(z)\,\mathrm{d}z + \frac{1}{2}\int_1^2 (2-z)^2 f(z)\,\mathrm{d}z\,.
$$

Cvičení 16

Substituce ve vícenásobném integrálu. Geometrický význam integrálu v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$.

Další metoda, která se často používá při výpočtu vícerozměrných integrálů, je metoda substituční. Ta vychází z následující

Věta. *Nechť $\boldsymbol{f}$ je zobrazení otevřené množiny $P \subset \mathbb{R}^n$ na $R \subset \mathbb{R}^n$. Nechť je $\boldsymbol{f}$ prosté a regulární v P s jakobiánem $J_{\boldsymbol{f}}$. Nechť $M \subset R$ a F je libovolná reálná funkce. Potom je*

$$\int_M F(\boldsymbol{x})\, dx_1 \, \dots \, dx_n = \int_{\boldsymbol{f}^{(-1)}(M)} F\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})\big)\, |J_{\boldsymbol{f}}| \; dy_1 \, \dots \, dy_n \,,$$

pokud jeden z obou integrálů existuje.

Výpočet obsahu rovinného obrazce. Nechť Ω je oblast, která leží v rovině Oxy. Obsah S oblasti Ω je dán vzorcem $S = \displaystyle\iint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Výpočet objemu. Objem V trojrozměrné oblasti Ω je vyjádřen integrálem $V = \displaystyle\iiint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

Transformací do polárních souřadnic vypočtěte

1. $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,;$ **2.** $\displaystyle\iint\limits_{\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2} \sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$

Řešení:

1. V tomto případě podrobně ukážeme jednotlivé množiny a zobrazeni z věty o substituci. V dalších příkladech tyto podrobné úvahy již nebudeme podrobně vypisovat.
Množiny P a R jsou $P = \big\{(r,\varphi)\,;\ r > 0\,,\ 0 < \varphi < 2\pi\big\}$ a $R = \mathbb{R}^2 \setminus R_0$, kde $R_0 = \big\{(x,0)\,;\ x \ge 0\big\}$. Zobrazení $\boldsymbol{f} : P \to R$ definované předpisem

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

je prosté regulární zobrazení, jehož jakobián je

$$J_{\boldsymbol{f}} = \det\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} = r\,.$$

Oblast integrace $S = x^2+y^2 \le a^2$ napíšeme jako disjunktní sjednocení $S = M \cup M_0$, kde $M = S \cap R$ a $M_0 = S \cap R_0$. Protože množina $M_0 = \big\{(x,0)\,.0 \le x \le a\big\}$ má míru nula, je

$$\int_S \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_M \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{M_0} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\ = \int_M \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Vzor oblasti M, $\boldsymbol{f}^{(-1)}(M) \subset P$, dostaneme z nerovnosti

$$x^2+y^2 = \big(r\cos\varphi\big)^2 + \big(r\sin\varphi\big)^2 = r^2 \le a^2$$

Je tedy dána nerovnostmi $0 < r \le a$ a $0 < \varphi < 2\pi$. Tedy podle věty o substituci platí

$$\int_M \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{\substack{0<r\le a\\ 0<\varphi<2\pi}} r^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Z Fubiniho věty nyní plyne

$$\int_{x^2+y^2\le a^2} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^a r^2\,\mathrm{d}r = \frac{2}{3}\,\pi a^3\,.$$

2. Protože vzor množiny $\pi^2 \le x^2+y^2 \le 4\pi^2$ pří transformaci do polárních souřadnic je množina dána nerovnostmi $\pi \le r \le 2\pi$ a $0 < \varphi < 2\pi$, platí

$$\int_{\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2} \sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_\pi^{2\pi} r\sin r\,\mathrm{d}r = -6\pi^2\,.$$

Vypočtěte dvojné integrály

3. $\displaystyle\iint\limits_\Omega (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$ kde Ω je omezená křivkou $x^2+y^2 = x+y$

4. $\displaystyle\iint\limits_{|x|+|y|\le 1} \big(|x|+|y|\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

5. $\displaystyle\iint\limits_\Omega \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$ kde Ω je omezena elipsou $\displaystyle\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$

6. $\displaystyle\iint\limits_\Omega xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$ kde Ω je omezená křivkami $xy = 1\,,\ x+y = \dfrac{5}{2}$

Řešení:

3. Integrujeme přes kruh $x^2 + y^2 < x + y$. Jestliže zavedeme polární souřadnice $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, kde $r > 0$ a $-\pi < \varphi < \pi$, přeje oblast Ω v oblast danou nerovnostmi $0 < r < \cos\varphi + \sin\varphi$. Z těchto nerovností plyne pro φ nerovnost $0 < \cos\varphi + \sin\varphi$, která je v našem intervalu $\varphi \in (-\pi, \pi)$ splněna pro $\varphi \in \left(-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right)$. Tedy podle věty o substituci platí

$$\iint_\Omega (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{\substack{0<r<\cos\varphi+\sin\varphi\\ -\pi/4<\varphi<3\pi/4}} (r\cos\varphi + r\sin\varphi)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\cos\varphi+\sin\varphi} r^2(\cos\varphi+\sin\varphi)\,\mathrm{d}r = \frac{1}{3}\int_{-\pi/4}^{3\pi/4} (\cos\varphi+\sin\varphi)^4 \mathrm{d}\varphi\,.$$

Poslední integrál lze najít například substitucí $\psi = \varphi + \dfrac{\pi}{4}$. Protože $\cos\left(\psi - \dfrac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\psi - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\psi$, dostaneme

$$\iint_\Omega (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{4}{3}\int_0^\pi \sin^4\psi\,\mathrm{d}\psi = \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi = \frac{\pi}{2}\,,$$

kde jsme použili rekurentní vztah

$$\int_0^\pi \sin^n x\,\mathrm{d}x = \frac{n-1}{n}\int_0^\pi \sin^{n-2} x\,\mathrm{d}x\,,$$

který je při velmi užitečný, protože integrály tohoto typu se při přechodu k polárním souřadnicím vyskytují velmi často.

Kdybychom si uvědomili, že oblast Ω je kruh $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 < \dfrac{1}{2}$, mohlo by nás napadnout, že pro výpočet daného integrálu je výhodnější substituce $x = \dfrac{1}{2} + r\cos\varphi$ a $y = \dfrac{1}{2} + r\sin\varphi$, kde $r > 0$ a $\varphi \in (0, 2\pi)$. Oblast Ω by při této substituci přešla v oblast $0 < r < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $0 < \varphi < 2\pi$, tedy jednodušší oblast.

4. Pomocí substitucí $x = \pm u$ a $y = \pm v$ lze jednoduše ukázat, že

$$\iint_{|x|+|y|\le 1} \big(|x| + |y|\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 4\iint\limits_{\substack{x+y\le 1\\ x,\,y\ge 0}} (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Tento integrál najdeme pomocí Fubiniovy věty, protože integrační oblast je dána nerovnostmi $0 < y < 1 - x < 1$. Tedy

$$\iint_\Omega \big(|x| + |y|\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 4\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} (x+y)\,\mathrm{d}y = \frac{4}{3}\,.$$

Poslední integrál $\displaystyle\iint\limits_{\substack{x+y<1\\ x,y>0}} (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ jsme místo Fubiniho věty mohli najít také substituci $x = r\cos^2\varphi$, $y = r\sin^2\varphi$, kde $r > 0$ a $0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$. V tomto případě je totiž $x + y = r$ a jakobián tohoto zobrazení

$$J = \det\begin{pmatrix} \cos^2\varphi & \sin^2\varphi \\ -r\sin 2\varphi & r\sin 2\varphi \end{pmatrix} = r\sin 2\varphi \neq 0\,.$$

5. Protože je oblast integrace Ω omezená elipsou se středem v počátku a poloosami a a b, je výhodné zavést eliptické souřadnice $x = ar\cos\varphi$, $y = br\varphi$, kde $r > 0$ a $0 < \varphi < 2\pi$. Protože jakobián tohoto zobrazení je $J = abr$ a oblast Ω přejde na oblast $0 < r < 1$, $0 < \varphi < 2\pi$, dostaneme z věty o substituci

$$\iint_\Omega \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}r =$$
$$= 2\pi ab\left[-\frac{1}{3}\left(1-r^2\right)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\,\pi ab\,.$$

6. Uvedený integrál je možné samozřejmě najít pomocí věty o substituci, ale asi vás žádná rozumná nenapadne. Daleko jednodušší je použít Fubiniho větu. Pokud si nakreslíte oblast Ω, snadno zjistíte, že podle Fubiniho věty je

$$\iint_\Omega xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{1/2}^2 \mathrm{d}x \int_{1/x}^{5/2-x} xy\,\mathrm{d}y =$$
$$= \frac{1}{2}\int_{1/2}^2 x\left[\left(\frac{5}{2} - x\right)^2 - \frac{1}{x^2}\right]\mathrm{d}x = \frac{165}{128} - \ln 2\,.$$

---

7. Transformací do cylindrických souřadnic najděte integrál

$$\iiint_\mathcal{V} \left(x^2 + y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,,$$

kde oblast $\mathcal{V}$ je omezena plochami $x^2 + y^2 = 2z$ a $z = 2$.

Řešení: Pomocí nerovností lze oblast $\mathcal{V}$ zapsat jako $x^2 + y^2 < 2z < 4$. Jestliže zavedeme cylindrické souřadnice pomocí zobrazení $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$, kde $r > 0$, $0 < \varphi < 2\pi$ a $z \in \mathbb{R}$, jehož jakobián je $J = r$, přejde oblast $\mathcal{V}$ na oblast $0 < r^2 < 2z < 4$, tj. oblast danou nerovnostmi $0 < r < \sqrt{2z}$, $0 < z < 2$ a $0 < \varphi < 2\pi$. Tedy podle věty o substituci platí

$$\iiint_\mathcal{V} \left(x^2 + y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^2 \mathrm{d}z \int_0^{\sqrt{2z}} r^3\,\mathrm{d}r = 2\pi\int_0^2 z^2\,\mathrm{d}z = \frac{16}{3}\,\pi\,.$$

8. Vypočtěte integrál $\iiint_{\mathcal{V}} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde $\mathcal{V}$ je oblast omezená plochami $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Řešení: Oblast integrace je osmina koule se středem v počátku a poloměrem 1, která leží v prvním oktantu. Proto je výhodné zavést sférické souřadnice. Ty jsou definovány vztahy $x = r\cos\theta\cos\varphi$, $y = r\cos\theta\sin\varphi$, $z = r\sin\theta$, kde $r > 0$, $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ a $\varphi \in (0, 2\pi)$. Jakobián tohoto zobrazeni je $J = r^2\cos\theta$. Oblast $\mathcal{V}$ přejde při tomto zobrazení na oblast určenou nerovnostmi $0 < r < 1$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ a $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Podle věty o substituci tedy hledaný integrál je

$$\iiint_{\mathcal{V}} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1 r^5\,\mathrm{d}r \int_0^{\pi/2} \cos^3\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \int_0^{\pi/2} \cos\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{48}\,.$$

---

9. Vypočtěte integrál $\iiint_{\mathcal{V}} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde $\mathcal{V}$ je oblast omezená plochou $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Řešení: Protože je oblast $\mathcal{V}$ omezena elipsoidem se středem v počátku a poloosami a, b a c, je výhodné zavést souřadnice, které souvisí s takovým elipsoidem, eliptické souřadnice. Ty jsou definovány vztahy $x = ar\cos\theta\cos\varphi$, $y = br\cos\theta\sin\varphi$ a $z = cr\sin\theta$, kde $r > 0$, $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ a $\varphi \in (0, 2\pi)$. Protože jakobián tohoto zobrazení je $J = abcr\cos\theta$ a oblast $\mathcal{V}$ přejde na oblast definovanou nerovnostmi $0 < r < 1$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ a $0 < \varphi < 2\pi$, plyne z věty o substituci

$$\iiint_{\mathcal{V}} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = abc\int_0^1 r^4\,\mathrm{d}r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta\,\mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = \frac{4}{5}\,abc\pi\,.$$

---

10. Transformací do sférických souřadnic spočítejte integrál

$$\iiint_{\mathcal{V}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,,$$

kde $\mathcal{V}$ je omezená plochou $x^2 + y^2 + z^2 = z$.

Řešení: Po zavedení sférických souřadnic přejde oblast $\mathcal{V}$ na oblast, danou nerovnostmi $0 < r < \sin\theta$, neboli $0 < r < \sin\theta$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $0 < \varphi < 2\pi$. Protože jakobián zobrazení je $J = r^2\cos\theta$, plyne z věty o substituci

$$\iiint_{\mathcal{V}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sin\theta} r^3\cos\theta\,\mathrm{d}r =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2} \sin^4\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{10}\,.$$

11. Vypočtěte integrál $\iiint_{\mathcal{V}} x^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde $\mathcal{V}$ je oblast omezená plochami $z = ay^2$, $z = by^2$, $y > 0$, $0 < a < b$; $z = \alpha x$, $z = \beta x$, $0 < \alpha < \beta$, $z = h > 0$.

Řešení: Protože je oblast $\mathcal{V}$ určena nerovnostmi $ay^2 < z < by^2$, $\alpha x < z < \beta x$, $0 < z < h$, je výhodné zavést nové souřadnice vztahy $u = \dfrac{z}{x}$, $v = \dfrac{z}{y^2}$ a $w = z$. Inverzní transformace je $x = wu^{-1}$, $y = w^{1/2}v^{-1/2}$ a $z = w$. Tedy dané zobrazení zobrazuje množinu $x > 0$, $y > 0$ a $z > 0$ na množinu $u > 0$, $v > 0$ a $w > 0$. Protože jakobián tohoto zobrazení

$$J = \det \begin{pmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -zx^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & -2zy^{-3} & 0 \\ x^{-1} & y^{-2} & 1 \end{pmatrix} = 2x^{-2}y^{-3}z^2$$

je nenulový, je zobrazení regulární.

Ale ve větě o substituci potřebujeme jakobián inverzního zobrazení[1]. Ten je $J^{-1} = \dfrac{x^2y^3}{2z^2} = \dfrac{1}{2}\,u^{-2}v^{-3/2}w^{3/2}$. Protože oblast $\mathcal{V}$ přejde při uvedené substituci na oblast definovanou nerovnostmi $\alpha < u < \beta$, $a < v < b$ a $0 < w < h$, plyne z věty o substituci

$$\iiint_{\mathcal{V}} x^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta u^{-4}\,\mathrm{d}u \int_a^b v^{-3/2}\,\mathrm{d}v \int_0^h w^{7/2}\,\mathrm{d}w =$$
$$= \frac{2}{27}\left(\frac{1}{\alpha^3} - \frac{1}{\beta^3}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}}\right) h^{9/2}\,.$$

Najděte obsahy obrazců omezených následujícími křivkami

12. $xy = a^2\,, \quad x + y = \dfrac{5a}{2}\,; \qquad a > 0$

13. $y^2 = 2px + p^2\,, \quad y^2 = -2qx + q^2\,; \qquad p, q > 0$

14. $(x - y)^2 + x^2 = a^2\,; \qquad a > 0$

Řešení:

12. Obsah S oblasti Ω je dán integrálem $S = \iint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. V tomto případě najdeme integrál pomocí Fubiniho věty. Ta dává (viz příklad 6):

$$S = \int_{a/2}^{2a} \mathrm{d}x \int_{a^2/x}^{5a/2-x} \mathrm{d}y = \int_{a/2}^{2a} \left(\frac{5}{2}\,a - x - \frac{a^2}{x}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{15}{8} - 2\ln 2\right)a^2\,.$$

[1] **Pomůcka:** Všimněte si, že když vám vyjde jakobián substituce jako funkce proměnných x, y, z, tj. $J(x, y, z)$, jde vždy o převrácenou hodnotu jakobiánu ve větě o substituci.

13. Oblast Ω je dána nerovnostmi $\dfrac{y^2-p^2}{2p} < x < \dfrac{q^2-y^2}{2q}$, ze které plyne $-\sqrt{pq} < y < \sqrt{pq}$. Tedy podle Fubiniho věty je

$$S = \iint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\sqrt{pq}}^{\sqrt{pq}} \mathrm{d}y \int_{(y^2-p^2)/2p}^{(q^2-y^2)/2q} \mathrm{d}y = \frac{2}{3}\,(p+q)\sqrt{pq}\,.$$

14. Jedná se o oblast $2x^2-2xy+y^2<1$, což je elipsa se středem v počátku. Z nerovnosti, která definuje elipsu je vidět, že mohou být výhodné proměnné $u=x-y$ a $v=x$. V těchto souřadnicích je totiž oblast Ω dána nerovností $u^2+v^2<a^2$, a tedy je to kružnice s poloměrem a. Protože je inverzní transformace dána vztahy $x=v$ a $y=v-u$, jedná se o prosté zobrazení $\mathbb{R}^2$ na $\mathbb{R}^2$. Jeho jakobián je

$$J = \det\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0\,.$$

Tedy dané zobrazení je regulární. Podle věty o substituci tedy je

$$S = \iint_{u^2+v^2<a^2} \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \pi a^2\,.$$

Transformací do polárních souřadnic najděte obsah obrazců omezených křivkami

15. $\big(x^2+y^2\big)^2 = 2a^2\big(x^2-y^2\big)\,,\quad x^2+y^2\ge a^2$

16. $\big(x^2+y^2\big)^2 = 8a^2xy\,,\quad (x-a)^2+(y-a)^2\le a^2\,;\qquad a>0$

Řešení:

15. Oblast Ω je dána nerovnostmi $\big(x^2+y^2\big)^2 < 2a^2\big(x^2-y^2\big)$ a $x^2+y^2>a^2$. Lze snadno nahlédnout, že se daná oblast nemění při substitucích $(x,y)\to(\pm x,\pm y)$. Proto platí

$$S = \iint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 4\iint_{\Omega_+} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

kde $\Omega_+ = \big((x,y)\,;\ x>0\,,\ y>0\big\}\cap\Omega$. Jestliže zavedeme polární souřadnice, přejde oblast Ω_+ na oblast danou nerovnostmi $a^2<r^2<2a^2\cos 2\varphi$, $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$. Ale z první nerovnosti plyne, $\dfrac{1}{2}<\cos 2\varphi$, tj. $0<\varphi<\dfrac{\pi}{6}$. Tedy podle věty o substituci je

$$S = 4\int_0^{\pi/6} \mathrm{d}\varphi \int_a^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} r\,\mathrm{d}r = 2a^2\int_0^{\pi/6} \big(2\cos 2\varphi - 1\big)\,\mathrm{d}\varphi = \frac{3\sqrt{3}-\pi}{3}\,a^2\,.$$

16. Oblast Ω je dána nerovnostmi $\big(x^2+y^2\big)^2 < 8a^2xy$ a $(a-x)^2+(a-y)^2<a^2$. Jestliže zavedeme nové souřadnice vztahy $x=ar\cos\varphi$ a $y=ar\sin\varphi$, kde $r>0$ a

$0 < \varphi < 2\pi$ (jakobián $J = a^2 r$), dostaneme nerovnosti $r^2 < 8\cos\varphi\sin\varphi = 4\sin 2\varphi$ a $r^2 - 2r(\cos\varphi + \sin\varphi) + 1 < 0$. Z první nerovnosti plyne, že $\sin 2\varphi > 0$ a z druhé $\cos\varphi + \sin\varphi - \sqrt{\sin 2\varphi} < r < \cos\varphi + \sin\varphi + \sqrt{\sin 2\varphi}$. Protože $(\cos\varphi + \sin\varphi)^2 = 1 + \sin 2\varphi > \sin 2\varphi$, dostaneme z těchto nerovností $\cos\varphi + \sin\varphi - \sqrt{\sin 2\varphi} < r < 2\sqrt{\sin 2\varphi}$ a $\varphi \in \left(\alpha, \frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, kde $\alpha = \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{8}$. Podle věty o substituci tedy platí

$$
\begin{aligned}
S =& a^2 \int_\alpha^{\pi/2-\alpha} \mathrm{d}\varphi \int\limits_{\cos\varphi+\sin\varphi-\sqrt{\sin 2\varphi}}^{2\sqrt{\sin 2\varphi}} r\,\mathrm{d}r = \\
&= \frac{a^2}{2} \int_\alpha^{\pi/2-\alpha} \Big(2\sin 2\varphi - 1 + 2\big(\cos\varphi + \sin\varphi\big)\sqrt{\sin 2\varphi}\Big)\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= \frac{a^2}{2}\Big[-\cos 2\varphi - \varphi + (\sin\varphi - \cos\varphi)\sqrt{\sin 2\varphi} + \arcsin(\sin\varphi - \cos\varphi)\Big]_\alpha^{\pi/2-\alpha},
\end{aligned}
$$

kde jsme použili toho, že $\sin 2\varphi = 1 - (\sin\varphi - \cos\varphi)^2$ a zavedli substituci $y = \sin\varphi - \cos\varphi$.
Tedy

$$
S = \frac{a^2}{2}\left(2\cos 2\alpha + 2\alpha - \frac{\pi}{2} + 2(\cos\alpha - \sin\alpha)\sqrt{\sin 2\alpha} + 2\arcsin(\cos\alpha - \sin\alpha)\right).
$$

Protože $\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{1 - \sin 2\alpha}$, $\arcsin\alpha + \arccos\alpha = \frac{\pi}{2}$ a $\alpha = \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{8}$, dostaneme

$$
S = \left(\frac{\sqrt{7}}{2} + \arcsin\sqrt{\frac{7}{8}} + \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{8}\right)a^2 = \left(\frac{\sqrt{7}}{2} + \arcsin\frac{\sqrt{14}}{8}\right)a^2 .
$$

---

17. Pomocí transformace $x = r\cos^3\varphi$, $y = r\sin^3\varphi$ určete obsah oblasti omezené křivkami $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $x = 0$, $y = 0$.

Řešení: Oblast Ω je dána nerovnostmi $x^{2/3} + y^{2/3} < a^{2/3}$, $x > 0$ a $y > 0$. Tato oblast přejde po dané transformaci na oblast $0 < r < a$, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Protože jakobián daného zobrazení je

$$
J = \det\begin{pmatrix} x_r & y_r \\ x_\varphi & y_\varphi \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cos^3\varphi & \sin^3\varphi \\ -3r\cos^2\varphi\sin\varphi & 3r\sin^2\varphi\cos\varphi \end{pmatrix} = 3r\cos^2\varphi\sin^2\varphi ,
$$

plyne z věty o substituci

$$
\begin{aligned}
S =& 3\int_0^a r\,\mathrm{d}r \int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{3}{8}a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= \frac{3}{16}a^2 \int_0^{\pi/2} \big(1 - \cos 4\varphi\big)\,\mathrm{d}\varphi = \frac{3}{32}\pi a^2 .
\end{aligned}
$$

Pomocí vhodné transformace najděte plochy obrazců omezených křivkami

18. $x + y = a\,, \quad x + y = b\,, \quad y = \alpha x\,, \quad y = \beta x\,; \qquad 0 < a < b\,,\ 0 < \alpha < \beta$

19. $xy = a^2\,, \quad xy = 2a^2\,, \quad y = x\,, \quad y = 2x\,; \qquad x > 0\,,\ y > 0$

20. $y^2 = 2px\,, \quad y^2 = 2qx\,, \quad x^2 = 2ry\,, \quad x^2 = 2sy\,; \qquad 0 < p < q\,,\ 0 < r < s$

Řešení:

18. Obrazec je určen nerovnostmi $a < x + y < b$ a $\alpha < \dfrac{y}{x} < \beta$. Proto je vhodné zavést nové proměnné $u = x + y$ a $v = \dfrac{y}{x}$. V těchto souřadnicích je obrazec určen nerovnostmi $a < u < b$ a $\alpha < v < \beta$. Jakobián daného zobrazení je

$$J^{-1} = \det \begin{pmatrix} u_y & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x} \end{pmatrix} = \frac{x+y}{x^2}\,.$$

Inverzní zobrazení je dáno rovnicemi $x = \dfrac{u}{1+v}$, $y = \dfrac{uv}{1+v}$. Z toho dostaneme jakobián $J = \dfrac{x^2}{x+y} = \dfrac{u}{(1+v)^2}$. Podle věty o substituci tedy je

$$S = \int_a^b u \, \mathrm{d}u \int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}v}{(1+v)^2} = \frac{(\beta - \alpha)(b^2 - a^2)}{2(1+\alpha)(1+\beta)}\,.$$

19. Daný obrazec je definován nerovnostmi $a^2 < xy < 2a^2$ a $x < y < 2x$. Jestliže zavedeme nové proměnné $u = xy$ a $v = \dfrac{y}{x}$, je obrazec v těchto nových proměnných definován nerovnostmi $a^2 < u < 2a^2$ a $1 < v < 2$. Pro hledaný jakobián našeho zobrazení platí

$$J^{-1} = \det \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} y & x \\ -\dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x} \end{pmatrix} = \frac{2y}{x} = 2v\,.$$

Tedy jakobián je $J = \dfrac{1}{2v}$ a podle věty o substituci

$$S = \int_{a^2}^{2a^2} \mathrm{d}u \int_1^2 \frac{\mathrm{d}v}{2v} = \frac{a^2}{2} \ln 2\,.$$

20. Daný obrazec je dán nerovnostmi $2p < \dfrac{y^2}{x} < 2q$ a $2r < \dfrac{x^2}{y} < 2s$. Proto je výhodné zavést nové proměnné vztahy $u = \dfrac{y^2}{x}$ a $v = \dfrac{x^2}{y}$, pro které platí nerovnosti $2p < u < 2q$ a $2r < v < 2s$. Pro jakobián transformace platí

$$J^{-1} = \det \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -\dfrac{y^2}{x^2} & \dfrac{2y}{x} \\ \dfrac{2x}{y} & -\dfrac{x^2}{y^2} \end{pmatrix} = -3\,.$$

Tedy podle věty o substituci je

$$S = \frac{1}{3} \int_{2p}^{2q} \mathrm{d}u \int_{2r}^{2s} \mathrm{d}v = \frac{4}{3}\,(q-p)(s-r)\,.$$

Najděte objem tělesa omezeného plochami

21. $z = 1 + x + y\,, \quad z = 0\,, \quad x + y = 1\,, \quad x = 0\,, \quad y = 0$

22. $z = x^2 + y^2\,, \quad y = x^2\,, \quad y = 1\,, \quad z = 0$

Řešení:
21. Těleso je dáno nerovnostmi $0 < z < 1 + x + y$, $x + y < 1$, $x > 0$ a $y > 0$. Podle Fubiniovy věty je

$$V = \int_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_0^{1+x+y} \mathrm{d}z = \int_\Omega (1 + x + y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

kde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je definována nerovnostmi $x > 0$, $y > 0$ a $x + y < 1$. Jestliže na tento integrál použijeme ještě jednou Fubiniovu větu, dostaneme

$$V = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} (1 + x + y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(1 - x^2 - \frac{(1-x)^2}{2}\right) \mathrm{d}x = \frac{5}{6}\,.$$

22. Těleso $\mathcal{V}$ je určeno nerovnostmi $0 < z < x^2 + y^2$ a $x^2 < y < 1$. Podle Fubiniovy věty tedy platí

$$V = \int_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_0^{x^2+y^2} \mathrm{d}z = \int_\Omega (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

kde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je dána nerovnostmi $x^2 < y < 1$, ze které plyne $-1 < x < 1$. Tedy

$$V = \int_{-1}^1 \mathrm{d}x \int_{x^2}^1 (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{3} + x^2 - x^4 - \frac{x^6}{3}\right) \mathrm{d}x = \frac{88}{105}\,.$$

Pomocí transformace do polárních souřadnic najděte objem tělesa omezeného plochami

23. $z = x^2 + y^2\,, \quad x^2 + y^2 = x\,, \quad x^2 + y^2 = 2x\,, \quad z = 0$

24. $z = x^2 + y^2\,, \quad z = x + y$

Řešení:

23. Těleso $\mathcal{V}$ je určeno nerovnostmi $0 < z < x^2 + y^2$ a $x < x^2 + y^2 < 2x$. Podle Fubiniovy věty je

$$V = \int_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_0^{x^2+y^2} \mathrm{d}z = \int_\Omega \big(x^2 + y^2\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

kde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je oblast daná nerovnostmi $x < x^2+y^2 < 2x$. Jestliže zavedeme polární souřadnice $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, kde $r > 0$ a $-\pi < \varphi < \pi$, zjistíme, že oblast Ω je v těchto nových souřadnicích dána nerovnostmi $\cos\varphi < r < 2\cos\varphi$, z nichž plyne $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Tedy podle věty o substituci je

$$V = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi \int_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi} r^3\,\mathrm{d}r = \frac{15}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{15}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi = \frac{45}{32}\,\pi\,.$$

24. Těleso je určeno nerovnostmi $x^2 + y^2 < z < x + y$. Tedy podle Fubiniovy věty je

$$V = \int_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_{x^2+y^2}^{x+y} \mathrm{d}z = \int_\Omega \big(x + y - x^2 - y^2\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

kde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je dána nerovnostmi $x^2+y^2 < x+y$, neboli $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{2}$. Bude tedy výhodné zavést polární souřadnice vztahy $x = \frac{1}{2} + r\cos\varphi$, $y = \frac{1}{2} + r\sin\varphi$, kde $r > 0$ a $0 < \varphi < 2\pi$. V těchto souřadnicích je oblast Ω dána nerovnostmi $0 < r < \frac{1}{\sqrt{2}}$ a $0 < \varphi < 2\pi$. Protože $x + y - x^2 - y^2 = \frac{1}{2} - r^2$ a jakobián zobrazení je $J = r$, platí podle věty o substituci

$$V = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{r(1 - 2r^2)}{2}\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{8}\,.$$

---

25. Najděte objem válce omezeného shora plochou $z = f(x, y) \geq 0$, zdola rovinou $z = 0$ a z boku přímou cylindrickou plochou, jejíž průsečík s rovinou Oxy je oblast Ω.

Řešení: Těleso je určeno nerovnostmi $0 < z < f(x, y)$, kde $(x, y) \in \Omega$. Tedy podle Fubiniovy věty je

$$V = \int_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_0^{f(x,y)} \mathrm{d}z = \int_\Omega f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Najděte objem tělesa omezeného plochami

26. $z = x^2 + y^2\,,\quad z = 2x^2 + 2y^2\,,\quad y = x\,,\quad y = x^2$

27. $z = x + y\,, \quad z = xy\,, \quad x + y = 1\,, \quad x = 0\,, \quad y = 0$

28. $z = 6 - x^2 - y^2\,, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}$

Řešení:
26. Dané těleso je určeno nerovnostmi $x^2 + y^2 < z < 2(x^2 + y^2)$ a $x^2 < y < x$. Podle Fubiniho věty je

$$V = \iint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_{x^2+y^2}^{2(x^2+y^2)} \mathrm{d}z = \iint_\Omega (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

kde oblast Ω je dána nerovnostmi $x^2 < y < x$, ze které plyne $0 < x < 1$. tedy podle Fubiniho věty je

$$V = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^2}^{x} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(x^3 - x^4 + \frac{x^3 - x^6}{3} \right) \mathrm{d}x = \frac{3}{35}\,.$$

27. Těleso je určeno nerovnostmi $xy < z < x + y$, $x + y < 1$, $x > 0$ a $y > 0$. Podle Fubiniho věty je

$$V = \int_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_{xy}^{x+y} \mathrm{d}z = \iint_\Omega (x + y - xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

kde je oblast Ω dána nerovnostmi $xy < x + y$, $x + y < 1$, $x > 0$ a $y > 0$. Protože je $y < 1$ je první z těchto nerovností splněna identicky a oblast lze popsat nerovnostmi $0 < y < 1 - x$ a $0 < x < 1$. Z Fubiniho věty pak plyne

$$V = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} (x + y - xy)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(x(1 - x) + \frac{(1 - x)^3}{2} \right) \mathrm{d}x = \frac{7}{24}\,.$$

28. Těleso je určené nerovnostmi $\sqrt{x^2 + y^2} < z < 6 - x^2 - y^2$. Proto je podle Fubiniho věty

$$V = \iint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{6-x^2-y^2} \mathrm{d}z = \iint_\Omega \bigl(6 - x^2 - y^2 - \sqrt{x^2 + y^2}\bigr)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

kde je oblast Ω dána nerovností $\sqrt{x^2 + y^2} < 6 - x^2 - y^2$. Protože je v nerovnosti vyskytují proměnné pouze v kombinaci $x^2 + y^2$, je výhodné zavést polární souřadnice $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, kde $r > 0$ a $0 < \varphi < 2\pi$. V polárních souřadnicích je oblast Ω určena nerovností $r < 6 - r^2$, tj. $0 < r < 2$. Protože jakobián zobrazení je $J = r$, je podle věty o substituci

$$V = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^2 r\bigl(6 - r^2 - r\bigr)\,\mathrm{d}r = \frac{32}{3}\,\pi\,.$$

Pomocí transformace najděte objem tělesa omezeného plochami

29. $x^2 + y^2 + z^2 = 2az\,, \quad x^2 + y^2 \le z^2$

30. $\bigl(x^2 + y^2 + z^2\bigr)^2 = a^2\bigl(x^2 + y^2 - z^2\bigr)$

31. $\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}\right)^2 = \dfrac{x}{h}$

32. $z = x^2 + y^2\,,\ z = 2(x^2 + y^2)\,,\ xy = a^2,\ xy = 2a^2,\ x = 2y\,,\ 2x = y\,,\ x, y > 0$

Řešení:
29. Dané těleso je určeno nerovnostmi $x^2 + y^2 + z^2 < 2az$ a $x^2 + y^2 < z^2$. Protože vzniká rotací oblasti $x^2 + z^2 < 2az$ a $o < x < z$ kolem osy Oz, je vhodné použít cylindrické souřadnice $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$, kde $r > 0$, $0 < \varphi < 2\pi$ a $z \in \mathbb{R}$. Nerovnosti, které určují těleso v těchto souřadnicích jsou $r^2 + z^2 < 2az$ a $0 < r < z$. Protože jakobián této substituce je $J = r$, je podle věty o substituci

$$V = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \iint_\Omega r \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z = 2\pi \iint_\Omega r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z\,,$$

kde oblast Ω je definována nerovnostmi $r^2 + z^2 < 2az$ a $0 < r < z$ (nakreslete si tuto oblast). Tento integrál lze najít pomocí polárních souřadnic $r = \rho\cos\theta$, $z = \rho\sin\theta$, kde $\rho > 0$ a $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ (protože $r > 0$). Oblast Ω je určena nerovnostmi $0 < \rho < 2a\sin\theta$ a $\cos\theta < \sin\theta$, ze kterých plyne $\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$. Protože jakobián této substituce $J = \rho$, plyne z věty o substituci

$$V = 2\pi \int_{\pi/4}^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_0^{2a\sin\theta} \rho^2 \cos\theta \,\mathrm{d}\rho = \frac{16}{3}\,\pi a^3 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^3\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \pi a^3\,.$$

Všimněte si toho, že jsme při výpočtu integrálu zavedli dvakrát polární souřadnice. To jsme ale mohli udělat také tak, že bychom hned na začátku použili souřadnice sférické.

30. Oblast je omezená plochou, která vzniká rotací křivky $\bigl(x^2+z^2\bigr)^2 = a^2\bigl(x^2-z^2\bigr)$, $x > 0$ kolem osy Oz. Proto je výhodné použít cylindrické souřadnice $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$, kde $r > 0$, $0 < \varphi < 2\pi$ a $z \in \mathbb{R}$. V těchto souřadnicích je těleso určeno nerovnostmi $\bigl(r^2 + z^2\bigr)^2 < a^2\bigl(r^2 - z^2\bigr)$. Protože $J = r$, je podle věty o substituci

$$V = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \iint_\Omega r \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z = 2\pi \iint_\Omega r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z\,,$$

kde oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je definována nerovnostmi $\bigl(r^2 + z^2\bigr)^2 < a^2\bigl(r^2 - z^2\bigr)$ a $r > 0$. V tomto integrálu je vhodné zavést opět polární souřadnice (srovnej příklad **15**).

Označme $r = \rho\cos\theta$ a $z = \rho\sin\theta$, kde $\rho > 0$ a $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$. Po této substituci dostaneme nerovnost $\rho^2 < a^2\cos 2\theta$, ze které plyne $-\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{\pi}{4}$. Protože jakobián použité substituce je $J = \rho$, plyne z věty o substituci

$$V = 2\pi \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \mathrm{d}\theta \int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} \rho^2\cos\theta\,\mathrm{d}\rho = \frac{2\pi}{3}\,a^3 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \bigl(\cos 2\theta\bigr)^{3/2}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\,.$$

Ze vztahu $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ plyne, že pro výpočet tohoto integrálu je vhodná substituce $\sin\theta = y$. Pak je totiž $\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}y$ a

$$V = \frac{2\pi}{3}\,a^3 \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \bigl(1 - 2y^2\bigr)^{3/2}\,\mathrm{d}y\,.$$

Integrály tohoto typu lze řešit substitucí $\sqrt{2}y = \sin\varphi$. Po této substituci dostaneme

$$V = \frac{\sqrt{2}}{3}\,\pi a^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\sqrt{2}}{3}\,\pi a^3\,\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi = \frac{\pi^2}{4\sqrt{2}}\,a^3\,.$$

31. Těleso je definované nerovností $\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}\right)^2 < \dfrac{x}{h}$. Z tvaru této nerovnosti se zdá, že by bylo vhodné zavést eliptické souřadnice. Protože se na pravá straně této nerovnice vyskytuje proměnná x, bude výhodnější zvolit zobrazení $x = ar\sin\theta$, $y = br\cos\theta\cos\varphi$ a $z = cr\cos\theta\sin\varphi$, kde $r > 0$, $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ a $0 < \varphi < 2\pi$. Naše nerovnost má v těchto souřadnicích tvar $0 < r^3 < \dfrac{a}{h}\sin\theta$, z něhož plyne $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$. Protože je jakobián této substituce $J = abcr^2\cos\theta$, plyne z věty o substituci

$$\begin{aligned} V =& abc\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{(ah^{-1}\sin\theta)^{1/3}} r^2\cos\theta\,\mathrm{d}r = \\ =& \frac{2\pi}{3}\,\frac{a^2bc}{h}\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{3}\,\frac{a^2bc}{n}\,. \end{aligned}$$

32. Dané těleso je definované nerovnostmi $x^2+y^2 < z < 2(x^2+y^2)$, $a^2 < xy < 2a^2$, $0 < x < 2y$ a $0 < y < 2x$. Podle Fubiniho věty tedy platí

$$V = \iint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_{x^2+y^2}^{2(x^2+y^2)} \mathrm{d}z = \iint_\Omega (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

kde oblast Ω je definována nerovnostmi $a^2 < xy < 2a^2$, $0 < x < 2y$ a $0 < y < 2x$, neboli $a^2 < xy < 2a^2$, $\dfrac{1}{2} < \dfrac{y}{x} < 2$ a $x > 0$, $y > 0$. Proto je výhodné použít proměnné $u = xy$ a $v = \dfrac{y}{x}$ (viz příklad **20**). Protože $a^2 < u < 2a^2$, $\dfrac{1}{2} < v < 2$,

$$J^{-1} = \det\begin{pmatrix} u_x & u_u \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \frac{2y}{x} = 2v$$

a z definičních rovnic plyne $x^2 = \dfrac{u}{v}$ a $y^2 = uv$, dostaneme pomocí věty o substituci

$$V = \int_{a^2}^{2a^2} \mathrm{d}u \int_{1/2}^{2} \left(\frac{u}{v} + uv\right) \frac{\mathrm{d}v}{2v} = \frac{1}{2} \int_{a^2}^{2a^2} u \,\mathrm{d}u \int_{1/2}^{2} \left(1 + v^{-2}\right) \mathrm{d}v = \frac{9}{4}\, a^4 \,.$$

---

33. Najděte objem rovnoběžnostěnu omezeného plochami $a_i x + b_i y + c_i z = \pm h_i$, $i = 1, 2, 3$, je-li

$$\triangle = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \neq 0 \,.$$

Řešení: Těleso je určené nerovnostmi $-h_i < a_i x + b_i y + c_i z < h_i$, $i = 1,\ 2,\ 3$. Proto je výhodné zavést proměnné $u_i = a_i x + b_i y + c_i z$. Nerovnosti, které definují těleso jsou v těchto souřadnicích $-h_i < u_i < h_i$. Protože pro jakobián použité substituce platí

$$J^{-1} = \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x} & \dfrac{\partial u_1}{\partial y} & \dfrac{\partial u_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x} & \dfrac{\partial u_2}{\partial y} & \dfrac{\partial u_2}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial x} & \dfrac{\partial u_3}{\partial y} & \dfrac{\partial u_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \triangle \,,$$

je podle věty o substituci

$$V = \frac{1}{|\triangle|} \int_{-h_1}^{h_1} \mathrm{d}u_1 \int_{-h_2}^{h_2} \mathrm{d}u_2 \int_{-h_3}^{h_3} \mathrm{d}u_3 = \frac{8 h_1 h_2 h_3}{|\triangle|} \,.$$

Cvičení 17

Použití dvojných a trojných integrálů v mechanice a fyzice

Nechť je Ω deska, která leží v rovině Oxy a která má hustotu $\rho = \rho(x, y)$. *Hmotnost* M desky Ω určíme ze vztahu

$$M = \iint_\Omega \rho(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\,. \tag{1a}$$

Souřadnice těžiště x_0 a y_0 desku Ω jsou

$$x_0 = \frac{1}{M} \iint_\Omega x\rho(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\,, \qquad y_0 = \frac{1}{M} \iint_\Omega y\rho(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\,. \tag{2a}$$

Je-li deska homogenní, lze při výpočtu souřadnic těžiště položit $\rho = 1$.

Momenty setrvačnosti I_x a I_y desky Ω vzhledem k souřadnicovým osám Ox a Oy jsou

$$I_x = \iint_\Omega y^2\rho(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\,, \qquad I_y = \iint_\Omega x^2\rho(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\,. \tag{3a}$$

Pro $\rho = 1$ získáme *geometrické momenty setrvačnosti.*

Nechť těleso zaujímá objem $\mathcal{V}$ a jeho hustota je $\rho = \rho(x, y, z)$. Hmotnost M tělesa je

$$M = \iiint_\mathcal{V} \rho(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z\,. \tag{1b}$$

Souřadnice těžiště x_0, y_0 a z_0 tohoto tělesa jsou

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{M} \iiint_\mathcal{V} x\rho(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z \\ y_0 &= \frac{1}{M} \iiint_\mathcal{V} y\rho(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z \\ z_0 &= \frac{1}{M} \iiint_\mathcal{V} z\rho(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z \end{aligned} \tag{2b}$$

Je-li těleso homogenní, lze při výpočtu souřadnic těžiště položit $\rho = 1$.

Momenty setrvačnosti vzhledem souřadnicovým rovinám se nazývají integrály

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \iiint_\mathcal{V} z^2\rho(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z \\ I_{xz} &= \iiint_\mathcal{V} y^2\rho(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z \\ I_{yz} &= \iiint_\mathcal{V} x^2\rho(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z \end{aligned}$$

Moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose $\boldsymbol{l}$ se nazývá integrál

$$I_{\boldsymbol{l}} = \iiint_{\mathcal{V}} r^2 \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,, \tag{3b}$$

kde r je vzdálenost bodu $[x;y;z]$ tělesa od osy $\boldsymbol{l}$. Speciálně pro souřadnicové osy Ox, Oy a Oz platí

$$\begin{aligned}
I_x &= \iiint_{\mathcal{V}} \bigl(y^2+z^2\bigr)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = I_{xy}+I_{xz}\\
I_y &= \iiint_{\mathcal{V}} \bigl(x^2+z^2\bigr)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = I_{xy}+I_{yz}\\
I_z &= \iiint_{\mathcal{V}} \bigl(x^2+y^2\bigr)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = I_{xz}+I_{yz}
\end{aligned}$$

Moment setrvačnosti vzhledem k počátku souřadnic se nazývá integrál

$$I_0 = \iiint_{\mathcal{V}} \bigl(x^2+y^2+z^2\bigr)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = I_{xy}+I_{xz}+I_{yz}\,.$$

Newtonův gravitační potenciál tělesa v bodě $P=[x;y;z]$ se nazývá integrál

$$U(x,y,z) = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\xi,\eta,\zeta,)}{r}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta\,,$$

kde $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}$.
Hmotný bod s hmotností m, který se nachází v bodě $P=[x;y;z]$ je přitahován tělesem s hustotou ρ silou $\boldsymbol{F}=\bigl(F_x,F_y,F_z\bigr)$,

$$\begin{aligned}
F_x &= km\frac{\partial U}{\partial x} = km\iiint_{\mathcal{V}} \rho(\xi,\eta,\zeta)\,\frac{\xi-x}{r^3}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta\\
F_y &= km\frac{\partial U}{\partial y} = km\iiint_{\mathcal{V}} \rho(\xi,\eta,\zeta)\,\frac{\eta-y}{r^3}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta\\
F_z &= km\frac{\partial U}{\partial z} = km\iiint_{\mathcal{V}} \rho(\xi,\eta,\zeta)\,\frac{\zeta-z}{r^3}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta\,,
\end{aligned}$$

kde k je gravitační konstanta.

Najděte těžiště homogenní desky omezené křivkami

1. $ay=x^2\,,\ x+y=2a\,;\quad a>0$

2. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,;\quad x>0\,,\ y>0$

3. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}\,; \quad x > 0\,,\ y > 0$

4. $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2a^2 xy\,; \quad x > 0\,,\ y > 0$

5. $r = a(1 + \cos\varphi)\,,\ \varphi = 0$

Řešení:

1. Oblast Ω je určena nerovnostmi $x^2 < ay$ a $x + y < 2a$ neboli $\dfrac{x^2}{a} < y < 2a - x$, ze které plyne $-2a < x < a$. Podle Fubiniho věty je

$$M = \iint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-2a}^{a} \mathrm{d}x \int_{x^2/a}^{2a-x} \mathrm{d}y = \int_{-2a}^{a} \left(2a - x - \frac{x^2}{a}\right) \mathrm{d}x = \frac{9}{2}\,a^2\,.$$

Protože

$$\iint_\Omega x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-2a}^{a} \mathrm{d}x \int_{x^2/a}^{2a-x} x\,\mathrm{d}y = \int_{-2a}^{a} x\left(2a - x - \frac{x^2}{a}\right) \mathrm{d}x = -\frac{9}{4}\,a^3$$

$$\iint_\Omega y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-2a}^{a} \mathrm{d}x \int_{x^2/a}^{2a-x} y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_{-2a}^{a} \left(4a^2 - 2ax + x^2 - \frac{x^4}{a^2}\right) \mathrm{d}x = \frac{36}{5}\,a^3$$

jsou souřadnice těžiště $x_T = -\dfrac{a}{2}$ a $y_T = \dfrac{8}{5}\,a$.

2. V tomto případě je vhodné zavést eliptické souřadnice $x = ar\cos\varphi$, $y = br\sin\varphi$. V těchto souřadnicích je oblast Ω určena nerovnostmi $0 < r < 1$ a $0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$. Protože jakobián zobrazení je $J = abr$, je

$$M = \iint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = ab\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 r\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{4}\,ab$$

$$\iint_\Omega x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = a^2 b\int_0^{\pi/2} \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi \int_0^1 r^2\,\mathrm{d}r = \frac{a^2 b}{3}$$

$$\iint_\Omega y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = ab^2\int_0^{\pi/2} \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \int_0^1 r^2\,\mathrm{d}r = \frac{ab^2}{3}\,.$$

Tedy souřadnice těžiště jsou $x_T = \dfrac{4a}{3\pi}$ a $y_T = \dfrac{4b}{3\pi}$.

3. Danou oblast popíšeme jednoduše pomocí souřadnic r a φ, které jsou definované rovnostmi $x = r\cos^3\varphi$ a $y = r\sin^3\varphi$. V těchto souřadnicích je oblast dána nerovnostmi $0 < r < a$ a $0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$. Protože jakobián uvažovaného zobrazení je $J = 3r\cos^2\varphi\sin^2\varphi$, je podle věty o substituci

$$M = \iint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 3\int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi \int_0^a r\,\mathrm{d}r = \frac{3}{32}\,\pi a^2$$

$$\iint_\Omega x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 3\int_0^{\pi/2} \cos^3\varphi\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi \int_0^a r^2\,\mathrm{d}r = \frac{8}{105}\,a^3$$

$$\iint_\Omega y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 3\int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi\sin^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi \int_0^a r^2\,\mathrm{d}r = \frac{8}{105}\,a^3$$

Tedy souřadnice těžiště jsou $x_T = y_T = \dfrac{256a}{315\pi}$.

4. V tomto případě je výhodné zavést polární souřadnice $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Oblast Ω je v těchto souřadnicích dána nerovnostmi $r^2 < a^2\sin 2\varphi$, $0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$. Protože jakobián zobrazení je $J = r$, plyne z věty o substituci

$$M = \iint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} r\,\mathrm{d}r = \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2}\sin 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{a^2}{2}$$

$$\iint_\Omega x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\sqrt{\sin 2\varphi}} r^2\cos\varphi\,\mathrm{d}r = \frac{a^3}{3}\int_0^{\pi/2}\bigl(\sin 2\varphi\bigr)^{3/2}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

$$\iint_\Omega y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\sqrt{\sin 2\varphi}} r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r = \frac{a^3}{3}\int_0^{\pi/2}\bigl(\sin 2\varphi\bigr)^{3/2}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

Abychom našli poslední integrály zavedeme novou proměnnou $\psi = \varphi - \dfrac{\pi}{4}$. Pak je $\sin 2\varphi = \sin\left(2\psi + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos 2\psi = 1 - 2\sin^2\psi$, $\cos\varphi = \cos\left(\psi + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\cos\psi - \sin\psi)$ a $\sin\varphi = \sin\left(\psi + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sin\psi + \cos\psi)$. Funkce $\bigl(1 - 2\sin^2\psi\bigr)^{3/2}\sin\psi$ je lichá, a proto

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\bigl(1 - 2\sin^2\psi\bigr)^{3/2}\sin\psi\,\mathrm{d}\psi = 0\,.$$

Oba hledané integrály jsou proto rovny

$$\frac{\sqrt{2}}{3}\,a^3\int_0^{\pi/4}\bigl(1 - 2\sin^2\psi\bigr)^{3/2}\cos\psi\,\mathrm{d}\psi\,,$$

kde jsme využili toho, že integrovaná funkce je sudá. Jestliže v tomto integrálu zavedeme novou proměnnou vztahem $\sin\psi = y$, dostaneme integrál

$$\frac{\sqrt{2}}{3}\,a^3\int_0^{1/\sqrt{2}}\bigl(1 - 2y^2\bigr)^{3/2}\,\mathrm{d}y\,.$$

Tento integrál lze řešit substitucí $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi$. Po této substituci zjistíme, že hledaný integrál je roven

$$\frac{a^3}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^4\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{a^3}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{16}\,a^3\,.$$

Tedy souřadnice těžiště jdou $x_T = y_T = \dfrac{\pi}{8}\,a$.

5. Oblast Ω je v polárních souřadnicích $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ dána nerovnostmi $0 < r < a(1+\cos\varphi)$ a $0 < \varphi < \pi$. Protože jakobián $J = r$, plyne z věty o substituci

$$M = \iint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^\pi \mathrm{d}\varphi \int_0^{a(1+\cos\varphi)} r\,\mathrm{d}r = \\ = \frac{a^2}{2}\int_0^\pi \big(1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi\big)\,\mathrm{d}\varphi = \frac{3}{4}\,\pi a^2$$

$$\iint_\Omega x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^\pi \mathrm{d}\varphi \int_0^{a(1+\cos\varphi)} r^2\cos\varphi\,\mathrm{d}r = \\ = \frac{a^3}{3}\int_0^\pi (1+\cos\varphi)^3\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{5}{8}\,\pi a^3$$

$$\iint_\Omega y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^\pi \mathrm{d}\varphi \int_0^{a(1+\cos\varphi)} r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r = \\ = \frac{a^3}{3}\int_0^\pi (1+\cos\varphi)^3\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{4}{3}\,a^3\,.$$

Tedy souřadnice těžiště jsou $x_T = \dfrac{5}{6}\,a$ a $y_T = \dfrac{16}{9\pi}\,a$.

---

6. Najděte souřadnice těžiště kruhové desky $x^2 + y^2 \le a^2$, je-li její hustota v bodě $m = [x;y]$ úměrná vzdálenosti od bodu $A = [a;0]$.

Řešení: Hustota bodě $[x;y]$ je dána vztahem $\rho(x,y) = k\sqrt{(x-a)^2 + y^2}$, kde k je konstanta úměrnosti. Zaveďme souřadnice $x = a - r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, kde $r > 0$ a $-\pi < \varphi < \pi$. V těchto souřadnicích je hustota $\rho = kr$ a kruhová deska je určena nerovnostmi $0 < r < 2a\cos\varphi$ a $-\dfrac{\pi}{2} < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$. Protože jakobián zobrazení je $J = r$, plyne z věty o substituci

$$M = \iint_\Omega \rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = k\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} r^2\,\mathrm{d}r = \\ = \frac{8}{3}\,ka^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{32}{9}\,ka^3$$

$$\iint_\Omega x\rho(x,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = k\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} r^2(a - r\cos\varphi)\,\mathrm{d}r = -\frac{32}{45}\,ka^4$$

$$\iint_\Omega y\rho(x,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = k\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} r^3\sin\varphi\,\mathrm{d}r = \\ = 4ka^4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 0\,.$$

Tedy souřadnice těžiště jsou $x_T = -\dfrac{a}{5}$ a $y_T = 0$.

Najděte momenty setrvačnosti I_x a I_y vzhledem k osám souřadnic Ox a Oy homogenní oblasti omezené křivkami (hustota $\rho = 1$)

7. $(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2\,,\ x = 0\,,\ y = 0\,; \quad 0 \le x \le a$

8. $r = a(1+\cos\varphi)$

9. $xy = a^2,\ xy = 2a^2,\ x = 2y\,,\ 2x = y\,; \quad x > 0\,,\ y > 0$

Řešení:

7. Oblast Ω je určena nerovnostmi $(x-a)^2 + (y-a)^2 > a^2$, $0 < x < a$ a $0 < y < a$, z nichž plyne $0 < y < a - \sqrt{x(2a-x)}$, $0 < x < a$ nebo $x < a - \sqrt{y(2a-y)}$, $0 < y < a$. Podle Fubiniho věty je

$$I_y = \iint_\Omega x^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^a \mathrm{d}x \int\limits_0^{a-\sqrt{x(2a-x)}} x^2 \,\mathrm{d}y = \int_0^a x^2 \Big(a - \sqrt{x(2a-x)}\Big) =$$

$$= \frac{a^4}{3} - \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - (x-a)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{16-5\pi}{16}\, a^4$$

$$I_x = \iint_\Omega y^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^a \mathrm{d}y \int\limits_0^{a-\sqrt{y(2a-y)}} y^2 \,\mathrm{d}x = I_x\,.$$

8. Oblast Ω je v polárních souřadnicích $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ definována nerovnostmi $0 < r < a(1+\cos\varphi)$ a $-\pi < \varphi < \pi$. Podle věty o substituci je

$$I_y = \iint_\Omega x^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{a(1+\cos\varphi)} r^3 \cos^2\varphi \,\mathrm{d}r =$$

$$= \frac{a^4}{4} \int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos\varphi)^4 \cos^2\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \frac{49}{32}\,\pi a^4$$

$$I_x = \iint_\Omega y^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{a(1+\cos\varphi)} r^3 \sin^2\varphi \,\mathrm{d}r =$$

$$= \frac{a^4}{4} \int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos\varphi)^4 \sin^2\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \frac{21}{32}\,\pi a^4$$

9. Oblast Ω je určena nerovnostmi $a^2 < xy < 2a^2$, $x > 0$, $y > 0$ a $\dfrac{1}{2} < \dfrac{y}{x} < 2$ a je symetrická vzhledem k záměně $x \leftrightarrow y$. Proto je $I_x = I_y$. Z nerovností, které určují plochu je vidět, že je výhodné zavést nové proměnné $u = xy$ a $v = \dfrac{y}{x}$. Protože v těchto souřadnicích jsou nerovnosti, které určují oblast $a^2 < u < 2a^2$ a $\dfrac{1}{2} < v < 2$, $y^2 = uv$ a pro jakobián platí

$$J^{-1} = \det \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \frac{2y}{x} = 2v\,,$$

plyne z věty o substituci

$$I_x = \iint_\Omega y^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_{a^2}^{2a^2} u \,\mathrm{d}u \int_{1/2}^{2} \mathrm{d}v = \frac{9}{8}\,a^4\,.$$

---

10. Najděte polární moment $I_0 = \displaystyle\iint_S \bigl(x^2 + y^2\bigr)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ plochy S, která je omezená křivkou $\bigl(x^2 + y^2\bigr)^2 = a^2\bigl(x^2 - y^2\bigr)$, $x > 0$.

Řešení: V tomto případě je výhodné použít polární souřadnice $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. V těchto souřadnicích je oblast Ω určena nerovnostmi $r^2 < a^2\cos 2\varphi$, $-\dfrac{\pi}{4} < \varphi < \dfrac{\pi}{4}$. Podle věty o substituce tedy je

$$I_0 = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \mathrm{d}\varphi \int_{0}^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} r^3 \,\mathrm{d}r = \frac{a^4}{4}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 2\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{8}\,a^4\,.$$

---

11. Dokažte vztah $I_{\boldsymbol{l}} = I_{\boldsymbol{l}_T} + Sd^2$, kde $I_{\boldsymbol{l}}$ a $I_{\boldsymbol{l}_T}$ jsou momenty setrvačnosti rovinného homogenního obrazce s obsahem S vzhledem ke dvěma rovnoběžným osám $\boldsymbol{l}$ a $\boldsymbol{l}_T$, z nichž $\boldsymbol{l}_T$ prochází těžištěm obrazce a d je vzdálenost mezi těmito osami.

Řešení: Nechť je $ax + by + c = 0$ rovnice osy $\boldsymbol{l}$ a $ax + by + c_T = 0$ rovnice osy $\boldsymbol{l}_T$. Protože osa $\boldsymbol{l}_T$ prochází těžištěm, tj. bodem $\bigl[x_T; y_T\bigr]$, je $c_T = -ax_T - by_T$. Protože kvadrát vzdálenosti bodu $\bigl[x_0; y_0\bigr]$ od přímky $ax + by + c = 0$ je $\dfrac{\bigl(ax_0 + by_0 + c\bigr)^2}{a^2 + b^2}$, je $d^2 = \dfrac{\bigl(ax_T + by_T + c\bigr)^2}{a^2 + b^2} = \dfrac{\bigl(c - c_T\bigr)^2}{a^2 + b^2}$. Protože platí

$$S = \iint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,, \quad x_T = \frac{1}{S}\iint_\Omega x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,, \quad y_T = \frac{1}{S}\iint_\Omega y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

a $I_{\boldsymbol{l}} = \displaystyle\iint_\Omega d^2(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $d^2(x,y)$ je vzdálenost bodu $[x; y]$ od osy $\boldsymbol{l}$, je

$$I_{\boldsymbol{l}} = \iint_\Omega \frac{(ax + by + c)^2}{a^2 + b^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_\Omega \frac{\bigl(ax + by + c_T + (c - c_T)\bigr)^2}{a^2 + b^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$
\begin{aligned}
&= \iint_\Omega \frac{\left(ax+by+c_T\right)^2}{a^2+b^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - 2\frac{c-c_T}{a^2+b^2}\iint_\Omega \left(ax+by+c_T\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \\
&\qquad + \frac{\left(c-c_T\right)^2}{a^2+b^2}\iint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = I_{\boldsymbol{l}_T} + d^2 S\,,
\end{aligned}
$$

protože $\displaystyle\iint_\Omega \left(ax+by+c_T\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = S\left(ax_T+by_T+c_T\right) = 0.$

---

12. Rozložení tlaku na ploše $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1$ je dáno vztahem $p = p_0\cdot\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}\right)$. Určete střední tlak na tuto plochu.

Řešení: Střední tlak je dán vztahem $\overline{p} = \dfrac{F}{S}$, kde $S = \displaystyle\iint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ je velikost plochy Ω a $F = \displaystyle\iint_\Omega p(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ je síla na tuto plochu. Pro výpočet je vhodné použít souřadnice $x = ar\cos\varphi$, $y = br\sin\varphi$. Protože jakobián tohoto zobrazení je $J = abr$ a oblast Ω je dána nerovnostmi $0<r<1$ a $0<\varphi<2\pi$, je

$$
\begin{aligned}
S &= \iint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = ab\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r\,\mathrm{d}r = \pi ab \\
F &= \iint_\Omega p(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = abp_0\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r\left(1-r^2\right)\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}\,abp_0
\end{aligned}
$$

Tedy $\overline{p} = \dfrac{F}{S} = \dfrac{p_0}{2}$.

---

13. Najděte hmotnost tělesa $x^2+y^2+z^2\ge 1$, jestliže se jeho hustota mění podle vztahu $\rho(x,y,z) = \rho_0\exp\left[-k\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right]$, kde ρ_0 a k jsou konstanty.

Řešení: Hmotnost tělesa $\mathcal{V}$ určíme ze vztahu $M = \displaystyle\iiint_\mathcal{V}\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$. V našem případě bude výhodné zavést sférické souřadnice $x = r\cos\theta\cos\varphi$, $y = r\cos\theta\sin\varphi$ a $z = r\sin\theta$. Protože jakobián tohoto zobrazení je roven $J = r^2\cos\theta$ a těleso $\mathcal{V}$ je dáno nerovnostmi $r>1$, $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ a $0<\varphi<2\pi$, je

$$
\begin{aligned}
M &= \iiint_\mathcal{V}\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \rho_0\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\int_1^\infty r^2\mathrm{e}^{-kr}\,\mathrm{d}r = \\
&= 4\pi\rho_0\left[-\left(\frac{r^2}{k}+\frac{2r}{k^2}+\frac{2}{k^3}\right)\mathrm{e}^{-kr}\right]_1^\infty = 4\pi\rho_0\left(\frac{1}{k}+\frac{2}{k^2}+\frac{2}{k^3}\right)\mathrm{e}^{-k}\,.
\end{aligned}
$$

Najděte souřadnice těžiště homogenního tělesa omezeného plochami

14. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2}\,,\; z = c$

15. $z = x^2 + y^2\,,\; x + y = a\,,\; x = 0\,,\; y = 0\,,\; z = 0$

16. $x^2 = 2pz\,,\; y^2 = 2px\,,\; x = \dfrac{p}{2}\,,\; z = 0$

17. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1\,,\; x = 0\,,\; y = 0\,,\; z = 0$

18. $x^2 + z^2 = a^2\,,\; y^2 + z^2 = a^2\,; \quad z \geq 0$

19. $x^2 + y^2 = 2z\,,\; x + y = z$

Řešení:

14. Protože jde o množinu, která je určena nerovnostmi $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} < \dfrac{z^2}{c^2}$ a $0 < z < c$, je výhodné zavést souřadnice $x = ar\cos\varphi$, $y = br\sin\varphi$ a $z = z$. Jakobián tohoto zobrazení je $J = abr$ a množina je určena nerovnostmi $0 < r < \dfrac{z}{c}$, $0 < z < c$ a $0 < \varphi < 2\pi$. Protože je těleso symetrické při zrcadlení podle rovin $x = 0$ a $y = 0$, tj. nemění se při transformacích $(x,y,z) \leftrightarrow (-x,y,z)$ a $(x,y,z) \leftrightarrow (x,-y,z)$, je $x_T = y_T = 0$. Protože

$$M = \iiint_{\mathcal{V}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = ab\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^c \mathrm{d}z\int_0^{z/c} r\,\mathrm{d}r = \pi ab\int_0^c \frac{z^2}{c^2}\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{3}\,abc$$

$$\iiint_{\mathcal{V}} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = ab\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^c \mathrm{d}z\int_0^{z/c} rz\,\mathrm{d}r = \pi ab\int_0^c \frac{z^3}{c^2}\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{4}\,abc^2$$

je $z_T = \dfrac{3}{4}\,c$.

15. Jedná se o těleso určené nerovnostmi $0 < z < x^2 + y^2$, $0 < y < a - x$ a $0 < x < a$. Protože je těleso symetrické vzhledem k transformaci $(x,y,z) \leftrightarrow (y,x,z)$, je $y_T = x_T$. Protože

$$M = \iiint_{\mathcal{V}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^a \mathrm{d}x\int_0^{a-x}\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}\mathrm{d}z = \frac{a^4}{6}$$

$$\iiint_{\mathcal{V}} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^a \mathrm{d}x\int_0^{a-x}\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2} x\,\mathrm{d}z = \frac{a^5}{15}$$

$$\iiint_{\mathcal{V}} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^a \mathrm{d}x\int_0^{a-x}\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2} z\,\mathrm{d}z = \frac{7a^5}{180}$$

Tedy $x_T = y_T = \dfrac{2}{5}\,a$ a $z_T = \dfrac{7}{30}\,a$.

16. Těleso je dáno nerovnostmi $0 < z < \dfrac{x^2}{2p}$ a $\dfrac{y^2}{2p} < x < \dfrac{p}{2}$, ze které plyne $-p < y < p$. Tedy

$$M = \iiint_{\mathcal{V}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{-p}^{p} \mathrm{d}y \int_{y^2/2p}^{p/2} \mathrm{d}x \int_{0}^{x^2/2p} \mathrm{d}z = \frac{p^3}{28}$$

$$\iiint_{\mathcal{V}} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{-p}^{p} \mathrm{d}y \int_{y^2/2p}^{p/2} \mathrm{d}x \int_{0}^{x^2/2p} x\,\mathrm{d}z = \frac{p^4}{72}$$

$$\iiint_{\mathcal{V}} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{-p}^{p} \mathrm{d}y \int_{y^2/2p}^{p/2} \mathrm{d}x \int_{0}^{x^2/2p} y\,\mathrm{d}z = 0 \quad \text{symetrie}$$

$$\iiint_{\mathcal{V}} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{-p}^{p} \mathrm{d}y \int_{y^2/2p}^{p/2} \mathrm{d}x \int_{0}^{x^2/2p} z\,\mathrm{d}z = \frac{p^4}{11 \cdot 64}$$

Tedy $x_T = \dfrac{7}{18}\,p$, $y_T = 0$ a $z_T = \dfrac{7}{176}\,p$.

17. Zde je výhodné zavést souřadnice $x = ar\cos\theta\cos\varphi$, $y = br\cos\theta\sin\varphi$ a $z = cr\sin\theta$. Jakobián tohoto zobrazení je $J = abcr^2\cos\theta$ a těleso $\mathcal{V}$ je v těchto souřadnicích určeno nerovnostmi $0 < r < 1$, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ a $0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$. Tedy

$$M = \iiint_{\mathcal{V}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = abc \int_{0}^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi \int_{0}^{\pi/2} \cos\theta\,\mathrm{d}\theta \int_{0}^{1} r^2\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{6}\,abc$$

$$\iiint_{\mathcal{V}} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = a^2bc \int_{0}^{\pi/2} \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi \int_{0}^{\pi/2} \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta \int_{0}^{1} r^3\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{16}\,a^2bc$$

$$\iiint_{\mathcal{V}} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = ab^2c \int_{0}^{\pi/2} \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \int_{0}^{\pi/2} \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta \int_{0}^{1} r^3\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{16}\,ab^2c$$

$$\iiint_{\mathcal{V}} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = abc^2 \int_{0}^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi \int_{0}^{\pi/2} \cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \int_{0}^{1} r^3\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{16}\,abc^2$$

a $x_T = \dfrac{3}{8}\,a$, $y_T = \dfrac{3}{8}\,b$, $z_T = \dfrac{3}{8}\,c$.

18. Těleso $\mathcal{V}$ je určeno nerovnostmi $-\sqrt{a^2 - z^2} < x < \sqrt{a^2 - z^2}$, $-\sqrt{a^2 - z^2} < y < \sqrt{a^2 - z^2}$ a $0 < z < a$. Protože je symetrické podle rovin $x = 0$ a $y = 0$, je $x_T = y_T = 0$. Protože

$$M = \iiint_{\mathcal{V}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{0}^{a} \mathrm{d}z \int\limits_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}} \mathrm{d}y \int\limits_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}} \mathrm{d}x = 4\int_{0}^{a} \bigl(a^2 - z^2\bigr)\,\mathrm{d}z = \frac{8}{3}\,a^3$$

$$\iiint_{\mathcal{V}} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{0}^{a} z\,\mathrm{d}z \int\limits_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}} \mathrm{d}y \int\limits_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}} \mathrm{d}x = 4\int_{0}^{a} z\bigl(a^2 - z^2\bigr)\,\mathrm{d}z = a^4$$

je $z_T = \dfrac{3}{8}\,a$.

19. Těleso $\mathcal{V}$ je určeno nerovnostmi $\dfrac{x^2+y^2}{2} < z < x+y$, ze kterých plyne $x^2 + y^2 < 2x+2y$, neboli $(x-1)^2+(y-1)^2 < 2$. Proto je vhodné volit souřadnice $x = 1 + r\cos\varphi$, $y = 1 + r\sin\varphi$, ve kterých je těleso $\mathcal{V}$ definováno nerovnostmi $1 + r(\cos\varphi+\sin\varphi) + \dfrac{r^2}{2} < z < 2 + r(\cos\varphi+\sin\varphi)$, $0 < r < \sqrt{2}$ a $0 < \varphi < 2\pi$. Protože jakobián tohoto zobrazení je $J = r$, dostaneme

$$M = \iiint_{\mathcal{V}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r\,\mathrm{d}r \int\limits_{1+r(\cos\varphi+\sin\varphi)+r^2/2}^{2+r(\cos\varphi+\sin\varphi)} \mathrm{d}z = \pi$$

$$\iiint_{\mathcal{V}} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r(1+r\cos\varphi)\,\mathrm{d}r \int\limits_{1+r(\cos\varphi+\sin\varphi)+r^2/2}^{2+r(\cos\varphi+\sin\varphi)} \mathrm{d}z = \pi$$

$$\iiint_{\mathcal{V}} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r(1+r\sin\varphi)\,\mathrm{d}r \int\limits_{1+r(\cos\varphi+\sin\varphi)+r^2/2}^{2+r(\cos\varphi+\sin\varphi)} \mathrm{d}z = \pi$$

$$\iiint_{\mathcal{V}} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r\,\mathrm{d}r \int\limits_{1+r(\cos\varphi+\sin\varphi)+r^2/2}^{2+r(\cos\varphi+\sin\varphi)} z\,\mathrm{d}z = \frac{5}{3}\,\pi$$

Tedy souřadnice těžiště jsou $x_T = y_T = 1$ a $z_T = \dfrac{5}{3}$.

Najděte momenty setrvačnosti vzhledem k souřadnicovým rovinám homogenního tělesa, které je omezené plochami

20. $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1\,,\ x = 0\,,\ y = 0\,,\ z = 0$

21. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

22. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2}\,,\ z = 0\,,\ z = c$

23. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1\,,\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{x}{a}$

24. $\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}\right)^2 = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2}$

Řešení:

20. Jedná se o čtyřstěn $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}<1$, $x>0$, $y>0$ a $z>0$. Abychom získali množinu, která nezávisí na konstantách a, b a c, zavedeme nové proměnné $x=a\xi$, $y=b\eta$ a $z=c\zeta$. Jakobián tohoto zobrazení je $J=abc$ a nerovnosti, které definují těleso $\mathcal{V}$ jsou v těchto souřadnicích $\xi+\eta+\zeta<1$, $\xi>0$, $\eta>0$ a $\zeta>0$. Momenty setrvačnosti k souřadnicovým rovinám najdeme ze vztahů

$$I_{yz}=\iiint_{\mathcal{V}} x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=a^3bc\int_0^1\mathrm{d}\xi\int_0^{1-\xi}\mathrm{d}\eta\int\limits_0^{1-\xi-\eta}\xi^2\,\mathrm{d}\zeta=$$

$$=a^3bc\int_0^1\mathrm{d}\xi\int_0^{1-\xi}\xi^2(1-\xi-\eta)\,\mathrm{d}\eta=\frac{a^3bc}{\int}\,{}^{1}_{0}\,\xi^2(1-\xi)^2\,\mathrm{d}\xi=\frac{a^3bc}{60}$$

$$I_{xz}=\iiint_{\mathcal{V}} y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=ab^3c\int_0^1\mathrm{d}\eta\int_0^{1-\eta}\mathrm{d}\xi\int\limits_0^{1-\xi-\eta}\eta^2\,\mathrm{d}\zeta=\frac{ab^3c}{60}$$

$$I_{xy}=\iiint_{\mathcal{V}} z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=abc^3\int_0^1\mathrm{d}\zeta\int_0^{1-\zeta}\mathrm{d}\xi\int\limits_0^{1-\xi-\zeta}\zeta^2\,\mathrm{d}\eta=\frac{abc^3}{60}$$

21. Zavedeme souřadnice $x=ar\cos\theta\cos\varphi$, $y=br\cos\theta\sin\varphi$ a $z=cr\sin\theta$. Protože jakobián tohoto zobrazení je $J=abcr^2\cos\theta$ a vnitřek daného elipsoidu je definován nerovnostmi $0<r<1$, $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ a $0<\varphi<2\pi$, je

$$I_{yz}=\iiint_{\mathcal{V}} x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=a^3bc\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^4\,\mathrm{d}r=\frac{4\pi}{15}\,a^3bc$$

$$I_{xz}=\iiint_{\mathcal{V}} y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\frac{4\pi}{15}\,ab^3c$$

$$I_{xy}=\iiint_{\mathcal{V}} z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\frac{4\pi}{15}\,abc^3$$

22. Když zavedeme bezrozměrné souřadnice ξ, η a ζ vztahy $x=a\xi$, $y=b\eta$ a $z=c\zeta$, je daná oblast definována nerovnostmi $\xi^2+\eta^2<\zeta^2$ a $0<\zeta<1$. Jakobián tohoto zobrazení je $J=abc$. Jestliže nyní zavedeme cylindrické souřadnice $\xi=r\cos\varphi$, $\eta=r\sin\varphi$ a $\zeta=\zeta$, je těleso určené nerovnostmi $0<r<\zeta<1$ a $0<\varphi<2\pi$. Protože jakobián poslední substituce je $J=r$, platí

$$I_{yz}=\iiint_{\mathcal{V}} x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=a^3bc\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^1\mathrm{d}\zeta\int_0^{\zeta}r^3\,\mathrm{d}r=$$

$$=\frac{\pi}{4}\,a^3bc\int_0^1\zeta^4\,\mathrm{d}\zeta=\frac{\pi}{20}\,a^3bc$$

$$I_{xz}=\iiint_{\mathcal{V}} y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=ab^3c\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^1\mathrm{d}\zeta\int_0^{\zeta}r^3\,\mathrm{d}r=\frac{\pi}{20}\,ab^3c$$

$$I_{xy} = \iiint_{\mathcal{V}} z^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = abc^3 \int_0^{2\pi} \varphi \,\mathrm{d}\varphi \int_0^1 \mathrm{d}\zeta \int_0^{\zeta} \zeta^2 r \,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{5}\, abc^3$$

23. Zaveďme bezrozměrné souřadnice vztahy $x = a\xi$, $y = b\eta$ a $z = c\zeta$. Jakobián transformace je $J = abc$ a dané těleso je v těchto souřadnicích dáno nerovnostmi $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 < 1$ a $\xi^2 + \eta^2 < \xi$ neboli $-\sqrt{1-\xi^2-\eta^2} < \zeta < \sqrt{1-\xi^2-\eta^2}$ a $\xi^2 + \eta^2 < \xi$. Tedy

$$I_{xy} = \iiint_{\mathcal{V}} z^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = abc^3 \iint_{\Omega} \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \int\limits_{-\sqrt{1-\xi^2-\eta^2}}^{\sqrt{1-\xi^2-\eta^2}} \zeta^2 \,\mathrm{d}\zeta =$$

$$= \frac{2}{3}\, abc^3 \iint_{\Omega} \left(1 - \xi^2 - \eta^2\right)^{3/2} \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

$$I_{xz} = \iiint_{\mathcal{V}} y^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = ab^3c \iint_{\Omega} \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \int\limits_{-\sqrt{1-\xi^2-\eta^2}}^{\sqrt{1-\xi^2-\eta^2}} \eta^2 \,\mathrm{d}\zeta =$$

$$= 2ab^3c \iint_{\Omega} \eta^2 \sqrt{1-\xi^2-\eta^2}\, \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

$$I_{yz} = \iiint_{\mathcal{V}} x^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = a^3bc \iint_{\Omega} \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \int\limits_{-\sqrt{1-\xi^2-\eta^2}}^{\sqrt{1-\xi^2-\eta^2}} \xi^2 \,\mathrm{d}\zeta =$$

$$= 2ab^3c \iint_{\Omega} \xi^2 \sqrt{1-\xi^2-\eta^2}\, \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

kde oblast Ω je dána nerovnostmi $\xi^2+\eta^2 < 1$ a $\xi^2+\eta^2 < \xi$ (např. z nákresu je vidět, že první nerovnost je důsledkem druhé nerovnosti). Zavedeme polární souřadnice $\xi = r\cos\varphi$, $\eta = r\sin\varphi$. Oblast Ω je v těchto souřadnicích dána nerovnostmi $0 < r < 1$ a $0 < r < \cos\varphi$ neboli $0 < r < \cos\varphi$ a $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Protože jakobián transformace je $J = r$, platí

$$I_{xy} = \frac{2}{3}\, abc^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\cos\varphi} r\left(1-r^2\right)^{3/2} \mathrm{d}r = \frac{2}{15}\, abc^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1 - |\sin\varphi|^5\right) \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{4}{15}\, abc^3 \int_0^{\pi/2} \left(1 - \sin^5\varphi\right) \mathrm{d}\varphi = \frac{4}{15}\, abc^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{225}\left(15\pi - 16\right) abc^3$$

$$I_{xz} = 2ab^3c \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2\varphi \,\mathrm{d}\varphi \int_0^{\cos\varphi} r^3 \sqrt{1-r^2}\, \mathrm{d}r$$

$$I_{yz} = 2a^3bc \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\varphi \,\mathrm{d}\varphi \int_0^{\cos\varphi} r^3 \sqrt{1-r^2}\, \mathrm{d}r$$

Integrál $\displaystyle\int r^3\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}r$ lze najít například pomocí substituce $1-r^2 = 2t^2$. Pak dostaneme $\displaystyle\int r^3\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}r = -\frac{2+3r^2}{15}\,\big(1-r^2\big)^{3/2}$. Tedy

$$I_{xz} = \frac{2}{15}\,ab^3c\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\Big(2-\big(2+3\cos^2\varphi\big)|\sin\varphi|^3\Big)\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{2\pi}{1575}\,ab^3c\big(105\pi-272\big)$$

$$I_{yz} = \frac{2}{15}\,a^3bc\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\Big(2-\big(2+3\cos^2\varphi\big)|\sin\varphi|^3\Big)\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{2\pi}{1575}\,a^3bc\big(105\pi-92\big)$$

24. V tomto případě jsou vhodné souřadnice definované vztahy $x = ar\cos\theta\cos\varphi$, $y = br\cos\theta\varphi$ a $z = cr\sin\theta$, kde $r > 0$, $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ a $0 < \varphi < 2\pi$. Jakobián tohoto zobrazení je $j = abcr^2\cos\theta$ a těleso $\mathcal{V}$ je určeno nerovnostmi $r^2 < \cos 2\theta$ a $0 < \varphi < 2\pi$, ze kterých plyne $0 < r < \sqrt{\cos 2\theta}$, $-\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ a $0 < \varphi < 2\pi$. Tedy

$$\begin{aligned}
I_{yz} &= \iiint_{\mathcal{V}} x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = a^3bc\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} r^4\,\mathrm{d}r = \\
&= \frac{\pi}{5}\,a^3bc\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos^3\theta\big(\cos 2\theta\big)^{5/2}\,\mathrm{d}\theta \\
I_{xz} &= \iiint_{\mathcal{V}} y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = ab^3c\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} r^4\,\mathrm{d}r = \\
&= \frac{\pi}{5}\,ab^3c\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos^3\theta\big(\cos 2\theta\big)^{5/2}\,\mathrm{d}\theta \\
I_{xy} &= \iiint_{\mathcal{V}} z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = abc^3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\sin^2\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} r^4\,\mathrm{d}r = \\
&= \frac{\pi}{5}\,abc^3\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\sin^2\theta\cos\theta\big(\cos 2\theta\big)^{5/2}\,\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

Protože $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$, lze pro poslední integrály použít substituci $\sin\theta = t$. Ta vede k integrálům

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos^3\theta\big(\cos 2\theta\big)^{5/2}\,\mathrm{d}\theta = \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}}\big(1-t^2\big)\big(1-2t^2\big)^{5/2}\,\mathrm{d}t$$

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\sin^2\theta\cos\theta\big(\cos 2\theta\big)^{5/2}\,\mathrm{d}\theta = \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} t^2\big(1-2t^2\big)^{5/2}\,\mathrm{d}t$$

Substituce $t = \dfrac{\sin\tau}{\sqrt{2}}$ pak dává

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^3\theta \bigl(\cos 2\theta\bigr)^{5/2} \,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \bigl(1+\cos^2\tau\bigr) \cos^6\tau \,\mathrm{d}\tau =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{15}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}\,\pi$$

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin^2\theta \cos\theta \bigl(\cos 2\theta\bigr)^{5/2} \,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \bigl(1-\cos^2\tau\bigr) \cos^6\tau \,\mathrm{d}\tau =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}\,\pi$$

A po dosazení $I_{yz} = \dfrac{15}{256\sqrt{2}}\,\pi^2 a^3 bc$, $I_{xz} = \dfrac{15}{256\sqrt{2}}\,\pi^2 ab^3 c$ a $I_{xy} = \dfrac{1}{128\sqrt{2}}\,\pi^2 abc^3$.

Najděte momenty setrvačnosti vzhledem k ose Oz homogenního tělesa omezeného plochami

25. $z = x^2 + y^2\,,\ x + y = \pm 1\,,\ x - y = \pm 1\,,\ z = 0$

26. $x^2 + y^2 + z^2 = 2\,,\ x^2 + y^2 = z^2\,;\quad z > 0$

Řešení: Dané těleso je určené nerovnostmi $0 < z < x^2 + y^2$, $-1 < x + y < 1$ a $-1 < x - y < 1$. Podle Fubiniho věty je

$$I_z = \iiint_{\mathcal{V}} \bigl(x^2+y^2\bigr) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_{\Omega} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_0^{x^2+y^2} \bigl(x^2+y^2\bigr)\,\mathrm{d}z = \iint_{\Omega} \bigl(x^2+y^2\bigr)^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

kde oblast Ω je definována nerovnostmi $-1 < x+y < 1$ a $-1 < x-y < 1$. Poslední integrál najdeme například substitucí $u = x + y$ a $v = x - y$. Z těchto rovnic plyne $x = \dfrac{u+v}{2}$ a $y = \dfrac{u-v}{2}$, jakobián zobrazení je $|J| = \dfrac{1}{2}$ a oblast Ω je dána nerovnostmi $-1 < u < 1$ a $-1 < v < 1$. Tedy

$$I_z = \frac{1}{8} \int_{-1}^{1} \mathrm{d}u \int_{-1}^{1} \bigl(u^2+v^2\bigr)^2 \,\mathrm{d}v = \frac{14}{45}\,.$$

26. Těleso je určeno nerovnostmi $x^2+y^2+z^2 < 2$ a $x^2+y^2 < z^2$. Protože se jedná o rotační těleso, zavedeme cylindrické souřadnice vztahy $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ a $z = z$. Jakobián zobrazení je $J = r$ a těleso je určeno nerovnostmi $r^2 + z^2 < 2$, $0 < r < z$ a $0 < \varphi < 2\pi$. Proto je

$$I_z = \iiint_{\mathcal{V}} \bigl(x^2+y^2\bigr) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \iint_{\Omega} r^3 \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z = 2\pi \iint_{\Omega} r^3 \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z\,,$$

kde oblast Ω je dána nerovnostmi $r^2+z^2<2$ a $0<r<z$. Jestliže zavedeme polární souřadnice $r=\rho\cos\theta$, $z=\rho\sin\theta$, jakobián je $J=\rho$, je oblast Ω dána nerovnostmi $0<\rho<\sqrt{2}$, $0<\cos\theta<\sin\theta$, ze kterých plyne $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$. Tedy

$$I_z=2\pi\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos^3\,\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\rho^4\,\mathrm{d}\rho=\frac{4}{15}\,\pi\bigl(4\sqrt{2}-5\bigr)\,.$$

---

27. Najděte moment setrvačnosti homogenní koule $x^2+y^2+z^2\le R^2$ vzhledem k jejímu průměru, je-li hustota koule v bodě $[x;y;z]$ úměrná vzdálenosti od středu koule.

Řešení: Protože je úloha symetrická vzhledem k rotacím kolem počátku, lze vybrat za osu libovolnou přímku, která prochází počátkem. Zvolíme například osu Oz. Moment setrvačnosti vzhledem k této ose je dán integrálem

$$I=\iiint_{\mathcal{V}}\bigl(x^2+y^2\bigr)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,,$$

kde $\rho(x,y,z)$ je hustota. V našem případě je $\rho(x,y,z)=k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, kde $k>0$ je konstanta. Kvůli symetrii je výhodné zavést sférické souřadnice vztahy $x=r\cos\theta\cos\varphi$, $y=r\cos\theta\sin\varphi$ a $z=r\sin\theta$. Protože jakobián tohoto zobrazení je $J=r^2\cos\theta$ a koule je dána nerovnostmi $0<r<R$, $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ a $0<\varphi<2\pi$, je

$$I=k\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^R r^5\,\mathrm{d}r=\frac{4}{9}\,k\pi R^6\,.$$

Když si uvědomíme, že hmotnost koule je

$$M=\iiint_{\mathcal{V}}\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=k\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^R r^3\,\mathrm{d}r=k\pi R^4\,,$$

lze psát $I=\frac{4}{9}\,MR^2$, kde M je hmotnost koule.

---

28. Dokažte rovnost $I_{\boldsymbol{l}}=I_{\boldsymbol{l}_T}+Md^2$, kde $I_{\boldsymbol{l}}$ je moment setrvačnosti vzhledem k nějaké ose $\boldsymbol{l}$, $I_{\boldsymbol{l}_T}$ je moment setrvačnosti vzhledem k ose $\boldsymbol{l}_T$, která prochází těžištěm a je rovnoběžná s osou $\boldsymbol{l}$, d je vzdálenost mezi osami $\boldsymbol{l}$ a $\boldsymbol{l}_T$ a M je hmotnost tělesa.

Řešení: Nechť je osa $\boldsymbol{l}$ dána parametrickými rovnicemi $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{n}t$, kde $\boldsymbol{n}$ je jednotkový vektor, tj. platí $\|\boldsymbol{n}\|=1$. Protože vzdálenost $d(\boldsymbol{x})$ bodu $\boldsymbol{x}$ od přímky $\boldsymbol{l}$

je dána vztahem $d(\boldsymbol{x})= \Big|\boldsymbol{n} \times \big((\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\times \boldsymbol{n}\big)\Big|$, je

$$\begin{aligned}
I = \iiint_{\mathcal{V}} d^2(\boldsymbol{x})\rho(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \iiint_{V} \Big|\boldsymbol{n} \times \big((\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\times \boldsymbol{n}\big)\Big|^2 \rho(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \\
&= \iiint_{\mathcal{V}} \Big|\boldsymbol{n} \times \big((\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_T+\boldsymbol{x}_T-\boldsymbol{x}_0)\times \boldsymbol{n}\big)\Big|^2 \rho(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \\
&= \iiint_{\mathcal{V}} \Big|\boldsymbol{n} \times \big((\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_T)\times \boldsymbol{n}\big)\Big|^2 \rho(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \\
&\quad + 2\iint_{\mathcal{V}} \Big(\boldsymbol{n} \times \big((\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_T)\times \boldsymbol{n}\big)\Big)\cdot\Big(\boldsymbol{n} \times \big((\boldsymbol{x}_T-\boldsymbol{x}_0)\times \boldsymbol{n}\big)\Big)\rho(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \\
&\qquad + \iiint_{\mathcal{V}} \Big|\boldsymbol{n} \times \big((\boldsymbol{x}_T-\boldsymbol{x}_0)\times \boldsymbol{n}\big)\Big|^2 \rho(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = I_T + Md^2\,,
\end{aligned}$$

protože

$$\iiint_{\mathcal{V}} \rho(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = M$$
$$\iiint_{\mathcal{V}} \boldsymbol{x}\rho(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = M\boldsymbol{x}_T$$

a $\Big|\boldsymbol{n} \times \big((\boldsymbol{x}_T-\boldsymbol{x}_0)\times \boldsymbol{n}\big)\Big| = d$ je vzdálenost těžiště $\boldsymbol{x}_T$ od osy $\boldsymbol{l}$.

---

29. Najděte moment setrvačnosti homogenního válce $x^2+y^2 \le a^2$, $-h \le z \le h$, s hustotou ρ_0 vzhledem k přímce $x=y=z$.

Řešení: Čtverec vzdálenosti bodu $[x;y;z]$ od dané přímky je $d^2 = \dfrac{2}{3}\big(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz\big)$. Tedy

$$I = \iiint_{\mathcal{V}} d^2\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{2}{3}\,\rho_0 \iiint_{\mathcal{V}} \big(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Pro výpočet integrálu je výhodné zvolit cylindrické souřadnice $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ a $z = z$. Jakobián této transformace je $J = r$ a těleso $\mathcal{V}$ je určeno nerovnostmi $0 < r < a$, $0 < \varphi < 2\pi$, $-h < z < h$. Z toho plyne

$$\begin{aligned}
I &= \frac{2}{3}\,\rho_0 \int_{-h}^{h}\mathrm{d}z \int_0^a \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} r\big(r^2+z^2-r^2\cos\varphi\sin\varphi - rz\cos\varphi - rz\sin\varphi\big)\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= \frac{4}{3}\,\pi\rho_0 \int_{-h}^{h}\mathrm{d}z \int_0^a r\big(r^2+z^2\big)\,\mathrm{d}r = \frac{2}{3}\,\pi\rho_0 a^2 h\left(a^2+\frac{2}{3}\,h^2\right).
\end{aligned}$$

Jestliže si uvědomíme, že hmotnost válce je $M = 2\pi\rho_0 a^2 h$, lze moment setrvačnosti psát ve tvaru $I = \dfrac{M}{3}\left(a^2+\dfrac{2}{3}\,h^2\right)$.

30. Najděte moment setrvačnosti vzhledem k počátku souřadnic homogenního tělesa omezeného plochou $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2 = a^2\left(x^2+y^2\right)$, které má hustotu ρ_0.

Řešení: Máme najít integrál

$$I_0 = \iiint_{\mathcal{V}} \rho_0\left(x^2+y^2+z^2\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,,$$

kde $\mathcal{V}$ je těleso definované nerovností $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2 < a^2\left(x^2+y^2\right)$. Z tvaru integrované funkce a oblasti integrace se zdá, že bude výhodné použít sférické souřadnice, které jsou definovány vztahy $x = r\cos\theta\cos\varphi$, $y = r\cos\theta\sin\varphi$ a $z = r\sin\theta$. Jakobián tohoto zobrazení je $J = r^2\cos\theta$ a oblast $\mathcal{V}$ je dána nerovnostmi $0 < r < a\cos\theta$, $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ a $0 < \varphi < 2\pi$. Tedy platí

$$\begin{aligned} I_0 &= \rho_0 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta\,\mathrm{d}\theta \int_0^{a\cos\theta} r^4\,\mathrm{d}r = \frac{2}{5}\,\pi\rho_0 a^5 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^6\theta\,\mathrm{d}\theta = \\ &= \frac{2}{5}\,\pi\rho_0 a^5\,\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\,\pi = \frac{\pi^2}{8}\,a^5\rho_0\,. \end{aligned}$$

---

31. Najděte Newtonův potenciál v bodě $P = [x;y;x]$ homogenní koule $\xi^2+\eta^2+\zeta^2 \le R^2$ s hustotou ρ_0.

Řešení: Protože je daný problém sfériky symetrický, bude potenciál U funkcí pouze vzdálenosti bodu $[x;y;z]$ od počátku. Proto stačí najít potenciál v bodě $[0;0;r]$. V tomto bodě je potenciál dán integrálem

$$\begin{aligned} U(x,y,z) = U(r) &= \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta = \\ &= \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho_0\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta}{\sqrt{r^2-2r\zeta+\xi^2+\eta^2+\zeta^2}} \end{aligned}$$

kde ρ_0 je konstanta. Vzhledem k oblasti integrace je výhodné zvolit sférické souřadnice vztahy $\xi = \rho\cos\theta\cos\varphi$, $\eta = \rho\cos\theta\sin\varphi$ a $\zeta = \rho\sin\theta$. (Kdybychom nezvolili bod $[0;0;r]$, bylo by třeba zvolit sférické souřadnice, ve kterých by osa $O\zeta$ procházela bodem P. Pak by totiž jmenovatel zlomku měl tvar stejný jako výše a další výpočet by byl stejný.) Po této substituci dostaneme

$$\begin{aligned} U(r) &= \rho_0 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^R \mathrm{d}\rho \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\rho^2\cos\theta\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\rho^2-2r\rho\sin\theta+r^2}} = \\ &= 2\pi k \int_0^R \rho^2 \left[-\frac{\sqrt{\rho^2-2r\rho+r^2}}{r\rho}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2\pi\rho_0 \int_0^R \frac{\rho}{r}\big(|\rho+r|-|\rho-r|\big)\,\mathrm{d}\rho \end{aligned}$$

Hodnota tohoto integrálu závisí na tom, zda je $r > R$ nebo $r < R$. Pro $r > R$ je $|\rho - r| = r - \rho$, a tedy

$$U(r) = 4\pi\rho_0 \int_0^R \frac{\rho^2}{r}\,\mathrm{d}\rho = \frac{4}{3r}\,\pi\rho_0 R^3\,.$$

Naopak pro $r < R$ je

$$\begin{aligned} U(r) &= 4\pi\rho_0 \int_0^r \frac{\rho^2}{r}\mathrm{d}\rho + 4\pi\rho_0 \int_r^R \rho\,\mathrm{d}\rho = \\ &= \frac{4}{3}\,\pi\rho_0 r^2 + 2\pi\rho_0\bigl(R^2 - r^2\bigr) = 2\pi\rho_0\left(R^2 - \frac{r^2}{3}\right). \end{aligned}$$

---

32. Najděte Newtonův potenciál v bodě $P = [x; y; z]$ tělesa $R_1^2 \le \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \le R_2^2$, je-li hustota rovna $\rho = f(r)$, kde f je známá funkce $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$.

Řešení: Podobně jako v předcházejícím případě stačí najít potenciál v bodě $P = [0; 0; r]$. Ve sférických souřadnicích dostaneme

$$U(x, y, z) = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} f(\rho)\,\frac{\rho}{r}\,\bigl(|\rho + r| - |\rho - r|\bigr)\,\mathrm{d}\rho\,,$$

kde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Protože pro $\frac{\rho}{r} < 1$ je $\frac{\rho}{r}\bigl(|\rho{+}r|{-}|\rho{-}r|\bigr) = 2\frac{\rho^2}{r}$ a pro $\frac{\rho}{r} > 1$ je $\frac{\rho}{r}\bigl(|\rho{+}r|{-}|\rho{-}r|\bigr) = 2r$, lze integrovanou funkci zapsat ve tvaru $2f(\rho)\,\min\left(\rho, \frac{\rho^2}{r}\right)$. Tedy

$$U(x, y, z) = 4\pi \int_{R_1}^{R_2} f(\rho)\,\min\left(\rho, \frac{\rho^2}{r}\right)\mathrm{d}\rho\,,$$

kde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

---

33. Najděte Newtonův potenciál v bodě $P = [0; 0; z]$ válce $\xi^2 + \eta^2 \le a^2$, $0 \le \zeta \le h$, s konstantní hustotou ρ_0.

Řešení: Potenciál v bodě $P = [0; 0; z]$ je dán integrálem

$$U = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho_0\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta}{\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - z)^2}\,.$$

Protože těleso $\mathcal{V}$ je část válce, je výhodné zavést cylindrické souřadnice $\xi = r\cos\varphi$, $\eta = r\sin\varphi$ a $\zeta = \zeta$. Protože jakobián je $J = r$ a těleso $\mathcal{V}$ je dáno nerovnostmi $0 < r < a$, $0 < \varphi < 2\pi$ a $0 < \zeta < h$, je

$$U = \rho_0 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^h \mathrm{d}z \int_0^a \frac{r\,\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2 + (\zeta - z)^2}} = 2\pi\rho_0 \int_0^h \left(\sqrt{a^2 + (\zeta - z)^2} - \bigl|\zeta - z\bigr|\right)\mathrm{d}\zeta$$

Protože

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{a^2+x^2} - \int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}} =$$
$$= x\sqrt{a^2+x^2} - \int \sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x + a^2 \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}}\,,$$

je

$$\int\limits_0^h \sqrt{a^2+(\zeta-z)^2}\,\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2}\Big[(\zeta-z)\sqrt{a^2+(\zeta-z)^2}+$$
$$+ a^2 \ln\big(\zeta - z + \sqrt{a^2+(\zeta-z)^2}\big)\Big]_0^h =$$
$$= \frac{1}{2}\Big((h-z)\sqrt{a^2+(h-z)^2} + z\sqrt{a^2+z^2} + a^2 \ln \frac{h-z+\sqrt{a^2+(h-z)^2}}{\sqrt{a^2+z^2}-z}\,.$$

Hodnota druhého integrálu $\int_0^h \big|\zeta - z\big|\,\mathrm{d}\zeta$ je pro $z < 0$ rovna

$$\int_0^h (\zeta - z)\,\mathrm{d}\zeta = \frac{h^2}{2} - hz\,,$$

pro $0 < z < h$ je

$$\int_0^z (z-\zeta)\,\mathrm{d}\zeta + \int_z^h (\zeta - z)\,\mathrm{d}\zeta = \frac{h^2}{2} - z(h-z)$$

a pro $z > h$ je

$$\int_0^h (z-\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = zh - \frac{h^2}{2}\,.$$

Tyto tři vztahy lze zapsat jako

$$\int_0^h |\zeta - z|\,\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2}\big((h-z)|h-z| + z|z|\big)\,.$$

Tedy potenciál je

$$U = \pi\rho_0\Big[(h-z)\Big(\sqrt{a^2+(h-z)^2} - |h-z|\Big) + z\Big(\sqrt{a^2+z^2} - |z|\Big)+$$
$$+ a^2 \ln \frac{h-z+\sqrt{a^2+(h-z)^2}}{\sqrt{a^2+z^2}-z}\Big].$$

34. Jakou silou přitahuje homogenní koule $\xi^2+\eta^2+\zeta^2 \le R^2$ s hmotností M hmotný bod $P=[0;0;a]$ s hmotností m?

Řešení: Složky síly, kterou přitahuje koule hmotný bod jsou dány integrály

$$F_x = km \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho_0 \xi \,\mathrm{d}\xi \,\mathrm{d}\eta \,\mathrm{d}\zeta}{\big(\xi^2+\eta^2+(\zeta-a)^2\big)^{3/2}}$$

$$F_y = km \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho_0 \eta \,\mathrm{d}\xi \,\mathrm{d}\eta \,\mathrm{d}\zeta}{\big(\xi^2+\eta^2+(\zeta-a)^2\big)^{3/2}}$$

$$F_z = km \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho_0 (\zeta-a) \,\mathrm{d}\xi \,\mathrm{d}\eta \,\mathrm{d}\zeta}{\big(\xi^2+\eta^2+(\zeta-a)^2\big)^{3/2}}$$

kde hustota ρ_0 je dána vztahem $M=\dfrac{4}{3}\pi\rho_0 R^3$. Když zavedeme sférické souřadnice $\xi = r\cos\theta\cos\varphi$, $\eta = r\cos\theta\sin\varphi$ a $\zeta = r\sin\theta$, dostaneme

$$F_x = km\rho_0 \int_0^R \mathrm{d}r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \frac{r^3\cos^2\theta\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{\big(r^2-2ar\sin\theta+a^2\big)^{3/2}} = 0$$

$$F_y = km\rho_0 \int_0^R \mathrm{d}r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \frac{r^3\cos^2\theta\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{\big(r^2-2ar\sin\theta+a^2\big)^{3/2}} = 0$$

$$F_z = km\rho_0 \int_0^R \mathrm{d}r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \frac{r^2\cos\theta(r\sin\theta-a)\,\mathrm{d}\varphi}{\big(r^2-2ar\sin\theta+a^2\big)^{3/2}} =$$

$$= 2\pi km\rho_0 \int_0^R \mathrm{d}r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r^2\cos\theta(r\sin\theta-a)\,\mathrm{d}\theta}{\big(r^2-2ar\sin\theta+a^2\big)^{3/2}}$$

Jestliže v posledním integrálu zavedeme proměnnou $t=\sin\theta$, dostaneme

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r^2\cos\theta(r\sin\theta-a)\,\mathrm{d}\theta}{\big(r^2-2ar\sin\theta+a^2\big)^{3/2}} = \int_{-1}^{1} \frac{r^2(rt-a)\,\mathrm{d}t}{(r^2-2art+a^2)^{3/2}}\,.$$

Další substituce $r^2-2art+a^2=\tau^2$ vede k integrálu

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r^2\cos\theta(r\sin\theta-a)\,\mathrm{d}\theta}{\big(r^2-2ar\sin\theta+a^2\big)^{3/2}} = \int_{|r+a|}^{|r-a|} \left(\frac{r}{2a^2}+\frac{r(a^2-r^2)}{2a^2\tau^2}\right)\mathrm{d}\tau =$$

$$= \frac{r}{2a^2}\left(|r-a|-|r+a|-\frac{a^2-r^2}{|r-a|}+\frac{a^2-r^2}{|r+a|}\right).$$

Tedy

$$F_z(a) = \frac{\pi km\rho_0}{a^2}\int_0^R r\left(|r-a|-|r+a|-\frac{a^2-r^2}{|r-a|}+\frac{a^2-r^2}{|r+a|}\right)\mathrm{d}r\,.$$

Snadno se přesvědčíme, že funkce $F_z(a)$ je lichá, tj. že platí $F_z(-a) = -F_z(a)$. Pro $a > R$ je

$$F_z(a) = -\frac{\pi k m \rho_0}{a^2} \int_0^R 4r^2 \,\mathrm{d}r = -\frac{4\pi\rho_0 R^3}{4} \frac{km}{a^2} = -\frac{kMm}{a^2}$$

a pro $0 < a < r$ dostaneme

$$\begin{aligned} F_z(a) =& \frac{\pi k m \rho_0}{a^2} \left(\int_0^a r\big(a - r - r - a - a - r + a - r\big)\mathrm{d}r + \right. \\ & \left. + \int_a^R r\big(r - a - r - a + r + a - r + a\big) \,\mathrm{d}r \right) = -\frac{4}{3}\,\pi\rho_0 k m a = -\frac{kmM}{R^3}\,a\,. \end{aligned}$$

Protože je funkce $F_z(a)$ lichá, je

$$F_z(a) = \begin{cases} -\dfrac{kmM}{a|a|} & \text{pro } \ |a| > h \\ -\dfrac{kmM}{R^3}\,a & \text{pro } \ |a| < h\,. \end{cases}$$

---

35. Najděte sílu, kterou přitahuje homogenní válec $\xi^2 + \eta^2 \le a^2$, $0 \le \zeta \le h$ s hustotou ρ_0 hmotný bod $P = [0; 0; z[$ jednotkové hmotnosti.

Řešení: Složky síly, kterou přitahuje válec hmotný bod jsou dány integrály

$$F_x = k \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho_0 \xi \,\mathrm{d}\xi \,\mathrm{d}\eta \,\mathrm{d}\zeta}{\big(\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - z)^2\big)^{3/2}}$$

$$F_y = k \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho_0 \eta \,\mathrm{d}\xi \,\mathrm{d}\eta \,\mathrm{d}\zeta}{\big(\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - z)^2\big)^{3/2}}$$

$$F_z = k \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho_0 (\zeta - z) \,\mathrm{d}\xi \,\mathrm{d}\eta \,\mathrm{d}\zeta}{\big(\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - z)^2\big)^{3/2}}$$

Když zavedeme cylindrické souřadnice $\xi = r\cos\varphi$, $\eta = r\sin\varphi$ a $\zeta = \zeta$, dostaneme

$$F_x = k\rho_0 \int_0^h \mathrm{d}\zeta \int_0^a \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \frac{r^2 \cos\varphi \,\mathrm{d}\varphi}{\big(r^2 + (\zeta - z)^2\big)^{3/2}} = 0$$

$$F_y = k\rho_0 \int_0^h \mathrm{d}\zeta \int_0^a \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \frac{r^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi}{\big(r^2 + (\zeta - z)^2\big)^{3/2}} = 0$$

$$F_z = k\rho_0 \int_0^h \mathrm{d}\zeta \int_0^a \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \frac{r(\zeta - z) \,\mathrm{d}\varphi}{\big(r^2 + (\zeta - z)^2\big)^{3/2}} =$$

$$= 2\pi k\rho_0 \int_0^h \mathrm{d}\zeta \int_0^a \frac{r(\zeta - z)\,\mathrm{d}r}{\bigl(r^2 + (\zeta - z)^2\bigr)^{3/2}} =$$

$$= 2\pi k\rho_0 \int_0^h \left[-\frac{\zeta - z}{\sqrt{r^2 + (\zeta - z)^2}} \right]_0^a \mathrm{d}\zeta =$$

$$= -2\pi k\rho_0 \int_0^h \left(\frac{\zeta - z}{\sqrt{a^2 + (\zeta - z)^2}} - \frac{\zeta - z}{|\zeta - z|} \right) \mathrm{d}\zeta$$

První integrál je

$$\int_0^h \frac{(\zeta - z)\,\mathrm{d}\zeta}{\sqrt{a^2 + (\zeta - z)^2}} = \Bigl[\sqrt{a^2 + (\zeta - z)^2}\Bigr]_0^h = \sqrt{a^2 + (h - z)^2} - \sqrt{a^2 + z^2}\,.$$

Integrand ve druhém integrálu je vlastně $\operatorname{sgn}(\zeta - z)$. Proto je pro

$$\int_0^h \frac{\zeta - z}{|\zeta - z|}\,\mathrm{d}\zeta = \begin{cases} -h & \text{pro } \ z > h \\ h - 2z & \text{pro } \ 0 < z < h \\ h & \text{pro } \ z < 0\,. \end{cases}$$

Tuto funkci lze zapsat ve tvaru

$$\int_0^h \frac{\zeta - z}{|\zeta - z|}\,\mathrm{d}\zeta = |h - z| - |z|\,,$$

a tedy

$$F_z(z) = 2\pi\rho_0 k\bigl(\sqrt{a^2 + z^2} - \sqrt{a^2 + (h - z)^2} + |h - z| - |z|\bigr).$$

Cvičení 18

Křivkový integrál prvního druhu.

Definice: Po částech *diferencovatelnou křivkou* $\mathcal{C}$ v prostoru $\mathbb{R}^n$ (krátce křivkou) budeme pro jednoduchost rozumět množinu $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ takovou, že existuje lokálně prosté po částech diferencovatelné zobrazení $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathcal{C}$, kde $\langle a, b\rangle$ je interval v $\mathbb{R}$ a pro které je $\left|\varphi'(t)\right| = \sqrt{\varphi_1^2(t) + \varphi_2^2(t) + \cdots + \varphi_n^2(t)} \neq 0$ mimo konečnou množinu bodů z intervalu $\langle a, b\rangle$. Lokálně prostým zobrazením $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathcal{C}$ nazýváme zobrazení, pro které ke každému bodu $t \in \langle a, b\rangle$ existuje okolí $U(t)$ takové, že je funkce φ prostá na $U(t)$.

Každou takovou funkci φ nazýváme *parametrizací křivky* $\mathcal{C}$ a vztahy $x_i = \varphi_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, $t \in \langle a, b\rangle$, *parametrickými rovnicemi křivky* $\mathcal{C}$.

Je-li $\varphi(a) = \varphi(b)$, říkáme, že $\mathcal{C}$ je *uzavřená křivka.*

Definice: Je-li $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funkce, která je definovaná na křivce $\mathcal{C}$ s parametrizací $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathcal{C}$, nazýváme Riemannův integrál (pokud existuje)

$$\int_{\mathcal{C}} f(x_1, x_2, \dots, x_n)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f\big(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\big)\left|\varphi'(t)\right|\mathrm{d}t$$

křivkovým integrálem prvního druhu funkce f po křivce $\mathcal{C}$.

Význam a použití křivkového integrálu prvního druhu.

Křivkový integrál $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}s$ udává délku s křivky $\mathcal{C}$.

Je-li $\rho = \rho(x, y, z)$ hustota (hustota náboje) v bodě $[x; y; z]$ křivky $\mathcal{C}$, pak je celková *hmotnost* (*náboj*) křivky $M = \displaystyle\int_{\mathcal{C}} \rho(x, y, z)\,\mathrm{d}s$.

Pro *souřadnice těžiště* $[x_0; y_0; z_0]$ této křivky pak platí

$$x_0 = \frac{1}{M}\int_{\mathcal{C}} x\rho\,\mathrm{d}s\,, \qquad y_0 = \frac{1}{M}\int_{\mathcal{C}} y\rho\,\mathrm{d}s\,, \qquad z_0 = \frac{1}{M}\int_{\mathcal{C}} z\rho\,\mathrm{d}s\,.$$

Pro statické momenty, momenty setrvačnosti a další fyzikálně zajímavé veličiny platí podobné vztahy jako v případě prostorových těles, jen je třeba nahradit objemový integrál křivkovým integrálem prvního druhu.

Vypočtěte následující křivkové integrály prvního druhu

1. $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} (x + y)\,\mathrm{d}s$ $\quad\mathcal{C}$ je obvod trojúhelníka s vrcholy $[0; 0]$, $[1; 0]$, $[0; 1]$

2. $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} y^2\,\mathrm{d}s$ $\quad\mathcal{C}$ je oblouk cykloidy

$x = a(t - \sin t)\,,\ y = a(1 - \cos t)\,;\quad 0 \le t \le 2\pi$

3. $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}s$ $\quad\mathcal{C}$ je křivka

$x = a(\cos t + t \sin t)\,,\ y = a(\sin t - t\cos t)\,;\quad 0 \le t \le 2\pi$

4. $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} xy\,\mathrm{d}s$ $\quad\mathcal{C}$ je oblouk hyperboly $x = a\cosh t\,,\ y = a\sinh t\,;\quad 0 \le t \le t_0$

5. $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \left(x^{4/3} + y^{4/3}\right)\mathrm{d}s$ $\quad\mathcal{C}$ je asteroida $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

6. $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \exp\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)\mathrm{d}s$ $\quad\mathcal{C}$ je hranice konvexní oblasti omezená křivkami

$r = a\,,\ \varphi = 0\,,\ \varphi = \dfrac{\pi}{4}\,;\qquad (r\,,\ \varphi$ jsou polární souřadnice)

7. $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} |y|\,\mathrm{d}s$ $\quad\mathcal{C}$ je lemniskáta $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$

8. $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} x\,\mathrm{d}s$ $\quad\mathcal{C}$ je část logaritmické spirály

$r = a\mathrm{e}^{k\varphi}\,,\ k > 0\,,$ která leží uvnitř kruhu $r = a$

9. $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}s$ $\quad\mathcal{C}$ je kružnice $x^2 + y^2 = ax$

10. $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \frac{\mathrm{d}s}{y^2}$ $\quad\mathcal{C}$ je řetězovka $y = a\cosh\dfrac{x}{a}$

Řešení:

1. Křivka $\mathcal{C}$ se skládá ze tří úseček $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$, které spojují vrcholy trojúhelníka. Jejich rovnice jsou

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_1:&\quad x = t\,, & y &= 0\,, & 0 \le t \le 1\\
\mathcal{C}_2:&\quad x = 1 - t\,, & y &= t\,, & 0 \le t \le 1\\
\mathcal{C}_3:&\quad x = 0\,, & y &= 1 - t\,, & 0 \le t \le 1
\end{aligned}$$

Integrál lze psát jako součet tří integrálů přes úsečky $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ a $\mathcal{C}_3$

$$\int_{\mathcal{C}} (x + y)\,\mathrm{d}s = \int_{\mathcal{C}_1} (x + y)\,\mathrm{d}s + \int_{\mathcal{C}_2} (x + y)\,\mathrm{d}s + \int_{\mathcal{C}_3} (x + y)\,\mathrm{d}s\,.$$

Protože $\mathrm{d}s$ je na těchto křivkách postupně $\mathrm{d}s = \mathrm{d}t$, $\mathrm{d}s = \sqrt{2}\,\mathrm{d}t$ a $\mathrm{d}s = \mathrm{d}t$, je

$$\int_{\mathcal{C}} (x + y)\,\mathrm{d}s = \int_0^1 t\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \sqrt{2}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 (1 - t)\,\mathrm{d}t = 1 + \sqrt{2}\,.$$

2. Protože $x' = a(1 - \cos t)$ a $y' = a\sin t$, je

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\left(x'\right)^2 + \left(y'\right)^2}\,\mathrm{d}t = a\sqrt{2(1 - \cos t)}\,\mathrm{d}t = 2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|\,\mathrm{d}t\,.$$

Protože $0 < t < 2\pi$, je $\mathrm{d}s = 2a \sin \dfrac{t}{2}\, \mathrm{d}t$. Tedy hledaný integrál je

$$\int_{\mathcal{C}} y^2 \,\mathrm{d}s = 2a^3 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2 \sin \frac{t}{2}\, \mathrm{d}t = 8a^3 \int_0^{2\pi} \sin^5 \frac{t}{2}\, \mathrm{d}t =$$
$$= 16a^3 \int_0^{\pi} \sin^5 \tau \,\mathrm{d}\tau = \frac{256}{15}\, a^3 \,.$$

3. Protože $x' = at\cos t$, $y' = at \sin t$ a $0 < t < 2\pi$, je

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\left(x'\right)^2 + \left(y'\right)^2}\, \mathrm{d}t = at\, \mathrm{d}t$$

Tedy

$$\int_{\mathcal{C}} \left(x^2+y^2\right) \mathrm{d}s = a^3 \int_0^{2\pi} t\left(1+t^2\right) = 2\pi^2 a^3 \left(1+2\pi^2\right).$$

4. Protože $x' = a\sinh t$ a $y' = a \cosh t$, je

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\left(x'\right)^2 + \left(y'\right)^2}\, \mathrm{d}t = a\sqrt{\sinh^2 t + \cosh^2 t}\, \mathrm{d}t = a\sqrt{\cosh 2t}\, \mathrm{d}t\,.$$

Tedy

$$\int_{\mathcal{C}} xy \,\mathrm{d}s = a^3 \int_0^{t_0} \cosh t \sinh t \sqrt{\cosh 2t}\, \mathrm{d}t = \frac{a^3}{2} \int_0^{t_0} \sinh 2t \sqrt{\cosh 2t}\, \mathrm{d}t =$$
$$= \frac{a^3}{3} \Big[\cosh^{3/2} 2t\Big]_0^{t_0} = \frac{a^3}{3}\Big(\cosh^{3/2} 2t_0 - 1\Big).$$

5. Parametrické rovnice dané asteroidy jsou $x = a\cos^3\varphi$, $y = a\sin^3\varphi$, kde $0 \le \varphi \le 2\pi$. Protože $x' = -3a\cos^2\varphi \sin\varphi$ a $y' = 3a\sin^2\varphi\cos\varphi$, je

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\left(x'\right)^2 + \left(y'\right)^2}\, \mathrm{d}\varphi = 3a\left|\cos\varphi\sin\varphi\right| \mathrm{d}\varphi = \frac{3}{2}\, a\left|\sin 2\varphi\right| \mathrm{d}\varphi$$

a

$$\int_{\mathcal{C}} \left(x^{4/3}+y^{4/3}\right) \mathrm{d}s = \frac{3}{2}\, a^{7/3} \int_0^{2\pi} \left(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi\right)\left|\sin 2\varphi\right| \mathrm{d}\varphi\,.$$

Jestliže použijeme vztahu $1 = \left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)^2 = \cos^4\varphi + 2\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \sin^4\varphi$, vidíme, že lze psát $\cos^4\varphi + \sin^4\varphi = 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2\varphi$. Abychom se zbavili absolutní hodnoty, stačí si uvědomit, že je integrovaná funkce stejná na intervalech $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\left(\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ a $\left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$. Tedy lze psát

$$\int_{\mathcal{C}} \left(x^{4/3}+y^{4/3}\right) \mathrm{d}s = 3a^{7/4} \int_0^{\pi/2} \left(2-\sin^2 2\varphi\right) \sin 2\varphi \,\mathrm{d}\varphi = 4a^{7/4}\,.$$

6. Křivka $\mathcal{C}$ se skládá ze tří křivek, které mají v polárních souřadnicích $r = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ rovnice:

$$\begin{array}{llllll}
\mathcal{C}_1: & \varphi = 0\,, & x = r\,, & y = 0\,, & 0 \le r \le a\,, & \mathrm{d}s = \mathrm{d}r \\
\mathcal{C}_2: & r = a\,, & x = a\cos\varphi\,, & y = a\sin\varphi\,, & 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}\,, & \mathrm{d}s = a\,\mathrm{d}\varphi \\
\mathcal{C}_3: & \varphi = \dfrac{\pi}{4}\,, & x = \dfrac{r}{\sqrt{2}}\,, & y = \dfrac{r}{\sqrt{2}}\,, & 0 \le r \le a\,, & \mathrm{d}s = \mathrm{d}r
\end{array}$$

Tedy daný integrál je

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{C}} \exp\Bigl(\sqrt{x^2+y^2}\Bigr)\,\mathrm{d}s = \\
&= \int_{\mathcal{C}_1} \exp\Bigl(\sqrt{x^2+y^2}\Bigr)\,\mathrm{d}s + \int_{\mathcal{C}_2} \exp\Bigl(\sqrt{x^2+y^2}\Bigr)\,\mathrm{d}s + \int_{\mathcal{C}_3} \exp\Bigl(\sqrt{x^2+y^2}\Bigr)\,\mathrm{d}s = \\
&= \int_0^a \mathrm{e}^r\,\mathrm{d}r + \int_0^{\pi/4} \mathrm{e}^a a\,\mathrm{d}\varphi + \int_0^a \mathrm{e}^r\,\mathrm{d}r = 2\bigl(\mathrm{e}^2 - 1\bigr) + \frac{\pi}{4}\,a\mathrm{e}^a\,.
\end{aligned}$$

7. Tuto křivku lze jednoduše popsat v polárních souřadnicích $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Po dosazení do rovnice křivky získáme vztah $r^2 = a^2\cos 2\varphi$. Z této rovnosti plyne, že $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$.
Abychom usnadnili výpočet, odvodíme vztah pro $\mathrm{d}s$ v polárních souřadnicích, tj. v případě, když je křivka popsána rovnicí $r = r(\varphi)$. Pak je $x = r(\varphi)\cos\varphi$ a $y = r(\varphi)\sin\varphi$. Protože $x' = r'\cos\varphi - r\sin\varphi$ a $y = r'\sin\varphi + r\cos\varphi$, je

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\bigl(x'\bigr)^2 + \bigl(y'\bigr)^2}\,\mathrm{d}\varphi = \sqrt{r^2 + \bigl(r'\bigr)^2}\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

V našem případě je $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ a $r' = -a\,\dfrac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$. Tedy

$$\mathrm{d}s = \sqrt{r^2 + \bigl(r'\bigr)}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{a\,\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\,.$$

Protože $|y| = a\bigl|\sin\varphi\bigr|\sqrt{\cos 2\varphi}$, je

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} |y|\,\mathrm{d}s &= a^2\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \bigl|\sin\varphi\bigr|\,\mathrm{d}\varphi + a^2\int_{3\pi/4}^{5\pi/4} \bigl|\sin\varphi\bigr|\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= 4a^2\int_0^{\pi/4} \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 2a^2\bigl(2 - \sqrt{2}\bigr)\,.
\end{aligned}$$

8. Protože křivka leží v kruhu s poloměrem a, musí platit $0 < r = a\mathrm{e}^{k\varphi} \le a$, neboli $-\infty < \varphi < 0$. Protože je křivka popsána v polárních souřadnicích rovnicí $r = a\mathrm{e}^{k\varphi}$ a

$r' = ake^{k\varphi}$, dostaneme podle předcházejícího příkladu $\mathrm{d}s = a\sqrt{1+k^2}\mathrm{e}^{k\varphi}$. Protože $x = r\cos\varphi = a\mathrm{e}^{k\varphi}\cos\varphi$, je

$$\int_{\mathcal{C}} x\,\mathrm{d}s = a\sqrt{1+k^2}\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{2k\varphi}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Tento integrál lze najít integrací per partes. Ta dává vztah

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{2k\varphi}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi &= \left[\frac{1}{2k}\,\mathrm{e}^{k\varphi}\cos\varphi\right]_{-\infty}^{0} + \frac{1}{2k}\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{2k\varphi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \\ &= \frac{1}{2k} + \frac{1}{4k^2}\left[\mathrm{e}^{2k\varphi}\sin\varphi\right]_{-\infty}^{0} - \frac{1}{4k^2}\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{2k\varphi}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,,\end{aligned}$$

ze kterého plyne, že

$$\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{2k\varphi}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{2k}{1+4k^2}\,.$$

Tedy

$$\int_{\mathcal{C}} x\,\mathrm{d}s = \frac{2ka^2\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}\,.$$

9. Jestliže pro parametrizaci křivky použijeme polární souřadnice $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, získáme z její rovnice vztah $r = a\cos\varphi$. Tedy $\cos\varphi \geq 0$, tj. $-\dfrac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}$. Protože

$$\mathrm{d}s = \sqrt{r^2 + \bigl(r'\bigr)^2}\,\mathrm{d}\varphi = a\,\mathrm{d}\varphi\,,$$

je

$$\int_{\mathcal{C}} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s = a^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 2a^2\,.$$

10. Daná křivka je popsána jako graf funkce. Proto za parametr můžeme zvolit proměnnou x, která probíhá celou reálnou osu $\mathbb{R}$. Protože $y' = \sinh\dfrac{x}{a}$, je

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1+\bigl(y'\bigr)^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{1+\sinh^2\frac{x}{a}}\,\mathrm{d}x = \cosh\frac{x}{a}\,\mathrm{d}x\,.$$

Z toho dostáváme

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \frac{\mathrm{d}s}{y^2} &= \frac{1}{a^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \cosh^{-1}\frac{x}{a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{x/a}+\mathrm{e}^{-x/a}} = \\ &= \frac{1}{a^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\mathrm{e}^{x/a}}{\mathrm{e}^{2x/a}+1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\operatorname{arctg}\bigl(\mathrm{e}^{x/a}\bigr)}{a}\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{a}\,.\end{aligned}$$

Najděte délky oblouků následujících prostorových křivek (všechny parametry jsou kladné)

11. $x = 3t\,,\ y = 3t^2\,,\ z = 2t^3$ od $[0;0;0]$ do $[3;3;2]$

12. $x = \mathrm{e}^{-t}\cos t\,,\ y = \mathrm{e}^{-t}\sin t\,,\ z = \mathrm{e}^{-t}$ $\quad 0 < t < \infty$

13. $y = a \arcsin \dfrac{x}{a}\,,\ z = \dfrac{a}{4}\ln\dfrac{a-x}{a+x}$ od $[0;0;0]$ do $[x_0;y_0;z_0]$

14. $(x-y)^2 = a(x+y)\,,\ x^2 - y^2 = \dfrac{9}{8}z^2$ od $[0;0;0]$ do $[x_0;y_0;z_0]$

15. $x^2 + y^2 = cz\,,\ \dfrac{y}{x} = \operatorname{tg}\dfrac{z}{c}$ od $[0;0;0]$ do $[x_0;y_0;z_0]$

16. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2\,,\ \sqrt{x^2+y^2}\cosh\left(\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\right) = a$ od $[a;0;0]$ do $[x_0;y_0;z_0]$

Řešení:

11. Parametr t probíhá interval $\langle 0,1\rangle$ a $x' = 3$, $y' = 6t$ a $z' = 6t^2$. Protože

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\bigl(x'\bigr)^2 + \bigl(y'\bigr)^2 + \bigl(z'\bigr)^2}\,\mathrm{d}t = 3\sqrt{1+4t^2+4t^4}\,\mathrm{d}t = \bigl(1+2t^2\bigr)\,\mathrm{d}t$$

je

$$s = \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}s = 3\int_0^1 \bigl(1+2t^2\bigr)\,\mathrm{d}t = 5\,.$$

12. Protože derivace souřadnic podle parametru t jsou $x' = -\mathrm{e}^{-t}(\cos t + \sin t)$, $y' = -\mathrm{e}^{-t}(\sin t - \cos t)$ a $z' = -\mathrm{e}^{-t}$, je

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\bigl(x'\bigr)^2 + \bigl(y'\bigr)^2 + \bigl(z'\bigr)^2}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-t}\sqrt{3}\,\mathrm{d}t\,.$$

Tedy

$$s = \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}s = \sqrt{3}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \sqrt{3}\,.$$

13. Za parametr zvolíme proměnnou x, která bude probíhat interval $\bigl\langle 0, x_0\bigr\rangle$, kde $0 < x_0 < a$, nebo $\bigl\langle x_0, 0\bigr\rangle$ pro $x_0 \in (-a, 0)$. Protože $y' = \dfrac{|a|}{\sqrt{a^2-x^2}}$ a $z' = \dfrac{a}{2\bigl(x^2-a^2\bigr)}$, je

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + \bigl(y'\bigr)^2 + \bigl(z'\bigr)^2}\,\mathrm{d}x = \left(1 + \frac{a^2}{2\bigl(a^2-x^2\bigr)}\right)\,\mathrm{d}x\,.$$

Tedy délka dané křivky je pro $x_0 > 0$

$$s = \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}s = \int_0^{x_0}\left(1 + \frac{a^2}{2\bigl(a^2-x^2\bigr)}\right)\,\mathrm{d}x =$$

$$= x_0 + \frac{a}{4}\int_0^{x_0}\left(\frac{1}{a-x} + \frac{1}{a+x}\right) \mathrm{d}x = x_0 + \frac{a}{4}\ \ln\frac{a+x_0}{a-x_0} = x_0 - z_0$$

a pro $x_0 < 0$

$$s = \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}s = \int_{x_0}^{0}\left(1 + \frac{a^2}{2\left(a^2 - x^2\right)}\right) \mathrm{d}x = -x_0 - \frac{a}{4}\ \ln\frac{a+x_0}{a-x_0} = -x_0 + z_0\,.$$

Protože pro $x_0 > 0$ je $z_0 < 0$ a pro $x_0 < 0$ je $z_0 > 0$, lze pro délku křivky psát $s = \left|x_0\right| + \left|z_0\right|$, kde $\left|x_0\right| < a$.

14. Abychom získali parametrické rovnice dané křivky, zavedeme proměnné $u = x - y$ a $v = x + y$. Pak z rovnic křivky plyne $u^2 = av$ a $x^2 - y^2 = uv = \dfrac{9}{8}\,z^2$, neboli $v = \dfrac{u^2}{a}$ a $z^2 = \dfrac{8}{9a}\,u^3$. Tedy parametrické rovnice dané křivky jsou

$$x = \frac{u^2 + au}{2a}\,,\quad y = \frac{u^2 - au}{2a}\,,\quad z = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{a}}\,u^{3/2}\,,$$

kde $u \in (0, u_0)$, $u_0 = \dfrac{\sqrt[3]{9a}}{8}\,z_0^{2/3}$. Protože $x' = \dfrac{2u+a}{2a}$, $y' = \dfrac{2u-a}{2a}$ a $z' = \sqrt{\dfrac{2u}{a}}$ je $\mathrm{d}s = \dfrac{2u+a}{a\sqrt{2}}\,\mathrm{d}u$ a

$$s = \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}s = \int_0^{u_0} \frac{2u+a}{a\sqrt{2}} = \frac{u_0^2 + au_0}{2\sqrt{2}}\,.$$

Jestliže do tohoto vztahu dosadíme za u_0, dostaneme $s = \dfrac{3z_0}{4\sqrt{2}}\left(\sqrt[3]{\dfrac{3z_0}{a}} + \sqrt[3]{\dfrac{a}{3z_0}}\right)$.

15. Abychom získali parametrické rovnice dané křivky, zavedeme nejprve cylindrické souřadnice $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ a $z = z$. Z rovnic, které definují křivku plyne $r^2 = cz$ a $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\dfrac{z}{c} = \operatorname{tg}\dfrac{r^2}{c^2}$. Jejich řešení je $r = c\sqrt{\varphi}$, a tedy parametrické rovnice naší křivky jsou

$$x = c\sqrt{\varphi}\,\cos\varphi\,,\quad y = c\sqrt{\varphi}\,\sin\varphi\,,\quad z = c\varphi\,,$$

kde $0 < \varphi < \varphi_0 = \dfrac{z_0}{c}$. Derivacemi nalezneme $\mathrm{d}s = \dfrac{c(2\varphi + 1}{2\sqrt{\varphi}}\,\mathrm{d}\varphi$. Tedy

$$s = \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}s = \frac{c}{2}\int_0^{\varphi_0}\left(2\varphi^{1/2} + \varphi^{-1/2}\right)\mathrm{d}\varphi = \frac{c}{2}\left(\frac{4}{3}\,\varphi_0^{3/2} + 2\varphi_0^{1/2}\right) = \left(1 + \frac{2z_0}{3c}\right)\sqrt{cz_0}\,.$$

16. Abychom nalezli parametrické rovnice křivky, zavedeme nejprve sférické souřadnice $x = r\cos\theta\cos\varphi$, $y = r\cos\theta\sin\varphi$ a $z = r\sin\theta$. Z daných rovnic pak plyne $r = a$ a $r\cos\theta\cosh\varphi = a$, neboli $\cos\theta = \dfrac{1}{\cosh\varphi}$. Z toho plyne

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \frac{1}{\cosh^2\varphi}} = \operatorname{tgh}\varphi\,.$$

Tedy parametrické rovnice dané křivky jsou

$$x = a\frac{\cos\varphi}{\cosh\varphi}\,, \quad y = a\frac{\sin\varphi}{\cosh\varphi}\,, \quad z = a\,\mathrm{tgh}\,\varphi\,,$$

kde $0 < \varphi < \varphi_0 = \mathrm{argtgh}\,\dfrac{z_0}{a} = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{a+z_0}{a-z_0}$. Derivování parametrických rovnic křivky a po úpravách dostaneme

$$\mathrm{d}s = \frac{a\sqrt{2}}{\cosh\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = 2a\sqrt{2}\frac{\mathrm{e}^{\varphi}\,\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{e}^{2\varphi}+1}\,.$$

Tedy

$$s = \int_C \mathrm{d}s = 2a\sqrt{2}\int_0^{\varphi_0}\frac{\mathrm{e}^{\varphi}\,\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{e}^{2\varphi}+1} = 2a\sqrt{2}\left((\mathrm{arctg}\big(\mathrm{e}^{\varphi_0}\big) - \frac{\pi}{4}\right)\,.$$

Jestliže místo φ_0 přepíšeme tento vztah pomocí proměnné z_0, dostaneme po úpravách (ne zcela jednoduchých) $s = a\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{z_0}{\sqrt{a^2-z_0^2}}$.

Vypočtěte křivkové integrály prvního druhu po následujících prostorových křivkách

17. $\displaystyle\int_C (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s$ $\quad C$ je část šroubovice

$x = a\cos t\,,\ y = a\sin t\,,\ z = bt\,; \quad 0 \le t \le 2\pi$

18. $\displaystyle\int_C x^2\,\mathrm{d}s$ $\quad C$ je kružnice $x^2+y^2+z^2 = a^2\,,\ x+y+z = 0$

19. $\displaystyle\int_C z\,\mathrm{d}s$ $\quad C$ je kónická šroubovice $x = t\cos t\,,\ y = t\sin t\,,\ z = t\,; \quad 0 \le t \le t_0$

20. $\displaystyle\int_C z\,\mathrm{d}s$ $\quad C$ je oblouk $x^2+y^2 = z^2\,,\ y^2 = ax$ od $[0;0;0]$ do $[a;a;a\sqrt{2}]$

Řešení:

17. Protože $x' = -a\sin t$, $y' = a\cos t$ a $z' = b$, je $\mathrm{d}s = \sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{d}t$. Tedy hledaný integrál je

$$\int_C \big(x^2+y^2+z^2\big)\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi}\big(a^2+b^2t^2\big)\sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\,\pi\big(3a^2+4\pi^2b^2\big)\sqrt{a^2+b^2}\,.$$

18. Nejprve nalezneme parametrické rovnice dané křivky. Z druhé rovnosti plyne, že $z = -x-y$. Jestliže tento vztah dosadíme do první rovnosti, dostaneme $x^2 + xy + y^2 = \dfrac{a^2}{2}$. Napíšeme-li tento vztah ve tvaru $\left(y+\dfrac{x}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}x^2 = \dfrac{a^2}{2}$, snadno nahlédneme, že řešení těchto rovnic je $x = \sqrt{\frac{2}{3}}\, a\cos\varphi$, $y + \frac{x}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}} \sin\varphi$, kde $0 < \varphi < 2\pi$. Tedy za parametrické rovnice dané křivky lze zvolit

$$x = \sqrt{\frac{2}{3}}\, a\cos\varphi\,, \quad y = \frac{a}{\sqrt{2}} \sin\varphi - \frac{a}{\sqrt{6}} \cos\varphi\,, \quad z = -\frac{a}{\sqrt{2}} \sin\varphi - \frac{a}{\sqrt{6}} \cos\varphi\,,$$

kde $0 < \varphi < 2\pi$. Protože v našem případě je $\mathrm{d}s = a\,\mathrm{d}\varphi$, je

$$\int_{\mathcal{C}} x^2\,\mathrm{d}s = \frac{2}{3}\, a^3 \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{2}{3}\,\pi a^3\,.$$

19. Z derivací parametrických rovnic $x' = \cos t - t\sin t$, $y' = \sin t + t\cos t$ a $z' = 1$ plyne, že $\mathrm{d}s = \sqrt{2+t^2}\,\mathrm{d}t$. Tedy hledaný integrál je

$$\int_{\mathcal{C}} z\,\mathrm{d}s = \int_0^{t_0} t\sqrt{2+t^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{3}\,(2+t^2)^{3/2}\right]_0^{t_0} = \frac{1}{3}\left(\left(2+t_0^2\right)^{3/2} - 2^{3/2}\right).$$

20. Danou křivku lze parametrizovat například rovnicemi $x = at^2$, $y = at$, $z = at\sqrt{1+t^2}$, kde $0 < t < 1$. Protože

$$\mathrm{d}s = a\sqrt{4t^2 + 1 + \frac{(1+2t^2)^2}{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = a\frac{\sqrt{8t^4+9t^2+2}}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$$

je

$$\int_{\mathcal{C}} z\,\mathrm{d}s = a^2 \int_0^1 t\sqrt{8t^4+9t^2+2}\,\mathrm{d}t = a^2\sqrt{2}\int_0^1 \sqrt{x^2 + \frac{9}{8}\,x + \frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x\,,$$

kde jsme použili substituci $t^2 = x$. Protože $x^2 + \frac{9}{8}\,x + \frac{1}{4} = \left(x + \frac{9}{16}\right)^2 - \frac{17}{256}$, je pro výpočet integrálu výhodné zavést proměnnou $z = x + \frac{9}{16}$. Po této substituci dostaneme

$$\int_{\mathcal{C}} z\,\mathrm{d}s = a^2\sqrt{2}\int_{9/16}^{25/16} \sqrt{z^2 - A}\,\mathrm{d}z\,,$$

kde $A = \frac{17}{256}$. Protože

$$\int \sqrt{x^2 - A} = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-A} - A\ln\bigl(x + \sqrt{x^2-A}\bigr)\right),$$

je

$$\int_{\mathcal{C}} z\,\mathrm{d}s = \frac{a^2}{\sqrt{2}}\Bigl[x\sqrt{x^2-A} - A\ln\bigl(x+\sqrt{x^2-A}\bigr)\Bigr]_{9/16}^{25/16} =$$

$$= \frac{a^2}{256\sqrt{2}}\left(100\sqrt{38} - 72 - 17\ln\frac{25+4\sqrt{38}}{17}\right).$$

21. Určete hmotnost křivky $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $a \geq b > 0$, $0 \leq t \leq 2\pi$, je-li její hustota v bodě $[x; y]$ rovna $\rho = |y|$.

Řešení: Hmotnost křivky je dána křivkovým integrálem $M = \int_{\mathcal{C}} \rho \, \mathrm{d}s$, kde ρ je hustota. Protože $x' = -a\sin t$ a $y' = b\cos t$, je $\mathrm{d}s = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\, \mathrm{d}t$ a

$$M = \int_0^{2\pi} b\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\,\bigl|\sin t\bigr| \,\mathrm{d}t = 2b \int_0^{\pi} \sqrt{a^2 - \left(a^2 - b^2\right)\cos^2 t}\, \sin t \,\mathrm{d}t =$$
$$= 2ab \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - \varepsilon^2 x^2}\, \mathrm{d}x\,,$$

kde jsme zavedli substituci $\cos t = x$ a označili $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$. Protože

$$\int \sqrt{1 - \varepsilon^2 x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1 - \varepsilon^2 x^2} + \frac{\arcsin(\varepsilon x)}{\varepsilon} \right)\,,$$

je

$$M = ab \left[x\sqrt{1 - \varepsilon^2 x} + \frac{\arcsin(\varepsilon x)}{\varepsilon} \right]_{-1}^{1} = 2b\left(b + \frac{a}{\varepsilon}\, \arcsin \varepsilon \right).$$

---

22. Najděte hmotnost oblouku paraboly $y^2 = 2px$, $0 \leq x \leq \dfrac{p}{2}$, je-li její hustota v bodě $[x; y]$ rovna $|y|$.

Řešení: Parametrické rovnice dané křivky lze psát jako $x = \dfrac{t^2}{2p}$, $y = t$, kde $-p < t < p$. Pak je $\mathrm{d}s = \dfrac{\sqrt{p^2 + t^2}}{p}\, \mathrm{d}t$, a tedy hmotnost křivky $\mathcal{C}$ je

$$M = \int_{\mathcal{C}} \rho \,\mathrm{d}s = \int_{\mathcal{C}} |y| \,\mathrm{d}s = \int_{-p}^{p} |t| \frac{\sqrt{p^2 + t^2}}{p}\, \mathrm{d}t = \frac{2}{p} \int_0^p t\sqrt{p^2 + t^2}\, \mathrm{d}t =$$
$$= \left[\frac{2}{3p} \left(p^2 + t^2\right)^{3/2} \right]_0^p = \frac{2}{3}\, p^2 \left(2\sqrt{2} - 1\right).$$

---

23. Najděte hmotnost oblouku křivky $x = at$, $y = \dfrac{a}{2}\, t^2$, $z = \dfrac{a}{3}\, t^3$, $0 \leq t \leq 1$, jejíž hustota se mění podle vztahu $\rho = \sqrt{\dfrac{2y}{a}}$.

Řešení: Hmotnost křivky $\mathcal{C}$ najdeme pomocí křivkového integrálu $M = \int_{\mathcal{C}} \rho \, \mathrm{d}s$. Protože $\mathrm{d}s = a\sqrt{1+t^2+t^4}\,\mathrm{d}t$ je

$$M = a \int_0^1 t\sqrt{1+t^2+t^4}\,\mathrm{d}t = \frac{a}{2}\int_0^1 \sqrt{1+x+x^2}\,\mathrm{d}x\,,$$

kde jsme zavedli substituci $t^2 = x$. Protože

$$\int \sqrt{1+x+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2x+1}{2}\sqrt{1+x+x^2} + \frac{3}{4}\ln\frac{2x+1+2\sqrt{1+x+x^2}}{2}\right)\,,$$

je

$$M = \frac{a}{4}\left[\frac{2x+1}{2}\sqrt{1+x+x^2} + \frac{3}{4}\ln\frac{2x+1+2\sqrt{1+x+x^2}}{2}\right]_0^1 =$$
$$= \frac{a}{8}\left(3\sqrt{3} - 1 + \frac{3}{2}\ln\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}}\right).$$

---

24. Najděte souřadnice těžiště oblouku homogenní křivky $y = a\cosh\frac{x}{a}$ od bodu $[0;a]$ do bodu $[b;h]$.

Řešení: Protože $y' = \sinh\frac{x}{a}$, je $\mathrm{d}s = \sqrt{1+\sinh^2\frac{x}{a}}\,\mathrm{d}x = \cosh\frac{x}{a}\,\mathrm{d}x$. Hmotnost křivky $\mathcal{C}$ je dána křivkovým integrálem ($\rho = 1$)

$$M = \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}s = \int_0^b \cosh\frac{x}{a}\,\mathrm{d}x = a\sinh ba\,.$$

Abychom zjistili souřadnice těžiště, musíme ještě najít integrály

$$\int_{\mathcal{C}} x\,\mathrm{d}s = \int_0^b x\cosh\frac{x}{a}\,\mathrm{d}x = \left[ax\sinh\frac{x}{a} - a^2\cosh\frac{x}{a}\right]_0^b = ab\sinh\frac{b}{a} + a^2 - a^2\cosh\frac{b}{a}$$

$$\int_{\mathcal{C}} y\,\mathrm{d}s = a\int_0^b \cosh^2\frac{x}{a}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{2}\int_0^b\left(1+\cosh\frac{2x}{a}\right)\mathrm{d}x = \frac{a}{2}\left(b + a\sinh\frac{b}{a}\cosh\frac{b}{a}\right).$$

Souřadnice těžiště tedy jsou

$$x_T = b - a\frac{\cosh(b/a) - 1}{\sinh(b/a)} = b + a\sqrt{\frac{h-a}{h+a}}$$

$$y_T = \frac{b}{2\sinh(b/a)} + \frac{1}{2}a\cosh\frac{b}{a} = \frac{ab}{2\sqrt{h^2-b^2}} + \frac{h}{2}\,,$$

protože $\cosh\dfrac{b}{a}=\dfrac{h}{a}$ a $\sinh\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sqrt{h^2-a^2}}{a}$.

---

25. Najděte těžiště oblouku homogenní cykloidy $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$; $0\le t\le\pi$.

Řešení: Hmotnost křivky $\mathcal{C}$ nejdeme jako křivkový integrál $\displaystyle\int_{\mathcal{C}}\rho\,\mathrm{d}s$. Protože $\rho=1$ a

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\big(x'\big)+\big(y'\big)}\,\mathrm{d}t=a\sqrt{2(1-\cos t)}\,\mathrm{d}t=2a\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t$$

je

$$M=2a\int_0^\pi\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t=4a\,.$$

Pro výpočet těžiště ještě potřebujeme integrály

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}}x\,\mathrm{d}s&=2a^2\int_0^\pi(t-\sin t)\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t=8a^2\int_0^{\pi/2}\big(\tau\sin\tau-\sin^2\tau\cos\tau\big)\,\mathrm{d}\tau=\\&=8a^2\left[-\tau\cos\tau+\sin\tau-\frac{\sin^3\tau}{3}\right]_0^{\pi/2}=\frac{16}{3}\,a^2\\\int_{\mathcal{C}}y\,\mathrm{d}s&=2a^2\int_0^\pi(1-\cos t)\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t=4a^2\int_0^\pi\sin^3\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t=\frac{16}{3}\,a^2\end{aligned}$$

Tedy souřadnice těžiště jsou $x_T=y_T=\dfrac{4}{3}\,a$.

---

26. Najděte statické momenty $S_y=\displaystyle\int_{\mathcal{C}}x\,\mathrm{d}s$ a $S_y=\displaystyle\int_{\mathcal{C}}y\,\mathrm{d}s$ oblouku C asteroidy $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$, $x\ge0$, $y\ge0$ vzhledem k souřadnicovým osám.

Řešení: Parametrické rovnice daného oblouku asteroidy jsou $x=a\cos^3t$ a $y=a\sin^3t$, kde $0<t<\dfrac{\pi}{2}$. Protože derivace rovnic, které definují křivku, jsou $x'=-3a\cos^2t\sin t$ a $y'=3a\sin^2t\cos t$, je $\mathrm{d}s=3\big|\cos t\sin t\big|\,\mathrm{d}t$. Tedy platí

$$\begin{aligned}S_y&=\int_{\mathcal{C}}x\,\mathrm{d}s=3a^2\int_0^{\pi/2}\cos^4t\sin t\,\mathrm{d}t=\frac{3}{5}\,a^2\\S_x&=\int_{\mathcal{C}}y\,\mathrm{d}s=3a^2\int_0^{\pi/2}\sin^4t\cos t\,\mathrm{d}t=\frac{3}{5}\,a^2\,.\end{aligned}$$

---

27. Najděte moment setrvačnosti kružnice $x^2+y^2=a^2$ vzhledem k jejímu průměru.

Řešení: Jestliže za průměr zvolíme osu Ox, je moment setrvačnosti vzhledem k této ose dán křivkovým integrálem $I = \int_{\mathcal{C}} y^2\,\mathrm{d}s$. Parametrické rovnice dané kružnice jsou $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, kde $0 < t < 2\pi$. Protože $\mathrm{d}s = a\,\mathrm{d}t$, je

$$I = \int_0^{2\pi} a^3 \sin^2 t\,\mathrm{d}t = \pi a^3\,.$$

---

28. Najděte polární momenty setrvačnosti $I_0 = \int_{\mathcal{C}} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}s$ vzhledem bodu $[0;0]$ následujících křivek: a) obvodu $\mathcal{C}$ čtverce $\max\{|x|,|y|\} = a$; b) obvodu $\mathcal{C}$ rovnostranného trojúhelníka s vrcholy v polárních souřadnicích $(a;0)$, $(a;2\pi/3)$, $(a;4\pi/3)$.

Řešení:

a) V tomto případě je křivka složena ze čtyř úseček:

$$\mathcal{C}_1:\ x = a\,,\ y = t\,; \quad -a < t < a\,;\ \mathrm{d}s = \mathrm{d}t\,;\quad \int_{-a}^{a} \left(a^2 + t^2\right)\mathrm{d}t = \frac{8}{3}\,a^3$$

$$\mathcal{C}_2:\ x = t\,,\ y = a\,; \quad -a < t < a\,;\ \mathrm{d}s = \mathrm{d}t\,;\quad \int_{-a}^{a} \left(a^2 + t^2\right)\mathrm{d}t = \frac{8}{3}\,a^3$$

$$\mathcal{C}_3:\ x = -a\,,\ y = t\,; \quad -a < t < a\,;\ \mathrm{d}s = \mathrm{d}t\,;\quad \int_{-a}^{a} \left(a^2 + t^2\right)\mathrm{d}t = \frac{8}{3}\,a^3$$

$$\mathcal{C}_4:\ x = t\,,\ y = -a\,; \quad -a < t < a\,;\ \mathrm{d}s = \mathrm{d}t\,;\quad \int_{-a}^{a} \left(a^2 + t^2\right)\mathrm{d}t = \frac{8}{3}\,a^3$$

Tedy $I_0 = \int_{\mathcal{C}_1} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}s + \int_{\mathcal{C}_2} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}s + \int_{\mathcal{C}_3} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}s + \int_{\mathcal{C}_4} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}s = \frac{32}{3}\,a^3$.

b) Vrcholy trojúhelníka jsou $A = [a;0]$, $B = \left[-\frac{a}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\,a\right]$ a $C = \left[-\frac{a}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\,a\right]$. Strany daného trojúhelníka mají rovnice

$$\mathcal{C}_1:\ x = a - \frac{3}{2}\,at\,,\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}\,at\,; \quad 0 < t < 1\,;\ \mathrm{d}s = \sqrt{3}\,a\,\mathrm{d}t$$

$$\mathcal{C}_2:\ x = a - \frac{3}{2}\,at\,,\ y = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,at\,; \quad 0 < t < 1\,;\ \mathrm{d}s = \sqrt{3}\,a\,\mathrm{d}t$$

$$\mathcal{C}_3:\ x = -\frac{a}{2}\,,\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}\,a - \sqrt{3}\,at\,; \quad 0 < t < 1\,;\ \mathrm{d}s = \sqrt{3}\,a\,\mathrm{d}t$$

Pro všechny tři křivky je $\int_{\mathcal{C}_k} \left(x^2 + y^2\right)\mathrm{d}s = \sqrt{3}\,a^3 \int_0^1 \left(1 - 3t + 3t^2\right)\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{3}}{2}\,a^3$.

Tedy $I_0 = \frac{3\sqrt{3}}{2}\,a^3$.

29. Najděte střední polární moment asteroidy $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$, tj. číslo $r_0>0$ určené vztahem $I_0=s\cdot r_0^2$, kde I_0 je polární moment setrvačnosti asteroidy vzhledem k počátku souřadnic a s je délka oblouku asteroidy.
Řešení: Parametrické rovnice asteroidy jsou $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, kde $0<t<2\pi$. Tedy $\mathrm{d}s=3\big|\cos t\sin t\big|\,\mathrm{d}t$ a

$$\begin{aligned}I_0&=\int_{\mathcal{C}}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}s=3a^3\int_0^{2\pi}\left(\cos^6 t+\sin^6 t\right)\big|\cos t\sin t\big|\,\mathrm{d}t=\\&=12a^3\int_0^{\pi/2}\left(\cos^7 t\sin t+\sin^7 t\cos t\right)\mathrm{d}t=3a^3\\s&=\int_{\mathcal{C}}\mathrm{d}s=3a\int_0^{2\pi}\big|\cos t\sin t\big|\,\mathrm{d}t=12a\int_0^{\pi/2}\cos t\sin t\,\mathrm{d}t=6a\,.\end{aligned}$$

Podle definice je $I_0=sr_0^2$, neboli $3a^3=6ar_0^2$. Tedy $r_0=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

---

30. Najděte souřadnice těžiště obvodu sférického trojúhelníka $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.

Řešení: Obvod sférického trojúhelníka tvoří tři křivky s parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_z:&\quad x=a\cos t\,,\ y=a\sin t\,,\ z=0\\\mathcal{C}_y:&\quad x=a\cos t\,,\ y=0\,,\qquad z=a\sin t\\\mathcal{C}_x:&\quad x=0\,,\qquad y=a\cos t\,,\ z=a\sin t\,,\end{aligned}$$

kde $0<t<\dfrac{\pi}{2}$ a $\mathrm{d}s=a\,\mathrm{d}t$. Tedy obvod trojúhelníka je

$$s=\int_{\mathcal{C}_x}\mathrm{d}s+\int_{\mathcal{C}_y}\mathrm{d}s+\int_{\mathcal{C}_z}\mathrm{d}s=\frac{3}{2}\,\pi a\,.$$

Protože

$$\int_{\mathcal{C}}x\,\mathrm{d}s=\int_{\mathcal{C}_z}x\,\mathrm{d}s+\int_{\mathcal{C}_y}x\,\mathrm{d}s=2a^2\int_0^{\pi/2}\cos t\,\mathrm{d}t=2a^2\,.$$

Proto je $x_T=\dfrac{4a}{3\pi}$. Podobně (nebo ze symetrie) bychom našli $y_T=z_T=\dfrac{4a}{3\pi}$.

---

31. Najděte souřadnice těžiště homogenního oblouku $x=\mathrm{e}^t\cos t$, $y=\mathrm{e}^t\sin t$, $z=\mathrm{e}^t$; $-\infty<t\le 0$.

Řešení: Protože $x' = \mathrm{e}^t(\cos t - \sin t)$, $y' = \mathrm{e}^t(\sin t + \cos t)$ a $z' = \mathrm{e}^t$, je $\mathrm{d}s = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$. Abychom našli souřadnice těžiště, spočítáme integrály

$$\int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}s = \sqrt{2}\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}$$

$$\int_{\mathcal{C}} x\,\mathrm{d}s = \sqrt{2}\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{2t}\cos t\,\mathrm{d}t$$

$$\int_{\mathcal{C}} y\,\mathrm{d}s = \sqrt{2}\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{2t}\sin t\,\mathrm{d}t$$

$$\int_{\mathcal{C}} z\,\mathrm{d}s = \sqrt{2}\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Integrály $C = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{2t}\cos t\,\mathrm{d}t$ a $S = \int \mathrm{e}^{2t}\sin t\,\mathrm{d}t$ nalezneme ze soustavy rovnic, která plyne integrací per partes:

$$C = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{2t}\cos t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2t}\cos t\right]_{-\infty}^{0} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{2t}\sin t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,S$$

$$S = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{2t}\sin t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2t}\sin t\right]_{-\infty}^{0} - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{2t}\cos t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\,C$$

Z této soustavy plyne, že $C = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{2t}\cos t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{5}$ a $S = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{2t}\sin t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{5}$. Tedy souřadnice těžiště jsou $x_T = \frac{2}{5}$, $y_T = -\frac{1}{5}$ a $z_T = \frac{1}{2}$.

---

32. Najděte momenty setrvačnosti vzhledem k souřadnicovým osám jednoho závitu šroubovice

$$x = a\cos t\,, \quad y = a\sin t\,, \quad z = \frac{h}{2\pi}\,t \qquad 0 \le t \le 2\pi\,.$$

Řešení: Podle vzorce snadno zjistíme, že $\mathrm{d}s = \frac{\sqrt{4\pi^2a^2 + h^2}}{2\pi}\,\mathrm{d}t$. Tedy momenty setrvačnosti jsou

$$I_x = \int_{\mathcal{C}} (y^2 + z^2)\,\mathrm{d}s = \frac{\sqrt{4\pi^2a^2 + h^2}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(a^2\sin^2 t + \frac{h^2}{4\pi^2}\,t^2\right)\mathrm{d}t = \\ = \left(\frac{a^2}{2} + \frac{h^2}{3}\right)\sqrt{4\pi^2a^2 + h^2}$$

$$I_y = \int_{\mathcal{C}} (x^2 + z^2)\,\mathrm{d}s = \frac{\sqrt{4\pi^2a^2 + h^2}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(a^2\cos^2 t + \frac{h^2}{4\pi^2}\,t^2\right)\mathrm{d}t =$$

$$= \left(\frac{a^2}{2} + \frac{h^2}{3}\right)\sqrt{4\pi^2a^2 + h^2}$$

$$I_z = \int_{\mathcal{C}} \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}s = \frac{\sqrt{4\pi^2a^2 + h^2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} a^2 \, \mathrm{d}t = a^2\sqrt{4\pi^2a^2 + h^2}\,.$$

---

33. Jakou silou přitahuje hmota M, která je rovnoměrně rozložená na horní půlkružnici $x^2 + y^2 = a^2$, $y \geq 0$, hmotný bod s hmotností m v bodě $[0;0]$?

Řešení: Složky síly F_x a F_y, které působí na hmotný bod s hmotností m v bodě $[x;y]$ jsou dány křivkovými integrály

$$F_x = km \int_{\mathcal{C}} \frac{\rho\left(\xi - x\right)}{\left((\xi - x)^2 + (\eta - y)^2\right)^{3/2}} \, \mathrm{d}s$$

$$F_y = km \int_{\mathcal{C}} \frac{\rho\left(\eta - y\right)}{\left((\xi - x)^2 + (\eta - y)^2\right)^{3/2}} \, \mathrm{d}s$$

kde $\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}\xi)^2 + (\mathrm{d}\eta)^2}$ a $\rho = \rho(\xi, \eta)$ je hustota. Protože je křivka $\mathcal{C}$ zadána parametrickými rovnicemi $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, kde $0 < t < \pi$, je $\mathrm{d}s = a\,\mathrm{d}t$. Proto jsou složky síly v bodě $[0;0]$ rovny

$$F_x = km\rho \int_0^{\pi} \frac{a\cos t}{a^3} \, a \, \mathrm{d}t = 0$$

$$F_y = km\rho \int_0^{\pi} \frac{a\sin t}{a^3} \, a \, \mathrm{d}t = \frac{2km\rho}{a}\,.$$

Protože $M = \rho\pi a$, je $F_x = 0$ a $F_y = \dfrac{2kmM}{\pi a^2}$.

Cvičení 19

Plošný integrál prvního druhu (v $\mathbb{R}^3$).

Nechť $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^3$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, je po částech diferencovatelné zobrazení, tj. množina bodů z Ω, na které nemusí existovat diferenciál je konečným sjednocením diferencovatelných křivek a bodů.
Většinou budeme psát zobrazení Φ ve tvaru

$$\Phi_1(u,v) = x(u,v) = x\,, \quad \Phi_2(u,v) = y(u,v) = y\,, \quad \Phi_3(u,v) = z(u,v) = z\,, \tag{1}$$

kde $(u,v) \in \Omega$.
Nechť je $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$.

Definice: *Po částech diferencovatelnou plochou v* $\mathbb{R}^3$ (krátce plochou) rozumíme množinu $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$, pro kterou existuje množina $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ a po částech diferencovatelné zobrazení $\Phi : \Omega \to \mathcal{S}$, takové, že zmíněná matice $\mathbf{A}$ má hodnost 2 až na množinu bodů, která je konečným sjednocením diferencovatelných křivek a bodů.
Každou takovou funkce Φ nazýváme parametrizací $\mathcal{S}$ a rovnice (1) nazýváme parametrickými rovnicemi plochy $\mathcal{S}$.

Definice: Nechť $\mathcal{S}$ je po částech diferencovatelná plocha v $\mathbb{R}^3$ a f je funkce definovaná na $\mathcal{S}$. *Plošným integrálem prvního druhu* funkce f přes plochu $\mathcal{S}$ nazýváme Riemannův integrál (pokud existuje)

$$\int_{\mathcal{S}} f(\boldsymbol{x})\ \mathrm{d}S = \int_{\Omega} f \circ \Phi(u,v)|\boldsymbol{n}|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

kde $\Phi : \Omega \to \mathcal{S}$ je nějaká parametrizace plochy $\mathcal{S}$ a $|\boldsymbol{n}| = \sqrt{\det\bigl(\mathbf{A}\mathbf{A}^T\bigr)}$.

Jestliže spočítáme $|\boldsymbol{n}|$ dostaneme

$$\iint_{\mathcal{S}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_{\Omega} f\bigl(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\bigr)\sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,,$$

kde

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\,;$$
$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\,;$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\,.$$

Ve speciálním případě, když je rovnice plochy $\mathcal{S}$ dána rovnicí

$$z = z(x, y)\,, \qquad (x, y) \in \Omega\,,$$

kde $z(x, y)$ je jednoznačná spojitě diferencovatelná funkce, je

$$\iint_{\mathcal{S}} f(x, y, z)\,\mathrm{d}S = \iint_{\sigma} f\big(x, y, z(x, y)\big)\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Význam a použití plošného integrálu prvního druhu.

Plošný integrál $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} \mathrm{d}S$ udává obsah S plochy $\mathcal{S}$.
Je-li $\rho = \rho(x, y, z)$ hustota (hustota náboje) v bodě $[x; y; z]$ plochy $\mathcal{S}$, pak je celková *hmotnost* (*náboj*) plochy $M = \displaystyle\int_{\mathcal{S}} \rho(x, y, z)\,\mathrm{d}S$.
Pro *souřadnice těžiště* $[x_0; y_0; z_0]$ této plochy pak platí

$$x_0 = \frac{1}{M}\int_{\mathcal{S}} x\rho\,\mathrm{d}S\,, \qquad y_0 = \frac{1}{M}\int_{\mathcal{S}} y\rho\,\mathrm{d}S\,, \qquad z_0 = \frac{1}{M}\int_{\mathcal{S}} z\rho\,\mathrm{d}S,.$$

Pro statické momenty, momenty setrvačnosti a další fyzikálně zajímavé veličiny platí podobné vztahy jako v případě prostorových těles, jen je třeba nahradit objemový integrál plošným integrálem prvního druhu.

1. O kolik se liší plošné integrály $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} (x^2 + y^2 + z^2)\,\mathrm{d}S$ a $\displaystyle\iint_{\mathcal{P}} (x^2 + y^2 + z^2)\,\mathrm{d}S$, kde $\mathcal{S}$ je kulová plocha $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ a $\mathcal{P}$ je povrch oktaedru $|x| + |y| + z| = a$, který je vepsán do této kulové plochy?
Řešení: Nejprve najdeme integrál přes kulovou plochu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. K parametrizaci této plochy jsou vhodné sférické souřadnice $x = r\cos\theta\cos\varphi$, $y = r\cos\theta\sin\varphi$ a $z = r\sin\theta$, kde $r > 0$, $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ a $0 < \varphi < 2\pi$. Pro dosazení do rovnice kulové plochy zjistíme, že $r = a$. Tedy parametrické rovnice kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ jsou $x = a\cos\theta\cos\varphi$, $y = a\cos\theta\sin\varphi$ a $z = a\sin\theta$, kde $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ a $0 < \varphi < 2\pi$.
Tečné vektory ke kulové ploše jsou

$$\boldsymbol{t}_\theta = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial y}{\partial \theta}, \frac{\partial z}{\partial \theta}\right) = \big(-a\sin\theta\cos\varphi, -a\sin\theta\sin\varphi, a\cos\theta\big)$$

$$\boldsymbol{t}_\varphi = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}, \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \frac{\partial z}{\partial \varphi}\right) = \big(-a\cos\theta\sin\varphi, a\cos\theta\cos\varphi, 0\big)$$

a normálový vektor v tomto bodě je

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{t}_\varphi \times \boldsymbol{t}_\theta = \bigl(a^2\cos^2\theta\cos\varphi, a^2\cos^2\theta\sin\varphi, a^2\sin\theta\cos\theta\bigr)\,.$$

Z toho dostaneme, že infinitezimální element plochy je

$$\mathrm{d}S = \bigl|\boldsymbol{n}\bigr|\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta = a^2\cos\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\,.$$

A protože na kulové ploše je $x^2+y^2+z^2=a^2$, dostaneme

$$\iint_{\mathcal{S}} \bigl(x^2+y^2+z^2\bigr)\,\mathrm{d}S = a^4\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = 4\pi a^4\,.$$

Povrch oktaedru se skládá z osmi ploch, jejichž parametrické rovnice jsou tvaru $z = \pm a - |x| - |y|$. Ve všech těchto případech je $\mathrm{d}S = \sqrt{3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. A Protože integrovaná funkce $x^2+y^2+z^2$ nabývá na těchto plochách stejných hodnot, je integrál přes celý povrch roven osminásobku integrálu přes plochu $z = a - x - y$, $x > 0$, $y > 0$. Tedy

$$\iint_{\mathcal{P}} \bigl(x^2+y^2+z^2\bigr)\,\mathrm{d}S = 8\sqrt{3}\iint_{\Omega}\bigl(x^2+y^2+(a-x-y)^2\bigr)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

kde oblast Ω je dána nerovnostmi $x+y<a$, $x>0$ a $y>0$, neboli $0<y<x-a$ a $0<x<a$. Tedy

$$\iint_{\mathcal{P}} \bigl(x^2+y^2+z^2\bigr)\,\mathrm{d}S = 8\sqrt{3}\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{a-x}\bigl(x^2+y^2+(a-x-y)^2\bigr)\,\mathrm{d}y = 2\sqrt{3}a^4\,.$$

Tedy $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}}\bigl(x^2+y^2+z^2\bigr)\,\mathrm{d}S - \int_{\mathcal{P}}\bigl(x^2+y^2+z^2\bigr)\,\mathrm{d}S = \bigl(4\pi-2\sqrt{3}\bigr)a^4$.

---

2. Vypočtěte $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} z\,\mathrm{d}S$, kde $\mathcal{S}$ je část plochy $x^2+z^2=2az$, $a>0$, která leží uvnitř plochy $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

Řešení: Při výpočtu plošných integrálů je první a asi největší problém najít parametrické rovnice dané plochy. V našem případě se jedná o plochu danou rovnicí $x^2+z^2=2az$. Jako nejsnadnější se jeví, vyřešit tuto rovnici vzhledem k proměnné x, tj. psát $x=\pm\sqrt{z(2a-z)}$. V takovém případě ale musíme danou plochu rozdělit na dvě plochy, konkrétně na plochu, kde $x=\sqrt{z(2a-z)}>0$ a $x=-\sqrt{z(2a-z)}<0$. Pro $x=0$ bychom získali křivku, jejíž dvourozměrná míra je rovna nule a lze ji tedy při integraci zanedbat. Z rovnic, které definují plochu, navíc plyne, že $0<z<2a$. V tomto případě máme tedy parametry y a z a parametrické rovnice jsou $x=\pm\sqrt{z(2a-z)}$, $y=y$ a $z=z$. Derivování najdeme tečné vektory $\boldsymbol{t}_y=(0,1,0)$ a $\boldsymbol{t}_z=\left(\pm\dfrac{a-z}{\sqrt{z(2a-z)}},0,1\right)$. Normálový vektor je jejich vektorový součin, tj.

$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{t}_y \times \boldsymbol{t}_z = \left(1, 0, \pm\dfrac{a-z}{\sqrt{z(2a-z)}}\right)$. Proto je $\mathrm{d}S = \left|\boldsymbol{n}\right| \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \dfrac{a\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\sqrt{z(2a-z)}}$.
Srovnejte s výrazem $\sqrt{1 + \left(y'_x\right)^2 + \left(z'_x\right)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$. Proto lze psát

$$\iint_{\mathcal{S}} = \iint_{\Omega_+} \frac{az\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\sqrt{z(2a-z)}} + \iint_{\Omega_-} \frac{az\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\sqrt{z(2a-z)}}\,,$$

kde oblasti Ω_+, resp. Ω_- jsou dány nerovnostmi $\sqrt{x^2+y^2} < z$ a $x = \sqrt{z(2a-z)}$, resp. $x = -\sqrt{z(2a-z)}$. Tyto oblasti jsou v rovině yz stejné, a tedy

$$\iint_{\mathcal{S}} = 2\iint_{\Omega} \frac{az\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\sqrt{z(2a-z)}}\,,$$

kde oblast Ω je určena nerovnostmi $y^2 < 2z(z-a)$ a $0 < z < 2a$, tj. $-\sqrt{2z(z-a)} < y < \sqrt{2z(z-a)}$ a $a < z < 2a$. Proto platí

$$\iint_{\mathcal{S}} z\,\mathrm{d}S = 2a\int_a^{2a} \mathrm{d}z \int\limits_{-\sqrt{2z(z-a)}}^{\sqrt{2z(z-a)}} \sqrt{\frac{z}{2a-z}}\,\mathrm{d}y = 4a\sqrt{2}\int_a^{2a} z\sqrt{\frac{z-a}{2a-z}}\,\mathrm{d}z\,.$$

Abychom našli tento integrál, zavedeme novou proměnnou vztahem $t^2 = \dfrac{z-a}{2a-z}$, ze kterého plyne $z = \dfrac{2t^2+1}{t^2+1}\,a$. Protože meze $(a, 2a)$ přejdou po substituci na meze $(0, +\infty)$ a $\mathrm{d}z = \dfrac{2at\,\mathrm{d}t}{\left(t^2+1\right)^2}$, získáme

$$\iint_{\mathcal{S}} z\,\mathrm{d}S = 8a^3\sqrt{2}\int_0^{+\infty} \frac{t^2\left(2t^2+1\right)}{\left(t^2+1\right)^3}\,\mathrm{d}t =$$

$$= 8a^3\sqrt{2}\int_0^{+\infty} \left(\frac{2}{t^2+1} - \frac{3}{\left(t^2+1\right)^2} + \frac{1}{\left(t^2+1\right)^3}\right)\mathrm{d}t\,.$$

Integrály typu $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+1\right)^n}$, kde $n > 1$ lze najít pomocí integrace per partes. Platí totiž

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+1\right)^n} = \left[\frac{x}{\left(1+x^2\right)^n}\right]_0^{+\infty} + 2n\int_0^{+\infty} \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\left(x^2+1\right)^{n+1}} =$$

$$= 2n\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+1\right)^n} - 2n\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+1\right)^{n+1}}\,.$$

Z této rovnosti plyne rekurentní vztah

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+1\right)^{n+1}} = \frac{2n-1}{2n} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+1\right)^{n}}\,,$$

který nám spolu se integrálem $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}$ umožňuje snadno najít integrály uvedeného typu.
Protože

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\left(t^2+1\right)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} \quad \text{a} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\left(t^2+1\right)^3} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\,,$$

je

$$\iint_{\mathcal{S}} z\,\mathrm{d}S = 8a^3\sqrt{2}\left(2\cdot\frac{\pi}{2} - 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \frac{7}{\sqrt{2}}\,\pi a^3\,.$$

---

3. Vypočtěte plošný integrál prvního druhu $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} (x+y+z)\,\mathrm{d}S$, kde $\mathcal{S}$ je plocha $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z \geq 0$.

Řešení: Parametrické rovnice kulové plochy $x^2+y^2+z^2=a^2$ jsou $x = a\cos\theta\cos\varphi$, $y = a\cos\theta\sin\varphi$ a $z = a\sin\theta$. Protože $z > 0$ je $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ a $0 < \varphi < 2\pi$. Infinitezimální element kulové plochy je v těchto souřadnicích $\mathrm{d}S = a^2\cos\theta$ (viz příklad 1). Tedy hledaný integrál je

$$\iint_{\mathcal{S}} (x+y+z)\,\mathrm{d}S = a^3 \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} (\cos\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi + \sin\theta)\cos\theta\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= 2\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \pi a^3\,.$$

---

4. Vypočtěte plošný integrál prvního druhu $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}S$, kde $\mathcal{S}$ je hranice tělesa $\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1$.

Řešení: Hranice daného kužele se skládá ze dvou ploch $\mathcal{S}_1$ a $\mathcal{S}_2$, kde plocha $\mathcal{S}_1$ je plášť kužele $\sqrt{x^2+y^2} = z$, $z < 1$, a plocha $\mathcal{S}_2$ je jeho podstava $z = 1$, $x^2+y^2 < 1$. Proto bude daný integrál přes plochu $\mathcal{S}$ součtem integrálů přes plochy $\mathcal{S}_1$ a $\mathcal{S}_2$.
Za parametrické rovnice plochy $\mathcal{S}_1$ bychom mohli vzít přímo vztahy $x = x$, $y = y$ a $z = \sqrt{x^2+y^2}$. V takovém případě bychom mohli vyjádřit element $\mathrm{d}S$ přímo pomocí derivací $\mathrm{d}S = \sqrt{1 + \left(z'_x\right)^2 + \left(z'_y\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Jestliže použijeme cylindrické souřadnice $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ a $z = z$, dostaneme z rovnice $\sqrt{x^2+y^2} = z$, která definuje plochu, vztah $z = r$. Tedy parametrické rovnice plochy $\mathcal{S}_1$ jsou $x = r\cos\varphi$, $y =$

$r\sin\varphi$ a $z = r$, kde $0 < \varphi < 2\pi$ a $0 < r < 1$. Musíme ale ještě najít $\mathrm{d}S$. Tečny ve směrech r a φ jsou $\boldsymbol{t}_r = (\cos\varphi, \sin\varphi, 1)$ a $\boldsymbol{t}_\varphi = (-r\sin\varphi, r\cos\varphi, 0)$ a normála $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{t}_r \times \boldsymbol{t}_\varphi = (-r\cos\varphi, -r\sin\varphi, r)$. Tedy $\mathrm{d}S = \sqrt{2}\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$ a platí

$$\iint_{\mathcal{S}_1} \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}S = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 r^3 \mathrm{d}r = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\pi\,.$$

Plocha $\mathcal{S}_1$ má rovnici $z = 1$. Jestliže vybereme za parametry plochy souřadnice x a y, je $\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Tedy

$$\iint_{\mathcal{S}_2} \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}S = \iint_{\Omega} \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

kde oblast Ω je dána nerovnostmi $x^2 + y^2 < 1$. Poslední integrál lze velmi snadno najít v polárních souřadnicích $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Protože jakobián zobrazení je $J = r$ a oblast Ω je určena nerovnostmi $0 < r < 1$ a $0 < \varphi < 2\pi$, je podle věty o substituci

$$\iint_{\mathcal{S}_2} \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}S = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}\,.$$

Tedy

$$\iint_{\mathcal{S}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}+1}{2}\,\pi\,.$$

---

5. Vypočtěte plošný integrál prvního druhu $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} \frac{\mathrm{d}S}{(1+x+y)^2}$, kde S je hranice čtyřstěnu $x + y + z \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

Řešení: Hranice čtyřstěnu se skládá ze čtyř ploch

$$\begin{array}{lll}
\mathcal{S}_1:\ x = 0\,, & \mathrm{d}S = \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,, & \Omega_1:\ 0 < z < 1 - y\,,\ 0 < y < 1 \\
\mathcal{S}_2:\ y = 0\,, & \mathrm{d}S = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,, & \Omega_2:\ 0 < z < 1 - x\,,\ 0 < x < 1 \\
\mathcal{S}_3:\ z = 0\,, & \mathrm{d}S = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,, & \Omega_3:\ 0 < y < 1 - x\,,\ 0 < x < 1 \\
\mathcal{S}_4:\ z = 1 - x - y\,, & \mathrm{d}S = \sqrt{3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,, & \Omega_4:\ 0 < y < 1 - x\,,\ 0 < x < 1
\end{array}$$

Integrál přes plochu $\mathcal{S}$ lze najít jako součet integrálů přes plochy $\mathcal{S}_1$ až $\mathcal{S}_4$. Jestliže si uvědomíme, že integrály přes plochy $\mathcal{S}_1$ a $\mathcal{S}_2$ jsou stejné a integrály přes plochu $\mathcal{S}_4$ je $\sqrt{3}$–násobek integrálu přes plochu $\mathcal{S}_3$, dostaneme

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{S}} \frac{\mathrm{d}S}{(1+x+y)^2} &= 2\iint_{\Omega_2} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z}{(1+x)^2} + \left(1+\sqrt{3}\right) \iint_{\Omega_3} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+x+y)^2} = \\
&= 2\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}z + \left(1+\sqrt{3}\right) \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \frac{\mathrm{d}y}{(1+x+y)^2} = \\
&= \frac{3-\sqrt{3}}{2} + \left(\sqrt{3}-1\right) \ln 2\,.
\end{aligned}$$

6. Vypočtěte plošný integrál prvního druhu $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} |xyz|\,\mathrm{d}S$, kde $\mathcal{S}$ je část plochy $z = x^2 + y^2$, $z \le 1$.

Řešení: Protože je plocha dána jako graf funkce $z = x^2 + y^2$, je nejjednodušší použít za parametry proměnné x a y. Pak je $\mathrm{d}S = \sqrt{1 + \left(z'_x\right)^2 + \left(z'_y\right)^2} = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$. Tedy

$$\iint_{\mathcal{S}} |xyz|\,\mathrm{d}S = \iint_{\Omega} \bigl|xy(x^2 + y^2)\bigr| \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

kde je oblast Ω dána nerovností $x^2 + y^2 < 1$. Pro výpočet tohoto integrálu je výhodné zavést polární souřadnice $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, ve kterých je oblast Ω určena nerovnostmi $0 < r < 1$ a $0 < \varphi < 2\pi$. Tedy

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{S}} |xyz|\,\mathrm{d}S &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 r^5 \bigl|\cos\varphi\sin\varphi\bigr| \sqrt{1 + 4r^2}\,\mathrm{d}r = \\ &= 4\int_0^{\pi/2} \cos\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \cdot \frac{1}{2}\int_0^1 t^2\sqrt{1 + 4t}\,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{32}\int_1^{\sqrt{5}} \bigl(x^2 - 1\bigr)^2 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{125\sqrt{5} - 1}{420}\,,\end{aligned}$$

kde jsme při výpočtu integrálů použili substituce $r^2 = t$ a $1 + 4t = x^2$.

---

7. Vypočtěte plošný integrál prvního druhu $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} \frac{\mathrm{d}S}{h}$, kde $\mathcal{S}$ je povrch elipsoidu a h je vzdálenost středu elipsoidu od tečné roviny k elementu $\mathrm{d}S$ na povrchu elipsoidu.

Řešení: Podle příkladu **26.** ze cvičení **13.** je vzdálenost bodu $[x_0; y_0; z_0]$ od roviny dané rovnicí $Ax + By + Cz + D = 0$ dána vztahem $d = \dfrac{\bigl|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\bigr|}{\sqrt{A^2 + b^2 + C^2}}$. V bodě $[\xi; \eta; \zeta]$ elipsy $\dfrac{\xi^2}{a^2} + \dfrac{\eta^2}{b^2} + \dfrac{\zeta^2}{c^2} = 1$ je rovnice tečné roviny $\dfrac{\xi}{a^2}(x - \xi) + \dfrac{\eta}{b^2}(y - \eta) + \dfrac{\zeta}{c^2}(z - \zeta) = 0$ neboli $\dfrac{\xi}{a^2}x + \dfrac{\eta}{b^2}y + \dfrac{\zeta}{c^2}z - 1 = 0$. Protože střed tohoto elipsoidu je v počátku, platí $\dfrac{1}{h} = \sqrt{\dfrac{\xi^2}{a^4} + \dfrac{\eta^2}{b^4} + \dfrac{\zeta^2}{c^4}}$. Elipsoid budeme parametrizovat rovnicemi $\xi = a\cos\theta\cos\varphi$, $\eta = b\cos\theta\sin\varphi$ a $\zeta = c\sin\theta$, kde $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ a $0 < \varphi < 2\pi$. Protože

$$\begin{aligned}\boldsymbol{t}_\varphi &= \bigl(-a\cos\theta\sin\varphi, b\cos\theta\cos\varphi, 0\bigr) \\ \boldsymbol{t}_\theta &= \bigl(-a\sin\theta\cos\varphi, -b\sin\theta\sin\varphi, c\cos\theta\bigr) \\ \boldsymbol{n} &= \bigl(bc\cos^2\theta\cos\varphi, ac\cos^2\theta\sin\varphi, ab\cos\theta\sin\theta\bigr)\end{aligned}$$

je $\mathrm{d}S = \cos\theta\sqrt{b^2c^2\cos^2\theta\cos^2\varphi + a^2c^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + a^2b^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$. Po dosazení a jednoduchých úpravách dostaneme

$$\iint_{\mathcal{S}} \frac{\mathrm{d}S}{h} = \frac{1}{abc}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\bigl(b^2c^2\cos^2\theta\cos^2\varphi + a^2c^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + a^2b^2\sin^2\theta\bigr)\cos\theta\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{4\pi}{3abc}\bigl(b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2\bigr) = \frac{4}{3}\,\pi abc\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right).$$

---

8. Vypočtěte plošný integrál prvního druhu $\iint_{\mathcal{S}} z\,\mathrm{d}S$, kde $\mathcal{S}$ je plocha zadaná parametrickými rovnicemi $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = v$; $0 < u < a$, $0 < v < 2\pi$.
Řešení: Plocha je dána parametricky. Najdeme její infinitezimální element $\mathrm{d}S$.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{t}_u &= (\cos v, \sin v, 0)\\
\boldsymbol{t}_v &= (-u\sin v, u\cos v, 1)\\
\boldsymbol{n} = \boldsymbol{t}_u \times \boldsymbol{t}_v &= (\sin v, -\cos v, u)\\
\mathrm{d}S = \bigl|\boldsymbol{n}\bigr|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v &= \sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v
\end{aligned}$$

Tedy $\iint_{\mathcal{S}} z\,\mathrm{d}S = \int_0^{2\pi} v\,\mathrm{d}v\int_0^a \sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \pi^2\Bigl(a\sqrt{1+a^2} + \ln\bigl(a + \sqrt{1+a^2}\bigr)\Bigr)$.

---

9. Vypočtěte plošný integrál prvního druhu $\iint_{\mathcal{S}} z^2\,\mathrm{d}S$, kde $\mathcal{S}$ je část kuželové plochy $x = r\cos\varphi\sin\alpha$, $y = r\sin\varphi\sin\alpha$, $z = r\cos\alpha$, kde $0 \le r \le a$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ a $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ je konstantní.

Řešení: Najdeme infinitezimální element plochy $\mathrm{d}S$.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{t}_r &= (\cos\varphi\sin\alpha, \sin\varphi\sin\alpha, \cos\alpha)\\
\boldsymbol{t}_\varphi &= (-r\sin\varphi\sin\alpha, r\cos\varphi\sin\alpha, 0)\\
\boldsymbol{n} &= (-r\cos\varphi\cos\alpha\sin\alpha, -r\sin\varphi\cos\alpha\sin\alpha, r\sin^2\alpha)\\
\mathrm{d}S &= r\sin\alpha\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi
\end{aligned}$$

Tedy hledaný integrál je

$$\iint_{\mathcal{S}} z^2\,\mathrm{d}S = \cos^2\alpha\sin\alpha\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^3\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}\,a^4\cos^2\alpha\sin\alpha\,.$$

---

10. Vypočtěte plošný integrál prvního druhu $\iint_{\mathcal{S}}(xy + xz + yz)\,\mathrm{d}S$, kde $\mathcal{S}$ je část kuželové plochy $z = \sqrt{x^2+y^2}$, která leží uvnitř plochy $x^2 + y^2 = 2ax$.

Řešení: Protože je plocha zadána jako graf funkce $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, je

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + \left(z'_x\right)^2 + \left(z'_y\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sqrt{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Tedy hledaný integrál je

$$\iint_{\mathcal{S}} (xy + xz + yz)\,\mathrm{d}S = \sqrt{2}\iint_{\Omega} \left(xy + (x+y)\sqrt{x^2 + y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

kde oblast Ω je dána nerovností $x^2 + y^2 < 2ax$. Pro výpočet tohoto integrálu lze použít polární souřadnice $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Protože jakobián transformace je $J = r$ a oblast Ω je dána vztahy $0 < r < 2a\cos\varphi$, ze kterých plyne $-\dfrac{\pi}{2} < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$, je

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{S}} \left(xy + xz + yz\right)\mathrm{d}S &= \sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} r^3(\cos\varphi\sin\varphi + \cos\varphi + \sin\varphi)\,\mathrm{d}r = \\ &= \frac{64}{15}\sqrt{2}\,a^4\,.\end{aligned}$$

---

11. Najděte hmotnost parabolické skořepiny $z = \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$, $0 \le z \le 1$, jejíž hustota se mění podle vztahu $\rho = z$.

Řešení: Hmotnost M skořepiny $\mathcal{S}$ je dána plošným integrálem prvního druhu $M = \iint_{\mathcal{S}} \rho\,\mathrm{d}S$, kde ρ je plošná hustota. Protože je plocha $\mathcal{S}$ zadána rovnicí $z = \dfrac{x^2 + y^2}{2}$ je $\mathrm{d}S = \sqrt{1 + x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Tedy hmotnost je rovna

$$M = \iint_{\Omega} \frac{x^2 + y^2}{2}\sqrt{1 + x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

kde oblast Ω je určena nerovností $x^2 + y^2 < 2$. Tento integrál lze snadno najít v polárních souřadnicích $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Jakobián transformace je $J = r$ a oblast je dána nerovnostmi $0 < r < \sqrt{2}$, $0 < \varphi < 2\pi$. Tedy

$$\begin{aligned}M &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r^3\sqrt{1 + r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}\int_0^2 x\sqrt{1 + x}\,\mathrm{d}x = \\ &= \pi\int_1^{\sqrt{3}} \left(t^2 - 1\right)t^2\,\mathrm{d}t = \frac{2\pi}{15}\left(6\sqrt{3} + 1\right),\end{aligned}$$

kde jsme při výpočtu integrálu použili substituce $r^2 = x$ a $1 + x = t^2$.

---

12. Najděte hmotnost polokoule $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ $z \ge 0$, je-li hustota v bodě $M = [x; y; z]$ rovna $\dfrac{z}{a}$.

Řešení: Ve sférických souřadnicích jsou parametrické rovnice dané polokoule $x = a\cos\theta\cos\varphi$, $y = a\cos\theta\sin\varphi$ a $z = a\sin\theta$, kde $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ a $0 < \varphi < 2\pi$. Protože v těchto souřadnicích je $\mathrm{d}S = a^2\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$, je

$$M = \iint_{\mathcal{S}} \rho\,\mathrm{d}S = a^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi/2} \cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \pi a^2\,.$$

---

13. Najděte statické momenty homogenní trojúhelníkové desky $x+y+z = a$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ vzhledem k souřadnicovým rovinám.

Řešení: Statické momenty homogenní plochy $\mathcal{S}$ jsou $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} x\,\mathrm{d}S$, $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} y\,\mathrm{d}S$ a $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} z\,\mathrm{d}S$. Protože je naše plocha $\mathcal{S}$ symetrická, jsou všechny tyto momenty stejné. Rovnice plochy jsou $z = a - x - y$, a tedy $\mathrm{d}S = \sqrt{3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Tedy

$$\iint_{\mathcal{S}} x\,\mathrm{d}S = \sqrt{3}\iint_{\Omega} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

kde oblast Ω je dána nerovnostmi $a - x - y > 0$, $x > 0$ a $y > 0$, neboli $0 < y < a - x$ a $0 < x < a$. Tedy hledané momenty jsou

$$\sqrt{3}\int_0^a \mathrm{d}x \int_0^{a-x} x\,\mathrm{d}y = \sqrt{3}\int_0^a x(a-x)\,\mathrm{d}x = \frac{a^3}{2\sqrt{3}}\,.$$

---

14. Vypočtěte moment setrvačnost vzhledem k ose Oz homogenní sférické skořepiny $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$, s hustotou ρ_0.

Řešení: Moment setrvačnosti plochy $\mathcal{S}$ vzhledem k ose Oz je dán plošným integrálem prvního druhu $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} \rho\cdot\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}S$, kde ρ je plošná hustota plochy. V našem případě se jedná o sférickou skořepinu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z > 0$. Parametrické rovnice této plochy jsou $x = a\cos\theta\cos\varphi$, $y = a\cos\theta\sin\varphi$, $z = a\sin\theta$, kde $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ a $0 < \varphi < 2\pi$. Protože $\mathrm{d}S$ je v tomto případě $\mathrm{d}S = a^2\cos\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$, je moment setrvačnosti roven

$$\iint_{\mathcal{S}} \rho_0\left(x^2 + y^2\right)\mathrm{d}S = \rho_0 a^4 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi/2} \cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{4}{3}\pi\rho_0 a^4\,.$$

---

15. Vypočtěte moment setrvačnosti homogenní kuželové skořepiny $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{b^2} = 0$, $0 \leq z \leq b$ s hustotou ρ_0 vzhledem k přímce $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z-b}{0}$.

Řešení: Rovnice přímky je $y = 0$ a $z = b$ a čtverec vzdálenosti bodu $[x; y; z]$ od této přímky je $d^2 = y^2 + (z-b)^2$. Moment setrvačnosti I skořepiny $\mathcal{S}$ vzhledem k této přímce je dán plošným integrálem prvního druhu $I = \iint_{\mathcal{S}} \rho d^2 \, \mathrm{d}S$. Parametrické rovnice plochy $\mathcal{S}$ jsou například $x = ar\cos\varphi$, $y = ar\sin\varphi$ a $z = br$, kde $0 < r < 1$ a $0 < \varphi < 2\pi$. Z parametrického vyjádření plochy $\mathcal{S}$ plyne

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{t}_r &= (a\cos\varphi, a\sin\varphi, b) \\
\boldsymbol{t}_\varphi &= (-ar\sin\varphi, ar\cos\varphi, 0) \\
\boldsymbol{n} = \boldsymbol{t}_r \times \boldsymbol{t}_\varphi &= (-abr\cos\varphi, -abr\sin\varphi, a^2 r) \\
\mathrm{d}S = \big|\boldsymbol{n}\big| \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi &= ar\sqrt{a^2+b^2} \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi
\end{aligned}
$$

Protože $d^2 = y^2 + (z-b)^2 = a^2r^2\sin^2\varphi + b^2(r-1)^2$, je moment setrvačnosti skořepiny

$$
I = a\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 \big(a^2r^2\sin^2\varphi + b^2(r-1)^2\big) r \, \mathrm{d}r = \frac{\pi}{12}\, a\big(3a^2+2b^2\big)\sqrt{a^2+b^2}\,.
$$

---

16. Najděte souřadnice těžiště části homogenní plochy $z = \sqrt{x^2+y^2}$, která leží uvnitř plochy $x^2+y^2 = ax$.

Řešení: Protože je plocha dána jako graf funkce $z = \sqrt{x^2+y^2}$, je

$$
\mathrm{d}S = \sqrt{1 + \big(z'_x\big)^2 + \big(z'_y\big)^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \sqrt{2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y\,.
$$

Plošný integrál funkce $f(x,y,z)$ přes tuto plochu $\mathcal{S}$ je

$$
\iint_{\mathcal{S}} f(x,y,z) \, \mathrm{d}S = \sqrt{2} \iint_{\Omega} f\big(x, y, \sqrt{x^2+y^2}\big) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y\,,
$$

kde oblast Ω je dána nerovností $x^2+y^2 < ax$. Tuto oblast lze v polárních souřadnicích, které jsou dány vztahy $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ vyjádřit jako $0 < r < a\cos\varphi$ a $-\dfrac{\pi}{2} < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$. Protože jakobián této transformace je $J = r$, platí

$$
\begin{aligned}
M &= \int_{\mathcal{S}} \mathrm{d}S = \sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi \int_0^{a\cos\varphi} r \, \mathrm{d}r = \frac{a^2}{\sqrt{2}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\varphi \, \mathrm{d}\varphi = \frac{\pi a^2}{2\sqrt{2}} \\
&\iint_{\mathcal{S}} x \, \mathrm{d}S = \sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi \int_0^{a\cos\varphi} r^2\cos\varphi \, \mathrm{d}r = \frac{\pi a^3}{4\sqrt{2}} \\
&\iint_{\mathcal{S}} y \, \mathrm{d}S = \sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi \int_0^{a\cos\varphi} r^2\sin\varphi \, \mathrm{d}r = 0 \\
&\iint_{\mathcal{S}} z \, \mathrm{d}S = \sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi \int_0^{a\cos\varphi} r^2 \, \mathrm{d}r = \frac{4\sqrt{2}a^3}{9}
\end{aligned}
$$

Tedy souřadnice těžiště jsou $x_T = \dfrac{a}{2}$, $y_T = 0$, $z_T = \dfrac{16a}{9\pi}$.

---

17. Najděte souřadnice těžiště homogenní plochy $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq a$.

Řešení: Plocha dána grafem funkce $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. Tedy $\mathrm{d}S = \dfrac{a \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$. Plošný integrál prvního druhu funkce $f(x, y, z)$ přes plochu $\mathcal{S}$ je tedy

$$\iint_{\mathcal{S}} f(x, y, z) \,\mathrm{d}S = a \iint_{\Omega} \frac{f\big(x, y, \sqrt{a - x^2 - y^2}\big)}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,,$$

kde oblast Ω je dána nerovnostmi $x^2 + y^2 < a^2$, $x + y < a$, $x > 0$ a $y > 0$, ze kterých plyne $0 < y < a - x$ a $0 < x < a$. Protože je daný problém symetrický vzhledem záměně $x \leftrightarrow y$ je $x_T = y_T$. Pro výpočet těžiště musíme nají integrály

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{S}} \mathrm{d}S &= a \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^{a-x} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = a \int_0^a \left[\arcsin \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right]_0^{a-x} \mathrm{d}x = \\
&= a \int_0^a \arcsin \sqrt{\frac{a - x}{a + x}} \,\mathrm{d}x \\
\iint_{\mathcal{S}} y \,\mathrm{d}S &= a \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^{a-x} \frac{y \,\mathrm{d}y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = a \int_0^a \left[-\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\right]_0^{a-x} \mathrm{d}x = \\
&= a \int_0^a \left(\sqrt{a^2 - x^2} - \sqrt{2x(a - x)}\right) \mathrm{d}x \\
\iint_{\mathcal{S}} z \,\mathrm{d}S &= a \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^{a-x} \mathrm{d}y = a \int_0^a (a - x) \,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}
\end{aligned}$$

Integrály v druhém výrazu lze najít integrací per partes nebo substitucí. Substituce $x = a \sin t$ dává

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \,\mathrm{d}x = a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} \,a^2 \,.$$

Protože $x(a - x) = \dfrac{a^2}{4} - \left(x - \dfrac{a}{2}\right)^2$, lze pro výpočet druhého integrálu použít substituci $x - \dfrac{a}{2} = \dfrac{a}{2} \sin t$, neboli $\dfrac{2x - a}{a} = \sin t$. Po této substituci dostaneme

$$\int_0^a \sqrt{2x(a - x)} \,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2\sqrt{2}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} a^2 \,.$$

Abychom našli integrál $\int_0^a \arcsin\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\,\mathrm{d}x$ integrujeme nejprve per partes. Protože derivace $\left(\arcsin\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right)' = -\frac{a}{(a+x)\sqrt{x(a-x)}}$, je

$$\int_0^a \arcsin\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\,\mathrm{d}x = \left[x\arcsin\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right]_0^a + a\int_0^a \sqrt{\frac{x}{a-x}}\,\frac{\mathrm{d}x}{a+x} =$$
$$= a\int_0^a \sqrt{\frac{x}{a-x}}\,\frac{\mathrm{d}x}{a+x}\,.$$

Když v tomto integrálu zavedeme novou proměnnou $\frac{x}{a-x} = t^2$, dostane

$$\int_0^a \arcsin\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\,\mathrm{d}x = 2a\int_0^\infty \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+2t^2)} =$$
$$= 2a\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{1+2t^2}\right)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\,a\big(\sqrt{2}-1\big)\,.$$

Po dosazení pak získáme souřadnice těžiště $x_T = y_T = \frac{a}{2\sqrt{2}}$ a $z_T = \frac{a}{\pi}\big(\sqrt{2}+1\big)$.

---

18. Najděte polární momenty setrvačnosti $I_0 = \iint_{\mathcal{S}} (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}S$ následujících ploch: a) povrchu krychle $\max\{|x|,|y|,|z|\} = a$; b) povrchu válce $x^2+y^2 \le R^2$, $0 \le z \le H$.

Řešení:

a) Hranice krychle se skládá ze šesti stěn $x = \pm a$, $y = \pm a$ a $z = \pm a$. Protože polární moment setrvačnosti všech těchto stěn stejný, je roven šestinásobku polárního momentu jedné stěny, například stěny $z = a$, $-a < x < a$, $-a < y < a$. Protože je plocha dána jako graf funkce $z = a$, je v tomto případě $\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Tedy platí

$$I_0 = 6\int_{-a}^a \mathrm{d}x \int_{-a}^a \big(x^2+y^2+a^2\big)\,\mathrm{d}y = 40a^2\,.$$

b) Povrch válce se skládá ze tří ploch

$$\begin{aligned}
&\mathcal{S}_1:\ z = 0\,, && x^2+y^2 < R^2\\
&\mathcal{S}_2:\ z = H\,, && x^2+y^2 < R^2\\
&\mathcal{S}_3:\ x^2+y^2 = R^2\,, && 0 < z < H
\end{aligned}$$

První dvě plochy jsou dány jako graf funkce $z = 0$ nebo $z = H$. Proto je na těchto plochách $\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ a integrujeme přes oblast Ω, která je dána nerovností $x^2+y^2 < R^2$. Při integraci přes kruh jsou většinou výhodné polární souřadnice

$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, kde $0 < r < R$ a $0 < \varphi < 2\pi$. Protože jakobián transformace je $J = r$ je

$$I_1 = \iint_{\mathcal{S}_1} \left(x^2+y^2+z^2\right) \mathrm{d}S = \iint_{\Omega} \left(x^2+y^2\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^R r^3\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}\,R^4$$

$$I_2 = \iint_{\mathcal{S}_2} \left(x^2+y^2+z^2\right) \mathrm{d}S = \iint_{\Omega} \left(x^2+y^2+H^2\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^R r\left(r^2+H^2\right) \mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}\,R^2\left(R^2+2H^2\right)$$

Plochu $\mathcal{S}_3$ lze vyjádřit parametrickými rovnicemi $x = R\cos\varphi$, $y = R\sin\varphi$, $z = z$, kde $0 < \varphi < 2\pi$ a $0 < z < H$. Protože $\boldsymbol{t}_\varphi = (-R\sin\varphi, R\cos\varphi, 0)$, $\boldsymbol{t}_z = (0,0,1)$ a $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{t}_\varphi \times \boldsymbol{t}_z = (R\cos\varphi, R\sin\varphi, 0)$ je $\mathrm{d}S = R\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$. Tedy

$$I_3 = \iint_{\mathcal{S}_3} \left(x^2+y^2+z^2\right) \mathrm{d}S = R\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^H \left(R^2+z^2\right) \mathrm{d}z = \frac{2}{3}\,\pi R H\left(3R^2+H^2\right).$$

Tedy $I_0 = I_1 + I_2 + I_3 = \dfrac{\pi}{3}\,R\left(3R(R+H)^2 + H^3\right)$.

---

19. Najděte momenty setrvačnosti trojúhelníkové desky $x+y+z=1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ vzhledem k souřadnicovým rovinám.

Řešení: Momenty setrvačnosti plochy $\mathcal{S}$ vzhledem souřadnicovým rovinám x, y, resp. z jsou dány plošnými integrály prvního druhu $I_x = \displaystyle\iint_{\mathcal{S}} x^2\,\mathrm{d}S$, $I_y = \displaystyle\iint_{\mathcal{S}} y^2\,\mathrm{d}S$ a $I_z = \displaystyle\iint_{\mathcal{S}} z^2\,\mathrm{d}S$. Protože je daná plocha symetrická vzhledem k záměně proměnných, je zřejmé, že $I_x = I_y = I_z$. Protože je plocha $\mathcal{S}$ dána rovnicí $z = a - x - y$, kde $0 < y < a - x$ a $0 < x < a$, je $\mathrm{d}S = \sqrt{3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ a

$$I_x = \iint_{\mathcal{S}} x^2\,\mathrm{d}S = \sqrt{3}\int_0^a \mathrm{d}x \int_0^{a-x} x^2\,\mathrm{d}y = \frac{a^4}{4\sqrt{3}}\,.$$

---

20. Jakou silou přitahuje část homogenní kuželové plochy $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = r$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 < b \leq r \leq a$ s hustotou ρ_0 hmotný bod s hmotností m, který je umístěn ve vrcholu tohoto kužele.

Řešení: Složky síly, kterou přitahuje plocha $\mathcal{S}$ s hustotou ρ hmotný bod s hmotností m umístěné v počátku souřadnic jsou

$$F_x = km \iint_{\mathcal{S}} \frac{\rho\cdot x\,\mathrm{d}S}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\,,$$

$$F_y = km \iint_{\mathcal{S}} \frac{\rho\cdot y\,\mathrm{d}S}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\,,$$

$$F_z = km \iint_{\mathcal{S}} \frac{\rho\cdot z\,\mathrm{d}S}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\,.$$

Protože $\boldsymbol{t}_r = (\cos\varphi, \sin\varphi, 1)$ a $\boldsymbol{t}_\varphi = (-r\sin\varphi, r\cos\varphi, 0)$ je $\mathrm{d}S = \sqrt{2}\, r\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\varphi$. Proto je

$$F_x = \frac{1}{2}\, km\rho_0 \int_b^a \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi}{r}\, \mathrm{d}\varphi = 0$$

$$F_y = \frac{1}{2}\, km\rho_0 \int_b^a \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi}{r}\, \mathrm{d}\varphi = 0$$

$$F_z = \frac{1}{2}\, km\rho_0 \int_b^a \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{r} = \pi km\rho_0 \ln\frac{a}{b}\,.$$

---

21. Najděte potenciál homogenní kulové plochy $\mathcal{S}$ dané rovnicí $x^2+y^2+z^2=a^2$ s hustotou ρ_0 v bodě $M_0 = [x_0; y_0; z_0]$, tj. vypočtěte integrál $U = \iint\limits_{\mathcal{S}} \frac{\rho_0\, \mathrm{d}S}{r}$, kde $r = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$.

Řešení: Daný problém je symetrický vzhledem k rotacím kolem počátku. Proto lze předpokládat, že bod $M_0 = [0; 0; r_0]$, kde $r_0 = \sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$. V tomto případě je

$$U = \iint_{\mathcal{S}} \frac{\rho_0\, \mathrm{d}S}{\sqrt{a^2 - 2zr_0 + r_0^2}}\,.$$

Parametrické rovnice kulové plochy $\mathcal{S}$ jsou $x = a\cos\theta\cos\varphi$, $y = a\cos\theta\sin\varphi$ a $z = a\sin\theta$, kde $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ a $0 < \varphi < 2\pi$. Protože $\mathrm{d}S = a^2\cos\theta\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\varphi$, je

$$U(r_0) = a^2\rho_0 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta\, \mathrm{d}\varphi}{\sqrt{a^2 - 2ar_0\sin\theta + r_0^2}} =$$

$$= 2\pi a^2\rho_0 \left[-\frac{\sqrt{a^2 - 2ar_0\sin\theta + r_0^2}}{2ar_0}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2\pi\rho_0 \frac{a}{r_0}\left(|a+r_0| - |a-r_0|\right).$$

Tedy pro $r_0 < a$ je $U(r_0) = 4\pi\rho_0 a$ a pro $r_0 > a$ je $U(r_0) = 2\pi\rho_0 \frac{a^2}{r_0}$.
Potenciál kulové plochy $x^2+y^2+z^2=a^2$ v bodě $M_0 = [x_0; y_0; z_0]$ je $U(x_0, y_0, z_0) = 4\pi\rho_0 \min\left(a, \frac{a^2}{r_0}\right)$, kde $r_0 = \sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$.

---

22. Vypočtěte $\iint\limits_{x+y+z=t} f(x,y,z)\, \mathrm{d}S$, kde

$$f(x,y,z) = \begin{cases} 1 - x^2 - y^2 - z^2 & \text{pro } x^2+y^2+z^2 \le 1 \\ 0 & \text{pro } x^2+y^2+z^2 > 1 \end{cases}$$

Řešení: Jedná se o plošný integrál prvního druhu

$$I(t) = \iint_{\mathcal{S}_t} \left(1 - x^2 - y^2 - z^2\right) \mathrm{d}S\,,$$

kde plocha $\mathcal{S}_t$ je dána rovnicí $x + y + z = t$, kde $x^2 + y^2 + z^2 < 1$. Protože rovnici plochy lze psát ve tvaru $z = t - x - y$, je $\mathrm{d}S = \sqrt{3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Tedy

$$I(t) = \sqrt{3} \iint_{\Omega} \left(1 - 2x^2 - 2y^2 - 2xy + 2xt + 2yt - t^2\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

kde oblast Ω je určena nerovností $2x^2 + 2y^2 + 2xy - 2xt - 2yt + t^2 < 1$. Protože se jedná o otočenou elipsu, bylo by možné najít její střed a poloosy a použít vhodné souřadnice. Jiná možnost je zapsat tuto nerovnost pomocí součtu dvou mocnin, tj. ve tvaru

$$2x^2 + 2y^2 + 2xy - 2xt - 2yt + t^2 = \frac{(2x + y - t)^2}{2} + \frac{(3y - t)^2}{6} < \frac{3 - t^2}{3}\,.$$

Z této rovnice je vidět, že pro $|t| > \sqrt{3}$ je tato množina prázdná, tj. pro tato t je $I(t) = 0$. Je-li $|t| < \sqrt{3}$, položíme

$$\begin{aligned} 2x + y - t &= \sqrt{\frac{2(3 - t^2)}{3}}\, r\cos\varphi \\ 3y - t &= \sqrt{2(3 - t^2)}\, r\sin\varphi \end{aligned} \quad\Longrightarrow\quad \begin{aligned} x &= \frac{t}{3} + \sqrt{\frac{3 - t^3}{6}}\, r\cos\varphi - \sqrt{\frac{3 - t^2}{18}}\, r\sin\varphi \\ y &= \frac{t}{3} + \sqrt{\frac{2(3 - t^2)}{9}}\, r\sin\varphi \end{aligned}$$

kde $0 < r < 1$ a $0 < \varphi < 2\pi$. Protože jakobián této transformace je $J = \dfrac{3 - t^2}{3\sqrt{3}}\, r$ je pro $|t| < \sqrt{3}$

$$I(t) = \frac{3 - t^2}{3} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 \frac{3 - t^2}{3} \left(1 - r^2\right) r\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{18}\left(3 - t^2\right)^2.$$

---

23. Vypočtěte integrál $F(t) = \displaystyle\iint\limits_{x^2 + y^2 + z^2 = t^2} f(x, y, z)\,\mathrm{d}S$, kde

$$f(x, y, z) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{pro } z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \\ 0 & \text{pro } z < \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

Řešení: Máme najít plošný integrál prvního druhu

$$F(t) = \iint_{\mathcal{S}_t} \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}S\,,$$

kde $\mathcal{S}$ je část kulové plochy $x^2+y^2+z^2=t^2$, kde $z>\sqrt{x^2+y^2}$. Když použijeme parametrické rovnice této plochy ve tvaru $x=|t|\cos\theta\cos\varphi$, $y=|t|\cos\theta\sin\varphi$ a $z=|t|\sin\theta$ je $\mathrm{d}S=t^2\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$ a z nerovnosti $z>\sqrt{x^2+y^2}$ plyne $\sin\theta>\cos\theta$, neboli $\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$. Tedy

$$F(t)=t^4\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta=2\pi t^4\left[\sin\theta-\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_{\pi/4}^{\pi/2}=\frac{8-5\sqrt{2}}{6}\,\pi t^4\,.$$

---

24. Vypočtěte integrál $F(x,y,z,t)=\displaystyle\iint_{\mathcal{S}}f(\xi,\eta,\zeta)\,\mathrm{d}S$, kde $\mathcal{S}$ je měnící se kulová plocha $(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2=t^2$ a

$$f(\xi,\eta,\zeta)=\begin{cases}1 & \text{pro } \xi^2+\eta^2+\zeta^2<a^2\\ 0 & \text{pro } \xi^2+\eta^2+\zeta^2\geq a^2\end{cases}$$

Řešení: Tímto integrálem počítáme obsah části kulové plochy se středem v bodě $M=[x;y;z]$ a poloměrem $|t|$, která leží uvnitř koule se středem v počátku a poloměrem a. Z geometrického názoru je zřejmě, že tento integrál bude záviset pouze na vzdálenosti bodu M od počátku, tj. na $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Proto bychom za bod M_0 mohli vzít, podobně jak jsme to udělali v některých předchozích případech, bod $M_0=[0;0;r]$. Ale ukážeme, jak bychom mohli tento integrál bez tohoto předpokladu.

Označme $\boldsymbol{e}_3=\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$, kde $\boldsymbol{r}=\bigl(x,y,z\bigr)$. Je-li $\boldsymbol{r}=0$, lze jednotkový vektor $\boldsymbol{e}_3$ zvolit libovolně. Nechť jsou $\boldsymbol{e}_1$ a $\boldsymbol{e}_2$ jednotkové vektory takové, že $\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_1$ a $\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2$. V tomto souřadném systému je $\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{e}_3$. Označme $\boldsymbol{\xi}=\bigl(\xi,\eta,\zeta\bigr)$. Abychom popsali plochu, která je dána rovnicí $\bigl|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{r}\bigr|^2=t^2$, zavedeme nové proměnné ρ, θ a φ rovnicemi

$$\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{r}+\boldsymbol{e}_1\rho\cos\theta\cos\varphi+\boldsymbol{e}_2\rho\cos\theta\sin\varphi+\boldsymbol{e}_3\rho\sin\theta\,.$$

Rovnice dané plochy jsou pak $\rho=|t|$ a nerovnost $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=\bigl|\boldsymbol{\xi}\bigr|^2<a^2$ dává $r^2+2r|t|\sin\theta+t^2<a^2$. Najdeme ještě $\mathrm{d}S$.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{t}_\theta&=-\boldsymbol{e}_1|t|\sin\theta\cos\varphi-\boldsymbol{e}_2|t|\sin\theta\sin\varphi+\boldsymbol{e}_3|t|\cos\varphi\\
\boldsymbol{t}_\varphi&=-\boldsymbol{e}_1|t|\cos\theta\sin\varphi+\boldsymbol{e}_2\cos\theta\cos\varphi\\
\boldsymbol{n}=\boldsymbol{t}_\theta\times\boldsymbol{t}_\varphi&=-\boldsymbol{e}_1t^2\cos^2\theta\cos\varphi-\boldsymbol{e}_2t^2\cos^2\theta\sin\varphi-\boldsymbol{e}_3t^2\cos\theta\sin\theta\\
\mathrm{d}S&=\bigl|\boldsymbol{n}\bigr|\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi=t^2\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi
\end{aligned}$$

Tedy

$$F(x,y,z)=t^2\iint_\Omega\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,,$$

kde oblast Ω je dána nerovnostmi $0 < \varphi < 2\pi$ a $r^2 + 2r|t|\sin\theta + t^2 < a^2$, neboli $\sin\theta < \dfrac{a^2 - r^2 - t^2}{2r|t|}$.

Je-li $\dfrac{a^2 - r^2 - t^2}{2r|t|} < -1$, tj. pro $|t| < r - a$ nebo $r + a > |t|$ je oblast Ω prázdná, a tedy $F(x, y, z, t) = 0$.

Je-li $-1 \le \dfrac{a^2 - r^2 - t^2}{2r|t|} \le 1$, tj. pro $\max\bigl(r - a, a - r\bigr) \le |t| \le a + r$ je $-1 \le \sin\theta \le \dfrac{a^2 - r^2 - t^2}{2r|t|}$, a tedy $F(x, y, z, t) = \pi\,\dfrac{|t|}{r}\,\bigl(a - r + |t|\bigr)\bigl(a + r - |t|\bigr)$.

Pro $\dfrac{a^2 - r^2 - t^2}{2r|t|} > 1$, tj. pro $|t| < a - r$ je $-1 \le \sin\theta \le 1$, a tedy $F(x, y, z, t) = 4\pi t^2$.

Cvičení 20

Křivkový integrál druhého druhu.

Definice: Nechť je $\mathcal{C}$ po částech diferencovatelná křivka v $\mathbb{R}^n$ a $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathcal{C}$ je její parametrizace. Nechť je $\boldsymbol{x} = \varphi(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, bod křivky $\mathcal{C}$ takový, že $\big|\varphi'(t)\big| \neq 0$. Vektor

$$\boldsymbol{\tau} = \varphi'(t) = \big(\varphi_1'(t), \varphi_2'(t), \ldots, \varphi_n'(t)\big)$$

nazýváme *tečným vektorem* ke křivce $\mathcal{C}$ v bodě $\boldsymbol{x} = \varphi(t)$. V krajních bodech intervalu a v bodech t, v nichž není funkce diferencovatelná uvažujeme jednostranné derivace (pokud existují).
Nechť v bodě $\boldsymbol{x} \in \mathcal{C}$ existuje tečný vektor $\boldsymbol{\tau}$ ke křivce $\mathcal{C}$. Pak se vektor $\boldsymbol{\tau}_0 = \dfrac{\boldsymbol{\tau}}{|\boldsymbol{\tau}|}$ nazývá *jednotkový tečný vektor* ke křivce $\mathcal{C}$ v bodě $\boldsymbol{x}$.

Definice: Nechť je vektorová funkce $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ definovaná na křivce $\mathcal{C}$ s parametrizací $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathcal{C}$. Pak integrál

$$\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{\tau}_0 \,\mathrm{d}s = \int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n f_i\big(\boldsymbol{x}(t)\big)\varphi_i'(t) \right) \mathrm{d}t$$

nazýváme *křivkovým integrálem druhého druhu* funkce $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ po křivce $\mathcal{C}$.
Pro tento integrál se často používá označení

$$\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{C}} f_i(\boldsymbol{x}) \,\mathrm{d}x_i \,.$$

Poznámka: Na rozdíl od křivkového integrálu prvního druhu závisí křivkový integrál druhého druhu na orientaci křivky $\mathcal{C}$, která je dána tečným vektorem k této křivce nebo volbou počátečního a koncového bodu křivky. Při opačné orientaci křivky se změní znaménko integrálu.

Věta. *Je-li vektorová funkce $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ v oblasti (oblast je otevřená souvislá množina) $D \subset \mathbb{R}^n$ úplným diferenciálem funkce $U(\boldsymbol{x})$, tj. v oblasti D existuje diferencovatelná funkce $U(\boldsymbol{x})$ taková, že*

$$\sum_{i=1}^n f_i(\boldsymbol{x})\, dx_i = dU(\boldsymbol{x})\,,$$

pak křivkový integrál druhého druhu funkce $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ po křivce $\mathcal{C}$, která leží v oblasti D nezávisí na křivce $\mathcal{C}$, ale závisí pouze na počátečním a koncovém bodě této křivky a platí

$$\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{s} = U(\boldsymbol{x}_2) - U(\boldsymbol{x}_1)\,,$$

kde $\boldsymbol{x}_1$, resp. $\boldsymbol{x}_2$, je počáteční, resp. koncový, bod křivky $\mathcal{C}$.

Věta: *Je-li D jednoduše souvislá oblast v $\mathbb{R}^n$, tj. každou uzavřenou po částech diferencovatelnou křivku lze "spojitě deformovat na bod", a funkce $f_i(\boldsymbol{x})$, $i = 1, \dots, n$, mají v oblasti D spojité parciální derivace, je nutná a postačující podmínka pro to, aby byla funkce $\boldsymbol{f}$ v oblasti D úplným diferenciálem, rovnost*

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} = \frac{\partial f_k}{\partial x_i}$$

v oblasti D pro každé $i, k = 1, 2, \dots, n$.
Pro funkci $U(\boldsymbol{x})$ v oblasti D pak platí

$$U(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{s} + C\,,$$

kde $\mathcal{C}$ je libovolná křivka s koncovým bodem $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}_0$ je pevně zvoleným počátečním bodem a C je libovolná konstanta.

Fyzikální význam křivkového integrálu druhého druhu

V $\mathbb{R}^3$ udává křivkový integrál druhého druhu funkce $\boldsymbol{f}$ po křivce $\mathcal{C}$ práci silového pole $\boldsymbol{f}$ po této křivce.
Je-li vektorové pole sil $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ v oblasti D úplným diferenciálem funkce $-U(\boldsymbol{x})$, nazývá se funkce $U(\boldsymbol{x})$ *potenciál* vektorového pole $\boldsymbol{f}$ a silové pole $\boldsymbol{f} = -\operatorname{grad} U$ se nazývá *konzervativní silové pole.*
Pouze v konzervativních silových polích platí ve fyzice zákon zachování mechanické energie.

1. Vypočtěte křivkový integrál druhého druhu $\displaystyle\int_{OA} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$, kde O je počátek souřadnic a bod A má souřadnice $[1; 2]$, je-li OA: a) úsečka; b) parabola s vrcholem v počátku, jejíž osa je Oy; c) lomená čára skládající se z úsečky OB na ose Ox a úsečky BA rovnoběžné s osou Oy.
Řešení:
a) Parametrické rovnice úsečky $\mathcal{C}_1$ jsou $x = t$, $y = 2t$, $0 \le t \le 1$. Protože $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ a $\mathrm{d}y = 2\,\mathrm{d}t$ je

$$\int_{\mathcal{C}_1} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (2t - 2t)\,\mathrm{d}t = 0\,.$$

b) Parametrické rovnice paraboly $\mathcal{C}_2$ jsou $x = t$, $y = 2t^2$, $0 \le t \le 1$. Protože $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ a $\mathrm{d}y = 4t\,\mathrm{d}t$ je

$$\int_{\mathcal{C}_2} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(4t^2 - 2t^2\right)\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\,.$$

c) Křivka $\mathcal{C}_3$ se skládá ze dvou úseček s parametrizacemi $x = t$, $y = 0$, $0 \le t \le 1$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, $\mathrm{d}y = 0$, a $x = 1$, $y = 2t$, $0 \le t \le 1$, $\mathrm{d}x = 0$, $\mathrm{d}y = 2t\,\mathrm{d}t$. Tedy

$$\int_{\mathcal{C}_3} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 0\,\mathrm{d}t + \int_0^1 2\,\mathrm{d}t = 2\,.$$

---

2. Vypočtěte křivkový integrál druhého druhu $\int_{OA} x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x$, kde O je počátek souřadnic a bod A má souřadnice $[1;2]$, je-li OA: a) úsečka; b) parabola s vrcholem v počátku, jejíž osa je Oy; c) lomená čára skládající se z úsečky OB na ose Ox a úsečky BA rovnoběžné s osou Oy.

Řešení:

a) Parametrické rovnice úsečky $\mathcal{C}_1$ jsou $x = t$, $y = 2t$, $0 \le t \le 1$. Protože $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ a $\mathrm{d}y = 2\,\mathrm{d}t$ je

$$\int_{\mathcal{C}_1} x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (2t + 2t)\,\mathrm{d}t = 2\,.$$

b) Parametrické rovnice paraboly $\mathcal{C}_2$ jsou $x = t$, $y = 2t^2$, $0 \le t \le 1$. Protože $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ a $\mathrm{d}y = 4t\,\mathrm{d}t$ je

$$\int_{\mathcal{C}_2} x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(4t^2 + 2t^2\right)\mathrm{d}t = 2\,.$$

c) Křivka $\mathcal{C}_3$ se skládá ze dvou úseček s parametrizacemi $x = t$, $y = 0$, $0 \le t \le 1$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, $\mathrm{d}y = 0$, a $x = 1$, $y = 2t$, $0 \le t \le 1$, $\mathrm{d}x = 0$, $\mathrm{d}y = 2t\,\mathrm{d}t$. Tedy

$$\int_{\mathcal{C}_3} x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 0\,\mathrm{d}t + \int_0^1 2\,\mathrm{d}t = 2\,.$$

Všimněte si rozdílu mezi příklady **1.** a **2.** V příkladu **1.** bylo $f_x = -y$ a $f_y = x$. Tedy $\dfrac{\partial f_x}{\partial y} = -1 \ne \dfrac{\partial f_y}{\partial x}$. Proto v tomto případě závisel integrál na křivce, která spojovala počátek O s bodem A. Ve druhém příkladu je $f_x = y$ a $f_y = x$. Tedy $\dfrac{\partial f_x}{\partial y} = 1 = \dfrac{\partial f_y}{\partial x}$ a křivkový integrál druhého druhu nezávisel na této křivce.

Vypočtete křivkové integrály druhého druhu podél následujících křivek orientovaných ve směru rostoucího parametru:

3. $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} (x^2 - 2xy)\,\mathrm{d}x + (y^2 - 2xy)\,\mathrm{d}y \quad \mathcal{C}$ je parabola $y = x^2\,;\quad -1 \le x \le 1$

4. $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x + (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}y \quad \mathcal{C}$ je křivka $y = 1 - |1 - x|\,;\quad 0 \le x \le 2$

5. $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} (x + y)\,\mathrm{d}x + (x - y)\,\mathrm{d}y \quad \mathcal{C}$ je elipsa $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

probíhaná proti směru pohybu hodinových ručiček

6. $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} (2a - y)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y \quad \mathcal{C}$ je oblouk cykloidy

$x = a(t - \sin t)\,,\ y = a(1 - \cos t) \quad 0 \le t \le 2\pi$

7. $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \frac{(x+y)\,\mathrm{d}x - (x-y)\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ $\quad \mathcal{C}$ je kružnice $x^2 + y^2 = a^2$

probíhaná proti směru pohybu hodinových ručiček

8. $\displaystyle\oint_{ABCDA} \frac{\mathrm{d}x + \mathrm{d}y}{|x| + |y|}$ $\quad ABCDA$ je obvod čtverce s vrcholy

$A = [1;0]\,,\ B = [0;1]\,,\ C = [-1;0]\,,\ D = [0;-1]$

9. $\displaystyle\int_{AB} \sin y\,\mathrm{d}x + \sin x\,\mathrm{d}y$ $\quad AB$ je úsečka od bodu $[0;\pi]$ do $[\pi;0]$

10. $\displaystyle\oint_{OmAnO} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,\mathrm{d}y - \mathrm{d}x$ $\quad OmA$ je část paraboly $y = x^2$ a

OnA je úsečka $y = x$

Řešení:

3. Za parametr zvolíme proměnnou x. Protože $\mathrm{d}y = 2x\,\mathrm{d}x$, je

$$\int_{\mathcal{C}} \big(x^2 - 2xy\big)\,\mathrm{d}x + \big(y^2 - 2xy\big)\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} \big(x^2 - 2x^3 + 2x(x^4 - 2x^3)\big)\,\mathrm{d}x = -\frac{14}{15}\,.$$

4. Křivka $\mathcal{C}$ se skládá ze dvou hladkých křivek $\mathcal{C}_1$ a $\mathcal{C}_2$ s parametrizacemi:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 :\ & y = x\,, & 0 \le x \le 1\,, \quad & \mathrm{d}y = \mathrm{d}x \\ \mathcal{C}_2 :\ & y = 2 - x\,, & 1 \le x \le 2\,, \quad & \mathrm{d}y = -\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Proto je

$$\int_{\mathcal{C}} \big(x^2 + y^2\big)\,\mathrm{d}x + \big(x^2 - y^2\big)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 2x^2\,\mathrm{d}x + \int_1^2 2(2-x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\,.$$

5. Parametrické rovnice dané elipsy jsou $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$, kde $0 < \varphi < 2\pi$. Protože tečný vektor například v bodě $[0;1]$, tj. pro $\pi = \dfrac{\pi}{2}$ je $\boldsymbol{t} = (-1, 0)$, zvolili jsme parametrizaci správně. Neboť $\mathrm{d}x = -a\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$ a $\mathrm{d}y = b\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$, je

$$\oint_{\mathcal{C}} (x+y)\,\mathrm{d}x + (x-y)\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big(-a\sin\varphi(a\cos\varphi + b\sin\varphi) + b\cos\varphi(a\cos\varphi - b\sin\varphi)\Big)\,\mathrm{d}\varphi = 0\,.$$

6. Protože $\mathrm{d}x = a(1 - \cos t)\,\mathrm{d}t$ a $\mathrm{d}y = a\sin t\,\mathrm{d}t$, je

$$\int_{\mathcal{C}} (2a - y)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = a^2 \int_0^{2\pi} \Big((1 - \cos t)^2 + (t - \sin t)\sin t\,\mathrm{d}t = -2\pi a^2\,.$$

7. Kružnici budeme parametrizovat rovnicemi $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, kde $0 < t < 2\pi$. Protože $\mathrm{d}x = -a\sin t\,\mathrm{d}t$ a $\mathrm{d}y = a\cos t\,\mathrm{d}t$, je

$$\oint\limits_{\mathcal{C}} \frac{(x+y)\,\mathrm{d}x - (x-y)\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \int\limits_0^{2\pi} \Big(-\sin t(\cos t + \sin t) - \cos t(\cos t - \sin t)\Big)\,\mathrm{d}t = -2\pi\,.$$

Všimněte si toho, že $f_x = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$ a $f_y = \dfrac{-x+y}{x^2+y^2}$, a tedy platí

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{x^2 - 2xy - y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{\partial f_y}{\partial x}\,.$$

Přesto není integrál přes kružnici, což je uzavřená křivka roven nule. To je způsobeno tím, že uvnitř této kružnice leží bod $[0;0]$, kde nemají funkce $\boldsymbol{f}$ spojité derivace.

8. Obvod daného trojúhelníka se skládá ze čtyř úseček

$$\begin{aligned}
AB = \mathcal{C}_1 &: \ x = 1-t\,,\ y = t\,; && 0 \le t \le 1\,, && \mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t\,,\ \mathrm{d}y = \,\mathrm{d}t\\
BC = \mathcal{C}_2 &: \ x = -t\,,\ y = 1-t\,; && 0 \le t \le 1\,, && \mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t\,,\ \mathrm{d}y = -\,\mathrm{d}t\\
CD = \mathcal{C}_3 &: \ x = t-1\,,\ y = -t\,; && 0 \le t \le 1\,, && \mathrm{d}x = \,\mathrm{d}t\,,\ \mathrm{d}y = -\,\mathrm{d}t\\
DA = \mathcal{C}_4 &: \ x = t\,,\ y = t-1\,; && 0 \le t \le 1\,, && \mathrm{d}x = \,\mathrm{d}t\,,\ \mathrm{d}y = \,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Tedy

$$\oint\limits_{ABCD} \frac{\mathrm{d}x + \,\mathrm{d}y}{|x|+|y|} = \int_{\mathcal{C}_1} \frac{\mathrm{d}x + \,\mathrm{d}y}{|x|+|y|} + \int_{\mathcal{C}_2} \frac{\mathrm{d}x + \,\mathrm{d}y}{|x|+|y|} + \int_{\mathcal{C}_3} \frac{\mathrm{d}x + \,\mathrm{d}y}{|x|+|y|} + \int_{\mathcal{C}_4} \frac{\mathrm{d}x + \,\mathrm{d}y}{|x|+|y|} = 0\,.$$

9. Úsečku AB lze parametrizovat například rovnicemi $x = \pi t$ a $y = \pi - \pi t$, kde $0 \le t \le 1$. Protože $\mathrm{d}x = \pi\,\mathrm{d}t$ a $\mathrm{d}y = -\pi\,\mathrm{d}t$ je

$$\int\limits_{AB} \sin y\,\mathrm{d}x + \sin x\,\mathrm{d}y = \pi \int_0^1 \Big(\sin\big(\pi - \pi t\big) - \sin \pi t\Big)\,\mathrm{d}t = 0\,.$$

10. Bod A najdeme jako řešení soustavy rovnic $y = x^2$ a $y = x$. Tedy bod $A = [1;1]$. Uzavřená křivka $OmAnO$ se skládá ze dvou hladkých křivek:

$$\begin{aligned}
OmA = \mathcal{C}_1 &: \ x = t\,,\ y = t^2\,, && 0 \le t \le 1\,; && \mathrm{d}x = \,\mathrm{d}t\,,\ \mathrm{d}y = 2t\,\mathrm{d}t\\
AnO = \mathcal{C}_2 &: \ x = 1-t\,,\ y = 1-t\,, && 0 \le t \le 1\,; && \mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t\,,\ \mathrm{d}y = -\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Tedy

$$\oint\limits_{OmAnO} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,\mathrm{d}y - \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \big(2t\operatorname{arctg} t - 1\big)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \big(\operatorname{arctg} 1 - 1\big)\,\mathrm{d}t =$$

$$= -\frac{\pi}{4} + \int_0^1 2t\operatorname{arctg} t\,\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{4} + \Big[(t^2+1)\operatorname{arctg} t\Big]_0^1 - \int_0^1 \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} - 1\,.$$

Přesvědčte se, že integrované výrazy jsou úplné diferenciály a pomocí toho spočítejte následující integrály

11. $\displaystyle\int\limits_{(-1,2)}^{(2,3)} x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x$

12. $\displaystyle\int\limits_{(0,1)}^{(3,-4)} x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y$

13. $\displaystyle\int\limits_{(0,1)}^{(2,3)} (x+y)\,\mathrm{d}x + (x-y)\,\mathrm{d}y$

14. $\displaystyle\int\limits_{(1,-1)}^{(1,1)} (x-y)(\,\mathrm{d}x - \,\mathrm{d}y)$

15. $\displaystyle\int\limits_{(0,0)}^{(a,b)} f(x+y)\cdot(\,\mathrm{d}x + \,\mathrm{d}y)$ $\quad f(u)$ je spojitá

16. $\displaystyle\int\limits_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{x^2}$ $\quad$ křivka neprotíná osu Oy

17. $\displaystyle\int\limits_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\quad$ křivka neprochází počátkem

18. $\displaystyle\int\limits_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \varphi(x)\,\mathrm{d}x + \psi(y)\,\mathrm{d}y$ $\quad \varphi\,,\ \psi$ jsou spojité

19. $\displaystyle\int\limits_{(-2,-1)}^{(3,0)} (x^4 + 4xy^3)\,\mathrm{d}x + (6x^2y^2 - 5y^4)\,\mathrm{d}y$

20. $\displaystyle\int\limits_{(0,-1)}^{(1,0)} \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{(x-y)^2}$ křivka neprotíná přímku $x = y$

21. $\displaystyle\int\limits_{(1,\pi)}^{(2,\pi)} \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x + \left(\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}y$

křivka neprotíná osu Oy

22. $\displaystyle\int\limits_{(0,0)}^{(a,b)} \mathrm{e}^x(\cos y\,\mathrm{d}x - \sin y\,\mathrm{d}y)$

Řešení: V těchto příkladech musíme nejprve ověřit, že v oblastech Ω platí rovnost $\dfrac{\partial f_x}{\partial y} = \dfrac{\partial f_y}{\partial x}$, tj. že daný integrál nezávisí na křivce, ale pouze na počátečním a koncovém bodě křivky, která leží v oblasti Ω. Pak můžeme integrovat po libovolné křivce s daným počátečním a koncovým bodem, která leží v oblasti Ω.

11. V tomto případě je $f_x = y$ a $f_y = x$. Tedy v celém $\mathbb{R}^2$ platí rovnost $\dfrac{\partial f_x}{\partial y} = 1 = \dfrac{\partial f_y}{\partial x}$. Za křivku $\mathcal{C}$ zvolíme přímku z bodu $[-1;2]$ do bodu $[2;3]$, jejíž parametrické rovnice jsou $x = -1+3t$, $y = 2+t$, $0 \le t \le 1$. Tedy

$$\int\limits_{(-1,2)}^{(2,3)} x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \Big(-1+3t+3(2+t)\Big)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \big(5+6t\big)\,\mathrm{d}t = 8\,.$$

12. V tomto případě je $f_x = x$ a $f_y = y$. Tedy v celém $\mathbb{R}^2$ platí rovnost $\dfrac{\partial f_x}{\partial y} = 0 = \dfrac{\partial f_y}{\partial x}$. Za křivku $\mathcal{C}$ zvolíme přímku z bodu $[0;1]$ do bodu $[3;-4]$, jejíž parametrické rovnice jsou $x = -3t$, $y = 1-5t$, $0 \le t \le 1$. Tedy

$$\int\limits_{(0,1)}^{(3,-4)} x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \Big(9t - 5(1-5t)\Big)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \big(-5+34t\big)\,\mathrm{d}t = 12\,.$$

13. V tomto případě je $f_x = x+y$ a $f_y = x-y$. Tedy v celém $\mathbb{R}^2$ platí rovnost $\dfrac{\partial f_x}{\partial y} = 1 = \dfrac{\partial f_y}{\partial x}$. Za křivku $\mathcal{C}$ zvolíme přímku z bodu $[0;1]$ do bodu $[2;3]$, jejíž parametrické rovnice jsou $x = 2t$, $y = 1+2t$, $0 \le t \le 1$. Tedy

$$\int\limits_{(0,1)}^{(2,3)} (x+y)\,\mathrm{d}x + (x-y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \Big(2(1+4t) - 2\Big)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 8t\,\mathrm{d}t = 4\,.$$

14. V tomto případě je $f_x = x - y$ a $f_y = -x + y$. Tedy v celém $\mathbb{R}^2$ platí rovnost $\dfrac{\partial f_x}{\partial y} = -1 = \dfrac{\partial f_y}{\partial x}$. Za křivku $\mathcal{C}$ zvolíme přímku z bodu $[1;-1]$ do bodu $[1;1]$, jejíž parametrické rovnice jsou $x = 1$, $y = -1 + 2t$, $0 \le t \le 1$. Tedy

$$\int\limits_{(1,-1)}^{(1,1)} (x - y)(\,\mathrm{d}x - \,\mathrm{d}y) = \int_0^1 (2 - 2t)(-2)\,\mathrm{d}t = -2\,.$$

15. V tomto případě je $f_x = f(x + y)$ a $f_y = f(x + y)$. Tedy v celém $\mathbb{R}^2$ platí rovnost $\dfrac{\partial f_x}{\partial y} = f'(x + y) = \dfrac{\partial f_y}{\partial x}$. Za křivku $\mathcal{C}$ zvolíme přímku z bodu $[0;0]$ do bodu $[a;b]$, jejíž parametrické rovnice jsou $x = at$, $y = bt$, $0 \le t \le 1$. Tedy

$$\int\limits_{(0,0)}^{(a,b)} f(x + y) \cdot (\,\mathrm{d}x + \,\mathrm{d}y) = \int_0^1 (a + b) f\big((a + b)t\big)\,\mathrm{d}t = \int_0^{a+b} f(u)\,\mathrm{d}u\,.$$

16. V tomto případě je $f_x = \dfrac{y}{x^2}$ a $f_y = -\dfrac{1}{x}$. Rovnost $\dfrac{\partial f_x}{\partial y} = \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{\partial f_y}{\partial x}$ platí v oblastech $\Omega_+ = \big\{(x, y)\,;\; x > 0\big\}$ a $\Omega_- = \big\{(x, y)\,;\; x < 0\big\}$. Protože úsečka, která spojuje body $[2;1]$ a $[1;2]$ leží celá v Ω_+ a její parametrické rovnice jsou $x = 2 - t$, $y = 1 + t$, $0 \le t \le 1$, je

$$\int\limits_{(2,1)}^{1,2)} \frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{x^2} = \int_0^1 \frac{-3\,\mathrm{d}t}{(2 - t)^2} = -\frac{3}{2}\,.$$

17. V tomto případě je $f_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ a $f_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Protože v oblasti Ω, která neobsahuje počátek, tj. bod $[0;0]$, je $\dfrac{\partial f_x}{\partial y} = \dfrac{-xy}{\big(x^2 + y^2\big)^{3/2}} = \dfrac{\partial f_y}{\partial x}$, nezávisí integrál na křivce, která leží v Ω. Ale pokud počátek leží v této oblasti, nelze už tvrdit, že integrál na křivce nezávisí (viz příklad **7**). Ale když zvolíme křivku $\mathcal{C}$ s parametrickými rovnicemi $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, kde $x(a) = 1$, $y(a) = 0$, $x(b) = 6$ a $y(b) = 8$, je

$$\int\limits_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \int_a^b \frac{x'(t) + y'(t)}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \Big[\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}\Big]_a^b = \sqrt{x^2(b) + y^2(b)} - \sqrt{x^2(a) + y^2(a)} = 9\,.$$

Právě funkce $U(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ je v oblasti $\Omega=\mathbb{R}^2\setminus\{[0;0]\}$ potenciál vektorového pole $\boldsymbol{f}(x,y)=\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.

18. V tomto případě je $f_x=\varphi(x)$ a $f_y=\psi(y)$. Protože $\dfrac{\partial f_x}{\partial y}=\dfrac{\partial f_y}{\partial x}=0$, nezávisí tento křivkový integrál prvního druhu na křivce. Za křivku $\mathcal{C}$ zvolíme lomenou čáru, která se skládá ze dvou úseček $\mathcal{C}_1$ a $\mathcal{C}_2$ s parametrizací:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_1:\ & x=x\,,\ y=y_1\,; \quad x_1\le x\le x_2\\ \mathcal{C}_2:\ & x=x_2\,,\ y=y\,; \quad y_1\le y\le y_2\end{aligned}$$

Když vypočítáme daný integrál po této křivce, dostaneme

$$\int\limits_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}\varphi(x)\,\mathrm{d}x+\psi(y)\,\mathrm{d}y=\int_{x_1}^{x_2}\varphi(x)\,\mathrm{d}x+\int_{y_1}^{y_2}\psi(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

19. Vektorové pole $\boldsymbol{f}(x,y)$ má složky $f_x=x^4+4xy^3$, $f_y=6x^2y^2-5y^4$. Protože $\dfrac{\partial f_x}{\partial y}=12xy^2=\dfrac{\partial f_y}{\partial x}$ v celém $\mathbb{R}^2$, lze integrovat přes libovolnou křivku $\mathcal{C}$, jejíž počáteční bod je $[-2;-1]$ a koncový bod $[3;0]$. V tomto případě je výhodné integrovat přes lomenou čáru složenou ze dvou úseček $\mathcal{C}_1$ a $\mathcal{C}_2$ s parametrickými rovnicemi:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_1:\ & x=t\,,\ y=-1\,; \quad -2\le t\le 3\\ \mathcal{C}_2:\ & x=3\,,\ y=t\,; \quad -1\le t\le 0\end{aligned}$$

Při takové volbě křivky dostaneme

$$\int\limits_{(-2,-1)}^{(3,0)}\left(x^4+4xy^3\right)\mathrm{d}x+\left(6x^2y^2-5y^4\right)\mathrm{d}y=\int_{-2}^{3}\left(t^4-4t\right)\mathrm{d}t+\int_{-1}^{0}\left(54t^2-5t^4\right)\mathrm{d}t=62\,.$$

20. Protože pro $f_x=\dfrac{-y}{(x-y)^2}$ a $f_y=\dfrac{x}{(x-y)^2}$ platí na množinách $x\ne y$ vztah $\dfrac{\partial f_x}{\partial y}=\dfrac{-x-y}{(x-y)^3}=\dfrac{\partial f_y}{\partial x}$ a body $[0;-1]$ a $[1;0]$ leží oba v oblasti, kde $x-y>0$, lze integrovat po úsečce $x=t$, $y=-1+t$, kde $t\in\langle 0,1\rangle$, která neprotíná přímku $x-y=0$. Integrace po této úsečce dává

$$\int\limits_{(0,-1)}^{(1,0)}\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{(x-y)^2}=\int_0^1\mathrm{d}t=1\,.$$

21. V tomto případě je $f_x = 1 - \dfrac{y^2}{x^2} \cos \dfrac{y}{x}$ a $f_y = \sin \dfrac{y}{x} + \dfrac{y}{x} \cos \dfrac{y}{x}$. Na množině $x \neq 0$ platí rovnost $\dfrac{\partial f_x}{\partial y} = -\dfrac{2y}{x^2} \cos \dfrac{y}{x} + \dfrac{y^2}{x^3} \sin \dfrac{y}{x} = \dfrac{\partial f_y}{\partial x}$. Proto integrál nezávisí v oblasti $x > 0$ na křivce, ale pouze na jejím počátečním a koncovém bodě. Za křivku je v tomto případě výhodné zvolit úsečku spojující oba body s parametrizací $x = \dfrac{1}{t}$, $y = \pi$, kde $\dfrac{1}{2} \leq t \leq 1$. Protože $\mathrm{d}x = -\dfrac{\mathrm{d}t}{t^2}$, $\mathrm{d}y = 0$ a parametrizace je vybrána opačně než orientace zadaná, je

$$\int\limits_{(1,\pi)}^{(2,\pi)} \left(1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x}\right) \mathrm{d}x + \left(\sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x}\right) \mathrm{d}y = -\int_{1/2}^{2} \frac{1 - \pi^2 t^2 \cos \pi t}{-t^2} \,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_{1/2}^{1} \left(\frac{1}{t^2} - \pi^2 \cos \pi t\right) \mathrm{d}t = 1 + \pi\,.$$

22. Protože pro složky vektorového pole $\boldsymbol{f} = \left(\mathrm{e}^x \cos y, -\mathrm{e}^x \sin y\right)$ platí na celém $\mathbb{R}^2$ vztah $\dfrac{\partial f_x}{\partial y} = -\mathrm{e}^x \sin y = \dfrac{\partial f_y}{\partial x}$, lze integrovat po libovolné křivce s počátečním bodem $[0;0]$ a koncovým bodem $[a;b]$. Jestliže vybereme úsečku $x = at$, $y = bt$, kde $t \in \langle 0,1 \rangle$, dostaneme

$$\int\limits_{(0,0)}^{(a,b)} \mathrm{e}^x \left(\cos y \,\mathrm{d}x - \sin y \,\mathrm{d}y\right) = \int_0^1 \mathrm{e}^{at}\left(a \cos bt - b \sin bt\right) \mathrm{d}t = \Big[\mathrm{e}^{at} \cos bt\Big]_0^1 =$$

$$= \mathrm{e}^a \cos b - 1\,.$$

---

23. Dokažte, že je-li $f(u)$ spojitá funkce a $\mathcal{C}$ po částech hladká uzavřená křivka, pak

$$\oint_{\mathcal{C}} f(x^2 + y^2)(x \,\mathrm{d}x + y \,\mathrm{d}y) = 0\,.$$

Řešení: V tomto případě je $f_x = xf\left(x^2 + y^2\right)$ a $f_y = yf\left(x^2 + y^2\right)$. Kdyby byla funkce $f(u)$ diferencovatelná, platilo by $\dfrac{\partial f_x}{\partial y} = 2xyf'(u) = \dfrac{\partial f_y}{\partial x}$. Proto by křivkový integrál druhého druhu nezávisel na křivce, a tedy by byl po každé uzavřené křivce roven nule.

Pokud předpokládáme pouze spojitost funkce $f(u)$, lze zvolit parametrizaci jednotlivých oblouků $\mathcal{O}$ ve tvaru $x = r(t) \cos \varphi(t)$, $y = r(t) \sin \varphi(t)$, $t \in \langle a,b \rangle$, kde $r(t) > 0$ a $\varphi(t)$ jsou diferencovatelné funkce. Pak je $\mathrm{d}x = \left(r' \cos \varphi - r\varphi' \sin \varphi\right) \mathrm{d}t$ a $\mathrm{d}y = \left(r' \sin \varphi + r\varphi' \cos \varphi\right) \mathrm{d}t$. Protože $x \,\mathrm{d}x + y \,\mathrm{d}y = rr' \,\mathrm{d}t$, je integrál

$$\int_{\mathcal{O}} f\left(x^2 + y^2\right) \cdot \left(x \,\mathrm{d}x + y \,\mathrm{d}y\right) = \int_a^b rr' f\left(r^2\right) \mathrm{d}t = F(B) - F(A)\,,$$

kde $F(x) = \displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$ a $A = r^2(a)$ a $B = r^2(b)$. Jestliže sečteme tyto integrály přes všechny oblouky, z nichž se skládá křivka $\mathcal{C}$, dostaneme dokazovaný vztah z předpokladu, že $\mathcal{C}$ je uzavřená křivka.

V následujících příkladech najděte funkci z, je-li:

24. $\mathrm{d}z = (x^2 + 2xy - y^2)\,\mathrm{d}x + (x^2 - 2xy - y^2)\,\mathrm{d}y$

25. $\mathrm{d}z = \dfrac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{3x^2 - 2xy + 3y^2}$

26. $\mathrm{d}z = \dfrac{(x^2 + 2xy + 5y^2)\,\mathrm{d}x + (x^2 - 2xy + y^2)\,\mathrm{d}y}{(x+y)^3}$

27. $\mathrm{d}z = \mathrm{e}^x\left[\mathrm{e}^y(x - y + 2) + y\right]\,\mathrm{d}x + \mathrm{e}^x\left[\mathrm{e}^y(x - y) + 1\right]\,\mathrm{d}y$

28. $\mathrm{d}z = \dfrac{\partial^{n+m+1}u}{\partial x^{n+1}\partial y^m}\,\mathrm{d}x + \dfrac{\partial^{n+m+1}u}{\partial x^n \partial y^{m+1}}\,\mathrm{d}y$

29. $\mathrm{d}z = \dfrac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n+2}\partial y^{m-1}}\left(\ln\dfrac{1}{r}\right)\mathrm{d}x - \dfrac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n-1}\partial y^{m+2}}\left(\ln\dfrac{1}{r}\right)\mathrm{d}y$

$\qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$

Řešení: Protože pro funkci $z = z(x,y)$ je $\mathrm{d}z = \dfrac{\partial z}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \dfrac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}y$, máme v těchto příkladech najít funkci $z = z(x,y)$ ze znalosti jejích derivací $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ a $\dfrac{\partial z}{\partial y}$. Nejprve bychom měli tedy prověřit, zda řešení vůbec může existovat, tj. zda jsou druhé smíšené parciální derivace záměnné. Je-li tato podmínka splněna, lze funkci $z = z(x,y)$ najít integrací uvedených rovnic nebo pomocí křivkového integrálu druhého druhu po křivce s koncovým bodem $[x;y]$ a libovolným počátečním bodem $\big[x_0;y_0\big]$.

24. V tomto příkladě je $f_x = x^2 + 2xy - y^2$ a $f_y = x^2 - 2xy - y^2$. Protože $\dfrac{\partial f_x}{\partial y} = \dfrac{\partial f_y}{\partial x} = 2x - 2y$, je splněna podmínka pro existenci funkce $z = z(x,y)$.
První možnost, jak najít funkci $z = z(x,y)$, je řešit soustavu rovnic

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_x = x^2 + 2xy - y^2$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = f_y = x^2 - 2xy - y^2$$

Z první rovnice plyne, že

$$z(x,y) = \int f_x(x,y)\,\mathrm{d}x = \int \left(x^2 + 2xy - y^2\right)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + x^2y - xy^2 + \varphi(y)\,,$$

kde $\varphi(y)$ je libovolná diferencovatelná funkce jedné proměnné. Dosazením do rovnice $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ dává

$$\varphi'(y) = -y^2 \Longrightarrow \varphi(y) = -\frac{y^3}{3} + C\,,$$

kde C je libovolná reálná konstanta. Tedy

$$z = z(x,y) = \frac{x^3}{3} + x^2 y - xy^2 - \frac{y^3}{3} + C\,.$$

Jiná možnost, jak najít funkci $z = z(x,y)$ je využít toho, že křivkový integrál druhého druhu $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \big(x^2 + 2xy - y^2\big)\,\mathrm{d}x + \big(x^2 - 2xy - y^2\big)\,\mathrm{d}x$ nezávisí na křivce $\mathcal{C}$, ale pouze na počátečním a koncovém bodě křivky $\mathcal{C}$. Jestliže zvolíme za koncový bod křivky $\mathcal{C}$ bod $[x;y]$ a za počáteční bod $\big[x_0;y_0\big]$, lze ukázat, že funkce

$$z = z(x,y) = \int_{\mathcal{C}} \big(x^2 + 2xy - y^2\big)\,\mathrm{d}x + \big(x^2 - 2xy - y^2\big)\,\mathrm{d}y$$

má požadované vlastnosti. Za křivku $\mathcal{C}$ zvolíme lomenou čáru složenou ze dvou úseček:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 :\ & x = t\,,\ y = y_0\,, \quad x_0 \le t \le x \\ \mathcal{C}_2 :\ & x = x\,,\ y = t\,, \quad\ y_0 \le t \le y \end{aligned}$$

Pak je

$$\begin{aligned} z(x,y) &= \int_{x_0}^{x} \big(t^2 + 2ty_0 - y_0^2\big)\,\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} \big(x^2 - 2xt - t^2\big)\,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{x^3}{3} + x^2 y - xy^2 - \frac{y^3}{3} - \frac{x_0^3}{3} + x_0^2 y_0 - x_0 y_0^2 - \frac{y_0^3}{3}\,. \end{aligned}$$

25. Snadno lze ukázat, že funkce $f_x = \dfrac{y}{3x^2 - 2xy + 3y^2}$ a $f_y = \dfrac{-x}{3x^2 - 2xy + 3y^2}$ splňují podmínku $\dfrac{\partial f_x}{\partial y} = \dfrac{\partial f_x}{\partial y}$. Proto existuje funkce $z = z(x,y)$, která je řešením soustavy rovnic

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_x = \frac{y}{3x^2 - 2xy + 3y^2}\,, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f_y = \frac{-x}{3x^2 - 2xy + 3y^2}\,.$$

Integrace první z těchto rovnic dává

$$z = \int \frac{y\,\mathrm{d}x}{3x^2 - 2xy + 3y^2} = \frac{y}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{\big(x - y/3\big)^2 + 8y^2/9} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ \mathrm{arctg}\,\frac{3x - y}{2\sqrt{2}\,y} + \varphi(y)\,.$$

Jestliže toto vyjádření $z = z(x, y)$ dosadíme do druhé rovnice, dostaneme

$$\varphi'(y) = 0 \Longrightarrow \varphi(y) = C \Longrightarrow z = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{3x - y}{2\sqrt{2}\, y} + C\,,$$

kde $C \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta.

26. Snadno zjistíme, že funkce $f_x = \dfrac{x^2 + 2xy + 5y^2}{(x+y)^3}$ a $f_y = \dfrac{x^2 - 2xy + y^2}{(x+y)^3}$ splňují podmínku $\dfrac{\partial f_x}{\partial y} = \dfrac{\partial f_y}{\partial x}$, která je nutnou podmínkou pro existenci funkce $z = z(x, y)$. Tu najdeme jako řešení soustavy rovnic:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_x = \frac{x^2 + 2xy + 5y^2}{(x+y)^3}\,, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f_y = \frac{x^2 - 2xy + y^2}{(x+y)^3}\,.$$

Z první rovnice plyne, že obecný tvar funkce $z = z(x, y)$ je

$$\begin{aligned} z &= \int \frac{x^2 + 2xy + 5y^2}{(x+y)^3}\, \mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x+y} + \frac{4y^2}{(x+y)^3} \right) \mathrm{d}x = \\ &= \ln|x+y| - \frac{2y^2}{(x+y)^2} + \varphi(y)\,, \end{aligned}$$

kde $\varphi(y)$ je diferencovatelná funkce proměnné y. Po dosazení do druhé rovnice dostaneme

$$\varphi'(y) = 0 \Longrightarrow \varphi(y) = C \Longrightarrow z = z(x, y) = \ln|x+y| - \frac{2y^2}{(x+y)^2} + C\,,$$

kde $C \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta.

27. Derivováním snadno ukážeme, že funkce $f_x = \mathrm{e}^{x+y}(x - y + 2) + \mathrm{e}^x y$ a $f_y = \mathrm{e}^{x+y}(x - y) + \mathrm{e}^x$ splňují podmínku $\dfrac{\partial f_x}{\partial y} = \dfrac{\partial f_y}{\partial x}$, která je nutná pro existenci funkce $z = z(x, y)$ takové, že

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_x = \mathrm{e}^{x+y}(x - y + 2) + \mathrm{e}^x y\,, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f_y = \mathrm{e}^{x+y}(x - y) + \mathrm{e}^x\,.$$

Z první rovnice plyne, že

$$z(x, y) = \int \Big(\mathrm{e}^{x+y}(x - y + 2) + \mathrm{e}^x y \Big)\, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x+y}(x - y + 1) + \mathrm{e}^x y + \varphi(y)\,,$$

kde $\varphi(y)$ je libovolná diferencovatelná funkce proměnné y. Tu najdeme dosazením do druhé z uvedených rovnic. Z ní plyne

$$\varphi'(y) = 0 \Longrightarrow \varphi(y) = C \Longrightarrow z = z(x, y) = \mathrm{e}^{x+y}(x - y + 1) + \mathrm{e}^x y + C\,,$$

kde $C \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta.

28. Je ihned vidět, že funkce $f_x = \dfrac{\partial^{n+m+1} u}{\partial x^{n+1} \partial y^m}$ a $f_y = \dfrac{\partial^{n+m+1} u}{\partial x^n \partial y^{m+1}}$ splňují podmínku $\dfrac{\partial f_x}{\partial y} = \dfrac{\partial f_y}{\partial x} = \dfrac{\partial^{n+m+2} u}{\partial x^{n+1} \partial y^{m+1}}$, která je nutná pro existenci hledané funkce $z = z(x, y)$. Integrací rovnosti $\dfrac{\partial z}{\partial x} = f_x = \dfrac{\partial^{n+m+1} u}{\partial x^{n+1} \partial y^m}$ podle proměnné x zjistíme, že funkce $z(x, y)$ má tvar $z(x, y) = \dfrac{\partial^{n+m} u}{\partial x^n \partial y^m} + \varphi(y)$, kde $\varphi(y)$ je diferencovatelná funkce proměnné y. Po dosazení do rovnice $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial^{n+m+1} u}{\partial x^n \partial y^{m+1}}$ dostaneme $\varphi'(y) = 0$, neboli $\varphi(y) = C$, kde C je libovolná reálná konstanta. Tedy $z = z(x, y) = \dfrac{\partial^{n+m} u}{\partial x^n \partial y^m} + C$.

29. V tomto případě je $f_x = \dfrac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n+2} \partial y^{m-1}} \left(\ln \dfrac{1}{r} \right)$ a $f_y = \dfrac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n-1} \partial y^{m+2}} \left(\ln \dfrac{1}{r} \right)$. Protože platí vztah

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\ln \frac{1}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\ln \frac{1}{r} \right) = \frac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} + \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = 0\,, \tag{1}$$

je

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial x} = \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\ln \frac{1}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \right) = 0\,.$$

To ale znamená, že existuje funkce $z = z(x, y)$ taková, že

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_x = \frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n+2} \partial y^{m-1}} \left(\ln \frac{1}{r} \right), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f_y = \frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n-1} \partial y^{m+2}} \left(\ln \frac{1}{r} \right).$$

Z první rovnice plyne, že $z = z(x, y) = \dfrac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n+1} \partial y^{m-1}} \left(\ln \dfrac{1}{r} \right) + \varphi(y)$, kde $\varphi(y)$ je libovolná diferencovatelná funkce proměnné y. Když dosadíme do druhé rovnice a použijeme vztah (1), dostaneme $\varphi'(y) = 0$. Tedy $\varphi(y) = C$, kde C je reálná konstanta. Jestliže si uvědomíme, že platí vztah

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\ln \frac{1}{r} \right) = -\frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{y} \right),$$

lze psát

$$z = z(x, y) = \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n+1} \partial y^{m-1}} \left(\ln \frac{1}{r} \right) + C = \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m} \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{y} \right) + C\,.$$

---

30. Vypočtěte $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} (y^2 - z^2)\, \mathrm{d}x + 2yz\, \mathrm{d}y - x^2\, \mathrm{d}z$, kde $\mathcal{C}$ je křivka $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, $0 \le t \le 1$, orientovaná ve směru rostoucího parametru.

Řešení: Protože $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, $\mathrm{d}y = 2t\,\mathrm{d}t$ a $\mathrm{d}z = 3t^2\,\mathrm{d}t$ je

$$\int_{\mathcal{C}} (y^2 - z^2)\,\mathrm{d}x + 2yz\,\mathrm{d}y - x^2\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \Big(t^4 - t^6 + (2t^5)2t - t^2(3t^2)\Big)\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^1 (3t^6 - 2t^4)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{35}\,.$$

---

31. Vypočtěte $\int_{\mathcal{C}} y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z$, kde $\mathcal{C}$ je závit šroubovice $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $0 \le t \le 2\pi$, orientovaný ve směru rostoucího parametru.

Řešení: Protože $\mathrm{d}x = -a\sin t\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}y = a\cos t\,\mathrm{d}t$ a $\mathrm{d}z = b\,\mathrm{d}t$, je

$$\int_{\mathcal{C}} y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \Big(-a^2\sin^2 t + abt\cos t + ab\cos t\Big)\,\mathrm{d}t = -\pi a^2\,.$$

---

32. Vypočtěte $\int_{\mathcal{C}} (y-z)\,\mathrm{d}x + (z-x)\,\mathrm{d}y + (x-y)\,\mathrm{d}z$, kde $\mathcal{C}$ je kružnice $x^2+y^2+z^2 = a^2$, $y\cos\alpha = x\sin\alpha$, $0 < \alpha < \pi$, která se probíhá proti směru hodinových ručiček, jestliže se na ni díváme se strany kladných x.

Řešení: Na rozdíl od předcházejících příkladů musíme nejprve najít parametrické rovnice křivky. Jestliže dosadíme vztah $x = y\operatorname{cotg}\alpha$, do rovnice kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, dostaneme $\dfrac{y^2}{\sin^2\alpha} + z^2 = a^2$. To je rovnice průmětu dané křivky na rovinu Oyz. Protože podle zadání úlohy musíme obíhat tuto křivku proti směru hodinových ručiček, zvolíme parametrizaci tohoto průmětu ve tvaru $y = a\sin\alpha\cos t$, $z = a\sin t$, kde $0 < t < 2\pi$. Pak je $x = a\cos\alpha\cos t$. Protože $\mathrm{d}x = -a\cos\alpha\sin t$, $\mathrm{d}y = -a\sin\alpha\sin t$ a $\mathrm{d}z = a\cos t$, je

$$\int_{\mathcal{C}} (y-z)\,\mathrm{d}x + (z-x)\,\mathrm{d}y + (x-y)\,\mathrm{d}z = a^2\int_0^{2\pi} \Big(-\cos\alpha\sin t(\sin\alpha\cos t - \sin t) +$$
$$+ (-\sin\alpha\sin t)(\sin t - \cos\alpha\cos t) + \cos t(\cos\alpha\cos t - \sin\alpha\cos t)\Big)\,\mathrm{d}t =$$
$$= 2\pi a^2(\cos\alpha - \sin\alpha)\,.$$

---

33. Vypočtěte $\int_{\mathcal{C}} y^2\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}y + x^2\,\mathrm{d}z$, kde $\mathcal{C}$ je část křivky $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2+y^2 = ax$, $z \ge 0$, $a > 0$, která se probíhá proti směru hodinových ručiček, jestliže se na ni díváme z kladné části $(x > a)$ osy Ox.

Řešení: Nejprve nalezneme parametrické vyjádření křivky $\mathcal{C}$. Protože křivka musí ležet na kulové ploše $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, položíme $x = a\cos\theta\cos\varphi$, $y = a\cos\theta\sin\varphi$ a $z = a\sin\theta$, kde $-\pi < \varphi < \pi$ a protože $z > 0$ je $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$. Z rovnice $x^2 + y^2 = ax$

dostaneme vztah $\cos\theta = \cos\varphi$. Protože $\cos\theta > 0$ je $-\dfrac{\pi}{2} < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$. V závislosti na to je-li $\varphi \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, resp. $\varphi \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$, je $\sin\theta = \sin\varphi$, resp. $\sin\theta = -\sin\varphi$. Tedy při takové parametrizaci je křivka $\mathcal{C}$ popsána jako součet dvou hladkých křivek

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_1:\ & x = a\cos^2\varphi\,,\ y = a\cos\varphi\sin\varphi\,,\ z = a\sin\varphi\,; \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\,;\\
& \mathrm{d}x = -a\sin 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,,\ \mathrm{d}y = a\cos 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,,\ \mathrm{d}z = a\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\\
\mathcal{C}_2:\ & x = a\cos^2\varphi\,,\ y = a\cos\varphi\sin\varphi\,,\ z = -a\sin\varphi\,; \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < 0\,;\\
& \mathrm{d}x = -a\sin 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,,\ \mathrm{d}y = a\cos 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,,\ \mathrm{d}z = -a\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi
\end{aligned}$$

Protože tečna k průmětu na rovinu Oyz odpovídající této parametrizaci v bodě $y = 0$, $z = a$, který odpovídá hodnotě parametru $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ je $(-1, 0)$, je tato parametrizace ve shodě s požadovanou parametrizací. Tedy

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} y^2\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}y + x^2\,\mathrm{d}z &= a^3\int_0^{\pi/2}\Bigl(-\cos^2\varphi\sin^2\varphi\sin 2\varphi + \sin^2\varphi\cos 2\varphi + \cos^5\varphi\Bigr)\,\mathrm{d}\varphi +\\
&\quad + a^3\int_{-\pi/2}^{0}\Bigl(-\cos^2\varphi\sin^2\varphi\sin 2\varphi + \sin^2\varphi\cos 2\varphi - \cos^5\varphi\Bigr)\,\mathrm{d}\varphi =\\
&= 2a^3\int_0^{\pi/2}\sin^2\varphi\cos 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = -\frac{\pi}{4}\,a^3\,,
\end{aligned}$$

kde jsme při výpočtu integrálu použili toho, že funkce $\cos\varphi$ je sudá a funkce $\sin\varphi$ lichá.

---

34. Vypočtěte $\displaystyle\int_{\mathcal{C}}(y^2 - z^2)\,\mathrm{d}x + (z^2 - x^2)\,\mathrm{d}y + (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}z$, kde $\mathcal{C}$ je hranice části kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, která se probíhá tak, že vnější strana plochy je vlevo.

Řešení: Daná křivka se skládá ze tří hladkých křivek:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_x:\ & x = 0\,,\ y = \cos t\,,\ z = \sin t\,; && 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\,;\\
& \mathrm{d}x = 0\,,\ \mathrm{d}y = -\sin t\,\mathrm{d}t\,,\ \mathrm{d}z = \cos t\,\mathrm{d}t\\
\mathcal{C}_y:\ & y = 0\,,\ z = \cos t\,,\ x = \sin t\,; && 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\,;\\
& \mathrm{d}y = 0\,,\ \mathrm{d}z = -\sin t\,\mathrm{d}t\,,\ \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t\\
\mathcal{C}_z:\ & z = 0\,,\ x = \cos t\,,\ y = \sin t\,; && 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\,;\\
& \mathrm{d}z = 0\,,\ \mathrm{d}x = -\sin t\,\mathrm{d}t\,,\ \mathrm{d}y = \cos t\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Proto je

$$\int_{\mathcal{C}}(y^2 - z^2)\,\mathrm{d}x + \bigl(z^2 - x^2\bigr)\,\mathrm{d}y + \bigl(x^2 - y^2\bigr)\,\mathrm{d}z = -3\int_0^{\pi/2}\bigl(\cos^3 t + \sin^3 t\bigr)\,\mathrm{d}t = -4\,.$$

Najděte následující křivkové integrály úplných diferenciálů

35. $$\int\limits_{(1,1,1)}^{(2,3-4)} x\,\mathrm{d}x + y^2\,\mathrm{d}y - z^3\,\mathrm{d}z$$

36. $$\int\limits_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z$$

37. $$\int\limits_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2 = a^2\,,\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 = b^2\ \ a>0\,,\ b>0$$

38. $$\int\limits_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} \varphi(x)\,\mathrm{d}x + \psi(y)\,\mathrm{d}y + \chi(z)\,\mathrm{d}z \quad \varphi\,,\ \psi\,,\ \chi\ \text{ spojité}$$

39. $$\int\limits_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} f(x+y+z)(\,\mathrm{d}x + \,\mathrm{d}y + \,\mathrm{d}z) \quad f\ \text{ spojitá}$$

40. $$\int\limits_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)(x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z) \quad f\ \text{ spojitá}$$

Řešení: V uvedených příkladech se musíme nejprve přesvědčit, že dané integrály nezávisí na křivce $\mathcal{C}$, ale pouze na jejím počátečním a konečném bodě, tj. musíme ověřit vztahy

$$\frac{\partial f_y}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial y} = 0\,, \quad \frac{\partial f_z}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial z} = 0\,, \quad \frac{\partial f_x}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial x} = 0\,. \tag{2}$$

Jsou-li tyto relace splněny najdeme potenciál nebo budeme integrovat po vhodně zvolené křivce s daným počátečním a konečným bodem.

35. Snadno zjistíme, že funkce $f_x = x$, $f_y = y^2$ a $f_z = -z^3$ splňují vztahy (2). Tedy křivkový integrál druhého druhu nezávisí na křivce. Pro výpočet zvolíme lomenou čáru, která se skládá ze tří úseček:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_1 &: \ x = t\,,\ y = 1\,,\ z = 1\,; && t \in \langle 1, 2\rangle \\
\mathcal{C}_2 &: \ x = 2\,,\ y = t\,,\ z = 1\,; && t \in \langle 1, 3\rangle \\
\mathcal{C}_3 &: \ x = 1\,,\ y = 3\,,\ z = -t\,; && t \in \langle -1, 4\rangle
\end{aligned}$$

Pak je

$$\int\limits_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)} x\,\mathrm{d}x + y^2\,\mathrm{d}y - z^3\,\mathrm{d}z = \int_1^2 t\,\mathrm{d}t + \int_1^3 t^2\,\mathrm{d}t - \int_{-1}^4 (-t)^3(-\,\mathrm{d}t) = -53 - \frac{7}{12}\,.$$

36. Snadno se přesvědčíme, že funkce $f_x = yz$, $f_y = xz$ a $f_z = xy$ vyhovují rovnici (2). Existuje tedy funkce $U(x,y,z)$ taková, že $\boldsymbol{f} = \operatorname{grad} U$, tj. funkce, pro kterou platí

$$\frac{\partial U}{\partial x} = f_x = yz\,, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = f_y = xz\,, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = f_z = xy\,.$$

Z první rovnice plyne, že funkce $U(x,y,z) = xyz + \varphi(y,z)$, kde $\varphi(y,z)$ je diferencovatelná funkce proměnných y a z. Když dosadíme tento tvar funkce $U(x,y,z)$ do druhé rovnice, dostaneme $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = 0$, ze které plyne, že funkce $\varphi(y,z)$ nezávisí na proměnné y, tj. že $\varphi(y,z) = \psi(z)$ a $U(x,y,z) = xyz + \psi(z)$. Dosazení do třetí rovnice dává $\psi'(z) = 0$, tj. $\psi(z) = C$, kde C je libovolná reálná konstanta. Tedy $U(x,y,z) = xyz + C$. Hledaný integrál tedy je

$$\int\limits_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z = U(6,1,1) - U(1,2,3) = 0\,.$$

37. V tomto případě je

$$f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,, \quad f_z = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,.$$

Derivováním zjistíme, že rovnice (2) platí v celém $\mathbb{R}^3$ mimo bod $[0;0;0]$. Proto daný integrál závisí pouze na počátečním a koncovém bodě křivky $\mathcal{C}$. Nechť jsou $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, kde $t \in \langle t_1, t_2\rangle$, parametrické rovnice křivky $\mathcal{C}$. Pak je

$$\int\limits_{(x_1,y_1,y_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{x' + y\prime + z'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \left[\sqrt{x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)}\right]_{t_1}^{t_2} = \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2} - \sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2} = b - a\,.$$

38. Protože funkce $f_x = \varphi(x)$, $f_y = \psi(y)$ a $f_z = \chi(z)$ vyhovují rovnicím (2), nezávisí na křivce $\mathcal{C}$. V tomto případě je za křivku vybrat lomenou čáru

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_1 &:\ x = x\,,\ y = y_1\,,\ z = z_1\,; \quad x_1 \le x \le x_2\\
\mathcal{C}_2 &:\ x = x_2\,,\ y = y\,,\ z = z_1\,; \quad y_1 \le y \le y_2\\
\mathcal{C}_3 &:\ x = x_2\,,\ y = y_2\,,\ z = z\,; \quad z_1 \le z \le z_2
\end{aligned}$$

Integrací po této křivce dostaneme

$$\int\limits_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} \varphi(x)\,\mathrm{d}x + \psi(y)\,\mathrm{d}x + \chi(z)\,\mathrm{d}z = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{y_1}^{y_2} \psi(y)\,\mathrm{d}y + \int_{z_1}^{z_2} \chi(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

39. Funkce $f_x = f_y = f_z = f(x+y+z)$ splňují vztah (2). Proto hledaný integrál závisí pouze na počátečním a koncovém bodě křivky $\mathcal{C}$. Nechť jsou $x = x(t)$, $y = y(t)$ a $z = z(t)$, kde $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$, parametrické rovnice křivky $\mathcal{C}$. Hledaný integrál tedy je

$$\int\limits_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} f(x+y+z)\cdot(\,\mathrm{d}x + \,\mathrm{d}y + \,\mathrm{d}z) =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} f\big(x(t)+y(t)+z(t)\big)\cdot\big(x'(t)+y'(t)+z'(t)\big)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{x_1+y_1+z_1}^{x_2+y_2+z_2} f(u)\,\mathrm{d}u\,,$$

kde jsme v posledním integrálu použili substituci $u = x(t) + y(y) + z(t)$.

40. Nyní je $f_x = xf(r)$, $f_y = yf(r)$ a $f_z = zf(r)$, kde $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Je-li funkce $f(r)$ diferencovatelná, platí

$$\frac{\partial f_z}{\partial y} = \frac{\partial f_y}{\partial z} = -\frac{yz}{r}\,f'(r)\,, \quad \frac{\partial f_x}{\partial z} = \frac{\partial f_z}{\partial x} = -\frac{xz}{r}\,f'(r)\,, \quad \frac{\partial f_y}{\partial x} = \frac{\partial f_x}{\partial y} = -\frac{xy}{r}\,f'(r)\,,$$

a tedy daný integrál nezávisí na křivce, po které integrujeme, ale pouze na jejím počátečním a koncovém bodě. Není-li funkce $f(r)$ diferencovatelná, ale pouze spojitá, najdeme daný integrál přímo. Nechť je $x = r(t)\cdot\cos\theta(t)\cdot\cos\varphi(t)$, $y = r(t)\cdot\cos\theta(t)\cdot\sin\varphi(t)$ a $z = r(t)\cdot\sin\theta(t)$, kde $t \in \langle t_1, t_2\rangle$, parametrizace křivky $\mathcal{C}$. Derivováním dostaneme

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x &= \big(r'\cos\theta\cos\varphi - r\theta'\sin\theta\cos\varphi - r\varphi'\cos\theta\sin\varphi\big)\,\mathrm{d}t\\
\mathrm{d}y &= \big(r'\cos\theta\sin\varphi - r\theta'\sin\theta\sin\varphi + r\varphi'\cos\theta\cos\varphi\big)\,\mathrm{d}t\\
\mathrm{d}z &= \big(r'\sin\theta + r\theta'\cos\theta\big)\,\mathrm{d}t\\
x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z &= rr'\,\mathrm{d}t\,.
\end{aligned}$$

Tedy pro takto parametrizovanou křivku $\mathcal{C}$ platí

$$\int_{\mathcal{C}} f\big(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\big)\cdot\big(x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z\big) = \int_{t_1}^{t_2} rr'f(r)\,\mathrm{d}t = \int_{r_1}^{r_2} rf(r)\,\mathrm{d}r\,,$$

kde jsme označili $r_1 = \sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$, $r_2 = \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}$ a použili substituci $r = r(t)$.

Najděte funkci u, jestliže

41. $\mathrm{d}u = (x^2 - 2yz)\,\mathrm{d}x + (y^2 - 2xz)\,\mathrm{d}y + (z^2 - 2xy)\,\mathrm{d}z$

42. $\mathrm{d}u = \left(1 - \dfrac{1}{y} + \dfrac{y}{z}\right)\mathrm{d}x + \left(\dfrac{x}{z} + \dfrac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y - \dfrac{xy}{z^2}\,\mathrm{d}z$

43. $\mathrm{d}u = \dfrac{(x + y - z)\,\mathrm{d}x + (x + y - z)\,\mathrm{d}y + (x + y + z)\,\mathrm{d}z}{x^2 + y^2 + z^2 + 2xy}$

Řešení: V následujících příkladech je zadáno

$$\mathrm{d}u = f_x\,\mathrm{d}x + f_y\,\mathrm{d}y + f_z\,\mathrm{d}z\,.$$

Protože diferenciál funkce $u = u(x, y, z)$ je

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial u}{\partial z}\,\mathrm{d}z\,,$$

je naším úkolem najít funkci $u = u(x, y, z)$, pro kterou platí

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_x\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = f_y\,, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = f_z\,. \tag{3}$$

Ze záměny smíšených parciálních derivací plyne, že nutná podmínka existence řešení této soustavy rovnic jsou vztahy (2) z předchozí série příkladů. Jsou-li tyto vztahy splněny, lze funkci $u = u(x, y, z)$ najít jako řešení výše uvedené soustavy nebo integrací $\mathrm{d}u = f_x\,\mathrm{d}x + f_y\,\mathrm{d}y + f_z\,\mathrm{d}z$ po libovolné křivce s pevným počátečním bodem $\big[x_0; y_0; z_0\big]$ a koncovým bodem $[x; y; z]$.

41. V tomto případě je $f_x = x^2 - 2yz$, $f_y = y^2 - 2xz$ a $f_z = z^2 - 2xy$. Snadno se přesvědčíme, že tyto funkce splňují podmínky (2). Můžeme tedy řešit soustavu rovnic

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_x = x^2 - 2yz$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = f_y = y^2 - 2xz$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} = f_z = z^2 - 2xy$$

Integrujeme-li první rovnici podle proměnné x, zjistíme, že funkce $u(x, y, z)$ má tvar $u = \dfrac{x^3}{3} - 2xyz + \varphi(y, z)$, kde $\varphi(y, z)$ je diferencovatelná funkce pouze dvou proměnných y a z. Jestliže dosadíme toto vyjádření funkce $u(x, y, z)$ do druhé rovnice, dostaneme $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = y^2$, ze které plyne, že $\varphi(y, z) = \dfrac{y^3}{3} + \psi(z)$, kde funkce $\psi(z)$ je diferencovatelná funkce jedné proměnné z. Tedy $u(x,y,z) = \dfrac{x^3+y^3}{3} - 2xyz + \psi(z)$. Toto vyjádření funkce $u(x,y,z)$ dosadíme do třetí rovnice soustavy a dostaneme $\dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}z} = z^2$, ze které plyne, že $\psi(z) = \dfrac{z^3}{3} + C$, kde C je libovolná reálná konstanta. Tedy $u(x,y,z) = \dfrac{x^3+y^3+z^3}{3} - 2xyz$.

42. Funkce $f_x = 1 - \dfrac{1}{y} + \dfrac{y}{z}$, $f_y = \dfrac{x}{z} + \dfrac{x}{y^2}$ a $f_z = -\dfrac{xy}{z^2}$ splňují vztahy (2). Jestliže integrujeme první rovnici v soustavě (3) podle proměnné x, zjistíme, že $u(x,y,z) = x - \dfrac{x}{y} + \dfrac{xy}{z} + \varphi(y,z)$. Když dosadíme toto vyjádření do druhé rovnice v (3), dostaneme $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = 0$, tedy $\varphi(y,z) = \psi(z)$ a $u(x,y,z) = x - \dfrac{x}{y} + \dfrac{xy}{z} + \psi(z)$. Ze třetí rovnice soustavy (3) plyne $\psi'(z) = 0$, tj. $\psi(z) = C$, kde C je libovolná reálná konstanta. Tedy $u(x,y,z) = x - \dfrac{x}{y} + \dfrac{xy}{z} + C$.

43. Derivováním funkcí $f_x = f_y = \dfrac{x+y-z}{x^2+y^2+z^2+2xy}$, $f_z = \dfrac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2+2xy}$ se snadno přesvědčíme, že jsou splněny podmínky (2). Můžeme tedy hledat řešení soustavy (3). Nejprve integrujeme třetí rovnici této soustavy podle proměnné z. Tak dostaneme

$$u(x,y,z) = \int \frac{x+y+z}{(x+y)^2+z^2}\,\mathrm{d}z = \int \frac{z\,\mathrm{d}z}{(x+y)^2+z^2} + \int \frac{(x+y)\,\mathrm{d}z}{(x+y)^2+z^2} =$$
$$= \frac{1}{2}\ln\bigl((x+y)^2+z^2\bigr) + \operatorname{arctg}\frac{z}{x+y} + \varphi(x,y)\,,$$

kde $\varphi(x,y)$ je libovolná diferencovatelná funkce proměnných x a y. Tu najdeme, když dosadíme toto vyjádření funkce $u(x,y,z)$ do prvních dvou rovnic soustavy (3). Ze druhé rovnice plyne $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = 0$, čili $\varphi(x,y) = \psi(x)$. Jestliže dosadíme do první rovnice soustavy (3), dostaneme $\psi'(x) = 0$ neboli $\psi(x) = C$, kde C je libovolná reálná konstanta. Tedy

$$u(x,y,z) = \ln\sqrt{x^2+y^2+z^2+2xy} + \operatorname{arctg}\frac{z}{x+y} + C\,.$$

---

44. Najděte práci, kterou vykoná gravitační síla, jestliže se bod o hmotnosti m přemístí z bodu $[x_1;y_1;z_1]$ do bodu $[x_2;y_2;z_2]$; osa Oz směřuje vertikálně nahoru.

Řešení: Síla, která působí na hmotný bod s hmotností m, Který se nachází v bodě $[x;y;z]$ je $\boldsymbol{F} = (0,0,-mg)$. Tedy práce, kterou vykoná síla při jeho přemístění z bodu $\bigl[x_;y_1;z_1\bigr]$ do bodu $\bigl[x_2;y_2;z_2\bigr]$ po křivce $\mathcal{C}$ je

$$W = \int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = -mg\int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\,.$$

Protože hodnota tohoto integrálu závisí pouze na počátečním a koncovém bodu křivky $\mathcal{C}$, je v našem případě $W = mg\big(z_1 - z_2\big)$.

---

45. Najděte práci elastické síly směřující k počátku souřadnic, jejíž velikost je úměrná vzdálenosti hmotného bodu od počátku souřadnic, jestliže se hmotný bod pohybuje proti směru hodinových ručiček po kladné čtvrtině elipsy $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Řešení: Podle zadaní je síla $\boldsymbol{F}$, která působí na hmotný bod v bodě $[x; y; z]$ rovna $\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{r} = -k(x, y, z)$, kde k je konstanta. Tedy práce W, kterou vykonáme, jestliže přemístíme hmotný bod po křivce $\mathcal{C}$, je dána křivkovým integrálem druhého druhu

$$W = \int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -k \int_{\mathcal{C}} x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z\,.$$

Parametrické rovnice dané křivky jsou $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $z = 0$, kde $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$. Tedy hledaná práce je

$$W = -k \int_0^{\pi/2} \big(-a^2 \cos t \sin t + b^2 \sin t \cos\big)\,\mathrm{d}t = \frac{k}{2}\left(a^2 - b^2\right).$$

---

46. Najděte práci gravitační síly $F = \dfrac{k}{r^2}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, která působí na hmotný bod s hmotností 1, který se přemístí z bodu $[x_1; y_1; z_1]$ do bodu $[x_2; y_2; z_2]$.

Řešení: Síla, která působí na hmotný bod s jednotkovou hmotností v bodě $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ je $\boldsymbol{F} = -k\,\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$. Přemístíme-li bod po křivce $\mathcal{C}$, vykonáme práci

$$W = \int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{f} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -k \int_{\mathcal{C}} \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z}{\big(x^2 + y^2 + z^2\big)^{3/2}}\,.$$

Nechť jsou $x = x(t)$, $y = y(t)$ a $z = z(t)$, $t_1 \le t \le t_2$, parametrické rovnice křivky $\mathcal{C}$. Pak je

$$W = -k \int_{t_1}^{t_2} \frac{xx' + yy' + zz'}{\big(x^2 + y^2 + z^2\big)^{3/2}}\,\mathrm{d}t\,.$$

Jestliže v tomto integrálu použijeme substituci $r = \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}$, dostaneme

$$W = -k \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = k\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right),$$

kde $r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ a $r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$.

---

47. Nechť $v_x = v_x(x, y)$ a $v_y = v_y(x, y)$ jsou složky rychlosti $\boldsymbol{v}(x, y)$ stacionárního toku kapaliny. Určete množství kapaliny ΔM, které vyteče za jednotku času uzavřenou hranicí $\mathcal{C}$ plochy $\mathcal{S}$, tj. rozdíl mezi množstvím vtékající a vytékající kapaliny.

Jakou rovnici splňují funkce v_x a v_y, je-li kapalina nestlačitelná a v oblasti $\mathcal{S}$ nejsou zdroje?

Řešení: Množství kapaliny $\mathrm{d}M$, které protoče infinitezimální částí křivky $\mathrm{d}s$ v bodě $[x;y]$, je $\mathrm{d}M = \left|\boldsymbol{v}\right| \cos\alpha \, \mathrm{d}s$, kde α je úhel, který svírá vektor rychlosti kapaliny $\boldsymbol{v}$ s jednotkovou normálou ke křivce $\mathcal{C}$ v bodě $[x;y]$. Přitom normála musí mířit ven z oblasti $\mathcal{S}$. Jsou-li $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$, parametrické rovnice křivky $\mathcal{C}$, je tečný vektor k této křivce $\boldsymbol{t} = \left(x', y'\right)$. Tedy normálový vektor $\boldsymbol{n} = \left(y', -x'\right)$. (Například z náčrtku se lze přesvědčit, že tento vektor má správný směr, tj. míří ven z oblasti $\mathcal{S}$.) Tedy

$$\boldsymbol{v} \cos\alpha = \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}}{\left|\boldsymbol{n}\right|} = \frac{v_x y' - v_y x'}{\sqrt{\left(x'\right)^2 + \left(y'\right)^2}} \,.$$

Protože $\mathrm{d}s = \sqrt{\left(x'\right)^2 + \left(y'\right)^2}\, \mathrm{d}t$, je $\mathrm{d}M = \left(v_x y' - v_y x'\right) \mathrm{d}t$, a tedy

$$\Delta M = \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}M = \int_{t_1}^{t_2} \left(v_x y' - v_y x'\right) \mathrm{d}t = \oint_{\mathcal{C}} v_x \, \mathrm{d}y - v_y \, \mathrm{d}x \,.$$

Je-li kapalina nestlačitelná a v oblasti $\mathcal{S}$ nejsou zdroje, musí být $\Delta M = 0$ pro každou oblast $\mathcal{S}$, a tedy i každou uzavřenou křivku $\mathcal{C}$. Tedy pro každou uzavřenou křivku musí platit

$$\oint_{\mathcal{C}} v_x \, \mathrm{d}y - v_y \, \mathrm{d}x = 0 \,.$$

Ale to je možné pouze v případě, že je vektorové pole $\left(-v_y, v_x\right)$ konzervativní. Tedy musí platit

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial v_y}{\partial y} \iff \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \,.$$

V takovém případě existuje funkce $\Psi(x,y)$ taková, že $\dfrac{\partial \Psi}{\partial x} = -v_y$ a $\dfrac{\partial \Psi}{\partial y} = x_x$.

Cvičení 21

PLOŠNÝ INTEGRÁL DRUHÉHO DRUHU (V $\mathbb{R}^3$).

Definice: Diferencovatelné plocha $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ se nazývá *orientovaná*, jestliže je na ní dáno spojité vektorové pole jednotkových normál.

Pro omezenou uzavřenou plochu $\mathcal{S}$ s hranicí $\partial\mathcal{S}$ se zavádí pojem souhlasně orientované hranice přibližně takto:
Nechť je $\mathcal{S}$ omezená orientovaná diferencovatelná plocha s normálou $\boldsymbol{n}$ a $\partial\mathcal{S}$ její hranice. Nechť $\boldsymbol{b}$ je tečný vektor k ploše $\mathcal{S}$ v bodě její hranice, který míří dovnitř plochy $\mathcal{S}$. Hranice $\partial\mathcal{S}$ plochy $\mathcal{S}$ se nazývá *souhlasně orientovaná s plochou* $\mathcal{S}$, jestliže je orientovaná tečným vektorem $\boldsymbol{\tau}$ tak, že jednotkové vektory $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{n}$ v tomto pořadí tvoří kladně orientovaný souřadnicový systém.

Plochy $\mathcal{S}_1$ a $\mathcal{S}_2$ se společnou hranicí $\mathcal{C}$ se nazývají *souhlasně orientované*, jestliže hranice $\mathcal{C}$ souhlasná s plochou $\mathcal{S}_1$ je opačná k orientaci této hranice souhlasné s plochou $\mathcal{S}_2$.

Definice: Po částech diferencovatelná plocha $\mathcal{S}$ se nazývá *orientovatelná*, jestliže existuje orientace všech jejích diferencovatelných částí, které jsou navzájem souhlasné.

Definice: Nechť $\mathcal{S}$ je po částech diferencovatelná orientovatelná plocha s orientací zadanou vektorovým polem jednotkových vektorů $\boldsymbol{n}$ a $\boldsymbol{F} = \big(F_x, F_y, F_z\big)$ je vektorové pole na $\mathcal{S}$. Pak integrál

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{S}} (\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}S &= \iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \\ &= \iint_{\mathcal{S}} \big(F_x\,\mathrm{d}y\wedge\,\mathrm{d}z + F_y\,\mathrm{d}z\wedge\,\mathrm{d}x + F_z\,\mathrm{d}x\wedge\,\mathrm{d}y\big) = \\ &= \iint_{\mathcal{S}} \big(F_x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + F_y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + F_z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\big)\end{aligned}$$

nazýváme *plošným integrálem druhého druhu* vektorového pole $\boldsymbol{F}$ přes plochu $\mathcal{S}$.

Poznámka: Plošný integrál druhého druhu závisí na orientaci plochy $\mathcal{S}$. Při změně orientace se změní znaménko integrálu.

Je-li plocha $\mathcal{S}$ dána parametrickými rovnicemi

$$x = x(u,v)\,,\ y = y(u,v)\,,\ z = z(u,v)\,;\quad (u,v)\in\Omega\,,$$

pak je

$$\iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_{\Omega}\bigg(F_x\big(x(u,v), y(u,v)z(u,v)\big)\frac{D(y,z)}{D(u,v)} +$$

$$+ F_y\big(x(u,v), y(u,v)z(u,v)\big)\frac{D(z,x)}{D(u,v)} + F_z\big(x(u,v), y(u,v)z(u,v)\big)\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\Big)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,,$$

kde

$$\frac{D(y,z)}{D(u,v)} = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}, \quad \frac{D(z,x)}{D(u,v)} = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial u} \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \end{pmatrix},$$

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Fyzikální význam plošného integrálu druhého druhu je tok vektorového pole $\boldsymbol{F}$ plochou $\mathcal{S}$ (ve směru normály $\boldsymbol{n}$).

1. Vypočtěte plošný integrál druhého druhu $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}}(x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)$, kde S je vnější strana kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Řešení: Parametrické rovnice kulové plochy jsou $x = a\cos\theta\cos\varphi$, $y = a\cos\theta\sin\varphi$, $z = a\sin\theta$, kde $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ a $0 < \varphi < 2\pi$. Rovnice tečen k souřadnicovým křivkám a normála jsou

$$\begin{aligned} \boldsymbol{t}_\theta &= \big(-a\sin\theta\cos\varphi, -a\sin\theta\sin\varphi, a\cos\theta\big) \\ \boldsymbol{t}_\varphi &= \big(-a\cos\theta\sin\varphi, a\cos\theta\cos\varphi, 0\big) \\ \boldsymbol{n} = \boldsymbol{t}_\theta \times \boldsymbol{t}_\varphi &= \big(-a^2\cos^2\theta\cos\varphi, -a^2\cos^2\theta\sin\varphi, -a^2\cos\theta\sin\theta\big)\,. \end{aligned}$$

Protože tato normála v bodě $[1;0;0]$ je $(-1,0,0)$, jedná se o opačnou normálu. Vektorová funkce $\boldsymbol{F} = (x,y,x) = \big(a\cos\theta\cos\varphi, a\cos\theta\sin\varphi, a\sin\theta\big)$. Tedy $-\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n} = a^3\cos\theta$ a

$$\int_{\mathcal{S}}\big(x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\big) = a^3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = 4\pi a^3\,.$$

---

2. Vypočtěte plošný integrál druhého druhu $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} f(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + g(y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + h(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $f(x)$, $g(y)$ a $h(z)$ jsou spojité funkce a $\mathcal{S}$ je vnější strana povrchu hranolu $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $0 \le z \le c$.

Řešení: Povrch hranolu se skládá ze šesti stěn. Jejich parametrické rovnice jsou

$$\begin{aligned} &\mathcal{S}_1: \ x = 0\,,\ y = y\,,\ z = z\,; \quad y \in \langle 0,b\rangle\,,\ z \in \langle 0,c\rangle\,; \quad \boldsymbol{n} = (-1,0,0) \\ &\mathcal{S}_2: \ x = a\,,\ y = y\,,\ z = z\,; \quad y \in \langle 0,b\rangle\,,\ z \in \langle 0,c\rangle\,; \quad \boldsymbol{n} = (1,0,0) \\ &\mathcal{S}_3: \ x = x\,,\ y = 0\,,\ z = z\,; \quad x \in \langle 0,a\rangle\,,\ z \in \langle 0,c\rangle\,; \quad \boldsymbol{n} = (0,-1,0) \\ &\mathcal{S}_4: \ x = x\,,\ y = b\,,\ z = z\,; \quad x \in \langle 0,a\rangle\,,\ z \in \langle 0,c\rangle\,; \quad \boldsymbol{n} = (0,1,0) \\ &\mathcal{S}_5: \ x = x\,,\ y = y\,,\ z = 0\,; \quad x \in \langle 0,a\rangle\,,\ y \in \langle 0,b\rangle\,; \quad \boldsymbol{n} = (0,0,-1) \\ &\mathcal{S}_6: \ x = x\,,\ y = y\,,\ z = c\,; \quad x \in \langle 0,a\rangle\,,\ y \in \langle 0,b\rangle\,; \quad \boldsymbol{n} = (0,0,1) \end{aligned}$$

Tedy daný integrál je

$$\iint_{\mathcal{S}} f(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + g(y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + h(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^b \int_0^c \big(f(a) - f(0)\big)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z +$$

$$+ \int_0^a \int_0^c \big(g(b) - g(0)\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + \int_0^a \int_0^b \big(h(c) - c(0)\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$= \big(f(a) - f(0)\big)bc + \big(g(b) - g(0)\big)ac + \big(h(c) - h(0)\big)ab =$$

$$= \left(\frac{f(a) - f(0)}{a} + \frac{g(b) - g(0)}{b} + \frac{h(c) - h(0)}{c}\right) abc\,.$$

---

3. Vypočtěte plošný integrál druhého druhu $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} (y-z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (z-x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $\mathcal{S}$ je vnější strana kuželové plochy $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \le z \le h$.

Řešení: Parametrické rovnice dané plochy jsou $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = r$, kde $0 < r < h$ a $0 < \varphi < 2\pi$. Tečny k souřadnicovým křivkám a normála jsou

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{t}_r &= \big(\cos\varphi, \sin\varphi, 1\big)\\
\boldsymbol{t}_\varphi &= \big(-r\sin\varphi, r\cos\varphi, 0\big)\\
\boldsymbol{n} = \boldsymbol{t}_r \times \boldsymbol{t}_\varphi &= \big(-r\cos\varphi, -r\sin\varphi, r\big)\,.
\end{aligned}$$

Protože se má jednat o vnější stranu kuželové plochy $x^2 + y^2 = z^2$ a $z > 0$, musí být třetí složka normály $n_3 < 0$. Zvolili jsme tedy opačnou orientaci. Protože

$$\boldsymbol{F} = \big(y - z, z - x, x - y\big) = \Big(r(\sin\varphi - 1), r(1 - \cos\varphi), r(\cos\varphi - \sin\varphi)\Big)$$

je $-\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n} = 2r^2(\sin\varphi - \cos\varphi)$. Tedy

$$\iint_{\mathcal{S}} (y-z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (z-x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^h \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} r^2(\sin\varphi - \cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = 0\,.$$

---

4. Vypočtěte plošný integrál druhého druhu $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} \left(\frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{x} + \frac{\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x}{y} + \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{z}\right)$, kde $\mathcal{S}$ je vnější strana elipsoidu $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

Řešení: Parametrické rovnice elipsoidu jsou $x = a\cos\theta\cos\varphi$, $y = b\cos\theta\sin\varphi$, $z = c\sin\theta$, kde $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ a $0 < \varphi < 2\pi$. Tečné vektory ve směru souřadnicových os a normála jsou

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{t}_\theta &= \big(-a\sin\theta\cos\varphi, -b\sin\theta\sin\varphi, c\cos\theta\big)\\
\boldsymbol{t}_\varphi &= \big(-a\cos\theta\sin\varphi, b\cos\theta\cos\varphi, 0\big)\\
\boldsymbol{n} = \boldsymbol{t}_\varphi \times \boldsymbol{t}_\theta &= \big(bc\cos^2\theta\cos\varphi, ac\cos^2\theta\sin\varphi, ab\cos\theta\sin\theta\big)\,.
\end{aligned}$$

Protože normála ve vrcholech míří od středu elipsoidu, je vnější. Integrovaná vektorová funkce je

$$\boldsymbol{F} = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right) = \left(\frac{1}{a\cos\theta\cos\varphi}, \frac{1}{b\cos\theta\sin\varphi}, \frac{1}{c\sin\theta}\right)$$

a

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n} = \left(\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}\right)\cos\theta = \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) abc\cos\theta\,.$$

Tedy hledaný plošný integrál je

$$\iint_{\mathcal{S}} \left(\frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{x} + \frac{\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x}{y} + \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{z}\right) = \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) abc\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \\ = 4\pi abc\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right).$$

---

5. Vypočtěte plošný integrál druhého druhu $\iint_{\mathcal{S}} x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $\mathcal{S}$ je vnější strana kulové plochy $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

Řešení: Protože se jedná o kulovou plochu se středem v bodě $[a;b;c]$ a poloměrem R, je jedna z jejích parametrizací $x = a + R\cos\theta\cos\varphi$, $y = b + R\cos\theta\sin\varphi$, $z = c + R\sin\theta$, kde $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ a $0 < \varphi < 2\pi$. Najdeme rovnice tečen a normálu k této ploše.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{t}_\theta &= \big(-R\sin\theta\cos\varphi, -R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\theta\big) \\ \boldsymbol{t}_\varphi &= \big(-R\cos\theta\sin\varphi, R\cos\theta\cos\varphi, 0\big) \\ \boldsymbol{n} = \boldsymbol{t}_\varphi\times\boldsymbol{t}_\theta &= \big(R^2\cos^2\theta\cos\varphi, R^2\cos^2\theta\sin\varphi, R^2\cos\theta\sin\theta\big)\,. \end{aligned}$$

Snadno se lze přesvědčit, že tato normála je vnější. Vektorová funkce $\boldsymbol{F}$ je

$$\boldsymbol{F} = \big(x^2, y^2, z^2\big) = \Big(\big(a + R\cos\theta\cos\varphi\big)^2, \big(b + R\cos\theta\sin\varphi\big)^2, \big(c + R\sin\theta\big)^2\Big)$$

a

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n} =& R^2\big(a^2\cos^2\theta\cos\varphi + b^2\cos^2\theta\sin\varphi + c^2\cos\theta\sin\theta\big) + \\ &+ 2R^3\big(a\cos^3\theta\cos^2\varphi + b\cos^3\theta\sin^2\varphi + c\cos\theta\sin^2\theta\big) + \\ &+ R^4\big(\cos^4\theta\cos^3\varphi + \cos^4\theta\sin^3\varphi + \cos\theta\sin^3\theta\big)\,. \end{aligned}$$

Poměrně snadno najdeme integrály

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \cos\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \cos^3\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \sin^3\varphi \,\mathrm{d}\varphi = 0 \\
&\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \pi \\
&\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta \,\mathrm{d}\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \sin^3\theta \,\mathrm{d}\theta = 0 \\
&\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3\theta \,\mathrm{d}\theta = \frac{4}{3}\,, \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \sin^2\theta \,\mathrm{d}\theta = \frac{2}{3}\,.
\end{aligned}
$$

S jejich použitím pak zjistíme, že

$$
\iint_{\mathcal{S}} x^2 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^2 \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{8}{3}\,\pi R^3 (a+b+c)\,.
$$

Cvičení 22

Greenova věta.

Věta: *Nechť je $\mathcal{C}$ po částech diferencovatelná prostá křivka v $\mathbb{R}^2$, která je hranicí konečné jednoduše souvislé oblasti $\mathcal{S}$. Nechť je křivka $\mathcal{C}$ orientována tak, že oblast $\mathcal{S}$ leží při pohybu po křivce vlevo. Nechť jsou funkce $P(x,y)$ a $Q(x,y)$ spojitě diferencovatelné v oblasti $\Omega \supset \overline{\mathcal{S}}$. Pak platí Greenova věta*

$$\oint_{\mathcal{C}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_{\mathcal{S}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)\,dx\,dy\,.$$

Pomocí Greenovy věty lze například určit obsah S rovinného obrazce, který je ohraničen prostou po částech diferencovatelnou křivkou $\mathcal{C}$, ze vztahu

$$S = \oint_{\mathcal{C}} x\,\mathrm{d}y = -\oint_{\mathcal{C}} y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\oint_{\mathcal{C}} (x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)\,,$$

a pod.

1. Pomocí Greenovy věty převeďte křivkový integrál

$$I = \oint_{\mathcal{C}} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + y\Big(xy + \ln\big(x + \sqrt{x^2+y^2}\big)\Big)\,\mathrm{d}y\,,$$

kde $\mathcal{C}$ je hranice konečné oblasti $\mathcal{S}$.

Řešení: V tomto případě je $P = \sqrt{x^2+y^2}$ a $Q = y\Big(xy + \ln\big(x + \sqrt{x^2+y^2}\big)\Big)$. Derivace těchto funkcí jsou

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = y^2 + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

Podle Greenovy věty tedy platí

$$I = \iint_{\mathcal{S}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\mathcal{S}} y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Pomocí Greenovy věty vypočtěte následující integrály

2. $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} xy^2\,\mathrm{d}y - x^2y\,\mathrm{d}x \quad \mathcal{C}$ je kružnice $x^2+y^2=a^2$

3. $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} (x+y)\,\mathrm{d}x - (x-y)\,\mathrm{d}y \quad \mathcal{C}$ je elipsa $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

4. $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{e}^x \big((1-\cos y)\,\mathrm{d}x - (y-\sin y)\,\mathrm{d}y\big)$

$\mathcal{C}$ je kladně orientovaná hranice oblasti

$0 < x < \pi\,,\ 0 < y < \sin x$

5. $\displaystyle\oint_{x^2+y^2=R^2} \exp\big(-(x^2-y^2)\big)(\cos 2xy\,\mathrm{d}x + \sin 2xy\,\mathrm{d}y)$

Řešení:

2. V tomto případě je $P = -x^2y$ a $Q = xy^2$ a $\mathcal{S}$ je kruh $x^2 + y^2 \le a^2$. Tedy podle Greenovy věty je

$$\oint_{\mathcal{C}} xy^2\,\mathrm{d}y - x^2y\,\mathrm{d}x = \iint_{\mathcal{S}} \big(x^2+y^2\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Poslední integrál snadno najdeme, když použijeme polární souřadnice $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Protože jakobián substituce je $J = r$ a daný kruh je v těchto souřadnicích popsán nerovnostmi $0 < r < a$ a $0 < \varphi < 2\pi$, je

$$\oint_{\mathcal{C}} xy^2\,\mathrm{d}y - x^2y\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^a r^3\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}\,a^4\,.$$

3. Protože $P = x + y$ a $Q = -x + y$, je $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = -2$, a tedy

$$\oint_{\mathcal{C}} (x+y)\,\mathrm{d}x - (x-y)\,\mathrm{d}y = -2\iint_{\Omega} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -2\pi ab\,,$$

protože Ω je elipsa $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

4. V tomto příkladu je $P = \mathrm{e}^x(1-\cos y)$ a $Q = -\mathrm{e}^x(y - \sin y)$. Tedy $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = -y\mathrm{e}^x$. Tedy podle Greenovy věty

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{e}^x \big((1-\cos y)\,\mathrm{d}x - (y-\sin y)\,\mathrm{d}y\big) = -\iint_{\Omega} y\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

kde oblast Ω je dána nerovnostmi $0 < y < \sin x$ a $0 < x < \pi$. Poslední integrál podle Fubiniovy věty je

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{e}^x \big((1-\cos y)\,\mathrm{d}x - (y-\sin y)\,\mathrm{d}y\big) = -\int_0^{\pi} \mathrm{d}x \int_0^{\sin x} y\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}y =$$
$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \sin^2 x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x\big(1-\cos 2x\big) = \frac{1-\mathrm{e}^{\pi}}{5}\,,$$

Protože

$$\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos 2x \,\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{e}^x \cos 2x\Big]_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \sin 2x \,\mathrm{d}x =$$
$$= \mathrm{e}^{\pi} - 1 + 2\Big[\mathrm{e}^x \sin 2x\Big]_0^{\pi} - 4\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos 2x \,\mathrm{d}x =$$
$$= \mathrm{e}^{\pi} - 1 - 4\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos 2x \,\mathrm{d}x \,.$$

5. Protože $P = \mathrm{e}^{-x^2+y^2}\cos 2xy$ a $Q = \mathrm{e}^{-x^2+y^2}\sin 2xy$, je $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0$. Tedy podle Greenovy věty je

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{e}^{-x^2+y^2}\big(\cos 2xy \,\mathrm{d}x + \sin 2xy \,\mathrm{d}y\big) = 0 \,.$$

---

6. O kolik se vzájemně liší integrály $I_1 = \displaystyle\int_{AmB} (x+y)^2 \,\mathrm{d}x - (x-y)^2 \,\mathrm{d}y$ a $I_2 = \displaystyle\int_{AnB} (x+y)^2 \,\mathrm{d}x - (x-y)^2 \,\mathrm{d}y$, kde AmB je úsečka spojující body $A = [1;1]$ a $B = [2;6]$ a AnB je parabola s vertikální osou, která prochází body A, B a počátkem souřadnic.

Řešení: Úsečka AmB má rovnici $y = 5x - 4$ a parabola AmB rovnici $y = 2x^2 - x$. Rozdíl integrálů je

$$I_1 - I_2 = \int_{AmB} (x+y)^2 \,\mathrm{d}x - (x-y)^2 \,\mathrm{d}y - \int_{AnB} (x+y)^2 \,\mathrm{d}x - (x-y)^2 \,\mathrm{d}y =$$
$$= \oint_{\mathcal{C}} (x+y)^2 \,\mathrm{d}x - (x-y)^2 \,\mathrm{d}y \,,$$

kde $\mathcal{C}$ je uzavřená křivka složená z úsečky AmB a paraboly BnA, která je opačně orientovaná než parabola AnB. Podle Greenovy věty je (křivka $\mathcal{C}$ je záporně orientovaná)

$$I_1 - I_2 = \oint_{\mathcal{C}} (x+y)^2 \,\mathrm{d}x - (x-y)^2 \,\mathrm{d}y = -\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = 4\iint_{\Omega} x \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,,$$

kde Ω je oblast daná nerovnostmi $2x^2 - x < y < 5x - 4$ a $1 < x < 2$. Tedy

$$I_1 - I_2 = 4\int_1^2 \mathrm{d}x \int_{2x^2-x}^{5x-4} x \,\mathrm{d}y = 2 \,.$$

---

7. Vypočtěte křivkový integrál $\displaystyle\int\limits_{AmO} (\mathrm{e}^x \sin y - ky)\ \mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x \cos y - k)\ \mathrm{d}y$, kde AmO je horní polokružnice $x^2 + y^2 = ax$ orientovaná od bodu $A = [a;0]$ do bodu $O = [0;0]$.

Návod: Křivku AmO doplňte na uzavřenou úsečkou OA na ose Ox.

Řešení: Protože osa Ox má rovnici $y = 0$ je integrál $\displaystyle\int_{OA} \big(\mathrm{e}^x \sin y - ky\big)\,\mathrm{d}x + \big(\mathrm{e}^x \cos y - k\big)\,\mathrm{d}y$ přes úsečku OA roven nule. Tedy křivka $\mathcal{C}$ složená z polokružnice AmO a úsečky OA je uzavřená. Podle Greenovy věty je

$$\int_{AmO} \big(\mathrm{e}^x \sin y - ky\big)\,\mathrm{d}x + \big(\mathrm{e}^x \cos y - k\big)\,\mathrm{d}y =$$
$$= \oint_{\mathcal{C}} \big(\mathrm{e}^x \sin y - ky\big)\,\mathrm{d}x + \big(\mathrm{e}^x \cos y - k\big)\,\mathrm{d}y = \iint_\Omega k\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{8}\,ka^2\,,$$

protože oblast Ω je polokružnice s poloměrem $\dfrac{1}{2}$.

---

8. Vypočtěte křivkový integrál $\displaystyle\int\limits_{AmB} \big(\varphi(y)\mathrm{e}^x - ky\big)\,\mathrm{d}x + \big(\varphi'(y)\mathrm{e}^x - k\big)\,\mathrm{d}y$, kde $\varphi(y)$ a $\varphi'(y)$ jsou spojité funkce a AmB je libovolná křivka, která spojuje body $A = [x_1; y_1]$ a $B = [x_2; y_2]$, která je spolu s úsečkou BA hranicí oblasti $AmBA$ s danou plochou S.

Řešení: Z Greenovy věty plyne

$$\int\limits_{AmB} \big(\varphi(y)\mathrm{e}^x - ky\big)\,\mathrm{d}x + \big(\varphi'(y)\mathrm{e}^x - k\big)\,\mathrm{d}y -$$
$$- \int\limits_{AB} \big(\varphi(y)\mathrm{e}^x - ky\big)\,\mathrm{d}x + \big(\varphi'(y)\mathrm{e}^x - k\big)\,\mathrm{d}y = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

kde $P = \varphi(y)\mathrm{e}^x - ky$ a $Q = \varphi'(y)\mathrm{e}^x - k$ a Ω je oblast omezená křivkou AmB a úsečkou BA. Protože $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = k$, je

$$\int_{AmB} \big(\varphi(y)\mathrm{e}^x - ky\big)\,\mathrm{d}x + \big(\varphi'(y)\mathrm{e}^x - k\big)\,\mathrm{d}y =$$
$$= \int_{AB} \big(\varphi(y)\mathrm{e}^x - ky\big)\,\mathrm{d}x + \big(\varphi'(y)\mathrm{e}^x - k\big)\,\mathrm{d}y + k\iint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$
$$= \int_{AB} \big(\varphi(y)\mathrm{e}^x - ky\big)\,\mathrm{d}x + \big(\varphi'(y)\mathrm{e}^x - k\big)\,\mathrm{d}y + kS\,.$$

Nechť má přímka AB rovnici $x = ay + b$. Pak je

$$\int_{AB} \big(\varphi(y)\mathrm{e}^x - ky\big)\,\mathrm{d}x + \big(\varphi'(y)\mathrm{e}^x - k\big)\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_{y_1}^{y_2} \Big(\mathrm{e}^{ay+b}\big(\varphi'(y) + a\varphi(y)\big) - k - kay\Big)\,\mathrm{d}y = \left[\mathrm{e}^{ay+b}\varphi(y) - ky - \frac{ka}{2}\,y^2\right]_{y^1}^{y_2} =$$

$$= \mathrm{e}^{x_2}\varphi\big(y_2\big) - \mathrm{e}^{x_1}\varphi\big(y_1\big) - k\big(y_2 - y_1\big) - \frac{k}{2}\,\big(y_2 + y_1\big)\big(x_2 - x_1\big)\,.$$

---

9. Určete dvakrát diferencovatelné funkce $P(x,y)$ a $Q(x,y)$ tak, aby křivkový integrál $I = \oint_{\mathcal{C}} P(x+\alpha, y+\beta)\,\mathrm{d}x + Q(x+\alpha, y+\beta)\,\mathrm{d}y$ pro každou uzavřenou křivku $\mathcal{C}$ nezávisel na konstantách α a β.

Řešení: Podle Greenovy věty je pro každou uzavřenou plochu $\mathcal{S}$

$$I(\alpha,\beta) = \iint_{\mathcal{S}} \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\big(x+\alpha, y+\beta\big) - \frac{\partial P}{\partial x}\big(x+\alpha, y+\beta\big)\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Aby hodnota nezávisela na hodnotách α a β, ale jenom na křivce $\mathcal{C}$, musí být integrand konstantní, tj. musí platit

$$\frac{\partial Q}{\partial x}\big(x+\alpha, y+\beta\big) - \frac{\partial P}{\partial y}\big(x+\alpha, y+\beta\big) = k\,,$$

kde k je konstanta. Zvolíme-li $\alpha = \beta = 0$, zjistíme, že funkce $P(x,y)$ a $Q(x,y)$ musí splňovat rovnici

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = k\,.$$

Tato rovnice má řešení

$$Q(x,y) = kx + \frac{\partial u}{\partial y}\,, \quad P(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}\,,$$

kde k je konstanta a $u(x,y)$ libovolná diferencovatelná funkce.

---

10. Jakou podmínku musí splňovat diferencovatelná funkce $F(x,y)$, aby křivkový integrál $\displaystyle\int_{AmB} F(x,y)\cdot(y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y)$ nezávisel na integrační cestě?

Řešení: Integrál $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ nezávisí na integrační cestě právě tehdy, když pro každou uzavřenou křivku $\mathcal{C}$ platí $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = 0$. Z Greenovy věty plyne, že pro každou oblast Ω musí platit

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0\,.$$

Tuto podmínku lze splnit pouze v tom případě, když pro každé x a y platí rovnost

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0\,.$$

V našem případě je $P(x,y) = yF(x,y)$ a $Q(x,y) = xF(x,y)$. Tedy musí být

$$\frac{\partial(xF)}{\partial x} - \frac{\partial(yF)}{\partial y} = xF'_x - yF'_y = 0 \Longrightarrow F(x,y) = f(xy)\,,$$

kde $f(u)$ je libovolná diferencovatelná funkce jedné proměnné.

---

11. Vypočtěte $I = \displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$, kde $\mathcal{C}$ je prostá uzavřená kladně orientovaná křivka, která neprochází počátkem souřadnic.

Návod: Uvažujte dva případy: a) počátek je vně křivky; b) počátek je uvnitř křivky.

Řešení: V tomto případě je $P(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$ a $Q(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$. Protože $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{-x^2+y^2}{\bigl(x^2+y^2\bigr)^2}$, plyne z Greenovy věty, že pro každou prostou jednoduchou uzavřenou křivku $\mathcal{C}$, uvnitř které neleží počátek souřadnic

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = 0\,.$$

Jestliže počátek leží uvnitř křivky $\mathcal{C}$, nelze již Greenovu větu použít, protože funkce $P(x,y)$ a $Q(x,y)$ nejsou diferencovatelné v bodě $[0;0]$. V tomto případě lze postupovat tak, že zvolíme kladně orientovanou kružnici $\mathcal{C}_1$ se středem v počátku a malým poloměrem ε, tj. $x^2+y^2=\varepsilon^2$ tak, aby ležela celá v oblasti Ω ohraničené křivkou $\mathcal{C}$. Protože křivka $\mathcal{C}$ neprochází počátkem, je to vždy možné. Tuto kružnici spojíme s křivkou $\mathcal{C}$ prostou křivkou $\mathcal{C}_2$, která neprotíná křivku $\mathcal{C}$ ani kružnici $\mathcal{C}_1$. Pak oblast, jejíž kladně orientovaná hranice je tvořena křivkou $\mathcal{K}$ složenou z křivek $\mathcal{C}+\mathcal{C}_2-\mathcal{C}_1-\mathcal{C}_2$ neobsahuje počátek, a tedy

$$\begin{aligned}\oint_{\mathcal{K}} \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = &\int_{\mathcal{C}} \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} + \int_{\mathcal{C}_2} \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} - \\ &- \int_{\mathcal{C}_1} \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} - \int_{\mathcal{C}_2} \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = 0\,.\end{aligned}$$

Z této rovnosti plyne

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \int_{\mathcal{C}_1} \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}\,.$$

Integrál přes kružnici $x^2+y^2=\varepsilon^2$, tj. $x=\varepsilon\cos\varphi$, $y=\varepsilon\sin\varphi$, $0<\varepsilon<2\pi$, je

$$\int_{\mathcal{C}_1} \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = 2\pi\,.$$

Pomocí křivkových integrálů vypočtěte obsahy množin omezené následujícími křivkami:

12. Elipsou $x = a\cos t\,,\ y = b\sin t\,;\quad 0 \le t \le 2\pi\,.$

13. Asteroidou $x = a\cos^3 t\,,\ y = b\sin^3 t\,;\quad 0 \le t \le 2\pi\,.$

14. Parabolou $(x+y)^2 = ax$ a osou $Ox\,;\quad a > 0\,.$

15. Smyčkou Descartova listu $x^3 + y^3 = 3axy\,;\quad a > 0\,;$ Položte $y = tx$.

16. Lemniskátou $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)\,;$ Položte $y = x\operatorname{tg}\varphi$.

Řešení: Z Greenovy věty plyne, že obsah S oblasti Ω omezené křivkou $\mathcal{C}$ je roven

$$S = \oint_{\mathcal{C}} \bigl(ax\,\mathrm{d}y - by\,\mathrm{d}x\bigr)\,,\quad \text{kde}\ \ a+b=1\,.$$

12. Obsah S elipsy najdeme jako integrál $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} x\,\mathrm{d}y$, kde $\mathcal{C}$ je elipsa $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$ a $0 < \varphi < 2\pi$. Protože $\mathrm{d}y = b\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$, je

$$S = \oint_{\mathcal{C}} x\,\mathrm{d}y = ab\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \pi ab\,.$$

13. Obsah S oblasti omezené danou asteroidou je

$$S = \oint_{\mathcal{C}} x\,\mathrm{d}y = 3ab\int_0^{2\pi} \cos^4\varphi\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 3ab\int_0^{2\pi}\bigl(\cos^4\varphi - \cos^6\varphi\bigr)\,\mathrm{d}\varphi = \frac{3}{8}\,\pi ab\,.$$

14. Protože integrál $\displaystyle\int_{\mathcal{C}_1} y\,\mathrm{d}x$ přes úsečku $y = 0$, $0 < x < a$ je roven nule, lze obsah S najít pomocí integrálu $S = -\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} y\,\mathrm{d}x$, kde křivka $\mathcal{C}$ se skládá z úsečky $\mathcal{C}_1$ a paraboly $\mathcal{C}_2$ dané rovnicí $(x+y)^2 = ax$, kterou probíháme od bodu $[a;0]$ do bodu $[0;0]$. Rovnice dané paraboly lze psát ve tvaru $y = \sqrt{ax} - x$, a tedy

$$S = -\int_{\mathcal{C}_2} x\,\mathrm{d}y = \int_0^a \bigl(\sqrt{ax} - x\bigr)\,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{6}\,.$$

15. Parametrické rovnice části Descartova listu, který omezuje oblast Ω, jsou $x = \dfrac{3at}{1+t^3}$, $y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}$, $0 < t < \infty$. Obsah S oblasti Ω najdeme pomocí křivkového integrálu $S = \displaystyle\oint_{\mathcal{C}} x\,\mathrm{d}y$. Protože $\mathrm{d}y = \dfrac{3at\bigl(2-t^3\bigr)}{\bigl(1+t^3\bigr)^2}\,\mathrm{d}t$, je

$$S = \oint_{\mathcal{C}} x\,\mathrm{d}y = 9a^2\int_0^\infty \frac{t^2\bigl(2-t^3\bigr)}{\bigl(1+t^3\bigr)^3}\,\mathrm{d}t = 3a^2\int_1^\infty \frac{3-x}{x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\,a^2\,,$$

kde jsme při výpočtu integrálu použili substituci $x = 1 + t^3$.

16. Rovnice uvedené lemniskáty jsou $x = a\cos\varphi\sqrt{\cos 2\varphi}$ a $y = a\sin\varphi\sqrt{\cos 2\varphi}$, kde $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$. Protože

$$\mathrm{d}y = a\left(\cos\varphi\sqrt{\cos 2\varphi} - \frac{\sin\varphi\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\right)\mathrm{d}\varphi = a\,\frac{\cos 3\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\,\mathrm{d}\varphi\,,$$

je

$$\begin{aligned} S &= a^2\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos\varphi\cos 3\varphi\,\mathrm{d}\varphi + a^2\int_{3\pi/4}^{5\pi/4}\cos\varphi\cos 3\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \\ &= a^2\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\bigl(\cos 4\varphi + \cos 2\varphi\bigr)\,\mathrm{d}\varphi = a^2\,. \end{aligned}$$

---

17. *Epicykloida* je křivka, kterou opisuje bod kružnice s poloměrem r, která se valí bez prokluzování po nehybné kružnici s poloměrem R a leží vně této kružnice. Předpokládejte, že $R = nr$, kde $n \geq 1$ je celé, a najděte obsah epicykloidy.

Řešení: Předpokládejme, že nehybná kružnice má střed v počátku, tj. její rovnice je $x^2 + y^2 = R^2$. Nechť je kružnice na počátku pohybu dotýkají v bodě $M = [R, 0]$, tj. střed druhé kružnice je v bodě $[R + r; 0]$. Označme φ úhel, který svírá polopřímka z počátku do středu menší kružnice s osou Ox a α úhel, o který se při tom otočila menší kružnice. Protože se po sobě tyto kružnice valí bez prokluzování, platí rovnost $r\alpha = R\varphi$ neboli $\alpha = n\varphi$. Střed menší kružnice je v tomto okamžiku v bodě $\bigl[(R + r)\cos\varphi; (R + r)\sin\varphi\bigr] = \bigl[r(n + 1)\cos\varphi; r(n + 1)\sin\varphi\bigr]$. Označíme-li β orientovaný úhel, který svírá spojnice středu valící se kružnice s uvažovaným bodem M s kladným směrem osy x, jsou souřadnice bodu M dány vztahy $x = (n+1)r\cos\varphi + r\cos\beta$ a $y = (n+1)r\sin\varphi + r\sin\beta$. Protože pro úhly φ, α a β platí rovnost $\alpha + \varphi - \beta = \pi$, jsou souřadnice bodu M

$$x = (n + 1)r\cos\varphi - r\cos(n + 1)\varphi\,, \quad y = (n + 1)r\sin\varphi - r\sin(n + 1)\varphi\,. \tag{1}$$

Rovnice epicykloidy je v těchto souřadnicích dána vztahy (1), kde $0 < \varphi < 2\pi$. Podle Greenovy věty lze tedy najít obsah S oblasti omezené touto cykloidou integrálem

$$\begin{aligned} S = \oint_{\mathcal{C}} x\,\mathrm{d}y &= r^2(n + 1)\int_0^{2\pi}\bigl((n + 1)\cos\varphi - \cos(n + 1)\varphi\bigr)\bigl(\cos\varphi - \cos(n + 1)\varphi\bigr)\,\mathrm{d}\varphi = \\ &= (n + 1)(n + 2)\pi r^2\,. \end{aligned}$$

---

24. *Hypocykloida* je křivka, kterou opisuje bod kružnice s poloměrem r, která se valí bez prokluzování po nehybné kružnici s poloměrem R a leží uvnitř této kružnice. Předpokládejte, že $R = nr$, kde $n \geq 2$ je celé, a najděte obsah hypocykloidy.

Řešení: Předpokládejme, že nehybná kružnice má střed v počátku, tj. její rovnice je $x^2 + y^2 = R^2$. Nechť je kružnice na počátku pohybu dotýkají v bodě $M = [R, 0]$, tj. střed druhé kružnice je v bodě $[R - r; 0]$. Označme φ úhel, který svírá polopřímka z počátku do středu menší kružnice s osou Ox a α úhel, o který se při tom otočila menší kružnice. Protože se po sobě tyto kružnice valí bez prokluzování, platí rovnost $r\alpha = R\varphi$ neboli $\alpha = n\varphi$. Střed menší kružnice je v tomto okamžiku v bodě $\big[(R - r)\cos\varphi; (R - r)\sin\varphi\big] = \big[r(n - 1)\cos\varphi; r(n - 1)\sin\varphi\big]$. Označíme-li β orientovaný úhel, který svírá spojnice středu valící se kružnice s uvažovaným bodem M s kladným směrem osy x, jsou souřadnice bodu M dány vztahy $x = (n-1)r\cos\varphi + r\cos\beta$ a $y = (n-1)r\sin\varphi + r\sin\beta$. Protože pro úhly φ, α a β platí rovnost $\varphi - \beta = \alpha$, jsou souřadnice bodu M

$$x = (n-1)r\cos\varphi + r\cos(n-1)\varphi\,, \quad y = (n-1)r\sin\varphi - r\sin(n-1)\varphi\,. \qquad (1)$$

Rovnice hypocykloidy je v těchto souřadnicích dána vztahy (1), kde $0 < \varphi < 2\pi$. Podle Greenovy věty lze tedy najít obsah S oblasti omezené touto cykloidou integrálem

$$S = \oint_{\mathcal{C}} x\,\mathrm{d}y = r^2(n-1)\int_0^{2\pi}\big((n-1)\cos\varphi + \cos(n-1)\varphi\big)\big(\cos\varphi - \cos(n-1)\varphi\big)\,\mathrm{d}\varphi = \\ = (n-1)(n-2)\pi r^2\,.$$

---

19. Vypočtěte plochu části válcové plochy $x^2 + y^2 = ax$, která leží uvnitř plochy $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Řešení: Protože se jedná o část válcové plochy, lze po jejím rozvinutím do roviny najít obsah této plochy pomocí Greenovy věty. Plochu rozvineme do roviny Oxz. Pro jednoduchost se omezíme na část plochy, pro kterou je $x > 0$ a $z > 0$. Celkový obsah plochy pak bude čtyřnásobkem obsahu této plochy. Bod na kružnici, jehož vzdálenost po oblouku je s, přejde po rozvinutí do bodu na ose Ox, jehož x–ová souřadnice je s. Protože se jedná o kružnici $x^2 + y^2 = ax$, tj. kružnici se středem v bodě $\left[\dfrac{a}{2}; 0\right]$ a poloměrem $\dfrac{a}{2}$, je délka oblouku od počátku do bodu na kružnici se souřadnicemi $[x; y]$ rovna $s = \dfrac{a}{2}\varphi$, kde φ je úhel mezi polopřímkou spojující bod kružnice a polopřímkou, která spojuje střed kružnice s počátkem. Proto je $\varphi = \arccos\dfrac{a - 2x}{a}$, a tedy $s = \dfrac{a}{2}\arccos\dfrac{a - 2x}{a}$. Výšku z plochy v bodě $[x; y]$ určíme z rovnic $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ a $x^2 + y^2 = ax$, ze kterých plyne $z = \sqrt{a(a - x)}$. Rozvinutá část plochy je tedy omezena křivkami $z = 0$ a $s = 0$ a křivkou $\mathcal{C}$ zadanou parametrickými rovnicemi $s = \dfrac{a}{2}\arccos\dfrac{a - 2x}{a}$, $z = \sqrt{a(a - x)}$, kde $0 < x < a$. Protože je integrál $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} z\,\mathrm{d}s$ po libovolné úsečce na ose Os nebo Oz roven nule, lze obsah plochy najít jako integrál

$$S = 4\int_{\mathcal{C}} z\,\mathrm{d}s = 4\int_0^a \sqrt{a(a - x)}\,\frac{a\,\mathrm{d}x}{2\sqrt{x(a - x)}} = 2a^{3/2}\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 4a^2\,.$$

20. Dokažte, že objem tělesa vytvořeného rotací kolem osy Ox vnitřku prosté uzavřené křivky $\mathcal{C}$, která leží v polorovině $y \geq 0$, je $V = -\pi \oint_{\mathcal{C}} y^2 \,\mathrm{d}x$.

Řešení: Objem tělesa, které vyniká rotací oblast Ω, která leží v polorovině $y \geq 0$ kolem osy Ox, je $V = 2\pi \iint_{\Omega} y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$. Protože je oblast Ω leží uvnitř křivky $\mathcal{C}$, plyne z Greenovy věty

$$-2\pi \oint_{\mathcal{C}} y^2 \,\mathrm{d}x = \pi \iint_{\Omega} y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = V\,.$$

---

21. Ukažte, že je-li $\mathcal{C}$ uzavřená křivka a $\boldsymbol{l}$ libovolný směr, pak $\oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}s = 0$, kde $\boldsymbol{n}$ je vnější normála ke křivce $\mathcal{C}$.

Řešení: Nechť jsou parametrické rovnice křivky $\mathcal{C}$ dány rovnicemi $x = x(t)$ a $y = y(t)$, kde $t \in \langle a, b\rangle$. Pak je tečný vektor k této křivce $\boldsymbol{\tau} = \big(x'(t), y'(t)\big)$. Předpokládejme, že tento tečný vektor určuje kladnou orientaci křivky. To znamená, že při pohybu po křivce ve směru vektoru $\boldsymbol{\tau}$ zůstává vnitřek křivky po levé straně. Vektor normály je pak úměrný vektoru $\boldsymbol{n} \sim \big(y'(t), -x'(t)\big)$. Normála $\boldsymbol{n}$ je vnější právě tehdy, když má její vektorový součin s tečnou $\boldsymbol{\tau}$ kladnou třetí (a tedy v rovině jedinou) složku. Proto je jednotková vnější normála $\boldsymbol{n} = \dfrac{(y', -x')}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}$. Neboť infinitezimální element $\mathrm{d}s$ délky křivky je $\mathrm{d}s = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,\mathrm{d}t$, je daný integrál roven

$$\oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}s = \int_a^b \frac{l_x y' - l_y x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,\mathrm{d}t = \oint_{\mathcal{C}} l_x \,\mathrm{d}y - l_y \,\mathrm{d}x\,.$$

Podle Greenovy věty je tento integrál roven nule.

---

22. Najděte hodnotu integrálu $I = \oint_{\mathcal{C}} \big(x n_x + y n_y\big) \,\mathrm{d}s$, kde $\mathcal{C}$ je prostá uzavřená křivka, která je hranicí konečné oblasti $\mathcal{S}$ a $\boldsymbol{n} = \big(n_x, n_y\big)$ je vnější normála k této křivce.

Řešení: Stejně jako v předchozí úloze lze uvedený integrál zapsat pomocí křivkového integrálu druhého druhu a použít Greenovu větu. Takto dostaneme

$$I = \oint_{\mathcal{C}} \big(x n_x + y n_y\big) \,\mathrm{d}s = \oint_{\mathcal{C}} x \,\mathrm{d}y - y \,\mathrm{d}x = 2 \iint_{\mathcal{S}} \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = 2S\,,$$

kde S je obsah oblasti $\mathcal{S}$.

---

23. Najděte $\lim\limits_{d(S)\to 0} \frac{1}{S} \oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s$, kde S je obsah plochy s hranicí $\mathcal{C}$, která obíhá bod $[x_0; y_0]$, $d(S)$ je průměr oblasti S, $\boldsymbol{n}$ je jednotkový vektor vnější normály k $\mathcal{C}$ a $\boldsymbol{F}(x,y)$ je vektor spojitě diferencovatelný v $\mathcal{S}+\mathcal{C}$.

Řešení: Označme F_x a F_y složky vektorového pole $\boldsymbol{F}$. Stejně jako v předchozích dvou případech zjistíme, že

$$\oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = \oint_{\mathcal{C}} F_x\,\mathrm{d}y - F_y\,\mathrm{d}x = \iint_{\mathcal{S}} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Protože je vektorové pole $\boldsymbol{F}$ spojitě diferencovatelné, plyne z vety o střední hodnotě integrálního počtu, že existuje bod $[\xi;\eta]\in\mathcal{S}$ takový, že

$$\oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x}(\xi,\eta) + \frac{\partial F_y}{\partial y}(\xi,\eta)\right) S\,.$$

Protože je funkce $\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y}$ spojitá, je

$$\lim_{d(S)\to 0}\frac{1}{S}\oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = \frac{\partial F_x}{\partial x}(x_0,y_0) + \frac{\partial F_y}{\partial y}(x_0,y_0)\,.$$

Cvičení 23

GAUSSOVA A STOKESOVA VĚTA

Věta. *(Gaussova) Nechť $\mathcal{S}$ je po částech diferencovatelná plocha, která je hranicí omezené oblasti $\mathcal{V}$ a $\boldsymbol{F} = (F_x, F_y, F_z)$ je spojitě diferencovatelné vektorové pole v oblasti $\Omega \supset \mathcal{V} \cup S$. Pak platí*

$$\iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}S = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \boldsymbol{F}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z\,,$$

kde $\boldsymbol{n}$ je jednotkový vektor vnější normály k ploše $\mathcal{S}$ a

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial z} + \frac{\partial F_y}{\partial z}\,.$$

Věta. *(Stokesova) Nechť $\mathcal{S}$ je po částech diferencovatelná orientovatelná plocha s hranicí $\mathcal{C}$ a nechť $\boldsymbol{F} = (F_x, F_y, F_z)$ je vektorové pole, které je spojitě diferencovatelné v oblasti $\Omega \supset \mathcal{S} \cup \mathcal{C}$. Pak platí*

$$\oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F} \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \iint_{\mathcal{S}} \operatorname{rot} \boldsymbol{F}\, \mathrm{d}\boldsymbol{S}\,,$$

kde orientace křivky $\mathcal{C}$ je souhlasná s orientací plochy $\mathcal{S}$ a vektorové pole rot $\boldsymbol{F}$ *je dáno rovnicí*

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right).$$

Pomocí Gaussovy věty převeďte následující plošné integrály, kde $\mathcal{S}$ je hladká hranice konečného objemu $\mathcal{V}$ a $\cos\alpha$, $\cos\beta$ a $\cos\gamma$ jsou směrové kosiny vnější normály $\boldsymbol{n}$ k ploše $\mathcal{S}$

1. $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} x^3\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z + y^3\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}x + z^3\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$

2. $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} yz\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z + xz\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}x + xy\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$

3. $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} \frac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, \mathrm{d}S$

4. $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma \right) \mathrm{d}S$

5. $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)\cos\gamma \right] \mathrm{d}S$

Řešení:
1. V tomto případě je $F_x = x^3$, $F_y = y^3$ a $F_z = z^3$. Tedy

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 3\bigl(x^2 + y^2 + z^2\bigr)$$

a podle Gaussovy věty je

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{S}} x^3 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^3 \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z^3 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \boldsymbol{F} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \\ &= 3 \iiint_{\mathcal{V}} \bigl(x^2 + y^2 + z^2\bigr) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \,.\end{aligned}$$

2. Protože $F_x = yz$, $F_y = xz$, $F_z = xy$, je $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 0$. Tedy z Gaussovy věty plyne

$$\iint_{\mathcal{S}} yz \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + xz \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \boldsymbol{F} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 0 \,.$$

3. Jedná se o plošný integrál druhého druhu $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{F} \,\mathrm{d}\boldsymbol{S}$, kde $\boldsymbol{F} = \dfrac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.
Protože

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_x}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) = \frac{y^2 + z^2}{\bigl(x^2 + y^2 + z^2\bigr)^{3/2}} \\ \frac{\partial F_y}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) = \frac{x^2 + z^2}{\bigl(x^2 + y^2 + z^2\bigr)^{3/2}} \\ \frac{\partial F_z}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) = \frac{x^2 + y^2}{\bigl(x^2 + y^2 + z^2\bigr)^{3/2}}\end{aligned}$$

je $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \dfrac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. Podle Gaussovy věty tedy platí

$$\iint_{\mathcal{S}} \frac{x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \,\mathrm{d}S = 2 \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \,.$$

4. V uvedeném případě jde o integrál $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} \operatorname{grad} u \,\mathrm{d}\boldsymbol{S}$. Podle Gaussovy věty proto je

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{S}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma\right) \mathrm{d}S &= \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div}\bigl(\operatorname{grad} u\bigr) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \\ &= \iiint_{\mathcal{V}} \Delta u \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \,,\end{aligned}$$

kde $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ je *Laplaceův operátor.*

5. Jedná se o plošný integrál druhého druhu $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}$, kde $F_x = \dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z}$, $F_y = \dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x}$, $F_z = \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}$. (Tuto vektorovou funkci $\boldsymbol{F}$ lze psát také jako $\boldsymbol{F} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$, kde $\boldsymbol{A} = (P, Q, R)$). Ze záměny smíšených parciálních derivací plyne, že $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 0$. Tedy podle Gaussovy věty je

$$\iint_{\mathcal{S}} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos\gamma \right] \mathrm{d}S = 0\,.$$

---

6. Ukažte, že je-li $\mathcal{S}$ uzavřená prostá plocha a $\boldsymbol{l}$ libovolný konstantní směr, pak $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{l}\,\mathrm{d}S = 0$, kde $\boldsymbol{n}$ je vnější jednotková normála k ploše $\mathcal{S}$.

Řešení: Je-li $\boldsymbol{l} = \big(l_x, l_y, l_z\big)$ vyjádření vektoru $\boldsymbol{l}$ ve složkách, jedná se o plošný integrál druhého druhu $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{l}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ přes uzavřenou plochu $\mathcal{S}$. Protože je vektor $\boldsymbol{l}$ konstantní, je $\operatorname{div} \boldsymbol{l} = 0$, a tedy

$$\iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{l}\,\mathrm{d}S = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \boldsymbol{l}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 0\,.$$

---

7. Dokažte, že objem tělesa omezeného plochou $\mathcal{S}$ je roven $V = \dfrac{1}{3} \displaystyle\iint_{\mathcal{S}} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$, kde $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ jsou směrové kosiny vnější jednotkové normály k ploše $\mathcal{S}$.

Řešení: Protože $\boldsymbol{n} = \big(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\big)$, jde o integrál $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$, kde $\boldsymbol{F} = (x, y, z)$. Protože $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 3$, je podle Gaussovy věty

$$\iint_{\mathcal{S}} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,\mathrm{d}S = 3 \iiint_{\mathcal{V}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 3V\,.$$

---

8. Dokažte, že objem kužele omezeného hladkou kuželovou plochou $f\left(\dfrac{x}{z}, \dfrac{y}{z}\right) = 0$ a rovinou $Ax + By + Cz + D = 0$ je roven $V = \dfrac{1}{3}\,SH$, kde S je obsah podstavy kužele, který leží v dané rovině a H je jeho výška.

Řešení: Podle výsledku příkladu **7** lze najít objem tělesa omezeného plochou $\mathcal{S}$ pomocí vztahu $V = \dfrac{1}{3} \displaystyle\iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}$, kde $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$. V tomto případě se plocha $\mathcal{S}$

skládá ze dvou částí: $\mathcal{S}_1$ pláště kužele $f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$ a $\mathcal{S}_2$ části roviny $Ax + By + Cz + D = 0$.
Normála k ploše $\mathcal{S}_1$ je rovnoběžná s vektorem

$$\boldsymbol{n}_1 \sim \operatorname{grad} f = \left(\frac{1}{z}\, f_1', \frac{1}{z}\, f_2', -\frac{x}{z^2}\, f_1' - \frac{y}{z^2}\, f_2'\right),$$

kde f_1', resp. f_2', jsou parciální derivace funkce $f(u,v)$ podle první, resp. druhé proměnné. V tomto případě je ale $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n}_1 = 0$, a tedy $\iint_{\mathcal{S}_1} \boldsymbol{r}\, \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$.
Jednotková normála k rovině $Ax + By + Cz + D = 0$ je $\boldsymbol{n}_2 = \dfrac{(A,B,C)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.
Proto je

$$\iint\limits_{\mathcal{S}_2} \boldsymbol{r}\, \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint\limits_{\mathcal{S}_2} \frac{Ax+By+Cz}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\, \mathrm{d}S = \iint\limits_{\mathcal{S}} \frac{-D\, \mathrm{d}S}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{-DS}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,.$$

Dokazovaný vztah plyne z toho, že podle příkladu **13/26** je $\dfrac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = H$ vzdálenost bodu $[0;0]$, tj. vrcholu kužele, od roviny $\mathcal{S}_2$, a tedy výška kužele.

---

9. Určete objem tělesa omezeného plochami $z = \pm c$ a $x = a\cos u \cos v + b \sin u \sin v$, $y = a \cos u \sin v + b \sin u \cos v$, $z = c \sin u$.
Řešení: Při výpočtu objemu V tělesa $\mathcal{V}$ použijeme výsledku příkladu **7**, tj. vztahu $3V = \iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{r}\, \mathrm{d}\boldsymbol{S}$, kde $\mathcal{S}$ je kladně orientovaná hranice tělesa $\mathcal{V}$ a $\boldsymbol{r} = (x,y,z)$. Dané těleso je omezené třemi plochami, podstavami $\mathcal{S}_\pm$ a pláštěm $\mathcal{S}_p$. Pro tyto plochy je

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_+ :\ & x = r\sin v\,,\ y = r\cos v\,,\ z = c\,; && 0 < r < b\,,\ 0 < v < 2\pi\\
\mathcal{S}_- :\ & x = r\sin v\,,\ y = r\cos v\,,\ z = -c\,; && 0 < r < b\,,\ 0 < v < 2\pi
\end{aligned}$$

$$\mathcal{S}_p :\ x = a\cos u\cos v + b\sin u \sin v\,,\ y = a\cos v \sin v + b \sin u \cos v\,,\ z = a\sin u\,,$$

kde $-\dfrac{\pi}{2} < u < \dfrac{\pi}{2}$, $0 < v < 2\pi$.
Jednotkové normály k plochám $\mathcal{S}_\pm$ jsou $\boldsymbol{n}_\pm = (0,0,\pm 1)$ (orientace je volena tak, aby normála mířila ven z tělesa $\mathcal{V}$). Tedy integrály přes tyto plochy jsou

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{S}_+} \boldsymbol{r}\mathrm{d}\boldsymbol{S} &= \iint\limits_{x^2+y^2 \le b^2} z\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \iint\limits_{x^2+y^2 \le b^2} c\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \pi b^2 c\\
\iint_{\mathcal{S}_-} \boldsymbol{r}\mathrm{d}\boldsymbol{S} &= -\iint\limits_{x^2+y^2 \le b^2} z\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \iint\limits_{x^2+y^2 \le b^2} c\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \pi b^2 c
\end{aligned}$$

Na plášti jsou tečné vektory a normála

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{t}_u &= \bigl(-a\sin u\cos v + b\cos u\sin v, -a\sin u\sin v + b\cos u\cos v, c\cos u\bigr)\\
\boldsymbol{t}_v &= \bigl(-a\cos u\sin v + b\sin u\cos v, a\cos u\cos v - b\sin u\sin v, 0\bigr)\\
\boldsymbol{n} = \boldsymbol{t}_u \times \boldsymbol{t}_v &= \bigl(-ac\cos^2 u\cos v + bc\cos u\sin u\cos v,\\
&\qquad - ac\cos^2 u\sin v + bc\cos u\sin u\cos v, -(a^2+b^2)\cos u\sin u + 2ab\cos v\sin v\bigr)
\end{aligned}$$

Protože v bodě $u = v = 0$ je normála $\boldsymbol{n} = (-1, 0, 0)$, míří tato normála dovnitř tělesa $\mathcal{V}$. Proto musíme při výpočtu použít opačně orientovanou normálu. Tedy

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{S}_p} \boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} &= -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}u \int_0^{2\pi} \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}v = \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}u \int_0^{2\pi} \bigl(a^2 c\cos u - 2abc\sin u\cos v\sin v\bigr)\,\mathrm{d}v = 4\pi a^2 c\,.
\end{aligned}$$

Tedy objem daného tělesa je

$$V = \frac{1}{3}\iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{3}\bigl(2\pi b^2 c + 4\pi a^2 c\bigr) = \frac{2}{3}\,\pi c\bigl(2a^2 + b^2\bigr)\,.$$

---

10. Najděte objem tělesa omezeného plochou $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = -u + a\cos v$, $u \geq 0$, a rovinami $x = 0$ a $z = 0$; $a > 0$.

Řešení: Objem daného V tělesa $\mathcal{V}$ lze najít pomocí plošného integrálu druhého druhu přes hranici $\mathcal{S}$ tělesa $\mathcal{V}$

$$V = \frac{1}{3}\iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}\,,$$

kde $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$. Těleso $\mathcal{C}$ je omezeno dvěma rovinami (jsou-li to plochy)

$$\begin{aligned}
&\mathcal{S}_x:\ x = 0\,; \quad \boldsymbol{n} = (1, 0, 0)\,; \quad \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n} = 0\,;\\
&\mathcal{S}_z:\ z = 0\ \ ; \quad \boldsymbol{n} = (0, 0, 1)\,; \quad \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n} = 0\,.
\end{aligned}$$

Tedy integrály přes tyto plochy jsou rovny nule a

$$V = \frac{1}{3}\iint_{\mathcal{S}_p} \boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}\,,$$

kde plocha $\mathcal{S}_p$ je dána parametrickými rovnicemi $x = u\cos v$, $y = u\sin v$ a $z = -u + a\cos v$, kde $u\cos v > 0$, $-u + a\cos v > 0$. Z těchto nerovností plyne, že

$0 < u < a\cos v$ a $-\dfrac{\pi}{2} < v < \dfrac{\pi}{2}$. Protože tečné vektory k souřadnicovým křivkám a normála jsou

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{t}_u &= (\cos v, \sin v, -1)\\
\boldsymbol{t}_v &= (-u\sin v, u\cos v, -a\sin v)\\
\boldsymbol{n} = \boldsymbol{t}_u \times \boldsymbol{t}_v &= (u\cos v - a\sin^2 v, u\sin v + a\cos v\sin v, u)\\
\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n} &= au\cos v
\end{aligned}$$

Tedy objem tělesa je

$$V = \frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}v \int_0^{a\cos v} au\cos v\,\mathrm{d}v = \frac{1}{6}\,a^3\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^3 v\,\mathrm{d}v = \frac{2}{9}\,a^3\,.$$

---

11. Najděte objem tělesa omezeného anuloidem $x = (b + a\cos\psi)\cos\varphi$, $y = (b + a\cos\psi)\sin\varphi$, $z = a\sin\psi$, $0 < a \le b$.

Řešení: Objem V tělesa $\mathcal{V}$, které je ohraničeno plochou $\mathcal{S}$ lze najít pomocí plošného integrálu druhého druhu ze vztahu $3V = \iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}$, kde $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$. Protože anuloid je omezen plochou $x = (b+a\cos\psi)\cos\varphi$, $y = (b+a\cos\psi)\sin\varphi$, $z = a\sin\psi$, kde $0 < \psi < 2\pi$ a $0 < \varphi < 2\pi$, jsou tečné vektory k souřadnicovým křivkám a normála k ploše dána vztahy

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{t}_\varphi &= \big(-(b + a\cos\psi)\sin\varphi, (b + a\cos\psi)\cos\varphi, 0\big)\\
\boldsymbol{t}_\psi &= \big(-a\sin\psi\cos\varphi, -a\sin\psi\sin\varphi, a\cos\psi\big)\\
\boldsymbol{n} &= \big(a(b + a\cos\psi)\cos\psi\cos\varphi, a(b + a\cos\psi)\cos\psi\sin\varphi, a(b + a\cos\psi)\sin\psi\big)\\
\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n} &= a(b + a\cos\psi)(a + b\cos\psi)
\end{aligned}$$

Z těchto vztahů dostaneme

$$3V = \iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi} a(b + a\cos\psi)(a + b\cos\psi)\,\mathrm{d}\psi = 6\pi^2a^2b\,.$$

Tedy objem daného anuloidu je $V = 2\pi^2a^2b$.

---

12. Pomocí Gaussovy věty vypočtěte plošný integrál $\iint_{\mathcal{S}} x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $\mathcal{S}$ je vnější strana hranice krychle $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$, $0 \le z \le a$.

Řešení: Podle Gaussovy věty je $\iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div}\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde $\mathcal{V}$ je těleso, jehož hranice je $\mathcal{S}$. V našem případě je $\boldsymbol{F} = \big(x^2, y^2, z^2\big)$ a těleso $\mathcal{V}$ je krychle $0 < x < a$, $0 < y < a$, $0 < z < a$. Protože $\operatorname{div}\boldsymbol{F} = 2(x + y + z)$, je

$$\iint_{\mathcal{S}} x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\iiint_{\mathcal{V}}(x + y + z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 3a^4\,.$$

13. Pomocí Gaussovy věty vypočtěte plošný integrál $\iint_{\mathcal{S}} x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $\mathcal{S}$ je vnější strana kulové plochy $x^2+y^2+z^2=a^2$.

Řešení: Podle Gaussovy věty je $\iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div}\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde $\mathcal{V}$ je těleso, jehož hranice je $\mathcal{S}$. V našem případě je $\boldsymbol{F} = \bigl(x^3, y^3, z^3\bigr)$ a těleso $\mathcal{V}$ je koule $x^2 + y^2 + z^2 < a^2$. Protože $\operatorname{div}\boldsymbol{F} = 3\bigl(x^2+y^2+z^2\bigr)$, je

$$\iint_{\mathcal{S}} x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 3\iiint_{\mathcal{V}} \bigl(x^2+y^2+z^2\bigr)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Pro výpočet tohoto integrálu je výhodné zavést sférické souřadnice $x = r\cos\theta\cos\varphi$, $y = r\cos\theta\sin\varphi$, $z = r\sin\theta$, kde $0 < r < a$, $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ a $0 < \varphi < 2\pi$. Protože jakobián zobrazení je $J = r^2\cos\theta$ je

$$\iint_{\mathcal{S}} x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^a r^4\cos\theta\,\mathrm{d}r = \frac{12}{5}\,\pi a^5\,.$$

---

14. Pomocí Gaussovy věty vypočtěte plošný integrál

$$\iint_{\mathcal{S}} (x-y+z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (y-z+x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (z-x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

kde $\mathcal{S}$ je vnější strana plochy $|x-y+z| + |y-z+x| + |z-x+y| = 1$.

Řešení: Daný integrál je vlastně plošný integrál druhého druhu $\iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}$, kde $\boldsymbol{F} = (x-y+z, y-z+x, z-x+y)$. Protože $\operatorname{div}\boldsymbol{F} = 3$, je podle Gaussovy věty

$$\iint_{\mathcal{S}} (x-y+z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (y-z+x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (z-x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 3\iiint_{\mathcal{V}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,,$$

kde těleso $\mathcal{V}$ je určeno nerovností $|x-y+z| + |y-z+x| + |z-x+y| \le 1$. Pro výpočet tohoto integrálu je výhodné zavést nové proměnné vztahy $u = x-y+z$, $v = y-z+x$ a $w = z-x+y$. Protože v těchto nových souřadnicích je těleso $\mathcal{V}$ určeno nerovnostmi $|u| + |v| + |w| \le 1$ a jakobián J zobrazení splňuje vztah

$$J^{-1} = \det\begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 4\,,$$

je

$$\iint_{\mathcal{S}} (x-y+z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (y-z+x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (z-x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{3}{4}\iiint_{\mathcal{V}} \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w\,.$$

Protože těleso se skládá z osmi stejných částí, které jsou stejné jako těleso $u+v+w \le 1$, $u > 0$, $v > 0$ a $w > 0$, tj. $0 < w < 1-u-v$, $0 < v < 1-u$ a $0 < u < 1$ je

$$\iint_{\mathcal{S}} (x-y+z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (y-z+x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (z-x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 6\int\limits_0^1 \mathrm{d}u \int\limits_0^{1-u} \mathrm{d}v \int\limits_0^{1-u-v} \mathrm{d}w = 1$$

---

15. Vypočtěte $\iint_{\mathcal{S}} (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$, kde $\mathcal{S}$ je část kuželové plochy $x^2+y^2=z^2$, $0 \le z \le h$ a $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ jsou směrové kosiny vnější normály k této ploše.

Řešení: Jedná se vlastně o plošný integrál druhého druhu $\iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}$, kde $\boldsymbol{F} = \bigl(x^2, y^2, z^2\bigr)$. Abychom mohli použít Gaussovu větu, uzavřeme těleso plochou $\mathcal{S}_1$, která je dána vztahem $z = h$, $x^2+y^2 \le h^2$. Pak je

$$\iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{S} + \iint_{\mathcal{S}_1} \boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div}\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Protože $\operatorname{div}\boldsymbol{F} = 2(x+y+z)$ a normála k rovině $\mathcal{S}_1$ je $\boldsymbol{n} = (0,0,1)$, je

$$\iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 2\iiint_{\mathcal{V}} (x+y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - \iint\limits_{x^2+y^2\le h^2} h^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

kde $\mathcal{V}$ je kužel $x^2+y^2 \le z^2$, $0 < z < h$. Protože v posledním integrálu integrujeme konstantu h^2 přes kruh s poloměrem h, je tento integrál roven πh^4. Objemový integrál přes kužel $\mathcal{V}$ najdeme přechodem k cylindrickým souřadnicím $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$. Těleso je pak určené nerovnostmi $0 < r < z < h$, $0 < \varphi < 2\pi$. Protože jakobián zobrazení je $J = r$, dostaneme

$$2\iiint_{\mathcal{V}} (x+y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 2\int_0^h \mathrm{d}z \int_0^z \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} r\bigl(r\cos\varphi + r\sin\varphi + z\bigr)\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{2}\,h^4\,.$$

Tedy $\iint_{\mathcal{S}} (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\,\mathrm{d}S = -\frac{\pi}{2}\,h^4$.

---

16. Těleso $\mathcal{V}$ je zcela ponořeno do kapaliny. Pomocí Pascalova zákona dokažte, že vztlaková síla kapaliny se rovná váze kapaliny v objemu tělesa a míří vertikálně vzhůru; *Archimedův zákon.*

Řešení: Soustavu souřadnic vybereme tak, že hladina kapaliny je v rovině $z = 0$ a osa Oz míří vzhůru ven z kapaliny. Označíme-li ρ hustotu kapaliny a g gravitační zrychlení, plyne z Pascalova zákona, že infinitezimální síla, kterou kapalina působí na těleso v bodě $[x; y; x]$ je rovna $\mathrm{d}\boldsymbol{F} = z\rho g\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S$, kde $\boldsymbol{n}$ je vnější jednotková normála k hranici $\mathcal{S}$ tělesa $\mathcal{V}$. Celková síla tedy je $\boldsymbol{F} = \iint_{\mathcal{S}} z\rho g \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}S$. Pro složky síly tedy platí

$$F_x = \iint_{\mathcal{S}} \rho g n_x \,\mathrm{d}S = \iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{f}_x \,\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$
$$F_y = \iint_{\mathcal{S}} \rho g n_y \,\mathrm{d}S = \iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{f}_y \,\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$
$$F_z = \iint_{\mathcal{S}} \rho g n_z \,\mathrm{d}S = \iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{f}_z \,\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

kde $\boldsymbol{f}_x = \big(\rho g z, 0, 0\big)$, $\boldsymbol{f}_y = \big(0, \rho g z, 0\big)$ a $\boldsymbol{f}_z = \big(0, 0, \rho g z\big)$. Podle Gaussovy věty proto je

$$F_x = \iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{f}_x \,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \boldsymbol{f}_x \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = 0$$
$$F_y = \iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{f}_y \,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \boldsymbol{f}_y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = 0$$
$$F_z = \iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{f}_z \,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \boldsymbol{f}_z \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = \iiint_{\mathcal{V}} \rho g \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = V\rho g = Mg\,,$$

kde $M = V\rho$ je hmotnost kapaliny v tělese $\mathcal{V}$.

---

17. Pomocí Stokesovy věty vypočtěte křivkový integrál $\oint_{\mathcal{C}} y \,\mathrm{d}x + z \,\mathrm{d}y + x \,\mathrm{d}z$, kde $\mathcal{C}$ je kružnice $x^2+y^2+z^2 = a^2$, $x+y+z = 0$, která se probíhá proti směru hodinových ručiček, když se na ni díváme z kladné strany osy Ox.

Řešení: Podle Stokesovy věty platí $\oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{f} \,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \iint_{\mathcal{S}} \operatorname{rot} \boldsymbol{f} \,\mathrm{d}\boldsymbol{S}$, kde $\mathcal{S}$ je orientovaná plocha se souhlasně orientovanou hranicí $\mathcal{C}$. V našem případě je $\boldsymbol{f} = (y, z, x)$, a tedy $\operatorname{rot} \boldsymbol{f} = (-1, -1, -1)$. Za plochu $\mathcal{S}$ lze volit například kruh $x + y + z = 0$, $x^2+y^2+z^2 \le a^2$. Jestliže budeme plochu $\mathcal{S}$ popisovat parametry x a y, je $z = -x-y$, $x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + xy + y^2 \le \dfrac{a^2}{2}$. Protože tečné vektory k souřadnicovým křivkám jsou $\boldsymbol{t}_x = (1, 0, -1)$ a $\boldsymbol{t}_y = (0, 1, -1)$, je normála $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{t}_x \times \boldsymbol{t}_y = (1, 1, 1)$. Protože křivka $\mathcal{C}$ je orientovaná tak, že při pohledu z kladné strany osy Ox ji probíháme proti směru pohybu hodinových ručiček, udává normálový vektor $\boldsymbol{n} = (1, 1, 1)$ orientaci plochy $\mathcal{S}$ souhlasnou s orientací křivky $\mathcal{C}$, protože jeho první složka je kladná. Protože

$$x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\,y^2 \le \frac{a^2}{2}$$

bude výhodné zavést nové souřadnice vztahy $x + \dfrac{y}{2} = \dfrac{ar}{\sqrt{2}} \cos\varphi$ a $y = \sqrt{\dfrac{2}{3}}\, ar \sin\varphi$, kde $0 < r < 1$ a $0 < \varphi < 2\pi$. Tedy

$$\begin{aligned} x &= ar\left(\frac{\cos\varphi}{\sqrt{2}} - \frac{\sin\varphi}{\sqrt{6}}\right) \\ y &= \sqrt{\frac{2}{3}}\, ar \sin\varphi \end{aligned} \implies J = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \frac{a^2 r}{\sqrt{3}}\,.$$

Proto je

$$\oint_{\mathcal{C}} y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z = -3\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 \frac{a^2 r}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}r = -\sqrt{3}\,\pi a^2\,.$$

---

18. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int_{AmB} (x^2 - yz)\,\mathrm{d}x + (y^2 - xz)\,\mathrm{d}y + (z^2 - xy)\,\mathrm{d}z$, po části šroubovice $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$, $z = \dfrac{h}{2\pi}\,\varphi$ s počátečním bodem $A = [a;0;0]$ a koncovým bodem $B = [a;0;h]$.

Řešení: Máme najít křivkový integrál druhého druhu $\displaystyle\int_{AmB} \boldsymbol{f}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}$, kde $\boldsymbol{f} = \bigl(x^2 - yz, y^2 - xz, z^2 - xy\bigr)$. Protože je funkce $\boldsymbol{f}$ spojitě diferencovatelná v celém $\mathbb{R}^2$ a $\operatorname{rot}\boldsymbol{f} = 0$, je integrál $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{f}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0$ pro každou uzavřenou křivku $\mathcal{C}$. Jestliže uzavřeme křivku AmB úsečkou BA z bodu B do bodu A, dostaneme uzavřenou křivku $\mathcal{C}$. Proto je $\displaystyle\int_{AmB} \boldsymbol{f}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} + \int_{BA} \boldsymbol{f}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0$. Parametrické rovnice této úsečky jsou $x = a$, $y = 0$ a $z = t$, $0 < t < h$. Protože se jedná o úsečku z bodu A do bodu B, je

$$\int_{AmB} (x^2 - yz)\,\mathrm{d}x + (y^2 - xz)\,\mathrm{d}y + (z^2 - xy)\,\mathrm{d}z = \int_0^h t^2\,\mathrm{d}t = \frac{h^3}{3}\,.$$

---

19. Nechť $\mathcal{C}$ je uzavřená křivka, která leží v rovině $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ jsou směrové kosiny normály roviny, a ohraničující plochu $\mathcal{S}$. Najděte

$$\oint_{\mathcal{C}} \det\begin{pmatrix} \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{pmatrix}\,,$$

kde hranice $\mathcal{C}$ je kladně orientovaná.

Řešení: Jedná se o křivkový integrál druhého druhu $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{f}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}$, kde $\boldsymbol{f} = \bigl(z\cos\beta - y\cos\gamma, x\cos\gamma - z\cos\alpha, y\cos\alpha - x\cos\beta\bigr) = \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r}$. Podle Stokesovy věty je $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{f}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \iint_{\mathcal{S}} \operatorname{rot}\boldsymbol{f}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}$, kde plocha $\mathcal{S}$ a křivka $\mathcal{C}$ jsou souhlasně orientované, tj. plocha $\mathcal{S}$ je orientovaná pomocí jednotkové normály $\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Protože $\operatorname{rot}\boldsymbol{f} = 2(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = 2\boldsymbol{n}$, je

$$\oint_{\mathcal{C}} \det\begin{pmatrix} \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{pmatrix} = \iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{n}\cdot\operatorname{rot} f\,\mathrm{d}S = \iint_{\mathcal{S}} 2\bigl|\boldsymbol{n}\bigr|^2\,\mathrm{d}S = 2S\,,$$

kde S je obsah plochy $\mathcal{S}$.

---

20. Pomocí Stokesovy věty vypočtěte integrál $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} (y+z)\,\mathrm{d}x + (z+x)\,\mathrm{d}y + (x+y)\,\mathrm{d}z$, kde $\mathcal{C}$ je elipsa $x = a\sin^2 t$, $y = 2a\sin t\cos t$, $z = a\cos^2 t$, $0 \le t \le \pi$, orientovaná ve směru rostoucího parametru t.

Řešení: Jedná se o křivkový integrál druhého druhu $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{f}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}$, kde $\boldsymbol{f} = (y+z, z+x, x+y)$. Protože je vektorové pole $\boldsymbol{f}$ spojitě diferencovatelné a $\operatorname{rot}\boldsymbol{f} = 0$, je podle Stokesovy věty

$$\oint_{\mathcal{C}} (y+z)\,\mathrm{d}x + (z+x)\,\mathrm{d}y + (x+y)\,\mathrm{d}z = \iint_{\mathcal{S}} \operatorname{rot}\boldsymbol{f}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0\,.$$

---

21. Pomocí Stokesovy věty vypočtěte integrál $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} (y-z)\,\mathrm{d}x + (z-x)\,\mathrm{d}y + (x-y)\,\mathrm{d}z$, kde $\mathcal{C}$ je elipsa $x^2+y^2 = a^2$, $\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{h} = 1$; $a > 0$, $h > 0$, která se probíhá proti směru hodinových ručiček, když se na ni díváme z kladné strany osy Ox.

Řešení: Daná křivka je průsečíkem roviny $\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{h} = 1$ a válce $x^2+y^2 = a^2$. Protože je vektorová funkce $\boldsymbol{f} = (y-z, z-x, x-y)$ spojitá na celém $\mathbb{R}^2$ a její rotace je $\operatorname{rot}\boldsymbol{f} = (-2,-2,-2)$ je podle Stokesovy věty

$$\oint_{\mathcal{C}} (y-z)\,\mathrm{d}x + (z-x)\,\mathrm{d}y + (x-y)\,\mathrm{d}z = \iint_{\mathcal{S}} \operatorname{rot}\boldsymbol{f}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}\,.$$

kde $\mathcal{S}$ je orientovaná plocha souhlasně orientovaná s její hranicí $\mathcal{C}$. Za plochu $\mathcal{S}$ lze zvolit rovinu $z = h - \dfrac{h}{a}x$, kde $x^2+y^2 \le a^2$. Protože tečné vektory jsou $\boldsymbol{t}_x = \left(1, 0, -\dfrac{h}{a}\right)$, $\boldsymbol{t}_y = (0,1,0)$ a příslušná normála $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{t}_x \times \boldsymbol{t}_y = \left(\dfrac{h}{a}, 0, 1\right)$ je souhlasně orientovaná s křivkou $\mathcal{C}$, protože její první složka je kladná, je

$$\oint_{\mathcal{C}} (y-z)\,\mathrm{d}x + (z-x)\,\mathrm{d}y + (x-y)\,\mathrm{d}z = -2 \iint\limits_{x^2+y^2<a^2} \left(\frac{h}{a} + 1\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -2\pi a(h+a)\,.$$

---

22. Pomocí Stokesovy věty vypočtěte integrál $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} (y^2+z^2)\,\mathrm{d}x + (x^2+z^2)\,\mathrm{d}y + (x^2+y^2)\,\mathrm{d}z$, kde $\mathcal{C}$ je křivka $x^2+y^2+z^2 = 2Rx$, $x^2+y^2 = 2rx$, $0 < r < R$, $z > 0$, orientovaná tak, že vnější strana menší části kulové plochy $x^2+y^2+z^2 = 2Rx$ ohraničená touto křivkou je vlevo.

Řešení: Protože vektorová funkce $\boldsymbol{f} = \left(y^2+z^2, x^2+z^2, x^2+y^2\right)$ je spojitě diferencovatelná na celém $\mathbb{R}^2$ a křivka $\mathcal{C}$ je uzavřená, lze použít Stokesovu větu $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{f}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} =$

$\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} \operatorname{rot} \boldsymbol{f}\, \mathrm{d}\boldsymbol{S}$, kde $\mathcal{S}$ je libovolná plocha, jejíž hranice $\mathcal{C}$ je s ní souhlasně orientovaná a $\operatorname{rot} \boldsymbol{f} = 2\bigl(y-z, z-x, x-y\bigr)$. Za plochu $\mathcal{S}$ lze například zvolit část sféry $x^2+y^2+z^2 = 2Rx$, pro kterou je $x^2+y^2 \le 2rx$ a $z > 0$. Jestliže zvolíme za parametry plochy proměnné x a y, je rovnice plochy $z = \sqrt{2Rx - x^2 - y^2}$. Tečné vektory k této ploše jsou $\boldsymbol{t}_x = \left(1, 0, \dfrac{R-x}{z}\right)$, $\boldsymbol{t}_y = \left(0, 1, -\dfrac{y}{z}\right)$, a tedy příslušná normála $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{t}_x \times \boldsymbol{t}_y = \left(\dfrac{x-R}{z}, \dfrac{y}{z}, 1\right)$. Protože třetí složka této normály je kladná, je souhlasně orientována s křivkou $\mathcal{C}$. Proto platí

$$\oint_{\mathcal{C}} (y^2+z^2)\,\mathrm{d}x + (x^2+z^2)\,\mathrm{d}y + (x^2+y^2)\,\mathrm{d}z =$$
$$= \iint\limits_{x^2+y^2 \le 2rx} 2R\left(1 - \frac{y}{\sqrt{2Rx - x^2 - y^2}}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\pi R r^2\,,$$

protože integrační oblast je přes kruh s poloměrem r, který je symetrický vzhledem k ose Ox a funkce $\dfrac{y}{\sqrt{2Rx - x^2 - y^2}}$ je lichá v proměnné y.

---

23. Pomocí Stokesovy věty vypočtěte integrál $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} (y^2-z^2)\,\mathrm{d}x + (z^2-x^2)\,\mathrm{d}y + (x^2-y^2)\,\mathrm{d}z$, kde $\mathcal{C}$ je průnik povrchu krychle $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$, $0 \le z \le a$ s rovinou $x+y+z = \dfrac{3}{2}a$, která se probíhá proti směru hodinových ručiček, když se na ni díváme z kladné strany osy Ox.

Řešení: Protože vektorová funkce $\boldsymbol{f} = \bigl(y^2-z^2, z^2-x^2, x^2-y^2\bigr)$ má spojité parciální derivace a křivka $\mathcal{C}$ je uzavřená, lze pro výpočet integrálu použít Stokesovu větu $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{f}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \iint_{\mathcal{S}} \operatorname{rot}\boldsymbol{f}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}$, kde $\mathcal{S}$ je libovolná plocha, která má orientaci shodnou s orientací její hranice $\mathcal{C}$. Za plochu $\mathcal{S}$ lze vybrat například část roviny $x+y+z = \dfrac{3}{2}\,a$, která leží uvnitř krychle. Protože $\operatorname{rot}\boldsymbol{f} = -2(y+z, z+x, x+y)$ a část roviny $\mathcal{S}$ můžeme zapsat pomocí vztahů $z = \dfrac{3}{2}\,a - x - y$, $0 < x < a$, $0 < y < a$ a $0 < \dfrac{3}{2}\,a - x - y < a$, $\boldsymbol{n} = (1,1,1)$ udává orientaci souhlasnou s křivkou $\mathcal{C}$, je

$$\oint\limits_{\mathcal{C}} (y^2-z^2)\,\mathrm{d}x + (z^2-x^2)\,\mathrm{d}y + (x^2-y^2)\,\mathrm{d}z = -4\iint\limits_{\mathcal{S}} (x+y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -6a\iint\limits_{\mathcal{S}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Poslední integrál je vlastně obsah oblasti daného nerovnostmi $0 < x < a$, $0 < y < a$ a $\dfrac{1}{2} < x+y < \dfrac{3}{2}\,a^2$, tj. $\dfrac{3}{4}\,a^2$. Tedy $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} (y^2-z^2)\,\mathrm{d}x + (z^2-x^2)\,\mathrm{d}y + (x^2-y^2)\,\mathrm{d}z = -\frac{9}{2}\,a^3$.

---

24. Pomocí Stokesovy věty vypočtěte integrál $\oint_{\mathcal{C}} y^2z^2\,\mathrm{d}x + x^2z^2\,\mathrm{d}y + x^2y^2\,\mathrm{d}z$, kde $\mathcal{C}$ je uzavřená křivka $x = a\cos t$, $y = a\cos 2t$, $z = a\cos 3t$ orientovaná ve směru rostoucího parametru t.

Řešení: Protože funkce $x(t)$, $y(t)$ a $z(t)$ jsou periodické s periodou 2π, probíhá t interval délky 2π. Protože souřadnice y a z lze jednoznačně vyjádřit pomocí proměnné x ve tvaru

$$y = \frac{2x^2 - a^2}{a}\,, \qquad z = \frac{x\bigl(4x^2 - 3a^2\bigr)}{a^2}\,,$$

neomezuje uzavřená křivka $\mathcal{C}$ plochu s nenulovým obsahem. Například, je-li $0 < t < 2\pi$, probíhá od bodu $[1;1;1]$ pro $t = 0$ do bodu $[-1;1;-1]$ po jisté křivce $\mathcal{C}_1$ a pak od bodu $[-1;1;-1]$ do bodu $[1;1;1]$ po stejné, ale opačně orientované křivce. Proto je $\oint_{\mathcal{C}} y^2z^2\,\mathrm{d}x + x^2z^2\,\mathrm{d}y + x^2y^2\,\mathrm{d}z = 0$.

Cvičení 24

Základy teorie pole

1. Gradient. Nechť $u(\boldsymbol{r}) = u(x, y, z)$, kde $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, je spojitě diferencovatelné skalární pole. *Gradientem* tohoto pole se nazývá vektor

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}\,,$$

neboli krátce $\operatorname{grad} u = \nabla u$, kde

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\,.$$

Gradient pole u v daném bodě $[x; y; z]$ má směr normály k *hladině* $u(x, y, z) = C$, která prochází tímto bodem. Tento vektor udává pro každý bod velikost

$$|\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

a směr největší rychlosti změny funkce u.
Derivace pole u v některém směru $\boldsymbol{\ell} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ je rovna

$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = \operatorname{grad} u \cdot \boldsymbol{\ell} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\,.$$

2. Divergence a rotace pole. Je-li

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = a_x(x, y, z)\boldsymbol{i} + a_y(x, y, z)\boldsymbol{j} + a_z(x, y, z)\boldsymbol{k}$$

spojitě diferencovatelné *vektorové pole*, pak se skalár

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} \equiv \nabla \cdot \boldsymbol{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

nazývá *divergence* vektorového pole $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$.
Vektor

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} \equiv \nabla \times \boldsymbol{a} = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{pmatrix}$$

se nazývá *rotace* vektorového pole $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$.

3. Tok vektoru plochou. Nechť je dáno vektorové pole $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ v oblasti Ω. *Tok vektoru danou plochou* $\mathcal{S}$, která leží v oblasti Ω a která je charakterizována jednotkovým normálovým vektorem $\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, je dán integrálem

$$\iint_{\mathcal{S}} a_n \,\mathrm{d}S = \iint_{\mathcal{S}} (a_x\cos\alpha + a_y\cos\beta + a_z\cos\gamma)\,\mathrm{d}S = \iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}\,,$$

kde $a_n = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}$ je projekce vektoru do směru normály. *Gaussova věta* ve vektorovém vyjádření má tvar

$$\iint_{\mathcal{S}} a_n \,\mathrm{d}S = \iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div}\boldsymbol{a}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,,$$

kde $\mathcal{S}$ je plocha, která je hranicí objemu $\mathcal{V}$ a $\boldsymbol{n}$ je jednotkový vektor vnější normály k ploše $\mathcal{S}$.

4. CIRKULACE VEKTORU. Nechť $\mathcal{C}$ je křivka a $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ je vektorové pole. *Práce pole $\boldsymbol{a}$ po křivce $\mathcal{C}$* se nazývá číslo

$$\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\mathcal{C}} a_x\,\mathrm{d}x + a_y\,\mathrm{d}y + a_z\,\mathrm{d}z\,.$$

Je-li křivka $\mathcal{C}$ uzavřená, nazývá se tento integrál *cirkulace vektoru $\boldsymbol{a}$* po křivce $\mathcal{C}$. Vektorový tvar *Stokesovy věty* má tvar

$$\oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_{\mathcal{S}} (\operatorname{rot}\boldsymbol{a})\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_{\mathcal{S}} (\operatorname{rot}\boldsymbol{a})_n\,\mathrm{d}S\,,$$

kde $\mathcal{C}$ je uzavřená křivka, která je hranicí plochy $\mathcal{S}$, přičemž směr normály $\boldsymbol{n}$ k ploše $\mathcal{S}$ je třeba vybrat tak, aby pro pozorovatele, který stojí na ploše $\mathcal{S}$ hlavou ve směru normály, obíhala křivka $\mathcal{C}$ proti směru hodinových ručiček.

5. POTENCIÁLNÍ POLE. Vektorové pole $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$, které je gradientem nějakého skalárního pole u, tj.

$$\operatorname{grad} u = \boldsymbol{a}\,,$$

se nazývá *potenciální* a skalární pole u se nazývá *potenciálem* tohoto pole.
Je-li funkce u potenciál vektorového pole $\boldsymbol{a}$, je

$$\int_{AB} \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = u(B) - u(A)\,.$$

Speciálně je cirkulace vektoru $\boldsymbol{a}$ rovna nule.
Nutná a postačující podmínka pro to, aby pole $\boldsymbol{a}$ dané v jednoduše souvislé oblasti bylo potenciální, je $\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = 0$.

1. Najděte velikost a směr gradientu pole $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$ v bodech: a) $[0;0;0]$; b) $[1;1;1]$ a c) $[2;0;1]$. V jakém bodě je gradient roven nule?

Řešení: V obecném bodě $[x;y;z]$ je

$$\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) = (2x + y + 3, x + 4y - 2, 6z - 6)\,.$$

Tedy ($\boldsymbol{n}$ je jednotkový vektor ve směru gradientu v daném bodě)

$$\begin{aligned}
&\operatorname{grad} u(0,0,0) = (3,-2,-6)\,, && \left|\operatorname{grad} u(0,0,0)\right| = 7\,, && \boldsymbol{n} = \frac{1}{7}\,(3,-2,-6)\\
&\operatorname{grad} u(1,1,1) = (6,3,0)\,, && \left|\operatorname{grad} u(1,1,1)\right| = 3\sqrt{5}\,, && \boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{5}}\,(2,1,0)\\
&\operatorname{grad} u(2,0,1) = (7,0,0)\,, && \left|\operatorname{grad} u(2,0,1)\right| = 7\,, && \boldsymbol{n} = (1,0,0)
\end{aligned}$$

Gradient je roven nule v bodě, kde jsou splněny rovnice

$$\begin{array}{l} 2x+y+3=0\\ x+4y-2=0 \iff x=-2\,,\ y=z=1\,.\\ 6z-6=0 \end{array}$$

---

2. Nechť $u = xy - z^2$. Najděte velikost a směr $\operatorname{grad} u$ v bodě $[-9;12;10]$. Kolik je derivace $\dfrac{\partial u}{\partial \ell}$ ve směru osy úhlu xOy?

Řešení: V obecném bodě $[x;y;z]$ je

$$\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) = (y, x, -2z)\,.$$

V bodě $M = [-9,12,10]$ je $\operatorname{grad} u(M) = (12,-9,-20)$. Jeho velikost $\left|\operatorname{grad} u(M)\right| = \sqrt{144+81+400} = 25$ a směr $\dfrac{\operatorname{grad} u(M)}{\left|\operatorname{grad} u(M)\right|} = \dfrac{1}{25}\,(12,-9,-20)$.

Protože osa úhlu xOy je $\boldsymbol{\ell} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,(1,1,0)$, je $\dfrac{\partial u}{\partial \ell}(M) = \boldsymbol{\ell} \cdot \operatorname{grad}(M) = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

---

3. V jakých bodech prostoru je gradient pole $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$: a) kolmý na osu Oz; b) rovnoběžný s osou Oz; c) roven nule?

Řešení: V obecném bodě $[x;y;z]$ je

$$\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) = (3x^2-3yz, 3y^2-3xz, 3z^2-3xy)\,.$$

a) Aby byl tento vektor kolmý na osu Oz, musí být jeho třetí složka rovna nule, tj. $z^2 = xy$.

b) Aby byl tento vektor rovnoběžný s osou Oz, musí být nulové jeho první dvě složky, tj. $x^2 = yz$ a $y^2 = xz$. Z této soustavy plyne, $x = y = 0$, z libovolné nebo $x = y = z$.

c) Aby byl tento vektor nulový, musí platit $x^2 = yz$, $y^2 = xz$ a $z^2 = xy$, tj. $x = y = z$.

---

4. Je dáno skalární pole $u = \ln \dfrac{1}{r}$, kde $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$. V jakých bodech prostoru $Oxyz$ platí rovnost $|\operatorname{grad} u| = 1$?

Řešení: V obecném bodě $[x; y; z]$ je

$$\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r^2} \left(x-a, y-b, z-c \right).$$

Tedy pro hledané body musí platit $\left|\operatorname{grad} u\right| = \dfrac{1}{r} = 1$.

---

5. Najděte hladiny skalárního pole $u = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+8)^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + (z-8)^2}$. Najděte hladinu, která prochází bodem $[9; 12; 28]$. Kolik je $\max u$ v oblasti $x^2 + y^2 + z^2 \leq 36$?

Řešení: Hladiny konstantní úrovně jsou plochy, na kterých je $u =$ konst. V daném případě je to množina všech bodů, které mají od bodů $[0; 0; -8]$ a $[0; 0; 8]$ konstantní součet vzdáleností, a tedy rotační elipsoidy s ohnisky $[0; 0; -8]$ a $[0; 0; 8]$. Abychom našli rovnici tohoto elipsoidu pro konstantní u, umocníme vztah

$$u - \sqrt{x^2 + y^2 + (z+8)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-8)^2}\,.$$

Po úpravách pak získáme rovnost

$$4u^2 \left(x^2 + y^2 \right) + 4 \left(u^2 - 256 \right) z^2 = u^2 \left(u^2 - 256 \right).$$

Tedy pro $u < 16$ je to prázdná množina, pro $u = 16$ dostaneme úsečku z bodu $[0; 0; -8]$ do bodu $[0; 0; 8]$ a pro $u > 16$ jsou to rotační elipsoidy

$$\frac{4 \left(x^2 + y^2 \right)}{u^2 - 256} + \frac{4z^2}{u^2} = 1\,.$$

V bodě $P = [9; 12; 28]$ je $u(P) = 64$, a tedy hladina konstantní úrovně je rotační elipsoid

$$\frac{x^2 + y^2}{960} + \frac{z^2}{1024} = 1\,.$$

Funkce $u(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+8)^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + (z-8)^2}$ je na kompaktní množině $M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}\,;\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 36 \right\}$ spojitá. Nabývá tem tedy maxima. To může být ve vnitřních bodech množiny M, tj. v bodech, kde $x^2 + y^2 + z^2 < 36$, nebo na hranici této množiny, tj. v bodech, kde $x^2 + y^2 + z^2 = 36$.
Ve vnitřním bodě, kde nabývá maxima musí platit

$$\begin{aligned}
u'_x &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+8)^2}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-8)^2}} = 0 \\
u'_y &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+8)^2}} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-8)^2}} = 0 \quad \Longleftarrow \quad \begin{array}{c} x = y = 0 \\ -6 \leq z \leq 6 \end{array} \\
u'_z &= \frac{z+8}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+8)^2}} + \frac{z-8}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-8)^2}} = 0
\end{aligned}$$

V těchto bodech je hodnota funkce $u = 16$.
V bodě na hranici je funkce $u(x, y, z) = \sqrt{100 + 16z} + \sqrt{100 - 16z} = F(z)$, kde $-6 \le z \le 6$. Tato funkce může nabývat extrém v bodech, kde je

$$F'(z) = \frac{8}{\sqrt{100 + 16z}} - \frac{8}{\sqrt{100 - 16z}} = 0 \Longleftrightarrow z = 0$$

nebo v bodech $z = \pm 6$. V bodech, kde $z = 0$ je $u = 20$ a v bodech $z = \pm 6$ je $u = 16$. Tedy funkce nabývá na dané množině maxima $u_{\max} = 20$ na kružnici $x^2 + y^2 = 36$, $z = 0$

---

6. Najděte úhel φ mezi gradienty pole $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$ v bodech $[1; 2; 2]$ a $[-3; 1; 0]$.

Řešení: V obecném bodě $[x; y; z]$ je

$$\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \left(\frac{y^2 + z^2 - x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \frac{-2xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \frac{-2xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \right).$$

Gradient $\operatorname{grad} u(1, 2, 2) = \dfrac{1}{81}\,(7, -4, -4)$ je tedy úměrný vektoru $\boldsymbol{n}_1 = (7, -4, -4)$ a $\operatorname{grad} u(-3, 1, 0) = \dfrac{1}{100}\,(-8, 6, 0)$ je úměrný vektoru $\boldsymbol{n}_2 = (-4, 3, 0)$. Kosinus úhlu φ mezi vektory $\boldsymbol{n}_1$ a $\boldsymbol{n}_2$ je

$$\cos \varphi = \frac{\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1| \cdot |\boldsymbol{n}_2|} = -\frac{8}{9}\,.$$

---

7. Nechť je dáno skalární pole $u = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. Sestrojte ekvipotenciály a plochy konstantní velikosti gradientu pole. Najděte $\inf u$, $\sup u$, $\inf |\operatorname{grad} u|$ a $\sup |\operatorname{grad} u|$ v oblasti $1 < z < 2$.

Řešení: Ekvipotenciální plochy jsou určeny rovnicí $u(x, y, z) = C = \text{konst.}$ Protože $|z| \le \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, jsou to pro $|C| > 1$ prázdné množiny. Pro $C = \pm 1$, je ekvipotenciála dána rovnicí $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Tedy pro $C = 1$ je to polopřímka $x = y = 0$ a $z > 0$ a pro $C = -1$ polopřímka $x = y = 0$ a $z < 0$. Je-li $|C| < 1$ jsou ekvipotenciály řešení rovnice $z = C\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, tj. kuželové plochy $C^2(x^2 + y^2) = (1 - C^2)z^2$, $z > 0$ pro $C > 0$ a $z < 0$ pro $C < 0$. A konečně pro $C = 0$ dostaneme rovinu $z = 0$ bez bodu $[0; 0; 0]$.
Tedy $\inf u = -1$ na polopřímce $x = y = 0$, $z < 0$ a $\sup u = 1$ na polopřímce $x = y = 0$, $z > 0$.
Gradient pole $u(x, y, z)$ je

$$\operatorname{grad} u = \left(\frac{xz}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}}, \frac{yz}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}}, -\frac{x^2 + y^2}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}} \right)$$

a tedy jeho velikost

$$\left|\operatorname{grad} u\right| = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2}\,.$$

Gradient je tedy konstantní na plochách, které jsou dány rovnicí

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2} = C = \text{konst.}$$

Pro $C < 0$ jsou to prázdné množiny. Pro $C = 0$ dostaneme $x^2 + y^2 = 0$, a tedy přímku $x = y = 0$ bez bodu $[0;0;0]$. Pro $C > 0$ dostaneme rotační plochy dané rovnicí $\sqrt{x^2+y^2} = C\bigl(x^2+y^2+z^2\bigr)$. Tyto plochy vznikají rotací kružnice $y = 0$, $\left(x - \dfrac{1}{2C}\right)^2 + z^2 = \dfrac{1}{4C^2}$ bez bodu $[0;0;0]$ kolem osy Oz, a tedy jsou to anuloidy. Protože v bodech $x = y = 0$ je $\left|\operatorname{grad} u\right| = 0$, je zřejmé, že $\inf\left|\operatorname{grad} u\right| = 0$. Abychom určili supremum, budeme zkoumat na množině $r > 0$, $1 < z < 2$ funkci $f(r,z) = \dfrac{r}{r^2+z^2}$. Její extrémy jsou buď v bodech, kde $f'_r = \dfrac{z^2-r^2}{(r^2+z^2)^2} = f'_z = \dfrac{-2rz}{(r^2+z^2)^2} = 0$ nebo pro $z = 1$ nebo $z = 2$. V prvním případě je jediné řešení $r = z = 0$, ale tento bod je vnější bod naší množiny, a tedy musíme jej z dalších úvah vyloučit. Pro $z = 1$, hledáme extrémy funkce $F_1(r) = f(r,1) = \dfrac{r}{1+r^2}$. Derivace $F'_1 = \dfrac{1-r^2}{(1+r^2)^2} = 0$ pro $r = 1$. Pro $z = 2$ dostaneme funkci $F_2(r) = f(r,2) = \dfrac{r}{4+r^2}$. Její derivace $F'_2 = \dfrac{4-r^2}{(4+r^2)^2} = 0$ pro $r = 2$. Protože $\lim\limits_{r\to 0} F_k(r) = \lim\limits_{r\to+\infty} F_k(r) = 0$ pro $k = 1, 2$, zjistíme, že na dané množině je $\sup\left|\operatorname{grad} u\right| = \dfrac{1}{2}$.

---

8. S přesností do nekonečně malých veličin vyšších řádů najděte vzdálenost v bodě $[x_0;y_0;z_0]$ mezi dvěma nekonečně blízkými hladinami $u(x,y,z) = c$ a $u(x,y,z) = c + \triangle c$, kde $u(x_0,y_0,z_0) = c$.

Řešení: Protože vektor normály $\boldsymbol{n}$ v bodě $\boldsymbol{x}_0 = \bigl[x_0;y_0;z_0\bigr]$, který leží na ploše dané rovnicí $u(x,y,z) = c$ je úměrný vektoru $\operatorname{grad} u(x_0,y_0,z_0)$, lze do veličin druhého řádu předpokládat, že bod $\boldsymbol{x} = [x;y;z]$, který leží na ploše $u(x,y,z) = c + \triangle c$ má souřadnice $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{n}$, kde t je parametr. Proto platí $u\bigl(\boldsymbol{x}\bigr) = u\bigl(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{n}\bigr) = c + \triangle c$. Ale opět do veličin druhého řádu je

$$u\bigl(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{n}\bigr) \approx u\bigl(\boldsymbol{x}_0\bigr) + t\operatorname{grad} u\bigl(\boldsymbol{x}_0\bigr)\cdot\boldsymbol{n} = c + t\left|\operatorname{grad} u(\boldsymbol{x}_0\right|^2 = c + \triangle c\,.$$

Tedy $t = \dfrac{\triangle c}{\left|\operatorname{grad} u(\boldsymbol{x}_0)\right|^2}$ a $\left|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\right| = \dfrac{\left|\triangle c\right|}{\left|\operatorname{grad} u(\boldsymbol{x}_0)\right|}$.

---

9. Nechť $u = u(x,y,z)$ a $v = v(x,y,z)$ jsou spojitě diferencovatelné funkce a c je reálná konstanta. Dokažte vzorce:

a) $\operatorname{grad}(u + c) = \operatorname{grad} u$;
b) $\operatorname{grad}(cu) = c \operatorname{grad} u$;
c) $\operatorname{grad}(u + v) = \operatorname{grad} u + \operatorname{grad} v$;
d) $\operatorname{grad}(uv) = v \operatorname{grad} u + u \operatorname{grad} v$;
e) $\operatorname{grad}(u^2) = 2u \operatorname{grad} u$;
f) $\operatorname{grad}\big(f(u)\big) = f'(u) \operatorname{grad} u$.

Řešení: Uvedené vztahy plynou přímo z definice gradientu. Ukážeme pouze poslední vztah. Podle věty o derivaci složené funkce

$$\operatorname{grad} f\big(u(x,y,z)\big) = \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z}\right) = f'(u) \operatorname{grad} u\,.$$

---

10. Vypočtěte: a) $\operatorname{grad} r$; b) $\operatorname{grad} r^2$; c) $\operatorname{grad} \dfrac{1}{r}$, kde $r = |\boldsymbol{r}|$ a $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} = (x, y, z)$.
Řešení: Protože $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ je

$$\operatorname{grad} r = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = \frac{\boldsymbol{r}}{r}\,.$$

Podobně nebo podle výsledků úlohy **9.** je $\operatorname{grad} r^2 = 2\boldsymbol{r}$ a $\operatorname{grad} \dfrac{1}{r} = -\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$.

---

11. Najděte $\operatorname{grad} f(r)$, kde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Řešení: Přímým výpočtem nebo podle výsledků úloh **9.** a **10.** je

$$\operatorname{grad} f(r) = f'(r) \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r}\,.$$

---

12. Najděte $\operatorname{grad}(\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{r})$, kde $\boldsymbol{c}$ je konstantní vektor a $\boldsymbol{r}$ je rádius–vektor od počátku souřadnic.

Řešení: Nechť je konstantní vektor $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3)$. Pak $\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{r} = c_1 x + c_2 y + c_3 z$. Tedy

$$\operatorname{grad}(\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{r}) = (c_1, c_2, c_3) = \boldsymbol{c}\,.$$

---

13. Najděte $\operatorname{grad} |\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{r}|^2$, kde $\boldsymbol{c}$ je konstantní vektor.

Řešení: Nechť je konstantní vektor $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3)$. Pak je vektor $\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{r} = (c_2 z - c_3 y, c_3 x - c_1 z, c_1 y - c_2 x)$ a $|\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{r}|^2 = |\boldsymbol{c}|^2 |\boldsymbol{r}|^2 - (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{r})^2$. Tedy podle výsledků předcházejících cvičení je

$$\operatorname{grad}|\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{r}|^2 = 2|\boldsymbol{c}|^2 \boldsymbol{r} - 2(\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{c}\,.$$

14. Nechť jsou $u = u(x,y,z)$ a $v = v(x,y,z)$ spojitě diferencovatelné funkce. Dokažte vztah $\operatorname{grad} f(u,v) = \dfrac{\partial f}{\partial u}\operatorname{grad} u + \dfrac{\partial f}{\partial v}\operatorname{grad} v$.

Řešení: Podle věty o derivaci složené funkce je

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\\
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}\,.
\end{aligned}$$

---

15. Dokažte vztah $\nabla^2(uv) = u\nabla^2(v) + v\nabla^2(u) + 2\nabla u\nabla v$, kde $\nabla = \boldsymbol{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$ a $\nabla^2 = \nabla\nabla = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Řešení: Pro druhé derivace součinu uv platí

$$\frac{\partial^2 uv}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(vu'_x + uv'_x\Big) = vu'_{xx} + 2u'_x v'_x + uv'_{xx}$$

a podobné vztahy pro derivace podle proměnných y a z. Když si uvědomíte, že $\nabla u = u'_x\boldsymbol{i} + u'_y\boldsymbol{j} + u'_z\boldsymbol{k}$ a skalární součin $\nabla u\cdot\nabla v = u'_x v'_x + u'_y v'_y + u'_z v'_z$ dostanete jejich sečtením uvedený vztah.

---

16. Dokažte, že je-li funkce $U = U(x,y,z)$ diferencovatelná v konvexní oblasti Ω a $|\operatorname{grad} U| \le M$, kde M je konstanta, pak pro každé dva body A, B v Ω platí $|U(A) - U(B)| \le M\rho(A,B)$, kde $\rho(A,B)$ je vzdálenost mezi body A a B.

Řešení: Nechť jsou $A = \big[x_A; y_A; z_A\big]$ a $B = \big[x_B; y_B; z_B\big]$ souřadnice bodů A a B. Protože je Ω konvexní oblast leží v ní celá úsečka z bodu A do bodu B, tj. úsečka $x_t = x_A + \big(x_B - x_A\big)t$, $y_t = y_A + \big(y_B - y_A\big)t$, $z_t = z_A + \big(z_B - z_A\big)t$, $t\in\langle 0,1\rangle$. Uvažujme funkci $F(t) = U\big(x_t, y_t, z_t\big)$. Protože je funkce $U(x,y,z)$ diferencovatelná v oblasti Ω, je funkce $F(t)$ diferencovatelná pro $t\in\langle 0,1\rangle$ a platí pro ni Lagrangeova věta o střední hodnotě, tj. existuje $\tau\in(0,1)$ takové, že $F(1) - F(0) = F'(\tau)$. Navíc je $F(0) = U(A)$ a $F(1) = U(B)$ a

$$\begin{aligned}
F'(\tau) &= \frac{\partial U}{\partial x}(\boldsymbol{x}_\tau)\cdot\big(x_B - x_A\big) + \frac{\partial U}{\partial y}(\boldsymbol{x}_\tau)\cdot\big(y_B - y_A\big) + \frac{\partial U}{\partial z}(\boldsymbol{x}_\tau)\cdot\big(z_B - z_A\big) =\\
&= \operatorname{grad} U(x_\tau, y_\tau, z_\tau)\cdot\big(\boldsymbol{x}_B - \boldsymbol{x}_A\big)\,.
\end{aligned}$$

Tedy existuje bod $\boldsymbol{x}_\tau\in\Omega$ takový, že

$$U(B) - U(A) = \operatorname{grad} U(\boldsymbol{x}_\tau)\cdot\big(\boldsymbol{x}_B - \boldsymbol{x}_A\big)\,.$$

Protože pro každé vektory je $\left|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\right| \le \left|\boldsymbol{a}\right|\cdot\left|\boldsymbol{b}\right|$ a na Ω platí podle předpokladu $\left|\operatorname{grad} U(\boldsymbol{x})\right| < M$, je

$$\left|U(B)-U(A)\right| \le \left|\operatorname{grad} U\right|\cdot\left|\boldsymbol{x}_b-\boldsymbol{x}_A\right| \le M\rho(A,B)\,.$$

---

17. Pro funkci $U=U(x,y,z)$ vyjádřete $\operatorname{grad} U$: a) v polárních souřadnicích; b) ve sférických souřadnicích.

Řešení: Jedná se v podstatě o převod vektorového diferenciálního operátoru

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x}\,\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\,\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\,\boldsymbol{e}_z\,, \tag{1}$$

kde $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ a $\boldsymbol{e}_z$ jsou jednotkové vektory ve směru souřadnicových os, do polárních, resp. sférických souřadnic.

a) Polární souřadnice jsou definovány vztahy $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=z$. Ve cvičení **7/5.** jsme našli, že platí

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{\partial U}{\partial r}\,\cos\varphi - \frac{\partial U}{\partial \varphi}\,\frac{\sin\varphi}{r}\\ \frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{\partial U}{\partial r}\,\sin\varphi + \frac{\partial U}{\partial \varphi}\,\frac{\cos\varphi}{r}\end{aligned} \tag{2}$$

Tedy po dosazení do (1) dostaneme

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} U &= \left(\frac{\partial U}{\partial r}\,\cos\varphi - \frac{\partial U}{\partial \varphi}\,\frac{\sin\varphi}{r}\right)\boldsymbol{e}_x + \left(\frac{\partial U}{\partial r}\,\sin\varphi + \frac{\partial U}{\partial \varphi}\,\frac{\cos\varphi}{r}\right)\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\,\boldsymbol{e}_z = \\ &= \frac{\partial U}{\partial r}\,\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\,\frac{\partial U}{\partial \varphi}\,\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z}\,\boldsymbol{e}_z\end{aligned}$$

kde $\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_x\cos\varphi + \boldsymbol{e}_y\sin\varphi$ a $\boldsymbol{e}_\varphi = -\boldsymbol{e}_x\sin\varphi + \boldsymbol{e}_y\cos\varphi$ jsou jednotkové vektory ve směru souřadnicových os Or a $O\varphi$ v bodě $\left[r;\varphi;z\right]$.

b) Sférické souřadnice získáme z polárních pokud zavedeme $r=\rho\cos\theta$ a $z=\rho\sin\theta$. Podobně jako při přechodu od souřadnic (x,y) k souřadnicím (r,φ) v rovině (viz cvičení **7/5.**) platí

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial r} &= \frac{\partial U}{\partial \rho}\,\cos\theta - \frac{\partial U}{\partial \theta}\,\frac{\sin\theta}{\rho}\\ \frac{\partial U}{\partial z} &= \frac{\partial U}{\partial \rho}\,\sin\theta + \frac{\partial U}{\partial \theta}\,\frac{\cos\theta}{\rho}\,.\end{aligned}$$

Dosazením do (2) dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{\partial U}{\partial \rho}\,\cos\theta\cos\varphi - \frac{\partial U}{\partial \theta}\,\frac{\sin\theta\cos\varphi}{\rho} - \frac{\partial U}{\partial \varphi}\,\frac{\sin\varphi}{\rho\cos\theta}\\ \frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{\partial U}{\partial \rho}\,\cos\theta\sin\varphi - \frac{\partial U}{\partial \theta}\,\frac{\sin\theta\sin\varphi}{\rho} + \frac{\partial U}{\partial \varphi}\,\frac{\cos\varphi}{\rho\cos\theta}\\ \frac{\partial U}{\partial z} &= \frac{\partial U}{\partial \rho}\,\sin\theta + \frac{\partial U}{\partial \theta}\,\frac{\cos\theta}{\rho}\end{aligned}$$

Když dosadíme do (1), dostaneme

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} U = &\left(\frac{\partial U}{\partial \rho}\cos\theta\cos\varphi - \frac{\partial U}{\partial \theta}\frac{\sin\theta\cos\varphi}{\rho} - \frac{\partial U}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{\rho\cos\theta}\right)\boldsymbol{e}_x + \\
&+\left(\frac{\partial U}{\partial \rho}\cos\theta\sin\varphi - \frac{\partial U}{\partial \theta}\frac{\sin\theta\sin\varphi}{\rho} + \frac{\partial U}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{\rho\cos\theta}\right)\boldsymbol{e}_y + \\
&+\left(\frac{\partial U}{\partial \rho}\sin\theta + \frac{\partial U}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{\rho}\right)\boldsymbol{e}_z = \\
=&\frac{\partial U}{\partial \rho}\boldsymbol{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{\rho\cos\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi\,,
\end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_\rho &= \boldsymbol{e}_x\cos\theta\cos\varphi + \boldsymbol{e}_y\cos\theta\sin\varphi + \boldsymbol{e}_z\sin\theta \\
\boldsymbol{e}_\theta &= -\boldsymbol{e}_x\sin\theta\cos\varphi - \boldsymbol{e}_y\cos\theta\sin\varphi + \boldsymbol{e}_z\cos\theta \\
\boldsymbol{e}_\varphi &= -\boldsymbol{e}_x\sin\varphi + \boldsymbol{e}_y\cos\varphi
\end{aligned}$$

jsou jednotkové vektory ve směru souřadnicových os v bodě $\big[\rho;\theta;\varphi\big]$.

---

18. Najděte derivaci pole $u = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}$ v daném bodě $M = [x;y;z]$ ve směru rádius–vektoru $\boldsymbol{r}$ tohoto bodu. V jakém případě je tato derivace rovna velikosti gradientu?

Řešení: Jednotkový vektor ve směru vektoru $\boldsymbol{r} = (x,y,z)$ je $\boldsymbol{n} = \dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$, kde $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Protože má funkce $u = u(x,y,z) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}$ spojité derivace všech řádů, je derivace této funkce ve směru $\boldsymbol{n}$ rovna

$$u'_{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{n}\cdot\operatorname{grad} u = \frac{2}{r}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) = \frac{2u}{r}\,.$$

Protože pro každé dva vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ platí rovnost $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \big|\boldsymbol{a}\big|\cdot\big|\boldsymbol{b}\big|$ právě tehdy, když jsou vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ lineárně závislé. Protože $\big|\boldsymbol{n}\big| = 1$, platí rovnost $\big|\operatorname{grad} u\cdot\boldsymbol{n}\big| = \big|\operatorname{grad} u\big|$ právě tehdy, když jsou vektory $\operatorname{grad} u$ a $\boldsymbol{n}$ lineárně závislé, tj. když existuje číslo λ takové, že $\operatorname{grad} u = \lambda\boldsymbol{n}$. Z této rovnosti dostaneme, že musí existovat λ tak, aby

$$\frac{x}{a^2} = \lambda x\,,\quad \frac{y}{b^2} = \lambda y \quad \text{a} \quad \frac{z}{c^2} = \lambda z\,,$$

tj. když $a = b = c$.

---

19. Najděte derivaci pole $u = \dfrac{1}{r}$, kde $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, ve směru

$$\boldsymbol{\ell} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)\,.$$

V jakém směru je tato derivace rovna nule?

Řešení: Protože $\operatorname{grad}\dfrac{1}{r} = -\dfrac{1}{r^3}(x,y,z)$, je derivace ve směru $\boldsymbol{\ell}$ rovna

$$u'_{\boldsymbol{\ell}} = \boldsymbol{\ell}\cdot\operatorname{grad}\frac{1}{r} = -\frac{\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}\,.$$

Tedy derivace je rovna nule ve směru, kde $\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{r} = 0$, tj. ve směru, kde je $\boldsymbol{r}$ kolmé na $\boldsymbol{\ell}$.

---

20. Najděte derivaci pole $u = u(x,y,z)$ ve směru gradientu pole $v = v(x,y,z)$. V jakém bodě je tato derivace rovna nule?

Řešení: Jednotkový vektor ve směru $\operatorname{grad} v$ je $\boldsymbol{n} = \dfrac{\operatorname{grad} v}{|\operatorname{grad} v|}$. Tedy derivace funkce $u(x,y,z)$ ve směru $\boldsymbol{n}$ je

$$u'_{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{n}\cdot\operatorname{grad} u = \frac{\operatorname{grad} u\cdot\operatorname{grad} v}{|\operatorname{grad} v|}\,.$$

Tato derivace je rovna nule v bodě, ve kterém je $\operatorname{grad} u\cdot\operatorname{grad} v = 0$, tj. v bodě, ve kterém jsou vektory $\operatorname{grad} u$ a $\operatorname{grad} v$ navzájem kolmé.

---

21. Napište v souřadnicích vektorové pole $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c}\times\operatorname{grad} u$, kde $u = \operatorname{arctg}\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ a $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$.

Řešení: Gradient vektorového pole u je

$$\operatorname{grad} u = \left(u'_x, u'_y, u'_z\right) = \left(\frac{-xz}{r^2\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-yz}{r^2\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r}\right),$$

kde $r^2 = x^2+y^2+z^2$. Vektorový součin tohoto vektoru s vektorem $\boldsymbol{c} = (1,1,1)$ je

$$\boldsymbol{c}\times\operatorname{grad} u = \frac{1}{r^2\sqrt{x^2+y^2}}\left(x^2+y^2+yz, -x^2-y^2-xz, (x-y)z\right).$$

---

22. Najděte silokřivky vektorového pole $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+2z\boldsymbol{k}$.

Řešení: Silokřivky vektorového pole $\boldsymbol{a}$ jsou křivky, které jsou v každém svém bodě mají tečný vektor $\boldsymbol{a}$. Tedy jestliže je $x = x(t)$, $y = y(t)$ a $z = z(t)$ parametrická rovnice silokřivky, musí být $x' = a_x$, $y' = a_y$ a $z' = a_z$, kde $\boldsymbol{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right)$. V našem případě musí tedy platit

$$\begin{matrix} x' = x \\ y' = y \\ z' = 2z \end{matrix} \quad\Longrightarrow\quad \begin{matrix} x(t) = C_x\mathrm{e}^t \\ y(t) = C_y\mathrm{e}^t \\ z(t) = C_z\mathrm{e}^{2t} \end{matrix} \quad\Longrightarrow\quad \begin{matrix} y = k_1x \\ z = k_2x^2 \end{matrix}$$

kde k_1 a k_2 jsou konstanty.

---

23. Přímým výpočtem dokažte, že divergence vektoru $\boldsymbol{a}$ nezávisí na výběru ortogonální soustavy souřadnic.

Řešení: Nechť jsou a_k a b_k, $k = 1, 2, 3$, souřadnice vektoru $\boldsymbol{a}$ ve dvou ortogonálních soustavách souřadnic. Pak platí $b_k = \sum_{r=1}^{3} A_{kr} a_r$, kde A_{kr} jsou prvky ortogonální matice $\mathbf{A}$, tj. platí $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}$, neboli $\sum_{r=1}^{3} A_{ri} A_{rk} = \sum_{r=1}^{3} A_{ir} A_{kr} = \delta_{ik}$, kde $\delta_{ik} = 0$ pro $i \neq k$ a $\delta_{ii} = 1$. Označme x_k, $k = 1, 2, 3$, souřadnice bodu $\boldsymbol{x}$ v prvním a y_k ve druhém souřadném systému. Pak je $y_k = \sum_{r=1}^{3} A_{kr} x_r$. Z ortogonality matice $\mathbf{A}$ plyne, že $x_k = \sum_{r=1}^{3} A_{rk} y_r$. Tedy

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial b_k}{\partial y_k} = \sum_{k=1}^{3} \sum_{r=1}^{3} \sum_{s=1}^{3} A_{kr} A_{ks} \frac{\partial a_r}{\partial x_s} = \sum_{r,s=1}^{3} \delta_{rs} \frac{\partial a_r}{\partial x_s} = \sum_{r=1}^{3} \frac{\partial a_r}{\partial x_r}$$

---

24. Nechť $\boldsymbol{a}$ je spojitě diferencovatelné vektorové pole. Dokažte, že $\operatorname{div} \boldsymbol{a}(M) = \lim_{d(\mathcal{S}) \to 0} \frac{1}{V} \iint_{\mathcal{S}} a_n \, \mathrm{d}S$, kde $\mathcal{S}$ je uzavřená plocha, která ohraničuje objem $\mathcal{V}$, v jehož vnitřku je bod M, $\boldsymbol{n}$ je vnější normála k ploše $\mathcal{S}$, $d(\mathcal{S})$ je průměr plochy $\mathcal{S}$.

Řešení: Podle Gaussovy věty je $\iint_{\mathcal{S}} a_n \, \mathrm{d}S = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \boldsymbol{a} \, \mathrm{d}V$. Z věty o střední hodnotě plyne, že uvnitř plochy $\mathcal{S}$ existuje bod $\boldsymbol{\xi}$ takový, že $\iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \boldsymbol{a} \, \mathrm{d}V = V \cdot \operatorname{div} \boldsymbol{a}(\boldsymbol{\xi})$. Tedy uvnitř plochy $\mathcal{S}$ existuje bod $\boldsymbol{\xi}$ takový, že $\frac{1}{V} \iint_{\mathcal{S}} a_n \, \mathrm{d}S = \operatorname{div} \boldsymbol{a}(\boldsymbol{\xi}$. A protože je funkce $\operatorname{div} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ spojitá, je $\lim_{d(\mathcal{S}) \to 0} \operatorname{div} \boldsymbol{a}(\boldsymbol{\xi}) = \operatorname{div} \boldsymbol{a}(M)$.

---

25. Najděte divergenci pole $\boldsymbol{a} = \dfrac{-x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ v bodě $M = [3; 4; 5]$. Kolik se přibližně rovná tok Π vektoru $\boldsymbol{a}$ nekonečně malou kulovou plochou $(x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 = \varepsilon^2$?

Řešení: Divergence vektorového pole $\boldsymbol{a} = \big(a_x, a_y, a_z\big)$ v bodě $[x; y; z]$ je

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = -\frac{y^2}{\big(x^2 + y^2\big)^{3/2}} + \frac{x^2}{\big(x^2 + y^2\big)^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} =$$
$$= \frac{2x^2}{\big(x^2 + y^2\big)^{3/2}} .$$

Tedy $\operatorname{div} \boldsymbol{a}(3,4,5) = \dfrac{18}{125}$.
Podle výsledku cvičení **24.** lze tok nekonečně malou uzavřenou plochou $\mathcal{S}$ přibližně vyjádřit jako $V \operatorname{div} \boldsymbol{a}(M)$, kde V je objem oblasti omezené plochou $\mathcal{S}$ a bod M leží uvnitř oblasti $\mathcal{V}$. V našem případě je oblast $\mathcal{V}$ koule se středem v bodě $M = [3;4;5]$ s poloměrem ε. Tedy $\Pi \approx \dfrac{24}{125}\,\pi\varepsilon^3$.

---

26. Nechť je dáno vektorové pole $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$. Najděte $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \boldsymbol{\omega})$.

Řešení: Protože vektorové pole $\operatorname{rot} \boldsymbol{\omega} = \left(\dfrac{\partial \omega_z}{\partial y} - \dfrac{\partial \omega_y}{\partial z}, \dfrac{\partial \omega_x}{\partial z} - \dfrac{\partial \omega_z}{\partial x}, \dfrac{\partial \omega_y}{\partial x} - \dfrac{\partial \omega_x}{\partial y} \right)$, je

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \boldsymbol{\omega}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \omega_z}{\partial y} - \frac{\partial \omega_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \omega_x}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \omega_y}{\partial x} - \frac{\partial \omega_x}{\partial y} \right) = 0\,.$$

---

27. Dokažte, že
a) $\operatorname{div}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \operatorname{div} \boldsymbol{a} + \operatorname{div} \boldsymbol{b}$;
b) $\operatorname{div}(u\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{c} \operatorname{grad} u$, kde $\boldsymbol{c}$ je konstantní vektor a u je skalární pole;
c) $\operatorname{div}(u\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a} \cdot \operatorname{grad} u + u \operatorname{div} \boldsymbol{a}$.

Řešení: Vztahy plynou přímo z definice divergence a derivací součtu, resp. součinu funkcí. Například je-li $\boldsymbol{a} = \big(a_x, a_y, a_z\big)$ je

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(u\boldsymbol{a}) &= \frac{\partial u a_x}{\partial x} + \frac{\partial u a_y}{\partial y} + \frac{\partial u a_z}{\partial z} = \\ &= a_x \frac{\partial u}{\partial x} + a_y \frac{\partial u}{\partial y} + a_z \frac{\partial u}{\partial z} + u \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) = \boldsymbol{a} \cdot \operatorname{grad} u + u \operatorname{div} \boldsymbol{a}\,. \end{aligned}$$

---

28. Najděte $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$.

Řešení: Podle definice je $\operatorname{grad} u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z} \right)$, a tedy

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u\,,$$

kde $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ se nazývá *Laplaceův operátor.*

---

29. Vypočtěte: a) $\operatorname{div} \boldsymbol{r}$; b) $\operatorname{div} \dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$, kde $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ a $r = \big|\boldsymbol{r}\big| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Řešení:
Podle definice divergence je $\operatorname{div} \boldsymbol{r} = 3$. A protože $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x}{r}\right) = \dfrac{1}{r} - \dfrac{x^2}{r^3}$ je $\operatorname{div} \dfrac{\boldsymbol{r}}{r} = \dfrac{2}{r}$.

30. Najděte $\operatorname{div}\bigl(\operatorname{grad} f(r)\bigr)$, kde $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Kdy je $\operatorname{div}\bigl(\operatorname{grad} f(r)\bigr) = 0$?

Řešení: Protože $\operatorname{grad} f(r) = f'(r)\,\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$ je například podle příkladu **27c)** a **29**

$$\operatorname{div}\bigl(\operatorname{grad} f(r)\bigr) = \operatorname{grad} f'(r)\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r} + f'(r)\operatorname{div}\frac{\boldsymbol{r}}{r} = f''(r) + \frac{2}{r}\,f'((r)\,.$$

Rovnost $\operatorname{div}\bigl(\operatorname{grad} f(r)\bigr) = f''(r) + \dfrac{2}{r}\,f'(r) = 0$ platí pro $f(r) = c_1 + \dfrac{c_2}{r}$, kde c_1 a c_2 jsou konstanty.

---

31. Vypočtěte $\operatorname{div}\bigl(f(r)\boldsymbol{c}\bigr)$, kde $\boldsymbol{c}$ je konstantní vektor.

Řešení: Z definice nebo **27b)** dostaneme $\operatorname{div}\bigl(f(r)\boldsymbol{c}\bigr) = \dfrac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{c}}{r}\,f'(r)$.

---

32. Najděte $\operatorname{div}\bigl(f(r)\boldsymbol{r}\bigr)$. Kdy je divergence tohoto pole rovna nule?

Řešení: Vektorové pole je v tomto případě $f(r)\boldsymbol{r} = \bigl(xf(r), yf(r), zf(r)\bigr)$. Protože $\dfrac{\partial xf(r)}{\partial x} = f + \dfrac{x^2}{r}\,f'(r)$ a podobně pro ostatní derivace, dostaneme sečtením $\operatorname{div}\bigl(f(r)\boldsymbol{r}\bigr) = rf'(r) + 3f(r)$. Tento výraz je roven nule pro $f(r) = \dfrac{c}{r^3}$, kde c je libovolná konstanta.

---

33. Najděte: a) $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} u)$; b) $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} v)$.

Řešení: Podle výsledků příkladu **27c)** a **28** je:
a) $\operatorname{div}\bigl(u\operatorname{grad} u\bigr) = \operatorname{grad} u\cdot\operatorname{grad} u + u\Delta u$ a $\operatorname{div}\bigl(u\operatorname{grad} v\bigr) = \operatorname{grad} u\cdot\operatorname{grad} v + u\Delta v$.

---

34. Kapalina v prostoru rotuje kolem osy Oz proti směru hodinových ručiček s konstantní úhlovou rychlostí ω. Najděte divergenci vektoru rychlosti $\boldsymbol{v}$ a vektor zrychlení $\boldsymbol{w}$ v bodě $[x;y;z]$ v daný okamžik.

Řešení: Souřadnice bodu kapaliny v čase t jsou $x = r\cos\omega t$, $y = r\sin\omega t$ a $z =$, kde r a z jsou konstanty. Proto jsou složky její rychlosti $v_x = -r\omega\sin\omega t = -\omega y$, $v_y = r\omega\cos\omega t = \omega x$ a $v_z = 0$. Tedy $\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0$. Složky zrychlení kapaliny jsou $w_x = -\omega^2 r\cos\omega t = -\omega^2 x$, $w_y = -\omega^2 r\sin\omega t = -\omega^2 y$ a $w_z = 0$. Tedy $\operatorname{div}\boldsymbol{w} = -2\omega^2$.

---

35. Najděte divergenci gravitačního pole, který tvoří konečný systém přitahujících hmotných bodů.

Řešení: Gravitační pole v bodě $\boldsymbol{r} = (x,y,z)$ tvořené n hmotnými body s hmotnostmi m_i, které se nacházejí v bodech $\boldsymbol{r}_i = \bigl(x_i, y_i, z_i\bigr)$, je

$$\boldsymbol{F} = -k\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i\bigl(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i\bigr)}{r_i^3}\,,$$

kde $r_i = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}$. Protože platí

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x-x_i}{r_1^3}\right) = \frac{1}{r_i^3} - 3\frac{\left(x-x_i\right)^2}{r_i^5}$$

a podobné vztahy pro derivace podle y a z, dostaneme po sečtení, že mimo bodů $\boldsymbol{r}_i$ je $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 0$.

---

36. Najděte výraz pro divergenci rovinného vektoru $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(r,\varphi)$ v polárních souřadnicích r a φ.

Řešení: Polární souřadnice jsou definovány vztahy $x = r\cos\varphi$ a $y = r\sin\varphi$. Nejprve musíme vyjádřit rovinný vektor $\boldsymbol{a}$ v bázi, která odpovídá polárním souřadnicím, tj. zapsat $\boldsymbol{a} = a_r\boldsymbol{e}_r + a_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi$, kde $\boldsymbol{e}_r$ a $\boldsymbol{e}_\varphi$ jsou jednotkové vektory ve směrech příslušných křivočarých souřadnicových os. Protože

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial r} &= \cos\varphi\,, &\quad \frac{\partial x}{\partial r} &= \sin\varphi\,,\\
\frac{\partial x}{\partial \varphi} &= -r\sin\varphi\,, &\quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= r\cos\varphi\,,
\end{aligned}$$

jsou tyto jednotkové vektory

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_r &= \boldsymbol{e}_x\cos\varphi + \boldsymbol{e}_y\sin\varphi\\
\boldsymbol{e}_\varphi &= -\boldsymbol{e}_x\sin\varphi + \boldsymbol{e}_y\cos\varphi
\end{aligned}
\iff
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_x &= \boldsymbol{e}_r\cos\varphi - \boldsymbol{e}_\varphi\sin\varphi\\
\boldsymbol{e}_y &= \boldsymbol{e}_r\sin\varphi + \boldsymbol{e}_\varphi\cos\varphi
\end{aligned}$$

Ze vztahu

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{e}_x + a_y\boldsymbol{e}_y = a_r\boldsymbol{e}_r + a_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi = \big(a_r\cos\varphi - a_\varphi\sin\varphi\big)\boldsymbol{e}_x + \big(a_r\sin\varphi + a_\varphi\cos\varphi\big)\boldsymbol{e}_y$$

plyne rovnost

$$a_x = a_r\cos\varphi - a_\varphi\sin\varphi\,,\quad a_y = a_r\sin\varphi + a_\varphi\cos\varphi\,.$$

Protože $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \cos\varphi\dfrac{\partial f}{\partial r} - \dfrac{\sin\varphi}{r}\dfrac{\partial f}{\partial\varphi}$ a $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \sin\varphi\dfrac{\partial f}{\partial r} + \dfrac{\cos\varphi}{r}\dfrac{\partial f}{\partial\varphi}$, je

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\boldsymbol{a} =& \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} =\\
&= \cos\varphi\frac{\partial}{\partial r}\big(a_r\cos\varphi - a_\varphi\sin\varphi\big) - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\big(a_r\cos\varphi - a_\varphi\sin\varphi\big) +\\
&\quad + \sin\varphi\frac{\partial}{\partial r}\big(a_r\sin\varphi + a_\varphi\cos\varphi\big) + \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\big(a_r\sin\varphi + a_\varphi\cos\varphi\big) =\\
&= \frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{a_r}{r} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(ra_r)}{\partial r} + \frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}\right).
\end{aligned}$$

37. Vyjádřete $\operatorname{div} \boldsymbol{a}(x, y, z)$ v ortogonálních křivočarých souřadnicích u, v, w, jestliže $x = f(u, v, w)$, $y = g(u, v, w)$, $z = h(u, v, w)$. Jako speciální případ napište $\operatorname{div} \boldsymbol{a}$ v cylindrických a sférických souřadnicích.
Návod: Zkoumejte tok vektoru $\boldsymbol{a}$ nekonečně malým hranolem omezeným rovinami $u = \text{konst}$, $v = \text{konst}$ a $w = \text{konst}$.

Řešení: Použijeme vztahu pro divergenci z příkladu **24**. Oblast $\mathcal{V}$ je omezena šesti plochami:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{S}_{u_-}: \ u = u_0 = \text{konst}\,; && v_0 \le v \le v_0 + \Delta v\,,\ w_0 \le w \le w_0 + \Delta w \\
&\mathcal{S}_{u_+}: \ u = u_0 + \Delta u = \text{konst}\,; && v_0 \le v \le v_0 + \Delta v\,,\ w_0 \le w \le w_0 + \Delta w \\
&\mathcal{S}_{v_-}: \ v = v_0 = \text{konst}\,; && u_0 \le u \le u_0 + \Delta u\,,\ w_0 \le w \le w_0 + \Delta w \\
&\mathcal{S}_{v_+}: \ v = v_0 + \Delta v = \text{konst}\,; && u_0 \le u \le u_0 + \Delta u\,,\ w_0 \le w \le w_0 + \Delta w \\
&\mathcal{S}_{w_-}: \ w = w_0 = \text{konst}\,; && u_0 \le u \le u_0 + \Delta u\,,\ v_0 \le v \le v_0 + \Delta v \\
&\mathcal{S}_{w_+}: \ w = w_0 + \Delta w = \text{konst}\,; && u_0 \le u \le u_0 + \Delta u\,,\ w_0 \le v \le v_0 + \Delta v
\end{aligned}$$

Jestliže označíme

$$\begin{aligned}
U &= \sqrt{\left(f'_u\right)^2 + \left(g'_u\right)^2 + \left(h'_u\right)^2} \\
V &= \sqrt{\left(f'_v\right)^2 + \left(g'_v\right)^2 + \left(h'_v\right)^2} \\
W &= \sqrt{\left(f'_w\right)^2 + \left(g'_w\right)^2 + \left(h'_w\right)^2}
\end{aligned}$$

plyne z ortogonality souřadnic pro infinitezimální elementy ploch

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{u_-}: \ \mathrm{d}\boldsymbol{S} &= -\boldsymbol{n}_u VW(u_0, v, w)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w \\
\mathcal{S}_{u_+}: \ \mathrm{d}\boldsymbol{S} &= \boldsymbol{n}_u VW(u_0 + \Delta u, v, w)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w \\
\mathcal{S}_{v_-}: \ \mathrm{d}\boldsymbol{S} &= -\boldsymbol{n}_v UW(u, v_0, w)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}w \\
\mathcal{S}_{v_+}: \ \mathrm{d}\boldsymbol{S} &= \boldsymbol{n}_v UW(u, v_0 + \Delta v, w)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}w \\
\mathcal{S}_{w_-}: \ \mathrm{d}\boldsymbol{S} &= -\boldsymbol{n}_w UV(u, v, w_0)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
\mathcal{S}_{w_+}: \ \mathrm{d}\boldsymbol{S} &= \boldsymbol{n}_w UV(u, v, w_0 + \Delta w)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v
\end{aligned}$$

Protože $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n}_u = a_u$, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n}_v = a_v$ a $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n}_w = a_w$, je tok Π touto plochou $\mathcal{S}$

$$\begin{aligned}
\Pi = &\int\limits_{v_0}^{v_0+\Delta v} \int\limits_{w_0}^{w_0+\Delta w} \Big(a_u VW\big(u_0 + \Delta u, v, w\big) - a_u VW\big(u_0, v, w\big)\Big)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w + \\
&+ \int\limits_{u_0}^{u_0+\Delta u} \int\limits_{w_0}^{w_0+\Delta w} \Big(a_v UW\big(u, v_0 + \Delta v, w\big) - a_v UW\big(u, v_0, w\big)\Big)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}w +
\end{aligned}$$

$$+\int\limits_{u_0}^{u_0+\Delta u}\int\limits_{v_0}^{v_0+\Delta v}\Big(a_w UV\big(u,v,w_0+\Delta w\big)-a_w UV\big(u,v,w_0\big)\Big)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\approx$$

$$\approx\left(\frac{\partial a_u VW}{\partial u}+\frac{\partial a_v UW}{\partial v}+\frac{\partial a_w UV}{\partial w}\right)\Delta u\Delta v\Delta w\,.$$

Objem tělesa $V=\iiint_{\mathcal{V}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ najdeme pomocí substituce $x=f(u,v,w)$, $y=g(u,v,w)$ a $z=h(u,v,w)$, kde $u_0\le u\le u_0+\Delta u$, $v_0\le v\le v_0+\Delta v$, $w_0\le w\le w_0+\Delta w$. Protože jsou souřadnice u, v a w ortogonální, je jakobián substituce $J=UVW$. Tedy

$$V=\iiint_{\mathcal{V}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_{u_0}^{u_0+\Delta u}\int_{v_0}^{v_0+\Delta v}\int_{v_0}^{v_0+\Delta v}UVW\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w\approx$$
$$\approx UVW\Delta u\Delta v\Delta W\,.$$

Tedy podle výsledku příkladu **24** je

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\frac{1}{UVW}\left(\frac{\partial a_u VW}{\partial u}+\frac{\partial a_v UW}{\partial v}+\frac{\partial a_w UV}{\partial w}\right).$$

Ve speciálním případě cylindrických souřadnic $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=z$ je $(u=r,\ v=\varphi,\ w=z)$, $U=1$, $V=r$, $W=1$, a tedy

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\big(ra_r\big)}{\partial r}+\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}+r\frac{\partial a_z}{\partial z}\right).$$

Ve případě sférických souřadnic $x=r\cos\theta\cos\varphi$, $y=r\cos\theta\sin\varphi$, $z=r\sin\theta$ je $(u=r,\ v=\theta,\ w=\varphi)$, $U=1$, $V=r$, $W=r\cos\theta$, a tedy

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\frac{1}{r^2\cos\theta}\left(\frac{\partial\big(a_r r^2\cos\theta\big)}{\partial r}+r\frac{\partial\big(a_\theta\cos\theta\big)}{\partial\theta}+r\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}\right).$$

---

38. Dokažte, že
a) $\operatorname{rot}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\operatorname{rot}\boldsymbol{a}+\operatorname{rot}\boldsymbol{b}$;
b) $\operatorname{rot}(u\boldsymbol{a})=u\operatorname{rot}\boldsymbol{a}+\operatorname{grad}u\times\boldsymbol{a}$.

Řešení: a) je důsledkem linearity derivace a b) vztahu pro derivaci součinu. Například pro třetí složku dostaneme

$$\frac{\partial ua_y}{\partial x}-\frac{\partial ua_x}{\partial y}=u\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)+\frac{\partial u}{\partial x}\,a_y-\frac{\partial u}{\partial y}\,a_x\,,$$

což je třetí složka vektorového pole $u\operatorname{rot}\boldsymbol{a}+\operatorname{grad}u\times\boldsymbol{a}$.

---

39. Najděte: a) $\operatorname{rot} \boldsymbol{r}$; b) $\operatorname{rot}\bigl(f(r)\boldsymbol{r}\bigr)$.

Řešení: Přímo podle definice rotace získáme vztah $\operatorname{rot} \boldsymbol{r} = 0$. Jestliže v případě b) použijeme výsledku příkladu **38** dostaneme

$$\operatorname{rot}\bigl(f(r)\boldsymbol{r}\bigr) = f(r) \operatorname{rot} \boldsymbol{r} + \operatorname{grad} f(r) \times \boldsymbol{r} = 0\,,$$

protože $\operatorname{rot} \boldsymbol{r} = 0$ a $\operatorname{grad} f(r) = f'(r)\,\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$.

---

40. Najděte velikost a směr $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$ v bodě $[1; 2; -2]$, jestliže $\boldsymbol{a} = \dfrac{y}{z}\boldsymbol{i} + \dfrac{z}{x}\boldsymbol{j} + \dfrac{x}{y}\boldsymbol{k}$.

Řešení: Podle definice rotace dostaneme $\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \left(-\dfrac{x}{y^2} - \dfrac{1}{x}, -\dfrac{y}{z^2} - \dfrac{1}{y}, -\dfrac{z}{x^2} - \dfrac{1}{z}\right)$. Tedy $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}(1, 2, -2) = \left(-\dfrac{5}{4}, -1, \dfrac{5}{2}\right)$. Pak je $\bigl|\operatorname{rot} \boldsymbol{a}(1, 2, -2)\bigr| = \dfrac{\sqrt{141}}{4}$ a směrové kosiny tohoto vektoru jsou $\cos\alpha = -\dfrac{5}{\sqrt{141}}$, $\cos\beta = -\dfrac{4}{\sqrt{141}}$, $\cos\gamma = \dfrac{10}{\sqrt{141}}$.

---

41. Nechť $\boldsymbol{c}$ je konstantní vektor. Najděte: a) $\operatorname{rot}\bigl(\boldsymbol{c}f(r)\bigr)$; b) $\operatorname{rot}\bigl(\boldsymbol{c} \times f(r)\boldsymbol{r}\bigr)$.

Řešení:

a) Přímo z definice snadno zjistíme, že $\operatorname{rot}\bigl(\boldsymbol{c}f(r)\bigr) = f'(r)\,\dfrac{\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{c}}{r}$.

b) Vektor $\boldsymbol{c} \times f(r)\boldsymbol{r}$ má složky $\boldsymbol{c} \times f(r)\boldsymbol{r} = f(r)\bigl(c_2 z - c_3 y, c_3 x - c_1 z, c_1 y - c_2 x\bigr)$. Tedy například první složka vektoru $\operatorname{rot}\bigl(\boldsymbol{c} \times f(r)\boldsymbol{r}\bigr)$ je

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\Bigl(\bigl(c_1 y - c_2 x\bigr) f(r)\Bigr) - \frac{\partial}{\partial z}\Bigl(\bigl(c_3 x - c_1 z\bigr) f(r)\Bigr) &= \\ = 2c_1 f(r) + c_1 r f'(r) - \frac{x}{r}\,\bigl(c_1 x + c_2 y + c_3 z\bigr) f'(r)\,.\end{aligned}$$

Podobně najdeme další složky a zjistíme, že

$$\operatorname{rot}\bigl(\boldsymbol{c} \times f(r)\boldsymbol{r}\bigr) = 2\boldsymbol{c}f(r) + \boldsymbol{c}rf'(r) - \frac{\boldsymbol{r}(\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{r}}{r}\,f'(r) = 2f(r)\boldsymbol{c} + \frac{f'(r)}{r}\,\Bigl(\boldsymbol{c}r^2 - \boldsymbol{r}\bigl(\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{r}\bigr)\Bigr)\,.$$

---

42. Dokažte, že $\operatorname{div}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b} \operatorname{rot} \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \operatorname{rot} \boldsymbol{b}$.

Řešení: Protože $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \bigl(a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x\bigr)$, je

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\bigl(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\bigr) =& \frac{\partial\bigl(a_y b_z - a_z b_y\bigr)}{\partial x} + \frac{\partial\bigl(a_z b_x - a_x b_z\bigr)}{\partial y} + \frac{\partial\bigl(a_x b_y - a_y b_x\bigr)}{\partial z} = \\ =& b_x \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + b_y \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + b_z \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) + \\ & + a_x \left(\frac{\partial b_y}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial y}\right) + a_y \left(\frac{\partial b_z}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial z}\right) + a_z \left(\frac{\partial b_x}{\partial y} - \frac{\partial b_y}{\partial x}\right) = \\ =& \boldsymbol{b} \operatorname{rot} \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \operatorname{rot} \boldsymbol{b}\,.\end{aligned}$$

43. Najděte: a) rot(grad u); b) div(rot $\boldsymbol{a}$).

Řešení: Přímo z definice operátorů pomocí derivaci zjistíme, že $\operatorname{rot}\big(\operatorname{grad} u\big) = 0$ a $\operatorname{div}\big(\operatorname{rot} \boldsymbol{a}\big) = 0$.

---

44. Kapalina v prostoru rotuje kolem osy $\boldsymbol{\ell} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ s konstantní úhlovou rychlostí ω. Najděte rotaci vektoru rychlosti $\boldsymbol{v}$ v bodě $[x; y; z]$ v daném čase.

Řešení: V příkladě bude výhodnější zvolit souřadný systém, ve kterém za jednu souřadnou osu zvolíme osu rotace $\boldsymbol{\ell}$. Nechť $\boldsymbol{e}_\xi$, $\boldsymbol{e}_\eta$ a $\boldsymbol{e}_\zeta = \boldsymbol{\ell}$ jsou jednotkové ortogonální vektory takové, že $\boldsymbol{e}_\xi \times \boldsymbol{e}_\eta = \boldsymbol{e}_\zeta$. Jsou-li $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ a $\boldsymbol{e}_z$ jednotkové vektory ve směru souřadných os Ox, Oy a Oz lze psát polohový vektor bodu $\boldsymbol{r}$ v obou těchto souřadných systémech jako

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z = \xi\boldsymbol{e}_\xi + \eta\boldsymbol{e}_\eta + \zeta\boldsymbol{e}_\zeta\,.$$

Protože bod rotuje kolem osy $\boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{e}_\zeta$ s konstantní úhlovou rychlostí ω, je jeho pohyb z hlediska souřadného systému $O\xi\eta\zeta$ vyjádřen rovnicemi

$$\boldsymbol{r}(t) = r\cos\omega t\boldsymbol{e}_\xi + r\sin\omega t\boldsymbol{e}_\eta + \zeta\boldsymbol{e}_\zeta\,,$$

kde r, ω a ζ jsou konstanty. Rychlost pak je

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t} = -r\omega\sin\omega t\boldsymbol{e}_\xi + r\omega\cos\omega t\boldsymbol{e}_\eta = -\omega\eta\boldsymbol{e}_\xi + \omega\xi\boldsymbol{e}_\eta\,.$$

Vztah mezi souřadnicemi rychlostí v obou souřadných systémech dostaneme ze vztahu

$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{e}_x + v_y\boldsymbol{e}_y + v_z\boldsymbol{e}_z = -\omega\eta\boldsymbol{e}_\xi + \omega\xi\boldsymbol{e}_\eta\,.$$

Jestliže označíme

$$\begin{aligned}
A_{x,\xi} &= A_{\xi,x} = \boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_\xi\,, & A_{x,\eta} &= A_{\eta,x} = \boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_\eta\,, & A_{x,\zeta} &= A_{\zeta,x} = \boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_\zeta\,,\\
A_{y,\xi} &= A_{\xi,y} = \boldsymbol{e}_y\cdot\boldsymbol{e}_\xi\,, & A_{y,\eta} &= A_{\eta,y} = \boldsymbol{e}_y\cdot\boldsymbol{e}_\eta\,, & A_{y,\zeta} &= A_{\zeta,y} = \boldsymbol{e}_y\cdot\boldsymbol{e}_\zeta\,,\\
A_{z,\xi} &= A_{\xi,z} = \boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e}_\xi\,, & A_{z,\eta} &= A_{\eta,z} = \boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e}_\eta\,, & A_{z,\zeta} &= A_{\zeta,z} = \boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e}_\zeta\,,
\end{aligned}$$

je

$$\begin{aligned}
\xi &= xA_{x,\xi} + yA_{y,\xi} + zA_{z,\xi}\,, & v_x &= -\omega\eta A_{x,\xi} + \omega\xi A_{x,\eta}\\
\eta &= xA_{x,\eta} + yA_{y,\eta} + zA_{z,\eta}\,, & v_y &= -\omega\eta A_{y,\xi} + \omega\xi A_{y,\eta}\\
\zeta &= xA_{x,\zeta} + yA_{y,\zeta} + zA_{z,\zeta}\,, & v_z &= -\omega\eta A_{z,\xi} + \omega\xi A_{z,\eta}\,.
\end{aligned}$$

Podle definice je rotace vektoru $\boldsymbol{v}$ v souřadném systému $Oxyz$ rovna

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_x + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_y + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_z\,.$$

Jestliže použijeme výše uvedené vyjádření složek vektorů $\boldsymbol{v}$ a vztahy mezi souřadnicemi ξ, η, ζ a x, y, z, dostaneme

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\boldsymbol{v} =&2\omega\big(A_{y,\xi}A_{z,\eta}-A_{y,\eta}A_{z,\xi}\big)\boldsymbol{e}_x+2\omega\big(A_{x,\eta}A_{z,\xi}-A_{x,\xi}A_{z,\eta}\big)\boldsymbol{e}_y+\\ &+2\omega\big(A_{x,\xi}A_{y,\eta}-A_{x,\eta}A_{y,\xi}\big)\boldsymbol{e}_z\,.\end{aligned}$$

A když konečně dosadíme vyjádření vektorů

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_x&=A_{x,\xi}\boldsymbol{e}_\xi+A_{x,\eta}\boldsymbol{e}_\eta+A_{x,\zeta}\boldsymbol{e}_\zeta\\ \boldsymbol{e}_y&=A_{y,\xi}\boldsymbol{e}_\xi+A_{y,\eta}\boldsymbol{e}_\eta+A_{y,\zeta}\boldsymbol{e}_\zeta\\ \boldsymbol{e}_z&=A_{z,\xi}\boldsymbol{e}_\xi+A_{z,\eta}\boldsymbol{e}_\eta+A_{z,\zeta}\boldsymbol{e}_\zeta\,,\end{aligned}$$

získáme vztah

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\boldsymbol{v}&=2\omega\Big(\big(A_{y,\xi}A_{z,\eta}-A_{y,\eta}A_{z,\xi}\big)A_{x,\zeta}+\big(A_{x,\eta}A_{z,\xi}-A_{x,\xi}A_{z,\eta}\big)A_{y,\zeta}+\\ &\qquad+\big(A_{x,\xi}A_{y,\eta}-A_{x,\eta}A_{y,\xi}\big)A_{z,\zeta}\Big)\boldsymbol{e}_\zeta=\\ &=2\omega\det\begin{pmatrix}A_{x,\xi}&A_{x,\eta}&A_{x,\zeta}\\A_{y,\xi}&A_{y,\eta}&A_{y,\zeta}\\A_{z,\xi}&A_{z,\eta}&A_{z,\zeta}\end{pmatrix}\boldsymbol{e}_\zeta=2\omega\boldsymbol{\ell}\,,\end{aligned}$$

protože podle definice vektorů $\boldsymbol{e}_\xi$, $\boldsymbol{e}_\eta$ a $\boldsymbol{e}_\zeta$ je uvedený determinant roven jedné.

---

45. Najděte vyjádření rotace rovinného vektoru $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(r,\varphi)$ v polárních souřadnicích r a φ.

Řešení: Protože se jedná o rovinné vektorové pole $\boldsymbol{a}$, má jeho rotace $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$ nenulovou pouze třetí složku, která se rovná $\omega=\dfrac{\partial a_y}{\partial x}-\dfrac{\partial a_x}{\partial y}$. Tedy $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=\omega\boldsymbol{e}_z$, kde $\boldsymbol{e}_z$ je jednotkový vektor ve směru osy Oz. Operátor máme transformovat do souřadnic daných vztahy $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$. Jsou-li $\boldsymbol{e}_x$ a $\boldsymbol{e}_y$ jednotkové vektory ve směru souřadných os Ox a Oy (vektor $\boldsymbol{e}_z$ se nemění) a $\boldsymbol{e}_r$ a $\boldsymbol{e}_\varphi$ jednotkové vektory ve směru příslušných souřadných křivek, je

$$\begin{matrix}\boldsymbol{e}_r=\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_x+\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_y\\ \boldsymbol{e}_\varphi=-\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_x+\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_y\end{matrix}\iff\begin{matrix}\boldsymbol{e}_x=\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_r-\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_\varphi\\ \boldsymbol{e}_y=\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_r+\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_\varphi\end{matrix}$$

Z toho plyne, že pro souřadnice vektoru $\boldsymbol{a}$ platí

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=a_x\boldsymbol{e}_x+a_y\boldsymbol{e}_y=a_r\boldsymbol{e}_r+a_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi=\\ &=\big(a_r\cos\varphi-a_\varphi\sin\varphi\big)\boldsymbol{e}_x+\big(a_r\sin\varphi+a_\varphi\cos\varphi\big)\boldsymbol{e}_y\end{aligned}$$

neboli

$$a_x=a_r\cos\varphi-a_\varphi\sin\varphi\,,\quad a_y=a_r\sin\varphi+a_\varphi\cos\varphi\,.$$

Protože pro libovolnou funkci f platí

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\varphi\,\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\,\frac{\partial f}{\partial \varphi}\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \sin\varphi\,\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r}\,\frac{\partial f}{\partial \varphi}\,,$$

je

$$\begin{aligned}\omega &= \cos\varphi\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(a_r\sin\varphi + a_\varphi\cos\varphi\Big) - \frac{\sin\varphi}{r}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big(a_r\sin\varphi + a_\varphi\cos\varphi\Big) - \\ &- \sin\varphi\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(a_r\cos\varphi - a_\varphi\sin\varphi\Big) - \frac{\cos\varphi}{r}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big(a_r\cos\varphi - a_\varphi\sin\varphi\Big) = \\ &= \frac{\partial a_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial a_r}{\partial\varphi} + \frac{a_\varphi}{r} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(ra_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial\varphi}\right).\end{aligned}$$

Tedy v polárních souřadnicích je rotace rovinného vektoru $\boldsymbol{a}$ rovna

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(ra_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial\varphi}\right)\boldsymbol{e}_z\,.$$

---

46. Vyjádřete $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}(x,y,z)$: a) v cylindrických souřadnicích; b) ve sférických souřadnicích.

Řešení:

a) Cylindrické souřadnice jsou definovány vztahy $x = r\cos\varphi$, $y = r\varphi$ a $z = z$. Jednotkové vektory ve směru souřadných křivek jsou proto

$$\begin{matrix} \boldsymbol{e}_r = \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_x + \sin\varphi\,\boldsymbol{e}_y & & \boldsymbol{e}_x = \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_r - \sin\varphi\,\boldsymbol{e}_\varphi \\ \boldsymbol{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_x + \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_y & \Longleftrightarrow & \boldsymbol{e}_y = \sin\varphi\,\boldsymbol{e}_r + \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_\varphi \\ \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_z & & \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_z \end{matrix}$$

kde $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ a $\boldsymbol{e}_z$ jsou jednotkové vektory ve směru souřadných os Ox, Oy a Oz. Proto souřadnice vektoru $\boldsymbol{a}$ v souřadnicí xyz a $r\varphi z$ platí

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= a_x\boldsymbol{e}_x + a_y\boldsymbol{e}_y + a_z\boldsymbol{e}_z = a_r\boldsymbol{e}_r + a_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi + a_z\boldsymbol{e}_z = \\ &\big(a_r\cos\varphi - a_\varphi\sin\varphi\big)\boldsymbol{e}_x + \big(a_r\sin\varphi + a_\varphi\cos\varphi\big)\boldsymbol{e}_y + a_z\boldsymbol{e}_z\,.\end{aligned}$$

Tedy

$$a_x = a_r\cos\varphi - a_\varphi\sin\varphi\,, \quad a_y = a_r\sin\varphi + a_\varphi\cos\varphi\,, \quad a_z = a_z\,.$$

Rotace vektoru $\boldsymbol{a}$ v souřadnicích xyz je definována jako

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_x + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_y + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_z\,.$$

Protože pro každou funkci f platí vztahy

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\varphi\,\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\,\frac{\partial f}{\partial\varphi}\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \sin\varphi\,\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r}\,\frac{\partial f}{\partial\varphi}\,, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z}\,,$$

je

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = &\left(\sin\varphi\frac{\partial a_z}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r}\,\frac{\partial a_z}{\partial\varphi} - \sin\varphi\,\frac{\partial a_r}{\partial z} - \cos\varphi\,\frac{\partial a_\varphi}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_x + \\
&+\left(\cos\varphi\frac{\partial a_r}{\partial z} - \sin\varphi\,\frac{\partial a_\varphi}{\partial z} - \cos\varphi\,\frac{\partial a_z}{\partial r} + \frac{\sin\varphi}{r}\,\frac{\partial a_z}{\partial\varphi}\right)\boldsymbol{e}_y + \\
&+\left(\frac{\partial a_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial a_r}{\partial\varphi} + \frac{a_\varphi}{r}\right)\boldsymbol{e}_z = \\
=&\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial a_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right)\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(r a_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial\varphi}\right)\boldsymbol{e}_z\,.
\end{aligned}$$

b) Pro sférické souřadnice definované vztahy $x = r\cos\theta\cos\varphi$, $y = r\cos\theta\sin\varphi$ a $z = r\sin\theta$ je

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_r &= \cos\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_x + \cos\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_y + \sin\theta\,\boldsymbol{e}_z \\
\boldsymbol{e}_\theta &= -\sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_x - \sin\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_y + \cos\theta\,\boldsymbol{e}_z \\
\boldsymbol{e}_\varphi &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_x + \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_y\,,
\end{aligned}$$

ze kterých plyne

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_x &= \cos\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_r - \sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_\theta - \sin\varphi\,\boldsymbol{e}_\varphi \\
\boldsymbol{e}_y &= \cos\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_r - \sin\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_\theta + \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_\varphi \\
\boldsymbol{e}_z &= \sin\theta\,\boldsymbol{e}_r + \cos\theta\,\boldsymbol{e}_\theta
\end{aligned}$$

Pro vektor $\boldsymbol{a}$ tedy platí

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} =& a_x\boldsymbol{e}_x + a_y\boldsymbol{e}_y + a_z\boldsymbol{e}_z = a_r\boldsymbol{e}_r + a_\theta\boldsymbol{e}_\theta + a_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi = \\
=& \big(a_r\cos\theta\cos\varphi - a_\theta\sin\theta\cos\varphi - a_\varphi\sin\varphi\big)\boldsymbol{e}_x + \\
&+ \big(a_r\cos\theta\sin\varphi - a_\theta\sin\theta\sin\varphi + a_\varphi\cos\varphi\big)\boldsymbol{e}_y + \\
&+ \big(a_r\sin\theta + a_\theta\cos\theta\big)\boldsymbol{e}_z\,.
\end{aligned}$$

Tedy souřadnice vektoru $\boldsymbol{a}$ platí

$$\begin{aligned}
a_x &= a_r\cos\theta\cos\varphi - a_\theta\sin\theta\cos\varphi - a_\varphi\sin\varphi \\
a_y &= a_r\cos\theta\sin\varphi - a_\theta\sin\theta\sin\varphi + a_\varphi\cos\varphi \\
a_z &= a_r\sin\theta + a_\theta\cos\theta
\end{aligned}$$

V souřadnicích xyz je vektor

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_x + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{e}_y + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_z\,.$$

Z transformačních vztahů lze odvodit, že pro parciální derivace platí

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\theta\cos\varphi\,\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin\theta\cos\varphi}{r}\,\frac{\partial f}{\partial\theta} - \frac{\sin\varphi}{r\cos\theta}\,\frac{\partial f}{\partial\varphi}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos\theta\sin\varphi\,\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin\theta\sin\varphi}{r}\,\frac{\partial f}{\partial\theta} + \frac{\cos\varphi}{r\cos\theta}\,\frac{\partial f}{\partial\varphi}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial f}{\partial\theta}$$

Jestliže dosadíme do výrazu pro rotaci, dostaneme

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = &\left(\sin\varphi\left(\frac{\partial a_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial a_r}{\partial\theta} + \frac{a_\theta}{r}\right) - \sin\theta\cos\varphi\left(\frac{\partial a_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r\cos\theta}\,\frac{\partial a_r}{\partial\varphi}\right) + \right.\\ &\qquad\left. + \frac{\cos\varphi}{r}\left(\frac{\partial a_\theta}{\partial\varphi} - \cos\theta\,\frac{\partial a_\varphi}{\partial\theta}\right)\right)\boldsymbol{e}_x +\\ &+\left(-\cos\varphi\left(\frac{\partial a_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial a_r}{\partial\theta} + \frac{a_\theta}{r}\right) - \sin\theta\sin\varphi\left(\frac{\partial a_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r\cos\theta}\,\frac{\partial a_r}{\partial\varphi}\right) + \right.\\ &\qquad\left. + \frac{\sin\varphi}{r}\left(\frac{\partial a_\theta}{\partial\varphi} - \cos\theta\,\frac{\partial a_\varphi}{\partial\theta}\right)\right)\boldsymbol{e}_y +\\ &+\left(\cos\theta\left(\frac{\partial a_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r\cos\theta}\,\frac{\partial a_r}{\partial\varphi}\right) + \frac{\sin\theta}{r\cos\theta}\left(\frac{\partial a_\theta}{\partial\varphi} - \cos\theta\,\frac{\partial a_\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{a_\varphi}{r\cos\theta}\right)\boldsymbol{e}_z\,.\end{aligned}$$

A jestliže dosadíme za jednotkové vektory $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ a $\boldsymbol{e}_z$ jejich vyjádření pomocí jednotkových vektorů $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$ a $\boldsymbol{e}_\varphi$, dostaneme

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\boldsymbol{a} =&\frac{1}{r\cos\theta}\left(\frac{\partial a_\theta}{\partial\varphi} - \frac{\partial(a_\varphi\cos\theta)}{\partial\theta}\right)\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(ra_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{\cos\theta}\,\frac{\partial a_r}{\partial\varphi}\right)\boldsymbol{e}_\theta +\\ &+ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial a_r}{\partial\theta} - \frac{\partial(ra_\theta)}{\partial r}\right)\boldsymbol{e}_\varphi\,.\end{aligned}$$

---

47. Najděte tok vektoru $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$: a) boční stěnou kužele $x^2+y^2 \le z^2$, $0 \le z \le h$; b) základnou tohoto kužele.

Řešení:

a) Boční stěna kužele má rovnici $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Normála k takto implicitně definované ploše je úměrná vektoru $\operatorname{grad} F = (2x, 2y, -2z)$. Protože $\boldsymbol{r} \cdot \operatorname{grad} F = 2x^2 + 2y^2 - 2z^2 = 0$, je tok vektoru $\boldsymbol{r}$ touto plochou roven nule. Kapalina teče podél dané plochy.

b) Základna daného kužele má rovnici $z = h$. $x^2 + y^2 \leq h^2$. Jestliže zvolíme za parametry proměnné x a y, je vektor jednotkové normály k této ploše $\boldsymbol{n}(0,0,1)$. Tedy $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n} = h$ a tok touto plochou je

$$\iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint\limits_{x^2+y^2\leq h^2} h\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pi h^3\,.$$

---

48. Najděte tok vektoru $\boldsymbol{a} = yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$: a) boční stěnou válce $x^2 + y^2 \leq a^2$, $0 \leq z \leq h$; b) celým povrchem tohoto válce.

Řešení: Tok Π vektoru $\boldsymbol{F}$ plochou $\mathcal{S}$ je dán plošným integrálem druhého druhu $\Pi = \iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}$. V našem případě je vektorové pole $\boldsymbol{F} = (yz, xz, xy)$.

a) Boční stěna daného válce má rovnici $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \leq z \leq h$. Zvolme její parametrizaci $x = a\cos\varphi$, $z = a\sin\varphi$, $z = z$, kde $0 < \varphi < 2\pi$ a $0 < z < h$. Tečné vektory k souřadnicovým křivkám a normálový vektor jsou

$$\begin{aligned} \boldsymbol{t}_\varphi &= (-a\sin\varphi, a\cos\varphi, 0 \\ \boldsymbol{t}_z &= (0,0,1) \\ \boldsymbol{n} &= \boldsymbol{t}_\varphi \times \boldsymbol{t}_z = (a\cos\varphi, a\sin\varphi, 0)\,. \end{aligned}$$

Protože $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} = 2a^2 z\cos\varphi\sin\varphi = a^2\sin 2\varphi$, je

$$\Pi = \iint_{\mathcal{S}} yz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + xz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = a^2 \int_0^h \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} z\sin 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 0\,.$$

b) Je-li $\mathcal{S}$ celý povrch válce $\mathcal{V}$, lze použít Gaussovu větu. Podle ní je

$$\Pi = \iint_{\mathcal{S}} yz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + xz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div}\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 0\,,$$

protože $\operatorname{div}\boldsymbol{F} = 0$.

---

49. Najděte tok rádius–vektoru $\boldsymbol{r}$ plochou $z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$, $0 \leq z \leq 1$.

Řešení: Tok Π vektoru $\boldsymbol{r} = (x,y,z)$ plochou $\mathcal{S}$ je dán plošným integrálem druhého druhu $\Pi = \iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}$. Za parametry plochy zvolíme proměnné x a y. Protože $0 < z = 1 - \sqrt{x^2+y^2} < 1$, je $x^2 + y^2 < 1$. Tečné vektory k souřadnicovým osám a normála jsou

$$\begin{aligned} \boldsymbol{t}_x &= \left(1, 0, \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \\ \boldsymbol{t}_y &= \left(0, 1, \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \\ \boldsymbol{n} = \boldsymbol{t}_x \times \boldsymbol{t}_y &= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right) \end{aligned}$$

Protože na ploše $\mathcal{S}$ je $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n} = \sqrt{x^2+y^2} + z = 1$, je tok roven

$$\Pi = \iint\limits_{x^2+y^2<1} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pi\,.$$

---

50. Najděte tok vektoru $\boldsymbol{a} = x^2\boldsymbol{i}+y^2\boldsymbol{j}+z^2\boldsymbol{k}$ kladným oktantem sféry $x^2+y^2+z^2 = 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

Řešení: Tok Π vektoru $\boldsymbol{a} = \bigl(x^2, y^2, z^2\bigr)$ plochou $\mathcal{S}$ je dán plošným integrálem

$$\Pi = \iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_{\mathcal{S}} x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Daná plocha $\mathcal{S}$ má parametrické rovnice $x = \cos\theta\cos\varphi$, $y = \cos\theta\sin\varphi$, $z = \sin\theta$, kde $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ a $0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$. Rovnice tečných vektorů k souřadnicovým křivkám a normála k dané ploše tedy jsou

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{t}_\varphi &= \bigl(-\cos\theta\sin\varphi, \cos\theta\cos\varphi, 0\bigr)\\
\boldsymbol{r}_\theta &= \bigl(-\sin\theta\cos\varphi, -\sin\theta\sin\varphi, \cos\theta\bigr)\\
\boldsymbol{n} &= \bigl(\cos^2\theta\cos\varphi, \cos^2\theta\sin\varphi, \cos\theta\sin\theta\bigr)\,.
\end{aligned}$$

Tedy tok Π danou plochou $\mathcal{S}$ je

$$\begin{aligned}
\Pi &= \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi/2} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\theta = \\
&= \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi/2} \bigl(\cos^4\theta(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi) + \sin^3\theta\cos\theta\bigr)\,\mathrm{d}\theta = \frac{3}{8}\,\pi\,.
\end{aligned}$$

---

51. Najděte tok vektoru $\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$ povrchem čtyřstěnu, který je omezen rovinami $x+y+z = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$; $a > 0$. Výsledek prověřte použitím Gaussovy věty.

Řešení: Povrch čtyřstěnu je složen ze čtyř ploch:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{S}_x:\ x = 0\,; && 0 < y+z < a\,; && \boldsymbol{n} = (-1,0,0)\\
&\mathcal{S}_y:\ y = 0\,; && 0 < x+z < a\,; && \boldsymbol{n} = (0,-1,0)\\
&\mathcal{S}_z:\ z = 0\,; && 0 < x+y < a\,; && \boldsymbol{n} = (0,0,-1)\\
&\mathcal{S}_s:\ z = a-x-y\,; && 0 < x+y < a\,; && \boldsymbol{n} = (1,1,1)
\end{aligned}$$

Proto je tok vektoru $\boldsymbol{a}$ celým povrchem roven

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\iint\limits_{0<y+z<a} y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - \iint\limits_{0<x+z<a} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z - \iint\limits_{0<x+y<a} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint\limits_{0<x+y<a} a\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0\,.$$

Kdybychom použili Gaussovu větu, dostali bychom, protože $\operatorname{div} \boldsymbol{a} = 0$

$$\iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 0\,,$$

kde $\mathcal{V}$ je čtyřstěn $x + y + z < a$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

---

52. Najděte tok vektoru $\boldsymbol{a} = x^3\boldsymbol{i} + y^3\boldsymbol{j} + z^3\boldsymbol{k}$ kulovou plochou $x^2 + y^2 + z^2 = x$.
Řešení: Podle Gaussovy věty je

$$\iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 3\iiint_{\mathcal{V}} \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,,$$

kde oblast $\mathcal{V}$ je dána nerovností $x^2 + y^2 + z^2 < x$. Jestliže zavedeme nové souřadnice vztahy $x = r\sin\theta$, $y = r\cos\theta\cos\varphi$ a $z = r\cos\theta\sin\varphi$, dostaneme nerovnice $0 < r < \sin\theta$, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ a $0 < \varphi < 2\pi$. Protože jakobián substituce je $J = r^2\cos\theta$, je tok danou plochou roven

$$\iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 3\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sin\theta} r^4\cos\theta\,\mathrm{d}r = \frac{6}{5}\,\pi\int_0^{\pi/2} \sin^5\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{5}\,.$$

---

53. Dokažte, že tok vektoru $\boldsymbol{a}$ plochou $\mathcal{S}$ danou rovnicí $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v)$, $(u,v) \in \Omega$, je roven

$$\iint_{\mathcal{S}} a_n\,\mathrm{d}S = \iint_{\Omega} \left[\boldsymbol{a}; \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}; \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right]\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,,$$

kde $a_n = \boldsymbol{a}\boldsymbol{n}$ a $\boldsymbol{n}$ je jednotkový vektor normály k ploše $\mathcal{S}$ a

$$\left[\boldsymbol{a};\boldsymbol{b};\boldsymbol{c}\right] = \boldsymbol{a}\cdot\left(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\right) = \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

je objem rovnoběžnostěnu s hranami $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$.
Řešení: Vektory $\boldsymbol{t}_u = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$, resp. $\boldsymbol{t}_v = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ jsou tečné vektory k souřadnicovým osám. Tedy jednotková normála je $\boldsymbol{n} = \dfrac{\boldsymbol{t}_u \times \boldsymbol{t}_v}{\left|\boldsymbol{t}_x \times \boldsymbol{v}\right|}$. Tedy

$$a_n = \boldsymbol{a}\cdot\frac{\boldsymbol{t}_u\times\boldsymbol{t}_v}{\left|\boldsymbol{t}_u\times\boldsymbol{t}_v\right|} = \frac{\left[\boldsymbol{a};\boldsymbol{r}_u;\boldsymbol{t}_v\right]}{\left|\boldsymbol{t}_u\times\boldsymbol{t}_v\right|}\,.$$

A protože $\mathrm{d}S = \left|\boldsymbol{t}_u \times \boldsymbol{t}_v\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$, je

$$\iint_{\mathcal{S}} a_n\,\mathrm{d}S = \iint_{\mathcal{S}} \left[\boldsymbol{a};\boldsymbol{t}_u;\boldsymbol{t}_v\right]\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,.$$

54. Najděte tok vektoru $\boldsymbol{a} = m\,\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$, kde m je konstanta uzavřenou plochou $\mathcal{S}$, v jejímž vnitřku leží počátek souřadnic.

Řešení: Tok Π vektoru $\boldsymbol{a}$ plochou $\mathcal{S}$ najdeme pomocí plošného integrálu druhého druhu $\Pi = \displaystyle\iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}$. Protože $\boldsymbol{a} = \dfrac{m}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\,(x,y,z)$ je

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\boldsymbol{a} &= \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_y}{\partial y} = \\ &= m\left(\frac{-2x^2+y^2+z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}} + \frac{x^2-2y^2+z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}} + \frac{x^2+y^2-2z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}}\right) = 0\,.\end{aligned}$$

Tedy pokud počátek neleží uvnitř uzavřené plochy $\mathcal{S}$, plyne z Gaussovy věty, že tok Π takovou plochou je roven nule. Je-li počátek uvnitř plochy $\mathcal{S}$, označme $\mathcal{S}_\varepsilon$ kladně orientovanou kulovou plochu se středem v počátku a poloměrem ε, která leží celá uvnitř plochy $\mathcal{S}$. Protože uvnitř tělesa omezeného plochou $\mathcal{S}$ a $\mathcal{S}_\varepsilon$ je $\operatorname{div}\boldsymbol{a} = 0$, je

$$\iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} - \iint_{\mathcal{S}_\varepsilon} \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \Longleftrightarrow \iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_{\mathcal{S}_\varepsilon} \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}\,.$$

Pro výpočet $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}_\varepsilon} \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ použijeme parametrizaci $x = \varepsilon\cos\theta\cos\varphi$, $y = \varepsilon\cos\theta\sin\varphi$, $z = \varepsilon\sin\theta$, kde $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ a $0 < \varphi < 2\pi$. Protože

$$\begin{aligned}\boldsymbol{t}_\varphi &= \left(-\varepsilon\cos\theta\sin\varphi, \varepsilon\cos\theta\cos\varphi, 0\right)\\ \boldsymbol{t}_\theta &= \left(-\varepsilon\sin\theta\cos\varphi, -\varepsilon\sin\theta\sin\varphi, a\cos\theta\right)\\ \boldsymbol{n} = \boldsymbol{t}_\varphi \times \boldsymbol{t}_\theta &= \left(\varepsilon^2\cos^2\theta\cos\varphi, \varepsilon^2\cos^2\theta\sin\varphi, \varepsilon^2\cos\theta\sin\theta\right)\\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n} &= m\cos\theta\end{aligned}$$

je

$$\iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = m\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = 4\pi m\,.$$

---

55. Najděte tok vektoru $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\operatorname{grad}\left(-\frac{e_i}{4\pi r_i}\right)$, kde e_i jsou konstanty a r_i jsou vzdálenosti bodů M_i *zdroje* od bodu $M(\boldsymbol{r})$, uzavřenou plochou $\mathcal{S}$, uvnitř které leží všechny body M_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Řešení: Protože $r_i = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}$, je

$$\operatorname{grad}\left(-\frac{e_i}{4\pi r_i}\right) = \frac{e_i\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i\right)}{r_i^3}\,.$$

Stejně jako v příkladu **54** se ukáže, že tok vektoru $\boldsymbol{a}$ danou plochou $\mathcal{S}$ je

$$\iint_{\mathcal{S}} \operatorname{grad}\left(-\frac{e_i}{4\pi r_i}\right) \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \sum_{i=1}^{n} e_i \,.$$

---

56. Dokažte, že $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} \frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}S = \iiint_{\mathcal{V}} \nabla^2 u \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde $\mathcal{S}$ je hranice objemu $\mathcal{V}$.

Řešení: Protože pro spojitě diferencovatelnou funkci $u(x,y,z)$ je $\displaystyle\frac{\partial u}{\partial n} = \boldsymbol{n}\cdot\operatorname{grad} u$, jedná se o plošný integrál druhého druhu. Pokud použijeme Gaussovu větu, dostaneme

$$\iint_{\mathcal{S}} \frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}S = \iint_{\mathcal{S}} \operatorname{grad} u\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div}\big(\operatorname{grad} u\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{\mathcal{V}} \nabla^2 u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \,.$$

---

57. Množství tepla, které za jednotku času protéká elementem plochy $\mathrm{d}S$ v teplotním poli u je rovno $\mathrm{d}Q = -k\boldsymbol{n}\operatorname{grad} u\,\mathrm{d}S$, kde k je konstanta tepelné vodivosti a $\boldsymbol{n}$ je vektor jednotkové normály k ploše $\mathcal{S}$. Určete množství tepla nashromážděného tělesem $\mathcal{V}$ za jednotku času. Použijte vztah pro rychlost zvyšování teploty a odvoďte rovnici, kterou splňuje teplota tělesa; *rovnice vedení tepla.*

Řešení: Celkové množství tepla, které vyteče za jednotku času z objemu $\mathcal{V}$ s hranicí $\mathcal{S}$ je dáno plošným integrálem

$$\iint_{\mathcal{S}} \big(-k\boldsymbol{n}\cdot\operatorname{grad} u\big)\,\mathrm{d}S = -k\iint_{\mathcal{S}} \operatorname{grad} u\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}\,,$$

kde je $\boldsymbol{n}$ vnější jednotková normála k ploše $\mathcal{S}$. Tedy v tělese $\mathcal{V}$ se podle Gaussovy věty za jednotku času nashromáždí množství tepla (za předpokladu, že k je konstantní)

$$\Delta Q = k\iint_{\mathcal{S}} \operatorname{grad} u\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = k\iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div}\big(\operatorname{grad} u\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = k\iiint_{\mathcal{S}} \triangle u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Na druhé straně je množství tepla v tělese dáno vztahem

$$Q = \iiint_{\mathcal{V}} c\rho u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,,$$

kde c je měrné teplo a ρ hustota tělesa. Ze zákona zachování energie plyne, že pokud v tělese nejsou vnitřní zdroje energie, je

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_{\mathcal{V}} c\rho u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = k\iiint_{\mathcal{V}} \triangle u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Jestliže předpokládáme, že c a ρ nezávisí na čase, je pro každý objem $\mathcal{V}$, který se nemění v čase

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \iiint_{\mathcal{V}} c\rho \frac{\partial u}{\partial t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{\mathcal{V}} k\triangle u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Protože tento vztah má platit pro každý objem $\mathcal{V}$, musí být

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = k\triangle u\,.$$

---

58. Pohybující se kapalina vyplňuje objem $\mathcal{V}$. Za předpokladu, že v oblasti $\mathcal{V}$ nejsou zdroje, odvoďte rovnici kontinuity $\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v}) = 0$, kde $\rho = \rho(x, y, z, t)$ je hustota kapaliny, $\boldsymbol{v}$ je vektor její rychlosti a t je čas.

Řešení: Nechť je Ω libovolná oblast v tělese, která je omezena plochou $\mathcal{S}$ a které se nemění s časem t. Je-li ρ hustota tělesa, je hmotnost M oblasti Ω dána vztahem $M = \iiint_{\Omega} \rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$. Její změna je rovna $\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_{\Omega} \rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$. Podle předpokladu se oblast Ω s časem nemění, a tedy

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = \iiint_{\Omega} \frac{\partial\rho}{\partial t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Elementem $\mathrm{d}S$ hranice $\mathcal{S}$ oblasti Ω protoče za jednotku času kapalina s hmotností $\mathrm{d}M = \rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S$. Podle Gaussovy věty tedy platí

$$\triangle M = \iint_{\mathcal{S}} \rho\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}\big(\rho\boldsymbol{v}\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Protože předpokládáme, že v oblast Ω nejsou zdroje musí být změna hmotnosti oblasti Ω rovna hmotě, která vyteče její hranicí. To znamená, že musí platit

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_{\Omega} \rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = -\iint_{\mathcal{S}} \rho\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}\,.$$

Protože tato rovnost má platit pro každý oblast $\Omega \subset \mathcal{V}$, plyne odtud, že v každém bodě oblasti musí platit rovnost $\dfrac{\partial\rho}{\partial t} = -\operatorname{div}\big(\rho\boldsymbol{v}\big)$.

---

59. Najděte práci vektoru $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}$ podél části šroubovice $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}a\cos t + \boldsymbol{j}a\sin t + \boldsymbol{k}bt$, $0 \le t \le 2\pi$.

Řešení: Práci W vektoru $\boldsymbol{a}$ podle orientované křivky $\mathcal{C}$ najdeme křivkovým integrálem druhého druhu $W = \displaystyle\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}$. V našem případě je $\boldsymbol{a} = (x, y, z)$ a křivka $\mathcal{C}$ má parametrické rovnice $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, kde $0 < t < 2\pi$. Proto je

$$W = \int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_0^{2\pi} b^2 t\,\mathrm{d}t = 2\pi^2 b^2\,.$$

60. Najděte práci pole $\boldsymbol{a} = \frac{1}{y}\boldsymbol{i} + \frac{1}{z}\boldsymbol{j} + \frac{1}{x}\boldsymbol{k}$ podél úsečky, která spojuje body $[1;1;1]$ a $[2;4;8]$.

Řešení: Práci W vektoru $\boldsymbol{a}$ podle orientované křivky $\mathcal{C}$ najdeme křivkovým integrálem druhého druhu $W = \int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}$. V našem případě je $\boldsymbol{a} = \left(\frac{1}{y}, \frac{1}{z}, \frac{1}{x}\right)$ a křivka $\mathcal{C}$ je úsečka z bodu $A = [1;1;1]$ do bodu $B = [2;4;8]$. Parametrické rovnice úsečky z bodu A do bodu B lze zapsat ve tvaru $\boldsymbol{r}(t) = A + (B - A)t$, kde $0 \le t \le 1$. Tedy v tomto případě je $x = 1 + t$, $y = 1 + 3t$, $z = 1 + 7t$, kde $0 < t < 1$. Tedy

$$W = \int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+3t} + \frac{3}{1+7t} + \frac{7}{1+t}\right) \mathrm{d}t = \frac{188}{21}\,\ln 2\,.$$

---

61. Najděte práci pole $\boldsymbol{a} = \mathrm{e}^{y-z}\boldsymbol{i} + \mathrm{e}^{z-x}\boldsymbol{j} + \mathrm{e}^{x-y}\boldsymbol{k}$ podél úsečky mezi body $[0;0;0]$ a $[1;3;5]$.

Řešení: Parametrické rovnice úsečky jsou $x = t$, $y = 3t$, $z = 5t$, kde $0 < t < 1$. Tedy hledaná práce je

$$W = \int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_0^1 \left(\mathrm{e}^{-2t} + 3\mathrm{e}^{4t} + 5\mathrm{e}^{-2t}\right) \mathrm{d}t = \frac{9}{4} - 3\mathrm{e}^{-2} + \frac{3}{4}\,\mathrm{e}^4\,.$$

---

62. Najděte práci pole $\boldsymbol{a} = (y+z)\boldsymbol{i} + (2+x)\boldsymbol{j} + (x+y)\boldsymbol{k}$ podél nejkratší kružnice na kulové ploše $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, které spojuje body $[3;4;0]$ a $[0;0;5]$.

Řešení: Parametrické rovnice křivky najdeme jako průnik kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ a roviny, která prochází počátkem a body $A = [3;4;0]$ a $B = [0;0;5]$. Parametrické rovnice dané roviny jsou $x = 3u$, $y = 4u$ a $z = 5v$. Po dosazení do rovnice kulové plochy dostaneme pro parametry u a v vztah $u^2 + v^2 = 1$. Tedy za parametrické rovnice křivky lze vzít $x = 3\cos t$, $y = 4\cos t$ a $z = 5\sin t$, kde $0 < t < \frac{\pi}{2}$. Tedy práce podél dané křivky je

$$W = \int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_0^{\pi/2} \left(-8\sin t - 24\sin t\cos t + 35\cos^2 t - 15\sin^2 t\right) \mathrm{d}t = 5\pi - 20\,.$$

---

63. Najděte práci vektoru $\boldsymbol{a} = f(r)\boldsymbol{r}$, kde f je spojitá funkce, podél křivky AB.

Řešení: Nechť je $x = x(t)$, $y = y(t)$ a $z = z(t)$, kde $t \in \langle a, b\rangle$, parametrizace křivky AB. Pak je práce dána integrálem

$$W = \iint_{AB} f(r)\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_a^b f(r)\cdot\left(xx' + yy' + zz'\right) \mathrm{d}t\,.$$

Jestliže v tomto integrálu zavedeme novou proměnnou vztahem $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, dostaneme $\mathrm{d}r = \dfrac{xx' + yy' + zz'}{r}\,\mathrm{d}t$. Tedy platí

$$W = \int_{r_A}^{r_B} r f(r)\,\mathrm{d}r\,.$$

---

64. Najděte cirkulaci vektoru $\boldsymbol{a} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$, $c =$ konst: a) podél kružnice $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$; b) podél kružnice $(x-2)^2 + y^2 = 1$, $z = 0$.

Řešení: Cirkulace vektoru $\boldsymbol{a}$ podél uzavřené křivky $\mathcal{C}$ je dána křivkovým integrálem $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}$.

a) V tomto případě má křivka $\mathcal{C}$ parametrické rovnice $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 0$, kde $0 < t < 2\pi$. Tedy

$$\oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_0^{2\pi} \left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)\mathrm{d}t = 2\pi\,.$$

b) Kružnice má parametrické rovnice $x = 2 + \cos t$, $y = \sin t$, $z = 0$, kde $0 < t < 2\pi$. Proto je

$$\oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_0^{2\pi} \left(\sin^2 t + 2\sin t + \cos^2 t\right)\mathrm{d}t = 2\pi\,.$$

---

65. Je dáno vektorové pole $\boldsymbol{a} = \dfrac{y}{\sqrt{z}}\boldsymbol{i} - \dfrac{x}{\sqrt{z}}\boldsymbol{j} + \sqrt{xy}\boldsymbol{k}$. Vypočtěte $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$ v bodě $[1;1;1]$ a s její pomocí určete přibližně cirkulaci Γ tohoto pole podél nekonečně malé kružnice

$$\begin{aligned}
&(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = \varepsilon^2 \\
&(x-1)\cos\alpha + (y-1)\cos\beta + (z-1)\cos\gamma = 0\,,
\end{aligned}$$

kde $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Řešení: Rotace vektorového pole $\boldsymbol{a}$ v obecném bodě je

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = \left(\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} - \frac{y}{2z^{3/2}}, -\frac{\sqrt{y}}{2z^{3/2}} - \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}, -\frac{2}{\sqrt{z}}\right).$$

Tedy v bodě $[1;1;1]$ je $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}(1,1,1) = (0,-1,-2)$.

Cirkulace Γ vektoru $\boldsymbol{a}$ podél uzavřené křivky $\mathcal{C}$ je rovna $\Gamma = \displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}$. Podle Stokesovy věty je

$$\Gamma = \oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \iint_{\mathcal{S}} \operatorname{rot}\boldsymbol{a}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{n}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{a}\,\mathrm{d}S\,,$$

kde $\boldsymbol{n}$ je jednotkový vektor normály k ploše $\mathcal{S}$. Protože daná kružnice leží v rovině $(x-1)\cos\alpha + (y-1)\cos\beta + (z-1)\cos\gamma = 0$, jejíž jednotková normála je $\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ a obsah kruhu je $S = \pi\varepsilon^2$, přibližně platí

$$\Gamma = \iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{n} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{a} \, \mathrm{d}S = S\boldsymbol{n} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{a}(1,1,1) = -\pi\varepsilon^2(\cos\beta + 2\cos\gamma)\,.$$

---

66. Rovinný stacionární tok kapaliny je charakterizován vektorem rychlosti $\boldsymbol{w} = u(x,y)\boldsymbol{i} + v(x,y)\boldsymbol{j}$. Určete: 1) Množství kapaliny Q, které protéká uzavřenou křivkou $\mathcal{C}$, která je hranicí omezené oblasti $\mathcal{S}$; 2) cirkulaci Γ vektoru rychlosti podél uzavřené křivky $\mathcal{C}$. Jaké rovnice platí pro funkce u a v, je-li kapalina nestlačitelná a tok nevírový?

Řešení: Je-li $\mathcal{C}$ křivka, která ohraničuje omezenou oblast $\mathcal{S}$ v rovině, je množství kapaliny, která proteče touto křivkou za jednotku času dáno integrálem $Q = \oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}s$, kde $\boldsymbol{n}$ je jednotkový vektor normály, který míří ven z oblasti $\mathcal{S}$. Jsou-li $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, parametrické rovnice křivky $\mathcal{C}$, je tečný vektor k této křivce $\boldsymbol{t} = \bigl(x', y'\bigr)$. Proto je jednotkový vektor normály $\boldsymbol{n} = \dfrac{\bigl(y', -x'\bigr)}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}$. Protože $\mathrm{d}s = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}$, je

$$Q = \oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}s = \int_a^b \bigl(uy' - vx'\bigr)\,\mathrm{d}t = \oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{f} \, \mathrm{d}\boldsymbol{s}\,,$$

kde $\boldsymbol{f} = (-v, u)$. Když použijeme Greenovu větu, dostaneme

$$Q = \oint_{\mathcal{C}} \bigl(u\,\mathrm{d}y - v\,\mathrm{d}x\bigr) = \iint_{\mathcal{S}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Cirkulaci Γ vektoru $\boldsymbol{w}$ podél křivky $\mathcal{C}$ najdeme jako křivkový integrál druhého druhu $\Gamma = \oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{w} \, \mathrm{d}\boldsymbol{s}$. Jestliže použijeme Greenovu větu, dostaneme

$$\Gamma = \oint_{\mathcal{C}} \bigl(u\,\mathrm{d}x + v\,\mathrm{d}y\bigr) = \iint_{\mathcal{S}} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Pro nevírové proudění nestlačitelné kapaliny musí pro každou oblast $\Omega \subset \mathcal{S}$ platit rovnost $Q = \Gamma = 0$. Proto musí být

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{a} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}\,.$$

---

67. Ukažte, že pole $\boldsymbol{a} = yz(2x + y + z)\boldsymbol{i} + xz(x + 2y + z)\boldsymbol{j} + xy(x + y + 2z)\boldsymbol{k}$ je potenciální a najděte jeho potenciál.

Řešení: Vektorové pole $\boldsymbol{a}$ je potenciální právě tehdy, když existuje funkce $U(x,y,z)$ taková, že $\boldsymbol{a} = \operatorname{grad} U$. Ve složkách jsou tyto rovnice

$$\frac{\partial U}{\partial x} = a_x = yz(2x+y+z)$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} = a_y = xz(x+2y+z)$$
$$\frac{\partial U}{\partial z} = a_z = xy(x+y+2z)$$

Protože $\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = 0$, má tato soustava řešení. Jestliže integrujeme první z těchto rovnic podle proměnné x, dostaneme

$$U(x,y,z) = xyz(x+y+z) + \psi(y,z)\,,$$

kde $\psi(y,z)$ je funkce pouze dvou proměnných y a z. Není tedy funkcí proměnné x. Jestliže toto vyjádření funkce $U(x,y,z)$ dosadíme do dalších dvou rovnic, dostaneme

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \Longrightarrow \psi(y,z) = C\,,$$

kde C je libovolná reálná konstanta. Tedy potenciál daného pole je $U(x,y,z) = xyz(x+y+z) + C$.

---

68. Přesvědčte se, že pole $\boldsymbol{a} = \dfrac{2}{(y+z)^{1/2}}\boldsymbol{i} - \dfrac{x}{(y+z)^{3/2}}\boldsymbol{j} - \dfrac{x}{(y+z)^{3/2}}\boldsymbol{k}$ je potenciální a najděte práci podél křivky, která leží v kladném oktantu a spojuje body $[1;1;3]$ a $[2;4;5]$.

Řešení: Je-li vektorové pole $\boldsymbol{a}$ v oblasti Ω potenciální s potenciálem $U(x,y,z)$, nezávisí práce po křivce, která leží v oblasti Ω, na tvaru této křivky, ale pouze na její počátečním bodě A a koncovém bodě B. v tomto případě je $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = U(B) - U(A)$. Derivováním snadno nalezneme, že v prvním oktantu je $\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = 0$. Tedy existuje potenciál $U(x,y,z)$, pro který platí $\operatorname{grad} U = \boldsymbol{a}$, neboli

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{2}{\sqrt{y+z}}\,, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{x}{(y+z)^{3/2}}\,, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{x}{(y+z)^{3/2}}\,.$$

Z první rovnice plyne, že $U(x,y,z) = \dfrac{2x}{\sqrt{y+z}} + \psi(y,z)$. Jestliže dosadíme toto vyjádření funkce U do dalších dvou rovnic, dostaneme $\dfrac{\partial \psi}{\partial y} = \dfrac{\partial \psi}{\partial z} = 0$, neboli $\psi(y,z) = C$, kde C je libovolná konstanta. Tedy například $U(x,y,z) = \dfrac{2x}{\sqrt{y+z}}$. Proto je

$$\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = U(2,4,5) - U(1,1,3) = \frac{1}{3}\,.$$

69. Najděte potenciál gravitačního pole $\boldsymbol{a} = -\dfrac{m}{r^3}\boldsymbol{r}$, které vyvolá hmotnost m v počátku souřadnic.

Řešení: Protože všude mimo počátku je rot $\boldsymbol{a} = 0$, lze alespoň lokálně najít potenciál $U(x, y, z)$, tj. takovou funkci, že grad $U = \boldsymbol{a}$. Funkce $U(x, y, z)$ je tedy řešením rovnic

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{-mx}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{-my}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$$
$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{-mz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$$

Integrací první rovnice podle proměnné x zjistíme, že funkce U má tvar $U(x, y, z) = \dfrac{m}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \psi(y, z)$, kde $\psi(y, z)$ je diferencovatelná funkce. Po dosazení do dalších dvou rovnic zjistíme, že $\dfrac{\partial \psi}{\partial y} = \dfrac{\partial \psi}{\partial z} = 0$, tj.

$$U(x, y, z) = \frac{m}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + C = \frac{m}{r} + C\,,$$

kde C je libovolná reálná konstanta.

---

70. Najděte potenciál gravitačního pole, které vyvolá soustava hmotností m_i, $i = 1, \ldots, n$, které leží v bodech M_i, $i = 1, \ldots, n$.

Řešení: Označíme-li souřadnice hmotných bodů $M_i = \left[x_i; y_i; z_i\right]$ a

$$r_i = \sqrt{\left(x-x_i\right)^2 + \left(y-y_i\right)^2 + \left(z-z_i\right)^2}\,,$$

dostaneme podobně jako v příkladu **69**, že

$$U(x, y, z) = \sum_{i=1}^{m} \frac{m_i}{r_i}\,.$$

---

71. Dokažte, že pole $\boldsymbol{a} = f(r)\boldsymbol{r}$, kde $f(r)$ je spojitá funkce, je potenciální. Najděte potenciál tohoto pole.

Řešení: Protože $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ a derivace $\dfrac{\partial f(r)}{\partial x} = \dfrac{x}{r} f'(r)$, snadno ukážeme, že rot $\boldsymbol{a} = 0$. To znamená, že vektorové pole $\boldsymbol{a}$ má potenciál. Ten je možné najít jako křivkový integrál druhého druhu po křivce s pevným počátečním bodem $\big[x_0; y_0; z_0\big]$ a obecným koncovým bodem $[x; y; z]$. To znamená, že

$$U(x,y,z) - U\big(x_0, y_0, z_0\big) = \int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}\,,$$

kde křivka $\mathcal{C}$ začíná v bodě $\big[x_0; y_0; z_0\big]$ a končí v bodě $[x; y; z]$.
Jsou-li $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $a \le t \le b$, parametrické rovnice křivky $\mathcal{C}$, je

$$U(x,y,z) - U\big(x_0, y_0, z_0\big) = \int_a^b f\big(r(t)\big)\big(xx' + yy' + zz'\big)\,\mathrm{d}t\,.$$

Jestliže v tomto integrálu zavedeme novou proměnnou $\rho = \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}$, dostaneme

$$U(x,y,z) = \int_{r_0}^{r} f(\rho)\rho\,\mathrm{d}\rho + C\,,$$

kde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ a C je libovolná reálná konstanta.