Metoda konečných prvků – učební text

Jan Březina Jan Stebel

22. listopadu 2016

Obsah

1 Opakování analýzy a lineární algebry

2 Opakování plošných a křivkových integrálů

2.1 Křivkový integrál 1. druhu

Jaká je hmotnost vlasu? Představme si natažený vlas a předpokládejme, že takto natažený má konstantní hustotu. Na vlasu si zavedeme souřednici t, $t = 0$ je začátek vlasu $t = 1$ je konec vlasu. V konkrétním bodě t na vlasu má vlas průřez $S(t)$. Pro malý přírůstek $\mathrm{d}t$ je hmotnost kousku vlasu $\mathrm{d}m = \rho S(t)\,\mathrm{d}t$. Celková hmotnost pak je:

$$m = \int_0^1 \rho S(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \rho_t(t)\,\mathrm{d}t, \quad \rho_t(t) = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \rho S(t) \tag{2.1}$$

kde ρ_t je délková hustota. Když vlas pustíme, tak se trochu zkrátí a zkroutí do nějaké křivky v prostoru. Původní bod t má nyní v prostoru polohu $\boldsymbol{\varphi}(t)$. Tím zkroucením se změní průřezy S, ale nezmění se délková hustota, takže hmotnost opět spočteme podle 2.1. Nyní si představme, že vlas je v tíhovém poli $f(\boldsymbol{x})$, pro jednoduchost si představujeme, že tíha působí pouze v směru z a má skalární velikost f, která se ovšem mění ve všech směrech. Jaká na vlas působí celková síla? Pro natažený vlas podél osy x máme, $\mathrm{d}F = f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}m$, a tedy:

$$F = \int_0^1 \rho_t(t) f[(t,0,0)]\,\mathrm{d}t$$

a pro zkroucený vlas:

$$F = \int_k f\rho_t\,\mathrm{d}k = \int_0^1 f\big(\boldsymbol{\varphi}(t)\big)\rho_t(t)\,\mathrm{d}t$$

Nakonec si představme, že jde o zkamenělý vlas uvnitř skalního bloku, jehož hustota $\rho(\boldsymbol{x})$ je známá pro každý bod $\boldsymbol{x}$. Přírůstek síly působící pouze na ten zkamenělý vlas je $\mathrm{d}F = f(\boldsymbol{x})\rho(\boldsymbol{x})S(t)\,\mathrm{d}l$, kde

$$\mathrm{d}l = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2} = \sqrt{(\varphi_x')^2 + (\varphi_y')^2 + (\varphi_z')^2}\,\mathrm{d}t = |\boldsymbol{\varphi}'(t)|\,\mathrm{d}t$$

je přírůstek délky křivky pro přírůstek parametru $\mathrm{d}t$. Celková síla působící na vlas pak je:

$$F = \int_k f\rho\,\mathrm{d}k = \int_0^1 f\big(\boldsymbol{\varphi}(t)\big)\rho(\boldsymbol{\varphi}(t))|\boldsymbol{\varphi}'(t)|\,\mathrm{d}t =$$

Derivace $\boldsymbol{\varphi}'(t)$ je tečný vektor ke křivce k a jeho velikost je skutečný přírůstek v prostoru pro přírůstek $\mathrm{d}t$. Tento typ integrálu nazýváme křivkový integrál 1. druhu ze skalárního pole f podél křivky k, která je dána parametricky:

$$k : \ \{\boldsymbol{\varphi}(t);\ t \in (0,1)\}$$

Integrál je vlastně definován pomocí substituce $\boldsymbol{x} = \vec{\varphi}(t)$:

$$\int_k f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}k = \int_0^1 f\big(\boldsymbol{\varphi}(t)\big)\,|\boldsymbol{\varphi}'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(\varphi_x,\varphi_y,\varphi_z)\sqrt{(\varphi_x')^2 + (\varphi_y')^2 + (\varphi_z')^2}\,\mathrm{d}t. \tag{2.2}$$

Integrál 1. druhu můžeme aplikovat i na vektorové pole, ale výsledkem pak bude vektor.

Další (fyzikální) příklady použití křivkového integrálu prvního druhu.

- **Moment síly** (vůči počátku), $M(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{x}$. Celkový moment na ohnutém drátu:

$$M = \int_k \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{x}\,\mathrm{d}k = \int_0^1 \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\varphi}(t)) \times \boldsymbol{\varphi}(t)|\boldsymbol{\varphi}'(t)|\,\mathrm{d}t$$

- **Délka křivky** je integrál (1. druhu) ze skalárního pole $f(x, y, z) = 1$, tj.

$$L = \int_\alpha^\beta |\boldsymbol{\varphi}'(t)| \, \mathrm{d}t,$$

- **Průměrná teplota** na poledníku k. Poledník je myšlená křivka na povrchu země a tiše předpokládáme, že je hladká.

$$T = \frac{1}{L} \int_k T(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}k = \frac{1}{L} \int_0^1 T(\varphi(t)) |\boldsymbol{\varphi}'(t)| \, \mathrm{d}t,$$

  kde L je (skutečná) délka poledníku (viz. bod 2.1).

- **Hmota křivky nebo plochy** je integrál (1. druhu) ze skalárního pole hustoty $\rho(x, y, z)$.

$$M = \int_k \rho(x, y, z) \, \mathrm{d}k$$

- **Souřadnice těžiště** křivky je vektor (T_x, T_y, T_z) integrálů (1. druhu) z vektoru skalárních funkcí $x\rho(x, y, z)$, $y\rho(x, y, z)$, $z\rho(x, y, z)$ dělený celkovou hmotou M. Např. pro plochu S:

$$\boldsymbol{T} = \frac{1}{M} \int_k \boldsymbol{x} \rho(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}k$$

- **Moment setrvačnosti** vzhledem k ose o je integrál (1. druhu) ze skalární funkce $f(\boldsymbol{x}) = r^2 \rho(\boldsymbol{x})$, kde r je vzdálenost bodu $\boldsymbol{x}]$ od osy o. Ideální je transformovat křivku i osu tak aby osa byla jedna ze souředných os, např. pro o totožnou s osou z je

$$I_z = \frac{1}{M} \int_k (x_x^2 + x_y^2) \rho(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}k$$

2.2 Křivkový integrál 2. druhu

Ve vektorovém zápisu je integrál (2. druhu) z vektorového pole $\boldsymbol{F}$ podél křivky k:

$$\int_k \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{t}_k \, \mathrm{d}k = \int_0^1 \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\varphi}(s)) \cdot \boldsymbol{\varphi}'(s) \, \mathrm{d}k \tag{2.3}$$

Zde je $\boldsymbol{t}_k$ tečný vektor. Přesněji pokud $\mathrm{d}k$ je velikost tečného vektoru jako pro integrál 1. druhu, tak $\boldsymbol{t}_k$, je vlastně jednotkový tečný vektor. Ovšem stále je třeba výrazy vlevo v (2.2), (2.3), (2.4), (2.5) jsou pouze symboly (zkratky), pro to co stojí vpravo. Pro některé druhy operací stačí manipulovat se zkratkami, ale někdy je potřeba se ponořit do definice.

Příklady:

- **Práce síly po křivce.** Integrál 2. druhu z vektorové funkce síly.

2.3 Plošný integrál 1. druhu

Podobně jako v případě křivku je plocha dána zobrazením $\boldsymbol{\varphi}(u, v)$ z množiny $M \subset \mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^3$. Normála N k ploše v bodě daném parametry (u, v), t.j, v bodě $\boldsymbol{\varphi}(u, v)$ je dána vektorovým součinem tečných vektorů:

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{t}_u \times \boldsymbol{t}_v, \quad \boldsymbol{t}_u = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u}, \quad \boldsymbol{t}_v = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v}.$$

Jednotková normála je pak $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{N}/|\boldsymbol{N}|$.

Integrál (1. druhu) ze skalárního pole f přes plochu $S = \{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(u, v),\ (u, v) \in M\}$ je definován:

$$\int_S f \, \mathrm{d}S = \iint_M f(\boldsymbol{\varphi}(u, v)) |\boldsymbol{N}(u, v)| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v = \iint_M f(\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z) \sqrt{(N_x)^2 + (N_y)^2 + (N_z)^2} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v, \tag{2.4}$$

Pozor, pokud plocha není rovina, tak normála a tudíž i její velikost jsou funkcí parametrů u, v, [**?**] str. 151.

- Velikost povrchu P plochy M je integrál (1. druhu) ze skalárního pole $f(x,y,z) = 1$, tj.

$$P = \int_M 1 \,\mathrm{d}S = \int_M |\boldsymbol{n}(u,v)| \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

- **Hmota plochy** je integrál (1. druhu) ze skalárního pole hustoty $\rho(x,y,z)$.

$$M = \int_S \rho(x,y,z) \,\mathrm{d}S$$

Souřadnice těžiště plochy je vektor $\boldsymbol{T}$ integrálů (1. druhu) z vektoru skalárních funkcí $\boldsymbol{x}\rho(\boldsymbol{x})$ dělený celkovou hmotou M. Např. pro plochu S:

$$\boldsymbol{T} = \frac{1}{M} \int_S \boldsymbol{x}\rho(\boldsymbol{x}) \,\mathrm{d}S$$

Moment setrvačnosti vzhledem k ose o je integrál (1. druhu) ze skalární funkce $f(\boldsymbol{x}) = r^2\rho(\boldsymbol{x})$, kde r je vzdálenost bodu $[x,y,z]$ od osy o. Pro osu z:

$$I_z = \frac{1}{M} \int_S (x_x^2 + x_y^2)\rho(\boldsymbol{x}) \,\mathrm{d}S$$

Práce síly po křivce. Integrál 2. druhu z vektorové funkce síly. **Tok kapaliny skrze plochu za jednotkový čas.** Integrál 2. druhu z vektorového pole rychlosti.

2.4 Plošný integrál 2. druhu

Podobně lze integrál (2. druhu) vektorového pole $\boldsymbol{F}$ skrze plochu S napsat:

$$\int_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}S = \int_M \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\varphi}(u,v)) \cdot \big(\partial_u \boldsymbol{\varphi} \times \partial_v \boldsymbol{\varphi}\big) \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \tag{2.5}$$

- Tento integrál má význam celkového toku pole skrz plochu. Například množství kapaliny, které proteče skrze plochu za jednotkový čas.

2.5 Integrační věty: Stokesova, Gaussova, Greenova

Greenova věta (integrace per partes): Pokud má oblast V hranici S, pak pro hladká skalární pole u a v platí:

$$\int_V \partial_x uv \,\mathrm{d}V = \int_S uvn_x \,\mathrm{d}S - \int_V u\partial_x v \,\mathrm{d}V$$

kde n_x je složka jednotkové normály. Odtud pro hladké vektorové pole $\boldsymbol{v}$ dostaneme:

$$\int_V (\nabla u) \cdot \boldsymbol{v} \,\mathrm{d}V = \int_S u\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}S - \int_V u \,\operatorname{div} \boldsymbol{v} \,\mathrm{d}V$$

Gaussova věta: Pro objem V ohraničený plochou S platí

$$\int_V \operatorname{div} \boldsymbol{F} \,\mathrm{d}V = \int_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}S.$$

Můžeme odvodit z Greenovy věty, použitím $u = 1$ a $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{F}$:

$$0 = \int_V (\nabla 1) \cdot \boldsymbol{F} \,\mathrm{d}V = \int_S 1\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}S - \int_S 1 \operatorname{div} \boldsymbol{F} \,\mathrm{d}V$$

Stokesova věta: Pro plochu S ohraničenou uzavřenou křivkou k platí

$$\int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}S = \int_k \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{t} \,\mathrm{d}\boldsymbol{k}.$$

Hranici oblasti Ω zapisujeme též jako $\partial\Omega$.

3 Zákony zachování, věta o transportu

Konzervativní veličina.

- Zachování hmoty.
- Zachování hybnosti.
- Zachování momentu hybnosti.
- Zachování energie. Zachování vnitřní energie, tepla.

Natahovací pytlík s vodou se třpytkama. Hustota třpytek v bodě $\boldsymbol{x}$ v čase t je $\rho(t, \boldsymbol{x})$. Pytlík v čase t, je oblast (otevřená jednoduše souvislá množina) Ω_t, takže ho můžeme různě deformovat. Počet třpytek v pytlíku je pořád stejný:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\Omega_t} \rho(t, \boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0.$$

Popis deformace v čase. Bod $\boldsymbol{x}_0$ v čase 0 je přesunut do bodu $\boldsymbol{x}_t$ v čase t.

$$\boldsymbol{x}_t = X(t, \boldsymbol{x}_0).$$

Rychlostní pole pak je $\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}_t) = \partial_t \boldsymbol{X}(t, \boldsymbol{x}_0)$.

Věta 3.1 (Reynolds transport theorem)**.** *Nechť $q(t, \boldsymbol{x})$ je hladká skalární funkce na na oblasti Ω_t. Oblast Ω_t je dána hladkým zobrazením $X(t, \boldsymbol{X})$ a počáteční oblastí Ω_0:*

$$\Omega_t = \{\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{X}(t, \boldsymbol{x}_0); \boldsymbol{x}_0 \in \Omega_0\}.$$

Pak platí:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\Omega_t} q(t, \boldsymbol{x}_t) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}_t = \int_{\Omega_t} \partial_t q + \operatorname{div}(q\boldsymbol{u}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}_t. \tag{3.1}$$

Důkaz. Nechť χ_0 je hladká "klobouková"funkce nulová mimo Ω_0 a "skoro jednotková"uvnitř Ω_0:

$$\chi_0(\boldsymbol{x}) = B(\operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, \partial\Omega_0)),$$

kde vzdálenost dist je kladná uvnitř Ω_0 a záporná vně. Funkce B je nulová na $(-\infty, 0)$, $B = 1$ na (ϵ, ∞), a je hladká a rostoucí na $(0, \epsilon)$. Tuto funkci necháme "unášet"rychlostním polem $\boldsymbol{u}$, takže se v čese t zdeformuje:

$$\chi(t, \boldsymbol{X}(t, \boldsymbol{x}_0)) = \chi_0(\boldsymbol{x}_0).$$

Pro materiálovou derivaci funkce $\chi(t, \boldsymbol{X})$ platí:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\chi(t, \boldsymbol{X}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\chi(t, \boldsymbol{X}(t, \boldsymbol{x}_0)) = \partial_t \chi(t, \boldsymbol{X}) + \sum_i \partial_{X_i} \chi(t, \boldsymbol{X}) \partial_t X_i(t, \boldsymbol{x}_0) = \partial\chi + \boldsymbol{u} \cdot \nabla\chi$$

Nyní spočítáme :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\Omega_t} q\chi \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathbb{R}^3} q\chi \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^3} (\partial_t q)\chi + q(\partial_t \chi) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^3} (\partial_t q)\chi - q(\boldsymbol{u} \cdot \nabla\chi) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\Omega_t} \big[\partial_t q + \operatorname{div}(q\boldsymbol{u})\big]\chi \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

Klobouková funkce χ může být libovolně blízko *charakteristické funkci* oblasti Ω_t z čehož plyne důsledek věty.

□

Např. zákon zachování hmoty můžeme napsat jako:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\Omega_t} \rho(t, \boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\Omega_t} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{u}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0$$

kde $\boldsymbol{u}$ je rychlost plynu a ρ jeho hustota.

A jelikož toto platí pro libovolnou Ω_t, pak pro hladké ρ a $\boldsymbol{u}$ platí:

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{u}) = 0$$

což je *rovnice kontinuity* pro hustotu stlačitelného plynu.

3.1 Eulerovy rovnice

Uvažujme materiál (tekutinu, nebo elastickou pevnou látku) s rychlostním polem u. Ze zákona zachování hybnosti ρu plyne použitím rovnice kontinuity:

$$\partial_t(\rho \boldsymbol{u}_i) + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{u}) = -\nabla P,$$

kde P je tlak, a jeho záporný gradient je hustota síly, která způsobuje změnu hybnosti podle 2. Newtonova zákona. Tato rovnice spolu s rovnicí kontinuity pro plyn:

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{u}) = 0$$

tvoří systém tzv. Eulerových rovnic popisujících proudění neviskózní stlačitelné tekutiny.

4 Odvození rovnice vedení tepla

Rovnice kontinuity platí za předpokladu, že "pohyb veličiny" q je způsoben unášením v rychlostním poli u. Přirozená interpretace je, že se jedná o rychlostní pole média, např. tekutiny. To ovšem obecně neplatí. Například pro koncentaci soli v roztoku platí také zákon zachování a sůl se pohybuje i v (makroskopicky) stacionárním objemu vody pomocí difúze. Je tedy třeba u interpretovat jinak.

Definujeme plošný tok $\boldsymbol{j}$ veličiny q jako množství veličiny, které projde jednotkovou elementární plochou za jednotku času. Tedy uvažujeme nekonečně malou plošku ΔS v bodě $\boldsymbol{x}$ s normálou $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_i$ (bázový vektor) a nekonečně malou zmenu času Δt. Pokud mezi časy t a $t + \Delta t$ projde skrz ΔS množství ΔQ veličiny q, platí

$$j_i(t, \boldsymbol{x}) = \frac{\Delta Q}{\Delta S \Delta t}$$

Pro pevnou oblast Ω je pokles množství veličiny q v Ω roven celkovému toku veličiny ven z Ω přes její hranici:

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_\Omega q \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}S = \int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{j}$$

Odtud dostaneme bodovou formu obecné rovnice kontinuity:

$$\partial_t q + \operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0.$$

Ke stejnému výsledku dojdeme pokud použijeme Reynoldsovu větu pro rychlostní pole $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{j}/q$.

Tok $\boldsymbol{j}(t, \boldsymbol{x})$ je obecně nějakou funkcí závislou na lokálním chování veličiny q na okolí bodu $(t, \boldsymbol{x})$, může tedy záviset na q, ∇q, na $\partial_t q$ a případně na vyšších prostorových a časových derivacích. Může také záviset na nějakých dalších veličinách, jako například na rychlosti média, viz. případ $\boldsymbol{j} = q\boldsymbol{u}$.

Nyní uvažujme specuálně zákon zachování pro energii pevného tělesa. Energie elementárního objemu ΔV je dána jeho teplotou jako:

$$\Delta E = C \rho T \Delta V$$

kde C $[J/K/kg]$ je tepelná kapacita a T $[K]$ je teplota. Teplený tok $\boldsymbol{j}$ $[W/m^2]$ je v nejjednodušší podobě dán Fourierovým zákonem:

$$\boldsymbol{j} = -k \nabla T$$

přičemž tepelná vodivost k $[W/m/K]$ může být případně funkcí teploty $k(T)$. Dostáváme tak rovnici vedení tepla:

$$\partial_t(C \rho T) - \operatorname{div}(k \nabla T) = 0$$

Pokud budou v materiálu nějaké objemové teplné zdroje f $[W/m^3]$ dostaneme:

$$\partial_t(C \rho T) - \operatorname{div}(k \nabla T) = f$$

Pokud by se jednalo o vedení tepla v kapalině, musíme do $\boldsymbol{j}$ zarnout i transport kapalinou:

$$\partial_t(C \rho T) + \operatorname{div}(C \rho T \boldsymbol{u}) - \operatorname{div}(k \nabla T) = f.$$

5 Transportní procesy

Rovnice vedení tepla odvozená v předchozí kapitole je jedním z příkladů transportních procesů, které popisují transport nějaké veličiny a jsou odvozené ze zákona jejího zachování. Uvedeme pár dalších příkladů.

5.1 Proudění v porézním prostředí

Uvažujme porézní prostředí, kde podíl pórů v referenčním objemu je ν $[-]$. Tuto bezrozměrnou veličinu nazýváme porozita. Podíl tekutiny (vody) v referenčním objemu θ $[-]$ se nazývá saturace (opět bezrozměrná). Saturace se pohybuje od nějaké minimální (reziduální) saturace θ_r po saturovaný podíl tekutiny θ_s obvykle rovný porozitě ν. Pro tekutinu se zachovává její hmota, resp. hustota v prostoru $\rho_V = \rho\theta$, kde ρ je hustota tekutiny. V nejjednodušším případě uvažujeme nestlačitelnou kapalinu, plně saturovné porézní prostředí a uvažujeme malé tlaky. V tom případě je ρ i θ konstanta. Pak z obecné rovnice kontinuity dostaneme:

$$-\operatorname{div} \boldsymbol{j} = f,$$

kde $\boldsymbol{j}$ $[kg/m^2/s]$ je hustota toku tekutiny a f $[kg/m^3/s]$ je hustota objemových zdrojů tekutiny. Podobně jako v případě tepla je nejjednodušší vztah pro $\boldsymbol{j}$ dán gradientem tlaku p $[Pa] = [kgm^2/s]$ pomocí tzv. Darcyho zákona:

$$\boldsymbol{j} = -\rho k \mathbb{K} \nabla p.$$

Zde $k = \kappa/\mu$ je hydraulická vodivost daná permeabilitou κ $[m^2]$, která je vlastností porézního média, a viskozitou μ $[Pa.s]$, která je vlastností tekutiny. Tenzor $\mathbb{K}$ je jednotkový v případě izotropního prostředí, ale v případě anisotrpního prostředí je to obecně symetrický pozitivně definitní tenzor. Pokud má porézní materiál nějak orientované mikroskopické kapiláry, bude v jednom směru mít větší vodivost než ve směrech kolmých. Obecně může mít materiál tři různé vodivosti ve třech různých směrech k_x, k_y, k_z a nakonec tento materiál může být libovolně natočen v prostoru pomocí matice rotace Q:

$$\mathbb{K} = \mathbb{Q}^T \mathbb{D} \mathbb{Q}, \quad \mathbb{D} = \begin{pmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{pmatrix}$$

Vodivosti v hlavních směrech jsou vlastní čísla matice $\mathbb{K}$, musí být kladné. Matice rotace $\mathbb{Q}$ je tvořena (ortogonálními) vlastními vektory. Zde máme příklad anisotropie hydrulické vodivosti. Podobně existují materiály s anisotropní tepelnou vodivostí, nebo anisotrponí pevností etc.

Dále můžeme uvažovat stlačitelnou tekutinu, resp. stlačitelný materiál okolo pórů. Pro použití rovnice kontinuity pořebujeme spočítat derivaci hustotu hmoty tekutiny v prostoru podle času:

$$\partial_t \rho_V = \Big(\frac{\partial \rho}{\partial p} + \frac{\partial \theta}{\partial p}\Big) \partial_t p = S \partial_t p.$$

Veličina S $[kg/m^3/Pa]$ se nazývá storativita a zahrnuje jak stlačitelnost tekutiny $\partial_p \rho$ tak stlačitelnost prostředí $\partial_p \theta$. Pro nasycené, stlačitelné porézní prostředí tedy máme rovnici:

$$S \partial_t p - \operatorname{div} \Big(\rho k \mathbb{K} \nabla p\Big) = f$$

Pro nenasycené prostředí pak dostáváme záporné (sací) tlaky p a pro ně saturaci $\theta_r \leqslant \theta(p) \leqslant \theta_s$, která je funkcí tlaku. Navíc i vodivost k, klesá s klesajícím nasycením, je tedy $k(\theta)$ funkcí saturace. Dohromady dostaneme tzv. Richardsovu rovnici:

$$\partial_t \theta(p) - \operatorname{div} \Big(\rho k(\theta(p)) \mathbb{K} \nabla p\Big) = f$$

kde funkce $\theta(p)$ a $k(\theta)$ jsou obecně nelineární a dostáváme tak nelineární parciální diferenciální rovnici.

5.2 Transport chemických látek

$$\partial_t(\rho_i c_i) + \operatorname{div}(\rho_i c_i \frac{\boldsymbol{u}}{\nu}) - \operatorname{div}(\mathbb{D} \nabla c_i) = r_{ij}. \tag{5.1}$$

6 Vlnová rovnice (akustika)

Odvodíme rovnici pro kmitání struny. Stav struny v čase t a poloze x je dán výchylkou struny $u(t,x)$. Pro zjendodušení si představujeme, že struna může kmitat jen v jednom směru. Na element daný intervalem (a,b) působí síly v koncových bodech:

$$\boldsymbol{F}(t,a) = -T(t,a)\boldsymbol{t}(t,a), \quad \boldsymbol{F}(t,b) = T(t,b)\boldsymbol{t}(t,b)$$

kde T je napětí ve struně a $\boldsymbol{t}$ je tečný vektor $t(t,x) = (1, \partial_x u(t,x))$. Jelikož v horizontálním směru se struna nepohybuje můsí být horizontální složka součtu sil rovna nule:

$$T(t,b) - T(t,a) = 0$$

a jelikož jsme body a a b volili libovolně, je napětí ve struně nazávislé na poloze: $T(t,x) = T(t)$. Proto pro vertikální složku síly platí

$$F_y = F_y(t,a) + F_y(t,b) = T(t)\big(\partial_x u(t,b) - \partial_x u(t,a)\big)$$

Nyní použijeme 2. Newtonův zákon:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^b \rho(x)\partial_t u(t,x)\,\mathrm{d}x = F_y(t,x) = T(t)\big(\partial_x u(t,b) - \partial_x u(t,a)\big) = T(t)\int_a^b \partial_{xx}u(t,x)\,\mathrm{d}x$$

A jelikož a a b jsou libovolné, dostáváme bodovou rovnici:

$$\rho(x)\partial_{tt}u(t,x) = T(t)\partial_{xx}u(t,x)$$

Pokud předpokládáme konstantní hustotu $\rho(x) = \rho_0$ a zanedbáme změnu napětí struny při malé výchylce $T(t) = T_0$ dostaneme vlnovou rovnici ve tvaru:

$$\partial_{tt}u(t,x) = c^2\partial_{xx}u(t,x)$$

kde

$$c = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}$$

je rychlost šíření vlny. Mírně kompplikovanější je odvození vlnové rovnice pro změny (akustického) tlaku v prostoru:

$$\partial_{tt}p(t,\boldsymbol{x}) = c^2\Delta p(t,\boldsymbol{x})$$

kde pro rychlost zvuku c platí:

$$c = \sqrt{\frac{B}{\rho_0}}, \quad B = \rho_0\frac{\partial P}{\partial \rho}$$

přičemž B je objemová stlačitelnost při adiabatické expanzi. Pro vzduch máme $B = 1.45 \times 10^5\ Pa$ a hustotu $\rho_0 = 1.2 kg/m^3$ a dostáváme rychlost zvuku:

$$c = 347\sqrt{\frac{kg.m/s^2/m^2}{kg/m^3}} = 1251 km/h$$

Tabulková hodnota je $340 m/s$.

7 Mechanika

...

8 Elektromagnetismus

9 Klasifikace PDR

9.1 Eliptické rovnice

Základním příkladem je Laplaceova rovnice:

$$\Delta u(\boldsymbol{x}) = 0$$

respektive Poisonova rovnice

$$\Delta u(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}).$$

Dalšími příklady je stacionární rovnice vedení tepla:

$$\operatorname{div}(k\nabla T(\boldsymbol{x})) = f(\boldsymbol{x}),$$

resp. stacionární rovnice Darcyho proudění:

$$\operatorname{div}(\mathbb{K}\nabla p(\boldsymbol{x})) = f(\boldsymbol{x}).$$

Obecná rovnici druhého řádu:

$$\operatorname{div}\Big(\mathbb{A}\nabla u(\boldsymbol{x})\Big) + \boldsymbol{b}\nabla u(\boldsymbol{x}) + cu(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$$

je eliptická, pokud $\mathbb{A}$ je symetrická pozitivně definitní matice.

Pro eliptické rovnice platí (za jistých omezeních pro $\boldsymbol{b}$ a c) tzv. princip maxima. Pokud u je řešením eplitické rovnice na oblasti Ω pak

$$\max_{\boldsymbol{x}\in\Omega} u(\boldsymbol{x}) \leqslant \max_{\boldsymbol{x}\in\partial\Omega} u(\boldsymbol{x}).$$

Podobně pro minimum:

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\Omega} u(\boldsymbol{x}) \geqslant \min_{\boldsymbol{x}\in\partial\Omega} u(\boldsymbol{x}).$$

9.2 Parabolické rovnice rovnice

Příkladem je nestacionární rovnice vedení tepla:

$$\partial_t T - \operatorname{div}(k\nabla T) = f$$

Vlastnosti řešení:

- I zde platí princip maxima vzhledem k okrajové podmínce.
- Pokles řešení v čase:

$$\max_{\boldsymbol{x}\in\Omega} u(t,\boldsymbol{x}) \leqslant \max_{\boldsymbol{x}\in\Omega} u(s,\boldsymbol{x}), \quad \text{pro } t \geqslant s.$$

Rovnice "zhlazuje"počáteční podmínku. Nekonečná rychlost šíření změn.

9.3 Hyperbolické rovnice

Příklad je vlnová rovnice:

$$\partial_{tt} p(t,\boldsymbol{x}) = c^2\Delta p(t,\boldsymbol{x})$$

Transportní rovnice (rovnice kontinuity), např. pro rozpuštěnou látku:

$$\partial_t(\rho c) + \operatorname{div}((\rho c)\boldsymbol{u}) = 0$$

Eulerovy rovnice:

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{u}) = 0$$

$$\partial_t(\rho\boldsymbol{u}_i) + \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}) = -\nabla P,$$

Kvalitativní vlastnosti řešení:

- Konečná rychlost šíření (vln).
- Nezhlazuje.
- Nesplňuje princip maxima, řešení se může akumulovat v bodě (náraz vlny na pobřeží).

10 Slabé řešení rovnice

Uvažujme transportní rovnici na nekonečné oblasti $\Omega = \mathbb{R}$ (pro x):

$$\partial_t u(t,x) + v\partial_x u(t,x) = 0 \tag{10.1}$$

kde v je konstantní rychlost. Řešením je posunutá počáteční podmínka $u_0(x)$:

$$u(t,x) = u_0(x - vt)$$

pro libovolnou diferencovatelnou funkci u_0 máme:

$$\partial_t u + v\partial_x u = u_0'(x - vt)(-v) + vu_0'(x - vt) = 0$$

Zdá se logické, že by toto mělo platit pro libovolnou počáteční podmínku u_0, ale rovnice je formulována tak, že to platí jen pokud je u_0 diferencovatelná. Zkusme se vrátit k tomu jak jsme transportní rovnici odvodili. Pomocí Raynoldsovy věty jsme dostali:

$$\int_{\Omega_t} \partial_t u + \operatorname{div}(vu)\,\mathrm{d}x = \int_{\Omega_t} \partial_t u + v\partial_x u\,\mathrm{d}x = 0$$

pro libovolnou oblast Ω_t. A bodovou rovnici (10.1) jsme dostali za předpokladu, že vnitřek integrálu je spojitý, tedy u je spojitě diferencovatelná v prostoru i čase. Tedy požadavek na diferencovatelnost je ve skutečnosti umělý a i bez něj platí:

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(\partial_t u + \partial_x(vu))\,\mathrm{d}x = 0$$

pro libovolnou hladkou funkci φ s kompaktním nosičem. Nosič funkce je množina, kde je funkce nenulová:

$$\mathrm{supp}\varphi = \{x,\ \varphi(x) > 0\}$$

a v našem případě jsou kompaktní všechny omezené a uzavřené intervaly. Jde tedy o to, že φ musí být *směrem k nekonečnu* nulová.

Nyní však nevíme co je $\partial_t u$ pokud je u_0 nespojitá, např. $u_0(x) = \mathrm{sgn}(x)$. Abychom se tohoto problému zbavili použijeme Greenovu větu (zde vlastně jen integraci per partes):

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \varphi(t,x)\big(\partial_t u + \partial_x(vu)\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} -\partial_t\varphi u - \partial_x\varphi vu\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 0$$

pro libovolnou hladkou funkci $\varphi(t,x)$ s kompaktním nosičem na $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Tato rovnice již skutečně platí pro libovolnou integrovatelnou počáteční podmínku u_0.

10.1 Slabé řešení pro eliptické rovnice

Budeme řešit rovnici

$$-\operatorname{div}(\mathbb{K}\nabla u) + \operatorname{div}(\boldsymbol{v}u) = f + \sigma_f(u_f - u) \quad \text{na } \Omega. \tag{10.2}$$

Rovnice popisuje ustálené rozložení teploty v médiu, které se pohybuje rychlostním polem $\boldsymbol{v}$ a má obecně anisotropní tensor teplené vodivosti $\mathbb{K}$. Tento tenzor zahrnuje jak difúzi tepla, tak např. disperzi, t.j. zvýšenou vodivost ve směru proudění. Na levé straně máme postupně difúzní člen a konvektivní člen. Na pravé straně je hustota objemových zdrojů tepla f a kontaktní zdroj tepla. Kontaktní sdroj modeluje například přenos tepla z tělesa, které se dotýká kovového plátu. Zde je u_f teplota tělesa a $\sigma_f \geqslant 0$ koeficient přestupu tepla z tělesa na plát. Tento člen však může modelovat také přenost tepla z horniny do podzemní vody.

Eliptickou rovnici na omezené oblasti Ω je třeba doplnit okrajovými podmínkami na celé hranici $\partial\Omega$. Základní tři typy podmínek jsou:

Dirichletova okrajová podmínka.

$$u(\boldsymbol{x}) = u_d(\boldsymbol{x}) \text{ na } \Gamma_d$$

předepisuje teplotu u_d na části hranice Γ_d. Pevná teplota na hranici modeluje situaci, kdy se těleso Ω dokonale vodivě dotýká termostatu - tělesa z velkou teplenou kapacitou.

Neumannova okrajová podmínka.

$$(-\mathbb{K}\nabla u + \boldsymbol{v}u)\cdot\boldsymbol{n} = q_n \text{ na } \Gamma_n.$$

Člen vlevo se nazývá normálový teplený tok, který je předepsán jako q_n. V teorii se obvykle uvažuje jako kladný tok ve směru ven z oblasti (vnější normála), nicmáně z důvodu konzistence s objemovými zdroji se v praxi používá raději opačná konvence. Fyzikálně relevantní je případ kdy je hranice pevná $\boldsymbol{v} = 0$ a teplený tok je dán např. výkonem topidla na hranici.

Robinova (Newtonova) okrajová podmínka.

$$(-\mathbb{K}\nabla u + \boldsymbol{v}u)\cdot\boldsymbol{n} = \sigma_r(u - u_r) \text{ na } \Gamma_r.$$

Opět je releventní především případ $\boldsymbol{v} = 0$, kdy podmínka modeluje realistický přenost tepla s koeficientem $\sigma_r \geqslant 0$ z tělesa o teplotě u_r. Zde je opět $\boldsymbol{n}$ vnější normála, tedy vlevo je tok ven z oblasti, který je kladný pokud je $u > u_r$ což souhlasí se znaménkem na pravé straně.

Mimo tyto základní podmínky se v reálných úlohách objevují nejrůznější další podmínky. Například pokud na části hranice vtéká do oblasti voda o dané teplotě U, bude, půjde o Neumannovu podmínku s $\boldsymbol{v} \neq 0$ a $q_n = U\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$. Pro výtok z oblasti však potřebujeme podmínku $q_n = u\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$, což lze považovat za Robinovu podmínku s $u_r = 0$ a $\sigma_r = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$. Ovšem rychlost $\boldsymbol{v}$ nemusí být na hranici dopředu známa, může být výsledkem řešení nějaké rovnice proudění, proto je obvykle tuto podmínku chýpat jako zvláštní typ. V praxi se také objevuje například kombinace Neumannovy a Robinovy okrajové podmínky:

$$(-\mathbb{K}\nabla u + \boldsymbol{v}u)\cdot\boldsymbol{n} = \sigma_r(u - u_r) + q_n$$

Z hlediska teorie lze obvykle tyto zvláštní případy popsat pomocí předchozích tří typů, ale jsou užitečné pro praxi.

Dále předpokládáme, že množiny Γ_d, Γ_n, a Γ_r jsou navzájem diskjunktní (nemají průnik) a jejich sjednocení (respektive sjednocení jejich uzávěrů) je hranice $\partial\Omega$.

10.2 Slabá formulace eliptické úlohy

V této kapitole odvodíme slabou formulaci rovnice vedení tepla, spolu s aplikací klasických okrajových podmínek.

Prvně přenásobíme rovnici (10.2) libovolnou hladkou testovací funkcí $\varphi(\boldsymbol{x}) \in C^\infty(\overline{\Omega})$ (hladá až do hranice) a integrujeme přes Ω:

$$\int_\Omega \varphi\Big(-\operatorname{div}(\mathbb{K}\nabla u - \boldsymbol{v}u)\Big)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega \varphi\Big(f + \sigma_f(u_f - u)\Big)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Dále v na levé straně použijeme Greenovu větu k přehození divergence na testovací funkci:

$$\int_\Omega \nabla\varphi\cdot(\mathbb{K}\nabla u - \boldsymbol{v}u)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega} -\varphi(\mathbb{K}\nabla u - \boldsymbol{v}u)\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = \int_\Omega \varphi\Big(f + \sigma_f(u_f - u)\Big)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{10.3}$$

Než přistoupíme k aplikaci okrajových podmínek, zamysleme se jaké vlastnosti musí mít funkce u, aby tato rovnice vůbec měla smysl. Pokud budeme předpokládat, že všechny ostatní parametry jsou hladké, musí mít funkce u alespoň integrovatelné derivace ($\partial_{x_i} u \in L_1(\Omega)$). Každopádně funkce u nemůže být libovolná, ale patří do nějakého vektorového prostoru funkcí $H^1(\Omega)$, který si přesně zavedeme až později, ale již víme, že jeho funkce mají integrovatelnou derivaci.

Pro začátek předpokládejme pouze *homogenní* Dirichletovu okrajovou podmínku $u_d = 0$. Pak je řešení u ve skutečnosti z podprostoru:

$$V_0 = \{u \in H^1(\Omega), u(\boldsymbol{x}) = 0 \text{ na } \Gamma_d\}$$

Jelikož už známe hodnotu řešení na hranici Γ_d nepotřebujeme (10.3) na této části hranice a proto se můžeme omezit na testovací funkce, které jsou na Γ_d nulové, t.j.

$$\varphi \in \mathcal{D}_0 = \{\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega}),\ \varphi(\boldsymbol{x}) = 0 \text{ na } \Gamma_d\}.$$

Nyní rozdělíme hraniční integrál na integrály přes části hranice odpovídající jednotlivým typům okrajových podmínek: Na Γ_d je $\varphi = 0$ příslušná člen je tedy nulový:

$$\int_{\Gamma_d} -\varphi(\mathbb{K}\nabla u - \boldsymbol{v}u)\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = 0$$

Na Γ_n je tok roven q, máme tedy:

$$\int_{\Gamma_n} -\varphi(\mathbb{K}\nabla u - \boldsymbol{v}u)\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = \int_{\Gamma_n} \varphi q\,\mathrm{d}s.$$

Podobně známe tok na Γ_r:

$$\int_{\Gamma_r} -\varphi(\mathbb{K}\nabla u - \boldsymbol{v}u)\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = \int_{\Gamma_n} \varphi\sigma_r(u-u_r)\,\mathrm{d}s.$$

Dostáváme tak slabou formulaci rovnice (10.2). Slabým řešením bude každá funkce u z prostoru V_0, který splňuje

$$A(u,\varphi) := \int_\Omega (\mathbb{K}\nabla u - \boldsymbol{v}u)\cdot\nabla\varphi + \sigma_f u\varphi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\Gamma_r}\sigma_r u\varphi\,\mathrm{d}s \tag{10.4}$$

$$= \int_\Omega \Big(f+\sigma_f u_f\Big)\varphi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\Gamma_r}\sigma_r u_r\varphi\,\mathrm{d}s + \int_{\Gamma_n} -q\varphi\,\mathrm{d}s =: \langle F,\varphi\rangle \tag{10.5}$$

pro všechna $\varphi\in\mathcal{D}$.

Nyní uvažujme případ s obecnou dirichletovou okrajovou podmínkou $u_d\neq 0$. Budeme předpokládat, že u_d lze prodloužit dovnitř oblasti Ω. Tedy, že existuje funkce $\tilde{u}_d$ z prostoru $H^1(\Omega)$ taková, že $\tilde{u}_d = u_d$ na Γ_d a jinak je $\tilde{u}_d$ libovolná. Pak řešení s obecnou Dirichletovou podmínkou lze napsat jako $u=\tilde{u}_d+u_0$, kde u_0 je na Γ_d nulová funkce, t.j. u_0 je z prostoru V_0. Funkce u_0 představuje neznámou část řešení, kterou dostaneme řešením problému:

$$A(u_0,\varphi) =< F,\varphi > -A(\tilde{u}_d,\varphi) =< \tilde{F},\varphi >$$

10.3 Odvození klasické formulace ze slabé

Je třeba ověřit, že slabá formulace je ekvivalentní se silnou formulací v případě, že řešení je dostatečně hladké. Předpokládejme tedy, že $u\in C^2(\Omega)$. Použijeme v (10.4) testovací funkci s nosičem uvnitř Ω, t.j. φ je nulová na hranici. Dále použijeme Greenovu větu, hraniční integrály budou nulové a dostaneme:

$$\int_\Omega -\operatorname{div}(\mathbb{K}\nabla u - \boldsymbol{v}u)\varphi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega \Big(f+\sigma_f(u_f-u)\Big)\varphi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{10.6}$$

Odtud plyne splnění bodové rovnice (10.2) v každém bodě uvnitř Ω.

Dále potřebujeme odvodit splnění okrajových podmínek. Dirichletova podmínka je splněna přímo, jelikož $u=\tilde{u}_d+u_0$ a u_0 je nulová na Γ_d. Pro odvození Neumannovy a Robinovy okrajové podmínky uvažujeme libovolnou (hladkou) testovací funkci ψ s nosičem uvnitř $\Gamma_{nr}=\Gamma_n\cup\Gamma_r$. Dále tuto funkci hladc prodloužíme dovnitř Ω a dostaneme (hladkou) testovací funkci $\varphi_\epsilon\in\mathcal{D}_0$, která má na Γ_{nr} hodnotu ψ a je nenulová pouze na tenkém proužku do vzdálenosti ϵ od hranice. Nyní v (10.4) použijeme testovací funkci φ_ϵ a použijeme Greenovu větu, dostaneme:

$$\int_\Omega X(u)\varphi_\epsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\Gamma_{nr}}(\mathbb{K}\nabla u - \boldsymbol{v}u)\cdot\boldsymbol{n}\varphi_\epsilon\,\mathrm{d}s = \int_{\Gamma_r}\sigma_r(u_r-u)\varphi_\epsilon\,\mathrm{d}s + \int_{\Gamma_n} -q\varphi_\epsilon\,\mathrm{d}s$$

kde první člen obsahuje všechny členy z předchozí rovnice (10.6). Nyní provedeme limitu $\epsilon\to 0$. V této limitě se první intergál bude blížit nule, jelikož φ_ϵ je nenulová na množině velikosti $\epsilon\times|\Gamma_n r|$, což konverguje k nule. Naproti tomu ve zbylých hraničních integrálech je $\varphi_\epsilon=\psi$, což na ϵ nezávisí, tedy dostaneme:

$$\int_{\Gamma_{nr}} -(\mathbb{K}\nabla u - \boldsymbol{v}u)\cdot\boldsymbol{n}\psi\,\mathrm{d}s = \int_{\Gamma_r}\sigma_r(u-u_r)\psi\,\mathrm{d}s + \int_{\Gamma_n} q\psi\,\mathrm{d}s$$

a odtud obě okrajové podmínky.

10.4 Ekvivalentní minimalizační úloha

11 Úvod do funkcionální analýzy

V této kapitole se budeme zabývat prostory funkcí, v nichž je vhodné hledat slabé řešení. Teorie těchto abstraktních prostorů je poměrně obsáhlá, pro zájemce o hlubší poznatky odkazujeme na knihu [2].

11.1 Normované lineární prostory

Pojmy skalární součin a norma lze zavést na různých množinách, např. na množině matic nebo reálných funkcí.

Definice 11.1. *Nechť V je vektorový prostor.*

(i) Řekneme, že zobrazení $l : V \to \mathbb{R}$ je lineární forma *na V, pokud pro každé $u, v \in V$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ platí:*

$$l(\alpha u + \beta v) = \alpha l(u) + \beta l(v).$$

(ii) Zobrazení $a : V \times V \to \mathbb{R}$ nazveme bilineární formou*, pokud a je lineární v obou proměnných, tj.*

$$a(u, \alpha v + \beta w) = \alpha a(u, v) + \beta a(u, w), \qquad a(\alpha u + \beta v, w) = \alpha a(u, v) + \beta a(v, w)$$

pro každé $u, v, w \in V$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(iii) Bilineární forma a se nazývá symetrická*, pokud*

$$\forall u, v \in V : \; a(u, v) = a(v, u).$$

(iv) Skalární součin *je symetrická bilineární forma a, která splňuje*

$$\forall v \in V, \; v \neq \vec{0} : \; a(v, v) > 0.$$

(v) Norma indukovaná skalárním součinem *a je definována výrazem*

$$\|v\|_a := (a(v, v))^{1/2}, \; v \in V.$$

Pro indukovanou normu platí *Cauchyova-Schwarzova nerovnost*:

$$\forall v, w \in V : \; |a(v, w)| \leqslant \|v\|_a \|w\|_a.$$

Norma obecně nemusí být indukovaná skalárním součinem, musí však splňovat následující vlastnosti.

Definice 11.2. *Funkce $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ se nazývá* norma *na vektorovém prostoru V, pokud pro každé $u, v \in V$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ platí:*

(i) $\|u\| = 0 \;\Leftrightarrow\; u = \vec{0}$,

(ii) $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$,

(iii) $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$.

Je-li na V definována norma, nazývá se V normovaný lineární prostor.

Z definice normy vyplývá, že může nabývat jen nezáporných hodnot (dokažte!).

Příklad 11.3. *Na množině $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, lze zavést normu $\|(x_1, \dots, x_n)\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$, $p \in [1, \infty)$, nebo $\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty := \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$. Norma $\|\cdot\|_2$ je indukovaná standardním skalárním součinem vektorů.*

V dalším textu bude Ω oblast (otevřená souvislá množina) v $\mathbb{R}^d$, $d \in \{1, 2, 3\}$. Pro zjednodušení některých úvah také budeme předpokládat, že Ω je omezená. Hranici Ω budeme značit symbolem $\partial\Omega$ a uzávěr symbolem $\overline{\Omega} := \Omega \cup \partial\Omega$.

Příklad 11.4. *Na prostoru spojitých funkcí $C(\overline{\Omega})$ definujeme skalární součin*

$$(u, v) := \int_\Omega u(x) v(x) \; dx$$

a jím indukovanou normu

$$\|u\|_2 := \sqrt{(u, u)} = \left(\int_\Omega u^2(x) \; dx\right)^{1/2}.$$

Lze také zavést normu

$$\|u\|_\infty := \max_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)|.$$

Příklad 11.5. *Na prostoru spojitě diferencovatelných funkcí*

$$C^1(\overline{\Omega}) := \left\{ u \in C(\overline{\Omega});\ \forall i = 1, \ldots, d\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in C(\overline{\Omega}) \right\}$$

definujeme skalární součin

$$((u,v)) := (u,v) + \sum_{i=1}^{d} (\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i}),$$

který indukuje normu

$$\|u\|_{1,2} := \sqrt{((u,u))} = \left(\int_\Omega u^2 + \sum_{i=1}^{d} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2\ dx \right)^{1/2}.$$

Mimo to existuje také norma

$$\|u\|_{1,\infty} := \max \left\{ \|u\|_\infty, \|\frac{\partial u}{\partial x_1}\|_\infty, \ldots, \|\frac{\partial u}{\partial x_d}\|_\infty \right\}.$$

Příklad 11.6. *Uvažujme funkci*

$$u(x) := \begin{cases} 10\sin(1000\pi x) & \text{pro } x \in [0, \frac{1}{1000}] \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$

Snadno lze spočítat:

$$\|u\|_2 = \sqrt{\int_0^{1/1000} 100\sin^2(1000\pi x)\ dx} = \sqrt{100\left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2000\pi x)}{4000\pi}\right]_{x=0}^{1/1000}} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \doteq 0,224,$$

$$\|u\|_\infty = \max_{x\in[0,1/1000]} |10\sin(1000\pi x)| = 10.$$

Norma $\| \ \|_\infty$ se zdá být v jistém smyslu přirozenější, neboť měří maximální odchylku hodnot dvou spojitých funkcí. Přesto existují důvody, proč je vhodné používat normu $\| \ \|_2$. Předně, $\| \ \|_2$ byla zavedena pomocí skalárního součinu. Skalární součin hraje v některých úlohách důležitou roli. Lze ukázat, že na množině spojitých funkcí nelze zavést skalární součin s rozumnými vlastnostmi, který by indukoval normu $\|\cdot\|_\infty$. Dalším důvodem je, že v mnoha aplikacích nevystačíme se spojitými funkcemi. Není snadné rozšířit normu $\| \ \|_\infty$ na obecnější třídu funkcí, zatímco rozšíření normy $\| \ \|_2$ je velmi jednoduché a vede přirozeně k vytvoření tzv. prostoru L^2.

11.1.1 Konvergence

Definice 11.7. *Nechť V je normovaný lineární prostor. Řekneme, že posloupnost $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ prvků z V* konverguje *k $u \in V$ v normě, jestliže*

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\| = 0.$$

Říkáme, že u je limita posloupnosti $\{u_n\}$ a píšeme

$$u = \lim_{n\to\infty} u_n \text{ ve } V, \text{ nebo } u_n \to u \text{ ve } V.$$

Pro limitu v normovaném lineárním prostoru platí obdobná tvrzení jako pro limitu v $\mathbb{R}^n$ známá ze základních kurzů matematiky. Např. každá posloupnost má nejvýše jednu limitu. Pokud posloupnost spojitých funkcí $\{u_n\}$ konverguje k u v normě $\| \ \|_2$ nebo $\| \ \|_\infty$, pak prvek u se skoro všude shoduje s bodovou limitou, tj.

$$(\lim_{n\to\infty} u_n)(x) = \lim_{n\to\infty} (u_n(x)).$$

Pro zjišťování konvergence posloupnosti funkcí je tedy vhodné nejprve zjistit, zda existuje bodová limita.

Příklad 11.8. *Uvažujme posloupnost funkcí $\{u_n\}$,*

$$u_n(x) := \begin{cases} 10\sin(n\pi x) & \text{pro } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

v prostoru $C([0,1])$. Pro ověření, zda má daná posloupnost limitu, nejprve potřebujeme vhodného "kandidáta". Spočteme proto nejprve bodovou limitu. Zřejmě $\lim u_n(0) = 0$. Je-li $x \in (0,1]$, pak lze najít číslo $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $x > \frac{1}{n_0}$, takže pro $n \geqslant n_0$ platí $u_n(x) = 0$, a proto musí být $\lim u_n(x) = 0$. Bodová limita posloupnosti je tedy nulová funkce. Lze ukázat, že

$$\|u_n - 0\|_2 = \sqrt{\frac{50}{n}}, \text{ takže } \lim \|u_n - 0\|_2 = 0,$$

a tedy

$$\lim u_n = 0 \text{ v prostoru } C([0,1]) \text{ s normou } \| \ \|_2.$$

Dále platí

$$\|u_n - 0\|_\infty = 10,$$

z čehož plyne, že v prostoru $C([0,1])$ s normou $\| \ \|_\infty$ není nulová funkce limitou posloupnosti $\{u_n\}$ (ve skutečnosti posloupnost není v tomto prostoru konvergentní).

Uvedený příklad poukazuje na to, že existence limity v metrickém prostoru závisí na tom, jakou uvažujeme metriku.

Definice 11.9. *Nechť $\| \ \|_A$ a $\| \ \|_B$ jsou normy na prostoru V. Jestliže existují konstanty $\alpha, \beta > 0$ takové, že pro každé $u \in V$ platí*

$$\alpha \|u\|_A \leqslant \|u\|_B \leqslant \beta \|u\|_A,$$

pak říkáme, že $\| \ \|_A$ a $\| \ \|_B$ jsou na V ekvivalentní.

Jsou-li normy $\| \ \|_A$ a $\| \ \|_B$ ekvivalentní, pak platí

$$u_n \to u \text{ ve } (V, \| \ \|_A) \quad \Leftrightarrow \quad u_n \to u \text{ ve } (V, \| \ \|_B).$$

Příklad 11.8 ukazuje, že normy $\| \ \|_2$ a $\| \ \|_\infty$ nejsou na prostoru $C(\overline{\Omega})$ ekvivalentní.

11.1.2 Úplnost

Skutečnost, že daná posloupnost v metrickém prostoru je konvergentní, závisí nejen na zvolené metrice, ale také na prostoru samotném. Existují například posloupnosti racionálních čísel, které mají za limitu iracionální číslo, tzn., že jsou konvergentní v prostoru $\mathbb{R}$, ale nejsou konvergentní v $\mathbb{Q}$. Množina $\mathbb{Q}$ tedy v jistém smyslu není úplná.

Pojem úplnost souvisí s cauchyovskými posloupnostmi.

Definice 11.10. *Posloupnost $\{u_n\}$ v normovaném lineárním prostoru V se nazývá cauchyovská, jestliže*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall m, n \in \mathbb{N} : \ m, n > N \Rightarrow \|u_m - u_n\| < \varepsilon.$$

Cauchyovská posloupnost obecně nemusí mít limitu. Avšak každá konvergentní posloupnost je nutně cauchyovská.

Definice 11.11. *Normovaný lineární prostor V se nazývá* úplný *(nebo také* Banachův prostor*), jestliže každá cauchyovská posloupnost má v tomto prostoru limitu. Úplný prostor se skalárním součinem se nazývá* Hilbertův prostor.

Příklad 11.12. *Prostory $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, s normami $\| \ \|_p$, $p \in [1, \infty]$ jsou úplné (díky Bolzanově-Cauchyově podmínce). Prostor $\mathbb{Q}$ není úplný (např. posloupnost $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}$ je v něm cauchyovská, ale její limita $e \notin \mathbb{Q}$).*

Příklad 11.13. *Uvažujme posloupnost $\{u_n\}$ na prostoru $C([-1,1])$ s normou $\| \ \|_2$, danou vztahem*

$$u_n(x) := \sqrt[2n+1]{x}.$$

Bodová limita posloupnosti je $\operatorname{sgn} x$, což je nespojitá funkce, a proto posloupnost není v daném prostoru konvergentní. Platí ale

$$\|u_n - \operatorname{sgn}\|_2 = \sqrt{\frac{2}{(n+1)(2n+3)}}, \quad \text{a tedy} \quad \|u_n - \operatorname{sgn}\|_2 \to 0,$$

což znamená, že $\{u_n\}$ je cauchyovská posloupnost. Prostor $C([-1,1])$ s normou $\| \ \|_2$ proto není úplný. Zůstává otázka, zda existuje nějaký větší prostor s normou $\| \ \|_2$, ve kterém by byla posloupnost $\{u_n\}$ konvergentní.

Věta 11.14. *Prostor $C(\overline{\Omega})$ s normou $\| \ \|_\infty$ je úplný, s normou $\| \ \|_2$ není úplný.*

11.1.3 Množiny v normovaném lineárním prostoru

Podobně jako u euklidovské vzdálenosti v $\mathbb{R}^n$, lze definovat pojmy jako koule, okolí nebo otevřená množina pomocí normy.

Definice 11.15. *Nechť X je normovaný lineární prostor s normou $\| \ \|$.*

- Koule *se středem $x \in X$ a poloměrem $r > 0$ je množina*

$$B_r(x) := \{y \in X;\ \|x - y\| < r\}.$$

- *Množina M se nazývá* otevřená, *pokud pro každý bod $x \in M$ existuje koule se středem x, která leží v M.*
- *Množina se nazývá* uzavřená, *pokud její doplněk v X je otevřený.*

Příklad 11.16. *Koule v prostoru $\mathbb{R}^2$ se středem v počátku souřadné soustavy má tvar*

a) čtverce, jehož vrcholy leží na souřadných osách a těžiště v počátku, uvažujeme-li normu $\| \ \|_1$;

b) kruhu se středem v počátku, uvažujeme-li euklidovskou normu $\| \ \|_2$;

c) čtverce, jehož strany jsou rovnoběžné se souřadnými osami a těžiště leží v počátku, uvažujeme-li maximovou normu $\| \ \|_\infty$.

Definice 11.17. *Nechť X je normovaný lineární prostor, $x \in X$ a $M \subset M$.*

- *Bod x je* vnitřním bodem množiny *M, pokud existuje poloměr $r > 0$ takový, že $B_r(x) \subset M$. Množinu všech vnitřních bodů M budeme značit* $\operatorname{Int} M$.
- *Bod x je* hraničním bodem množiny *M, pokud každá koule se středem v x obsahuje alespoň jeden bod z M a alespoň jeden bod z $X \backslash M$. Množina všech hraničních bodů M se nazývá* hranice *M a značí se ∂M.*
- *Uzávěr množiny M je množina $\overline{M} := M \cup \partial M$.*

Mezi právě definovanými množinami platí mnoho vztahů. Např.:

$$\operatorname{Int} M \subset M \subset \overline{M}, \quad \operatorname{Int} M \cap \partial M = \emptyset,$$

11.2 Prostory integrovatelných funkcí

V následující části zavedeme prostor funkcí, který obsahuje spojité funkce a zároveň je úplný vzhledem k normě $\| \ \|_2$, generované skalárním součinem $(\ , \ )$.

Definice 11.18. *Prostorem $L^2(\Omega)$ rozumíme množinu funkcí*

$$L^2(\Omega) := \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R};\ \left| \int_\Omega u(x)\ dx \right| < \infty,\ \|u\|_2 < \infty \right\}.$$

Spolu s normou $\| \ \|_2$ tvoří $L^2(\Omega)$ normovaný lineární prostor.

Z definice plyne, že každá spojitá funkce v $\overline{\Omega}$ patří do prostorů $L^2(\Omega)$. Do těchto prostorů ovšem patří i mnoho dalších funkcí, které mohou být nespojité nebo neomezené.

Poznamenejme, že pro správnost některých tvrzení je třeba uvažovat integrály v Definici 11.18 v tzv. Lebesgueově smyslu. Požadavek na integrovatelnost funkce u je splněn pro většinu "kulturních"funkcí (např. pro spojité funkce). Existují však tzv. neměřitelné funkce, jejichž druhá mocnina je integrovatelná, zatímco funkce samotná ne.

Příklad 11.19. *Uvažujme funkce*

$$u(x) := \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad a \qquad v(x) := \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

na intervalu $\Omega := (0, 1)$. Platí:

$$\|u\|_2 = \sqrt{\int_0^1 \frac{1}{x}\ dx} = +\infty,$$

$$\|v\|_2^2 = \int_0^1 |v(x)|^2\ dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\ dx = 3.$$

Proto $u \notin L^2(0,1)$ a $v \in L^2(0,1)$.

Příklad 11.20. *Funkce*

$$\operatorname{sgn} x := \begin{cases} -1 & \text{pro } x < 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \\ 1 & \text{pro } x > 0 \end{cases}$$

je prvkem prostoru $L^2(-1,1)$, neboť

$$\int_{-1}^{1} |\operatorname{sgn} x|^2 \, dx = \int_{-1}^{0} |\operatorname{sgn} x|^2 \, dx + \int_{0}^{1} |\operatorname{sgn} x|^2 \, dx = \int_{-1}^{0} 1 \, dx + \int_{0}^{1} 1 \, dx = 2,$$

a tedy $\|\operatorname{sgn} x\|_2 = \sqrt{2}$. Podobně funkce

$$u(x) := \begin{cases} 0 & \text{pro } x \neq 0 \\ 10 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

patří do $L^2(-1,1)$ a její norma je $\|u\|_2 = 0$. Vidíme, že norma nezávisí na hodnotě funkce v bodě $x = 0$. Dokonce není nutné, aby byla funkce v bodě 0 definována.

Funkce, která je rovna nule všude až na hodnotu v jednom bodě, má nulovou normu a je v jistém smyslu ekvivalentní s nulovou funkcí. Obecněji postačí, když je funkce nulová všude v Ω mimo *množinu míry nula*. Mezi množiny s nulovou mírou patří např. všechny konečné a spočetné množiny.

Definice 11.21. *Nechť funkce $u, v \in L^2(\Omega)$ jsou si v oblasti Ω* rovny skoro všude*, tj. všude mimo množinu míry nula (kde se buď jejich hodnoty liší nebo některá z funkcí není definována). Pak řekneme, že u a v jsou v prostoru $L^2(\Omega)$* ekvivalentní*. Píšeme $u = v$ v $L^2(\Omega)$.*

Funkce u a v jsou tedy v tomto prostoru pokládány za sobě rovné. Dvě funkce u, v ekvivalentní v prostoru $L^2(\Omega)$ jsou charakterizovány vlastností

$$\int_\Omega |u(x) - v(x)|^2 \, dx = 0.$$

Věta 11.22. *Prostor $L^2(\Omega)$ s normou $\| \; \|_2$ je Banachův prostor.*

Tak jako $L^2(\Omega)$ je nejmenší úplný prostor s normou $\| \; \|_2$ obsahující $C(\overline{\Omega})$, lze zavést také prostor

$$L^\infty(\Omega) := \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R}; \; \left| \int_\Omega u(x) \, dx \right| < \infty, \; \exists C > 0 : \; |u(x)| \leqslant C \text{ skoro všude v } \Omega \right\}.$$

Norma na tomto prostoru je

$$\|u\|_\infty := \inf \{ C > 0; \; |u(x)| \leqslant C \text{ skoro všude v } \Omega \}.$$

Pro spojité funkce tato definice splývá s původní definicí $\| \; \|_\infty$. Také $L^\infty(\Omega)$ je Banachův prostor.

Příklad 11.23. *Poněkud specifickým případem je tzv. Dirichletova funkce*

$$D(x) = \begin{cases} 1; & x \in \mathbb{Q}, \\ 0; & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Protože množina $\mathbb{Q}$ racionálních čísel je spočetná, D je skoro všude v $\mathbb{R}$ nulová. Proto

$$\|D\|_\infty = 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} D(x) \, dx = 0.$$

Na omezené oblasti Ω platí následující vztah mezi limitami.

Věta 11.24. *Nechť Ω je omezená oblast v $\mathbb{R}^d$, $d \in \{1, 2, 3\}$, a $\{u_n\}$ je posloupnost funkcí definovaných v Ω. Pak platí:*

(i) Jestliže $u_n \to u$ v $L^\infty(\Omega)$, pak $u_n \to u$ také v $L^2(\Omega)$.

(ii) Jestliže $u_n \to u$ v $L^2(\Omega)$, pak $u_n(x) \to u(x)$ pro skoro všechna $x \in \Omega$.

11.3 Prostory s integrovatelnými derivacemi

Pro funkce z prostoru $L^2(\Omega)$ lze zavést pojem derivace. Uvažujme nejprve funkci $u \in C^1([0,1])$. Díky pravidlu per partes pak platí pro každé $v \in C^1([0,1])$, $v(0) = v(1) = 0$:

$$\int_0^1 u'(x)v(x)\,dx = [u(x)v(x)]_{x=0}^1 - \int_0^1 u(x)v'(x)\,dx = -\int_0^1 u(x)v'(x)\,dx. \tag{11.1}$$

Jestliže tedy pro nějakou funkci g platí:

$$\forall v \in C^1([0,1]),\ v(0) = v(1) = 0 : \int_0^1 g(x)v(x)\,dx = -\int_0^1 u(x)v'(x)\,dx,$$

pak z (11.1) víme, že $g = u'$. Tento poznatek je východiskem pro zavedení tzv. *zobecněné derivace*, která je vhodná i pro funkce u, které nemají derivace v klasickém smyslu.

Definice 11.25. *Nechť $u \in L^2(\Omega)$. Funkce $g \in L^2(\Omega)$ se nazývá* zobecněná parciální derivace *funkce u podle i-té proměnné, pokud pro každé $v \in C^1(\overline{\Omega})$, $v_{|\partial\Omega} = 0$, platí:*

$$\int_\Omega gv = -\int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_i}.$$

Píšeme $g = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ v $L^2(\Omega)$.

Příklad 11.26. *Spočtěme zobecněnou derivaci funkce $u(x) := |x|$ na intervalu $(-1,1)$. Pro $v \in C^1([-1,1])$, $v(-1) = v(1) = 0$ platí:*

$$\begin{aligned}
-\int_{-1}^1 |x|v'(x)\,dx &= -\int_{-1}^0 (-x)v'(x)\,dx - \int_0^1 xv'(x)\,dx \\
&= [xv(x)]_{x=-1}^0 - \int_{-1}^0 v(x)\,dx - [xv(x)]_{x=0}^1 + \int_0^1 v(x)\,dx = \int_{-1}^1 \operatorname{sgn} x\, v(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Je tedy $u'(x) = \operatorname{sgn} x$ v $L^2(-1,1)$.

Příklad 11.27. *Uvažujme funkci $u(x) = \operatorname{sgn} x$. Pro $v \in C^1([-1,1])$, $v(-1) = v(1) = 0$ platí:*

$$\begin{aligned}
-\int_{-1}^1 u(x)v'(x)\,dx &= -\int_{-1}^0 (-v'(x))\,dx - \int_0^1 v'(x)\,dx \\
&= [v(x)]_{x=-1}^0 - [v(x)]_{x=0}^1 = 2v(0) = 2\int_{-1}^1 \delta_0(x)v(x)\,dx,
\end{aligned}$$

kde δ_0 se nazývá Diracova δ-funkce (ve skutečnosti to není funkce, ale tzv. distribuce*). V jistém smyslu tedy platí $(\operatorname{sgn} x)' = 2\delta_0(x)$, nicméně $\delta_0 \notin L^2(\Omega)$.*

Ne každá funkce z $L^2(\Omega)$ má zobecněnou derivaci v $L^2(\Omega)$.
Pro vektorové funkce $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} : \Omega \to \mathbb{R}^d$ definujeme

$$\|\boldsymbol{u}\|_2 := \left(\sum_{i=1}^d \|u_i\|_2^2\right)^{1/2}, \quad (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) := \sum_{i=1}^d (u_i, v_i).$$

Prostor L^2 pro vektorové funkce budeme značit $L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)$.

Definice 11.28. *Prostor $H^1(\Omega)$ je množina*

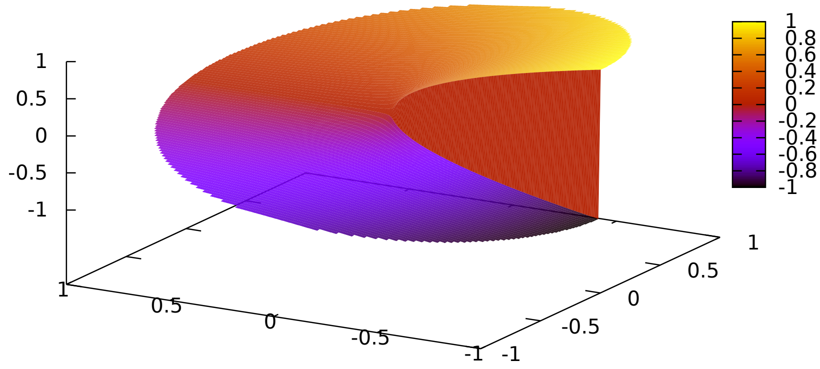
$$H^1(\Omega) := \left\{u \in L^2(\Omega);\ \nabla u \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)\right\}.$$

Na tomto prostoru je definována norma

$$\|u\|_{1,2} := \left(\|u\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2\right)^{1/2}$$

a skalární součin

$$((u,v)) := (u,v) + (\nabla u, \nabla v).$$



Obrázek 1: Nespojitá funkce z prostoru $H^1(\Omega)$.

Věta 11.29. *$H^1(\Omega)$ je Banachův prostor.*

Příklad 11.30. *Na oblasti $\Omega = B_1(0)\backslash\{(x,0);\ x \in (-1,0)\}$ uvažujme funkci*

$$u(x,y) = \sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2},\ r = \sqrt{x^2+y^2},\ \theta = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}.$$

Ukážeme, že $u \in H^1(\Omega)$:

$$\int_\Omega u^2 = \int_{-\pi/2}^{3/2\pi}\int_0^1 r^2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) r\ dr\ d\theta = \frac{\pi}{4},$$

$$\nabla u(x,y) = \frac{1}{2}r^{-3/2}\begin{pmatrix} x\sin\frac{\theta}{2} + y\cos\frac{\theta}{2} \\ y\sin\frac{\theta}{2} - x\cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix},$$

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 = \frac{1}{4}\int_{-\pi/2}^{3/2\pi}\int_0^1 dr\ d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Přitom podél úsečky $\{(x,0);\ x \in (-1,0)\}$ je u nespojitá (obr. 1). Pro tuto funkci u nelze jednoznačně definovat hodnoty na hranici $\partial\Omega$.

Aby bylo možné pro funkce z $H^1(\Omega)$ definovat jejich *stopu*, tj. hodnotu na hranici, omezíme se v dalším na oblasti s *Lipschitzovskou hranicí.* Řekneme, že oblast Ω má Lipschitzovskou hranici, jestliže ji lze lokálně popsat jako spojitou funkci s omezenými derivacemi. Pro funkci $u \in C(\overline{\Omega})$ definujeme zobrazení $\operatorname{tr}: u \mapsto u_{|\partial\Omega}$, kde $u_{|\partial\Omega}$ je tzv. stopa funkce u (hodnota na hranici). Na hranici oblasti Ω, resp. na její části, lze zavést prostor $L^2(\partial\Omega)$ s obdobnými vlastnostmi jako $L^2(\Omega)$. Normu a skalární součin na hranici budeme značit symbolem $\|\ \|_{2,\partial\Omega}$, resp. $(\ ,\ )_{\partial\Omega}$.

Věta 11.31 (o stopách)**.** *Nechť Ω má Lipschitzovskou hranici. Pak existuje lineární zobrazení* tr : $H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ *s následujícími vlastnostmi:*

$$\forall v \in C(\overline{\Omega}):\ \operatorname{tr} v = v_{|\partial\Omega},$$

$$\forall v \in H^1(\Omega):\ \|\operatorname{tr} v\|_{2,\partial\Omega} \leqslant C\|v\|_{1,2},$$

kde konstanta $C > 0$ závisí pouze na Ω.

Poznamenejme, že ne každá funkce z $L^2(\partial\Omega)$ je stopou funkce z $H^1(\Omega)$. Nyní můžeme zavést prostory funkcí s nulovou stopou:

Definice 11.32. *Je-li Γ relativně otevřená část hranice $\partial\Omega$, pak definujeme*

$$H^1_\Gamma(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega);\ \operatorname{tr} u_{|\Gamma} = 0\}.$$

Speciálně pro $\Gamma = \partial\Omega$ značíme tento prostor jako $H^1_0(\Omega)$, tj.

$$H^1_0(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega);\ \operatorname{tr} u = 0 \ na\ \partial\Omega\}.$$

Věta 11.33 (Friedrichsova nerovnost)**.** *Nechť Ω má Lipschitzovskou hranici a Γ je relativně otevřená část $\partial\Omega$. Pak existuje konstanta $C = C(\Omega, \Gamma) > 0$ taková, že pro každé $u \in H^1(\Omega)$ platí nerovnost*

$$\|u\|_{1,2} \leqslant C(\|\nabla u\|_2 + \|u\|_{2,\Gamma}). \tag{11.2}$$

Speciálně pro $u \in H_0^1(\Omega)$ platí:

$$\|u\|_{1,2} \leqslant C\|\nabla u\|_2. \tag{11.3}$$

12 Abstraktní teorie slabých řešení

V této kapitole se budeme zabývat otázkou, jak správně zavést slabou formulaci tak, aby úloha byla jednoznačně řešitelná.

12.1 Abstraktní variační úloha

Nechť V je Hilbertův prostor se skalárním součinem $(\, , \,)$ a normou $\| \; \|$, a a l je bilineární, resp. lineární forma na V. Úlohu

$$\text{Najdi } u \in V \text{ takové, že } \forall v \in V: \; a(u, v) = l(v), \tag{12.1}$$

budeme nazývat *abstraktní variační úloha.*

Věta 12.1 (Lax-Milgram)**.** *Nechť V je Hilbertův prostor, a je bilineární forma na V, pro niž existují konstanty $\alpha, \beta > 0$ takové, že*

(i) a je omezená, tj.

$$\forall v, w \in V: \; a(v, w) \leqslant \beta\|v\|\|w\|,$$

(ii) a je eliptická na V, tj.

$$\forall v \in V: \; \alpha\|v\|^2 \leqslant a(v, v),$$

a nechť l je omezená lineární forma na V, tj.

(iii) existuje konstanta $\gamma > 0$ taková, že

$$\forall v \in V: \; l(v) \leqslant \gamma\|v\|.$$

Pak existuje právě jedno řešení $u \in V$ variační úlohy (12.1)*. Navíc platí odhad:*

$$\|u\| \leqslant \frac{\beta}{\alpha}.$$

12.2 Aplikace na eliptické rovnice

12.2.1 Nehomogenní Dirichletova podmínka

Je dána oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ a skalární funkce f na Ω a u_d na $\partial\Omega$. Hledáme funkci $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, která splňuje:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{v } \Omega, \\ u &= u_d && \text{na } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Protože je předepsána Dirichletova podmínka na $\partial\Omega$, prostor, ve kterém budeme hledat slabé řešení, je $V := H_0^1(\Omega)$. Jelikož ale hodnota u na hranici je dána funkcí u_d, pak obecně $u \notin H_0^1(\Omega)$. Předpokládejme proto, že u_d lze rozšířit na celou oblast Ω tak, aby $u_d \in H^1(\Omega)$. Pak $u - u_d \in H_0^1(\Omega)$. Řešení budeme hledat ve tvaru $u = z + u_d \in H^1(\Omega)$, kde $z \in H_0^1(\Omega)$, a

$$\forall v \in H_0^1(\Omega): \; a(z, v) = l(v),$$

kde

$$a(z, v) := (\nabla z, \nabla v), \tag{12.2}$$

$$l(v) := (f, v) - (\nabla u_d, \nabla v). \tag{12.3}$$

Věta 12.2. *Pro bilineární formu a definovanou v* (12.2) *platí:*

$$\forall v, w \in H^1(\Omega): \ a(v,w) \leqslant \|v\|_{1,2}\|w\|_{1,2}.$$

Je-li navíc $f \in L^2(\Omega)$, pak existuje $\gamma := \|f\|_2 + \|\nabla u_d\|_2$ takové, že

$$\forall v \in H^1(\Omega): \ l(v) \leqslant \gamma\|v\|_{1,2},$$

kde lineární forma l je definována v (12.3).

Důkaz. Omezenost a plyne přímo z Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti a faktu, že $\|\nabla v\|_2 \leqslant \|v\|_{1,2}$. Dále

$$l(v) \leqslant \|f\|_2\|v\|_2 + \|\nabla u_d\|_2\|\nabla v\|_2 \leqslant (\|f\|_2 + \|\nabla u_d\|_2)\|v\|_{1,2}.$$

□

Věta 12.3. *Bilineární forma a je eliptická na $H^1_0(\Omega)$ s konstantou $\alpha = 1/C^2$, kde $C = C(\Omega, \partial\Omega)$ je konstanta z Friedrichsovy nerovnosti* (11.3).

Důkaz. Je-li $v \in H^1_0(\Omega)$, pak

$$a(v,v) = (\nabla v, \nabla v) = \|\nabla v\|_2^2 \geqslant \frac{1}{C^2}\|v\|_{1,2}^2.$$

□

12.2.2 Anizotropní difúze

Je dána oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ s hranicí $\partial\Omega = \overline{\Gamma}_d \cup \overline{\Gamma}_n$, maticová funkce $\mathbb{K} : \Omega \to \mathbb{R}^{d\times d}$ a skalární funkce f, σ_f, u_f na Ω a q na Γ_n. Hledáme funkci $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, která splňuje:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\mathbb{K}\nabla u) &= f + \sigma_f(u_f - u) && \text{v } \Omega,\\ u &= 0 && \text{na } \Gamma_d,\\ -\mathbb{K}\nabla u \cdot \boldsymbol{n} &= q && \text{na } \Gamma_n. \end{aligned}$$

Aby byla splněna Dirichletova podmínka na Γ_d a formy a, l měly konečnou hodnotu, budeme hledat slabé řešení v prostoru $V := H^1_{\Gamma_d}(\Omega)$:

$$\text{Najdi } u \in H^1_{\Gamma_d}(\Omega): \ \forall v \in H^1_{\Gamma_d}(\Omega): \ a(u,v) = l(v),$$

kde

$$a(u,v) := (\mathbb{K}\nabla u, \nabla v) + (\sigma_f u, v), \tag{12.4}$$

$$l(v) := (f + \sigma_f u_f, v) - (q, v)_{\Gamma_n}. \tag{12.5}$$

Věta 12.4. *Nechť $\mathbb{K} \in L^\infty(\Omega;\ \mathbb{R}^{d\times d})$ a $\sigma_f \in L^\infty(\Omega)$. Pak existuje konstanta $\beta := \beta(\|\mathbb{K}\|_\infty, \|\sigma_f\|_\infty)$ taková, že*

$$\forall u, v \in H^1(\Omega): \ a(u,v) \leqslant \beta\|u\|_{1,2}\|v\|_{1,2},$$

kde bilineární forma a je definována v (12.4). *Je-li navíc $f, u_f \in L^2(\Omega)$ a $q \in L^2(\Gamma_n)$, pak existuje $\gamma := \gamma(\|f\|_2, \|\sigma_f\|_\infty, \|u_f\|_2, \|q\|_{2,\Gamma_n})$ takové, že*

$$\forall v \in H^1(\Omega): \ l(v) \leqslant \gamma\|v\|_{1,2},$$

kde lineární forma l je definována v (12.5).

Důkaz. Nejprve odhadneme postupně všechny výrazy v a. S využitím Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti a faktu, že $\|w_i\|_2 \leqslant \|\boldsymbol{w}\|_2$ dostaneme:

$$\begin{aligned} (\mathbb{K}\nabla v, \nabla w) &\leqslant \sum_{i,j=1}^{d} \int_\Omega |k_{ij}(x)||\partial_{x_j} v(x)||\partial_{x_i} w(x)| \, dx\\ &\leqslant \|\mathbb{K}\|_\infty \sum_{i,j=1}^{d} (|\partial_{x_j} v|, |\partial_{x_i} w|)\\ &\leqslant \|\mathbb{K}\|_\infty \left(\sum_{j=1}^{d} \|\partial_{x_j} v\|_2\right)\left(\sum_{i=1}^{d} \|\partial_{x_i} w\|_2\right)\\ &\leqslant d^2\|\mathbb{K}\|_\infty\|\nabla v\|_2\|\nabla w\|_2\\ &\leqslant d^2\|\mathbb{K}\|_\infty\|v\|_{1,2}\|w\|_{1,2}, \end{aligned}$$

Obdobně lze odhadnout

$$(\sigma_f v, w) \leqslant \|\sigma_f\|_\infty(|v|,|w|) \leqslant \|\sigma_f\|_\infty \|v\|_2\|w\|_2 \leqslant \|\sigma_f\|_\infty\|v\|_{1,2}\|w\|_{1,2}.$$

V souhrnu jsme dokázali, že

$$a(v,w) \leqslant \left(d^2\|\mathbb{K}\|_\infty + \|\sigma_f\|_\infty\right)\|v\|_{1,2}\|w\|_{1,2} =: \beta\|v\|_{1,2}\|w\|_{1,2}.$$

Nyní odhadneme výrazy ve formě l:

$$\begin{aligned}
(f,v) &\leqslant \|f\|_2\|v\|_2 \leqslant \|f\|_2\|v\|_{1,2},\\
(\sigma_f u_f, v) &\leqslant \|\sigma_f\|_\infty\|u_f\|_2\|v\|_2 \leqslant \|\sigma_f\|_\infty\|u_f\|_2\|v\|_{1,2},\\
(q,v)_{\Gamma_n} &\leqslant \|q\|_{2,\Gamma_n}\|v\|_{2,\Gamma_n} \leqslant \|q\|_{2,\Gamma_n}\|v\|_{2,\partial\Omega} \leqslant C\|q\|_{2,\Gamma_n}\|v\|_{1,2},
\end{aligned}$$

kde C je konstanta z věty o stopách. Platí tedy

$$l(v) \leqslant \left(\|f\|_2 + \|\sigma_f\|_\infty\|u_f\|_2 + C\|q\|_{2,\Gamma_n}\right)\|v\|_{1,2} =: \gamma\|v\|_{1,2}.$$

□

Věta 12.5. *Nechť jsou splněny následující předpoklady:*

(i) $\mathbb{K}$ *je stejnoměrně pozitivně definitní na* Ω*, tj.*

$$\exists \underline{k} > 0\ \forall \boldsymbol{x} \in \Omega\ \forall \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^d:\ \mathbb{K}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{q} \geqslant \underline{k}\|\boldsymbol{q}\|^2;$$

(ii) σ_f *je nezáporná funkce, tj.*

$$\forall \boldsymbol{x} \in \Omega:\ \sigma_f(\boldsymbol{x}) \geqslant 0.$$

Pak bilineární forma a je eliptická na $H^1_{\Gamma_d}(\Omega)$ *s konstantou* $\alpha = \underline{k}/C^2$*, kde* $C = C(\Omega, \Gamma_d) > 0$ *je konstanta z* (11.2)*.*

Důkaz.

$$a(v,v) = (\mathbb{K}\nabla v, \nabla v) + (\sigma_f v, v) \geqslant \underline{k}\|\nabla v\|_2^2 + \|\sqrt{\sigma_f}v\|_2^2 \geqslant \underline{k}\|\nabla v\|_2^2.$$

Díky Friedrichsově nerovnosti platí:

$$a(v,v) \geqslant \underline{k}\|\nabla v\|_2^2 \geqslant \frac{\underline{k}}{C^2}\|v\|_{1,2}^2.$$

□

12.2.3 Advekce-difúze

Je dána oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ s hranicí $\partial\Omega = \overline{\Gamma}_n \cup \overline{\Gamma}_r$, vektorové pole $\boldsymbol{q}:\Omega \to \mathbb{R}^d$ a skalární funkce σ_r, u_r na Γ_r. Hledáme funkci $u:\overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, která splňuje:

$$\begin{aligned}
-\Delta u + \operatorname{div}(\boldsymbol{q}u) &= 0 && \text{v } \Omega,\\
-\nabla u\cdot\boldsymbol{n} &= 0 && \text{na } \Gamma_n,\\
(-\nabla u + \boldsymbol{q}u)\cdot\boldsymbol{n} &= \sigma_r(u-u_r) && \text{na } \Gamma_r.
\end{aligned}$$

Slabá formulace:

$$\text{Najdi } u \in V := H^1(\Omega) \text{ takové, že } \forall v \in H^1(\Omega):\ a(u,v) = l(v),$$

kde

$$a(u,v) := (\nabla u - \boldsymbol{q}u, \nabla v) + (\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}u, v)_{\Gamma_n} + (\sigma_r u, v)_{\Gamma_r}, \tag{12.6}$$

$$l(v) := (\sigma_r u_r, v)_{\Gamma_r}. \tag{12.7}$$

Věta 12.6. *Nechť* $\boldsymbol{q} \in L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^d)$*,* $\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n} \in L^\infty(\Gamma_n)$ *a* $\sigma_r \in L^\infty(\Gamma_r)$*. Pak existuje konstanta* $\beta := \beta(\|\boldsymbol{q}\|_\infty, \|\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}\|_{\infty,\Gamma_n}, \|\sigma_r\|_{\infty,\Gamma_r})$ *taková, že*

$$\forall v,w \in H^1(\Omega):\ a(v,w) \leqslant \beta\|v\|_{1,2}\|w\|_{1,2},$$

kde bilineární forma a je definována v (12.6)*. Je-li navíc* $u_r \in L^2(\Gamma_r)$*, pak existuje* $\gamma := \gamma(\|\sigma_r\|_{\infty,\Gamma_r}, \|u_r\|_{2,\Gamma_r})$ *takové, že*

$$\forall v \in H^1(\Omega):\ l(v) \leqslant \gamma\|v\|_{1,2},$$

kde lineární forma l je definována v (12.7)*.*

Důkaz. Nejprve odhadneme postupně všechny výrazy v a. S využitím Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti a faktu, že $\|\partial_{x_i} w\|_2 \leqslant \|\nabla w\|_2$ dostaneme:

$$(\nabla v, \nabla w) \leqslant \|v\|_{1,2}\|w\|_{1,2},$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{q}v, \nabla w) &\leqslant \sum_{i=1}^{d}(|q_i||v|, |\partial_{x_i} w|) \leqslant \|\boldsymbol{q}\|_\infty \sum_{i=1}^{d}(|v|, |\partial_{x_i} w|)\\ &\leqslant \|\boldsymbol{q}\|_\infty \|v\|_2 \sum_{i=1}^{d} \|\partial_{x_i} w\|_2 \leqslant d\|\boldsymbol{q}\|_\infty \|v\|_2 \|\nabla w\|_2\\ &\leqslant d\|\boldsymbol{q}\|_\infty \|v\|_{1,2}\|w\|_{1,2},\end{aligned}$$

Pro odhad hraničních členů použijeme navíc větu o stopách:

$$(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}v, w)_{\Gamma_n} \leqslant \|\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}\|_{\infty,\Gamma_n}\|v\|_{2,\Gamma_n}\|w\|_{2,\Gamma_n} \leqslant C_1^2\|\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}\|_{\infty,\Gamma_n}\|v\|_{1,2}\|w\|_{1,2},$$

$$\begin{aligned}(\sigma_r v, w)_{\Gamma_r} &\leqslant \|\sigma_r\|_{\infty,\Gamma_r}(|v|, |w|)_{\Gamma_r} \leqslant \|\sigma_r\|_{\infty,\Gamma_r}\|v\|_{2,\Gamma_r}\|w\|_{2,\Gamma_r}\\ &\leqslant \|\sigma_r\|_{\infty,\Gamma_r}\|v\|_{2,\partial\Omega}\|w\|_{2,\partial\Omega} \leqslant C_2^2\|\sigma_r\|_{\infty,\Gamma_r}\|v\|_{1,2}\|w\|_{1,2}.\end{aligned}$$

Zde $C_1 = C(\Omega, \Gamma_n)$ a $C_2 = C(\Omega, \Gamma_r)$ jsou konstanty z Věty 11.31. V souhrnu jsme dokázali, že

$$a(v, w) \leqslant \left(1 + d\|\boldsymbol{q}\|_\infty + C_1^2\|\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}\|_{\infty,\Gamma_n} + C_2^2\|\sigma_r\|_{\infty,\Gamma_r}\right)\|v\|_{1,2}\|w\|_{1,2} =: \beta\|v\|_{1,2}\|w\|_{1,2}.$$

Nyní odhadneme formu l:

$$\begin{aligned}l(v) = (\sigma_r u_r, v)_{\Gamma_r} &\leqslant \|\sigma_r\|_{\infty,\Gamma_r}\|u_r\|_{2,\Gamma_r}\|v\|_{2,\Gamma_r}\\ &\leqslant \|\sigma_r\|_{\infty,\Gamma_r}\|u_r\|_{2,\Gamma_r}\|v\|_{2,\partial\Omega}\\ &\leqslant C_2\|\sigma_r\|_{\infty,\Gamma_r}\|u_r\|_{2,\Gamma_r}\|v\|_{1,2} =: \gamma\|v\|_{1,2}.\end{aligned}$$

□

Věta 12.7. *Nechť jsou splněny následující předpoklady:*

(i) $\boldsymbol{q}$ *má nulovou divergenci,* $\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n} \geqslant 0$ *na* Γ_n *a* $\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n} \leqslant 0$ *na* Γ_r*;*

(ii) existuje konstanta $\underline{\sigma}_r > 0$ *taková, že*

$$\forall \boldsymbol{x} \in \Gamma_r:\ \sigma_r(\boldsymbol{x}) \geqslant \underline{\sigma}_r \geqslant 0.$$

Pak bilineární forma a je eliptická na $H^1(\Omega)$ *s konstantou* $\alpha = \min\{1, \underline{\sigma}_r\}/(2C^2)$*, kde* $C > 0$ *je konstanta z Věty 11.33.*

Důkaz. Jelikož $\operatorname{div}\boldsymbol{q} = 0$ a $\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n} \leqslant 0$ na Γ_r, platí:

$$-(\boldsymbol{q}v, \nabla v) = -(\boldsymbol{q}, \nabla\frac{v^2}{2}) = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}v, v)_{\partial\Omega} + (\operatorname{div}\boldsymbol{q}, \frac{v^2}{2}) \geqslant -\frac{1}{2}(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}v, v)_{\Gamma_n},$$

a proto také

$$\begin{aligned}a(v, v) &= \|\nabla v\|_2^2 - (\boldsymbol{q}v, \nabla v) + (\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}v, v)_{\Gamma_n} + (\sigma_r v, v)_{\Gamma_r}\\ &\geqslant \|\nabla v\|_2^2 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}v, v)_{\Gamma_n} + (\sigma_r v, v)_{\Gamma_r}\\ &\geqslant \|\nabla v\|_2^2 + \underline{\sigma}_r\|v\|_{2,\Gamma_r}^2\\ &\geqslant \min\{1, \underline{\sigma}_r\}(\|\nabla v\|_2^2 + \|v\|_{2,\Gamma_r}^2).\end{aligned}$$

Z nerovnosti $A^2 + B^2 \geqslant \frac{1}{2}(A + B)^2$ vyplývá, že

$$a(v, v) \geqslant \frac{1}{2}\min\{1, \underline{\sigma}_r\}(\|\nabla v\|_2 + \|v\|_{2,\Gamma_r})^2.$$

Díky Friedrichsově nerovnosti máme

$$a(v, v) \geqslant \frac{\min\{1, \underline{\sigma}_r\}}{2C^2}\|v\|_{1,2}^2.$$

□

13 Galerkinova metoda

Reference

[1] J. Duintjer Tebbens, I. Hnětynková, M. Plešinger, Z. Strakoš, and P. Tichý. *Analýza metod pro maticové výpočty. Základní metody.* Matfyzpress, 2012. ISBN 978-80-7378-201-6.

[2] K. Rektorys. Variační metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky. *SNTL, Praha*, 1974.