MKP - Metoda konečných prvků

Zadání semestrálních prací

naposledy upraveno: 30. ledna 2020

Zadání

Pro zadanou úlohu proveďte následující úkoly:

1. Odvoďte slabou formulaci daného problému, aplikujte Galerkinovu metodu.
2. Definujte prostor testovacích funkcí $\mathcal{V}$ a prostor řešení $\mathcal{U}$.
3. Definujte vhodné bilineární a lineární formy a zapište pomocí nich odvozenou slabou formulaci.
4. Definujte konečně-dimenzionální prostory ***lineárních*** konečných prvků. $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$ a $\mathcal{U}_h \subset \mathcal{U}$.
   Definujte řešení $u_h \in \mathcal{U}_h$.
5. Proveďte zvolenou diskretizaci a sestavte systém lineárních algebraických rovnic ($\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$).
6. Pro systém $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ definujte lokální matice $\boldsymbol{M}_k$ a lokální vektor pravé strany $\boldsymbol{m_k}$ pro všechny elementy E_k.
7. Spočítejte analyticky řešení $u(x)$.
   Pozn.: Pro přesné řešení je potřeba vyřešit nehomogenní dif. rovnici 2.řádu pomocí variace konstant nebo přímou integrací. K vybraným úlohám je řešení dáno až na konstanty.
8. Implementujte MKP v Matlabu/Octave.
   Použijte lokální matice, numerickou integraci a sestavení pomocí referenčního elementu.
   (Máte na webu k dispozici skripty ze cvičení, nebojte se je použít!)
9. Ověřte numericky konvergenci metody. Použijte dělení `n = [10 20 40 80 160 320 640 1280]`.

Přiložená zpráva musí splňovat následující:

- formát PDF (zpracujte pomocí MS Word, Libre Office Writer nebo LaTeX)
- úvodní strana - název předmětu, název sem. práce, jména řešitelů, semestr, datum, (logo TUL)
- zadání Vaší vybrané úlohy
- analytické řešení, vypočítané konstanty
- odvození slabé formulace – všechny náležitosti, viz body výše
- diskrétní slabá formulace – jasně označené, popsané a definované body, indexy, elementy, proměnné atd.
- lokální matice a vektor pravé strany, viz body výše
- chyby řešení v L_2 a H^1 normě, řád konvergence (konvergenční tabulka)
- graf řešení (pro vybraný diskretizační krok, analytické a diskrétní), graf konvergence
- grafy, tabulky číslované a popsané, rovnice číslované
- komentáře k jednotlivým (alespoň k těm nejpodstatnějším) krokům
- ZÁVĚR - shrnutí, zhodnocení výsledků, co vám vyšlo $\times$ co jste očekávali (co mělo vyjít), konverguje správně vaše metoda? atd. V rozsahu půl A4.

Všechny soubory Vaší semestrální práce (všechny potřebné `*.m` skripty, PDF) mějte v jednom adresáři, který zabalte (`zip, rar, tar`) a odešlete na emailovou adresu cvičícího (`pavel.exner@tul.cz`).

Úlohy

1.

$$
\begin{aligned}
-Ku''(x) &= \sigma(u - u_f) \qquad \text{in } \Omega = [a,b] \\
u(a) &= U_a \\
-Ku'(b) &= 0
\end{aligned}
$$

Analytické řešení hledejte ve tvaru $u(x) = C_1 \cos(\sqrt{\alpha} x) + C_2 \sin(\sqrt{\alpha} x) + u_f$, $\alpha = \frac{\sigma}{K}$.
Pro výpočet volte $K = 0.3\,, u_f = 5\,, \sigma = 1.2\,, U_a = 0.2\,, a = 0\,, b = 5$.

2.

$$
\begin{aligned}
-8u''(x) + 2u'(x) &= 17\cos(x) \qquad \text{in } \Omega = [0,L] \\
u'(0) &= q_N \\
u(L) &= 0
\end{aligned}
$$

Analytické řešení hledejte ve tvaru $u(x) = C_1 + C_2 e^{0.25x} + 0.5(\sin(x) + 4\cos(x))$.
Pro výpočet volte $L = 10, q_N = 1$.

3.

$$
\begin{aligned}
-((1+x)u'(x))' &= d \qquad \text{in } \Omega = [a,b] \\
(1+a)u'(a) &= \sigma(u(a) - U_R) \\
u(b) &= U_b
\end{aligned}
$$

Analytické řešení hledejte ve tvaru $u(x) = -dx + C_1 \ln(x+1) + C_2$.
Pro výpočet volte $d = -3\,, \sigma = 5\,, U_R = 2, U_b = 3\,, [a,b] = [2,7]$.

4.

$$
\begin{aligned}
-Ku''(x) + cu'(x) &= d e^{\frac{c}{K}x} \qquad \text{in } \Omega = [1,3] \\
u(1) &= 0 \\
-Ku'(3) &= q_N
\end{aligned}
$$

Analytické řešení hledejte ve tvaru $u(x) = C_1 + \left(C_2 - \frac{d}{c}x\right) e^{\frac{c}{K}x}$.
Pro výpočet volte $K = 4\,, c = -5\,, d = 3\,, q_N = 2$.

5.

$$
\begin{aligned}
-u''(x) + Ku &= dx \qquad \text{in } \Omega = [0,L] \\
u'(0) &= 0 \\
u(L) &= U_L
\end{aligned}
$$

Analytické řešení hledejte ve tvaru $u(x) = C_1 e^{\sqrt{K}x} + C_2 e^{-\sqrt{K}x} + \frac{d}{K}x$.
Pro výpočet volte $K = 3\,, d = 2.5\,, L = 5,\ U_L = -2$.

6.

$$
\begin{aligned}
-((x^2 + c)u'(x))' &= -dx \qquad \text{in } \Omega = [a,b] \\
u(a) &= U_a \\
-(b^2 + c)u'(b) &= q_N
\end{aligned}
$$

Analytické řešení hledejte ve tvaru $u(x) = \frac{d}{2}x - \frac{C_1}{\sqrt{c}} \arctan \frac{x}{\sqrt{c}} + C_2$.
Pro výpočet volte $d = 0.7\,, c = 0.05\,, U_a = -10, q_N = 1\,, [a,b] = [-5,5]$.
Vyzkoušejte zmenšovat postupně konstantu c k hodnotě 10^{-4}, pozorujte řešení a konvergenci metody a pokuste se vysvětlit, co se děje a proč.