MKP - Metoda konečných prvků, cvičení

1 Opakování

Témata: Vektorový prostor, lineární zobrazení, matice, inverzní matice, hodnost, soustava lin. rovnic, vlastní čísla a vektory. Vektorový prostor funkcí. Skalární a vektorové funkce více promenných. Derivace složených funkcí. Diferenciální operátory: gradient, divergence, rotace.

Příklady k řešení:

1. Vektorový prostor funkcí.
2. Tvoří množina $\{t^2+1, (t+1)^2, (t-1)^2\}$ bázi prostoru P_2? Jakou hodnost má příslušná matice?
3. Najděte matici přechodu z báze $a : (3\sin(t+\alpha), 2\cos(t+\alpha))$ do báze $b : (\sin(t), \cos(t))$ a její inverzní matici. Najděte matici přechodu z báze b do báze a. Matice X_a bilineární formy $X(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ v bázi A je $[1\ 0; 0\ \ -1]$ nalezněte její matici X_b v bázi b. Jaká budou vlastní čísla a vlastní vektory matice X_b?
4. Nechť $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$ jsou dané funkce tří proměnných. Transformujte výraz:
$$V = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial z}$$
do "cylindrických"souřadnic:
$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad h = 2z + 1.$$
výsledek:
$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial g}{\partial \varphi} - \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial g}{\partial r}\right) + 4\frac{\partial f}{\partial h}\frac{\partial g}{\partial h}$$
5. Je dáno:
$$\partial_a u = b^2,\ \partial_b u = 2ab,\ a(x) = 1 + x^2,\ b(y) = y^2$$
Vypočtěne Jacobiho matici funkce $\boldsymbol{f}(x, y) = [u, -2u + y, u^2]$
6. Pro polohový vektor (rádius vektor)
$$\boldsymbol{r} = (x, y, z), \quad r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}.$$
spočtěte:
$$\text{a) } \nabla\cdot\boldsymbol{r} \qquad \text{b) } \nabla\times\boldsymbol{r} \qquad \text{c) } \nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \qquad \text{d) } \nabla\times\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$
Plyne z posledních dvou výsledků porušení Helmholtzovy dekompozice?
7. Spočtěte $\mathrm{div}(\mathrm{rot}(\boldsymbol{\omega}))$ pro obecné vektorové pole ω.

Příklady doplňující

1. Derivace složené funkce - [2] str. 29; 1,2,3,4
2. První derivace, 2 nezávisle proměnné - [2] str. 50; 2,3
3. Polarní souřadnice - [2] str. 52; 8, 10*
4. Diferenciální operátory, vektorový počet: [2] str. 221,
5. Gradient - [2] str. 223; 1-4,6,8*,13,17a,
6. Divergence - [2] str. 232; 25, 27, 28-36
7. Rotace - [2] str. 237; 38-42

2 Integrace po křivce a po ploše. Kelvin-Stokesova, Greenova, Gaussova věta.

Pomocí vektorového zápisu je integrál (1. druhu) ze skalárního pole f podél křivky k dané parametricky funkcí $\boldsymbol{\varphi}(t),\ t \in [\alpha, \beta]$:

$$\int_k f|\,\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}| = \int_\alpha^\beta f\big(\boldsymbol{\varphi}(t)\big)\,|\boldsymbol{\varphi}'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z)\sqrt{(\varphi_x')^2 + (\varphi_y')^2 + (\varphi_z')^2}\,\mathrm{d}t$$

kde $\boldsymbol{\varphi}'(t)$ je tečný vektor, tj. vektor derivace funkce φ, [2] str. 135.

Podobně pro integrál (1. druhu) ze skalárního pole f podél plochy S dané parametricky funkcí $\boldsymbol{\varphi}(u,v), [u,v] \in M \subset \mathbf{R}^2$:

$$\int_S f|\,\mathrm{d}\boldsymbol{n}| = \int_M f(\boldsymbol{\varphi}(u,v))|\boldsymbol{n}(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_M f(\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z)\sqrt{(n_x)^2 + (n_y)^2 + (n_z)^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

kde $\boldsymbol{n}$ je normála plochy (vektor kolmý k ploše jehož velikost je daná "velikostí elementární plošky"). Normála je rovna vektorovému součinu tečných vektorů:

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{t}_u \times \boldsymbol{t}_v, \quad \boldsymbol{t}_u = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u}, \quad \boldsymbol{t}_v = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v}.$$

Pozor, pokud plocha není rovina, tak normála a tudíž i její velikost závisí na parametrech u, v, [2] str. 151.

Ve vektorovém zápisu je integrál (2. druhu) z vektorového pole $\boldsymbol{F}$ podél křivky k:

$$\int_k \boldsymbol{F}\cdot\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_\alpha^\beta \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\varphi}(s))\cdot\boldsymbol{\varphi}'(s)\,\mathrm{d}s$$

Integrál vyjadřuje práci pole podél křivky, [2] str. 169. Podobně lze integrál (2. druhu) vektorového pole $\boldsymbol{F}$ skrze plochu S napsat:

$$\int_S \boldsymbol{F}\cdot\,\mathrm{d}\boldsymbol{n} = \int_M \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\varphi}(u,v))\cdot\big(\partial_u\boldsymbol{\varphi}\times\partial_v\boldsymbol{\varphi}\big)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Tento integrál má význam celkového toku pole skrz plochu, [2] str. 192.

Stokesova věta: Pro plochu S ohraničenou uzavřenou křivkou k platí

$$\int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{F}\cdot\,\mathrm{d}\boldsymbol{n} = \int_k \boldsymbol{F}\cdot\,\mathrm{d}\boldsymbol{k}.$$

Gaussova věta: Pro objem V ohraničený plochou S platí

$$\int_V \mathrm{div}\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}V = \int_S \boldsymbol{F}\cdot\,\mathrm{d}\boldsymbol{n}.$$

Greenova věta (integrace per partes):

$$\int_V \partial_x uv\,\mathrm{d}V = \int_S uv\,\mathrm{d}n_x - \int_V u\partial_x v\,\mathrm{d}V$$

$$\int_V (\nabla u)\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V = \int_S uv\cdot\,\mathrm{d}n - \int_V u\mathrm{div}v\,\mathrm{d}V$$

([2] str. 208)

3 Aplikace v geometrii a fyzice

Rektorys I., 520 - 551

Délka křivky, plocha plochy je integrál (1. druhu) ze skalárního pole $f(x,y,z)=1$, tj.

$$l=\int_\alpha^\beta |\boldsymbol{\varphi}'(t)|\,\mathrm{d}t,\quad P=\int_M |\boldsymbol{n}(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Hmota křivky nebo plochy je integrál (1. druhu) ze skalárního pole hustoty $\rho(x,y,z)$.

$$M=\int_k \rho(x,y,z)|\,\mathrm{d}\varphi|,\quad M=\int_S \rho(x,y,z)|\,\mathrm{d}\boldsymbol{n}|$$

Souřadnice těžiště křivky nebo plochy je vektor (T_x,T_y,T_z) integrálů (1. druhu !!) z vektoru skalárních funkcí $x\rho(x,y,z)$, $y\rho(x,y,z)$, $z\rho(x,y,z)$ dělený celkovou hmotou M. Např. pro plochu S:

$$T_x=\frac{1}{M}\int_S x\rho(x,y,z)|\,\mathrm{d}\boldsymbol{n}|,\quad T_y=\frac{1}{M}\int_S y\rho(x,y,z)|\,\mathrm{d}\boldsymbol{n}|,\quad T_z=\frac{1}{M}\int_S z\rho(x,y,z)|\,\mathrm{d}\boldsymbol{n}|.$$

Moment setrvačnosti vzhledem k ose o je integrál (1. druhu) ze skalární funkce $f(x,y,z)=r^2\rho(x,y,z)$, kde r je vzdálenost bodu $[x,y,z]$ od osy o. Bývá vhodné použít cylindrické souřadnice okolo osy o.

Práce síly po křivce. Integrál 2. druhu z vektorové funkce síly. **Tok kapaliny skrze plochu za jednotkový čas.** Integrál 2. druhu z vektorového pole rychlosti.

Příklady k řešení:

1. Spočítejte tok vektorového pole
$$\boldsymbol{F}=(x^3,y^3,z^3)$$
plochou danou rovnicí
$$x^2+y^2+z^2=x.$$
Návod: Použijte Gaussovu větu a substituci do sférických souřadnic. $[\pi/5]$
2. Spočítejte tok pole $\boldsymbol{F}=(y,x,-z)$ trojúhelníkem $A=(1,0,0)$, $B=(0,2,0)$, $C=(0,0,3)$ orientovaným směrem od počátku. [3/2]
3.
4. Spočítejte moment setrvačnosti kuželolvé plochy $x^2+y^2-4z^2=0$, $0<z<\frac{1}{2}$ s hustotou $\rho(x,y,z)=z$ vzhledem k přímce $\{y=0,\ z=\frac{1}{2}\}$. Návod: Použijte cylindrické souřadnice pro parametrické vyjádření plochy. $[\pi\sqrt{5}13/(20*12)]$
5. Spočítejte práci elastické síly směřující do počátku o velikosti dvojnásobku vzdálenosti do počátku podél šroubovice $\{3\cos 2t, 3\sin 2t, t\}$, $0<t<2\pi$. Vysvětlete proč je výsledek záporný. $[-4\pi^2]$

Příklady doplňující:

1. Fubiniho věta: [2] str. 89 (př: 1-7,9,11)
2. Substituce: [2] str. 97 (př: 1-3, 7)
3. Aplikace integrálů: [2] str. 112 ()
4. Křivkové integrály: [2] str. 135 (); str. 169 ()
5. Plošné integrály: [2] str. 150 (); str. 192 () str. 248; 199/12 (hmotnost), 249/58 (hmotnost), 122/20 … (3D momenty), 159/11 (skořepina),
6. Greenova věta: [2] str. 197;
7. Gaussova, Stokesova věta: [2] str. 208; 244/48, 245/51, 246/52, 247/54, …

Reference

[1] K. Rektorys a spol. : *Přehled užité matematiky.* Prometheus, Praha, 1995.

[2] http://euler.fd.cvut.cz/predmety/ml2/files/MA2_CV.pdf(originál),
http://morf.matfyz.cz/vyuka/mft/MA2_CV.pdf(kopie)

[3] J. Veit: *Integrální transformace.* SNTL, Praha, 1979.

[4] R. Feynman: *Přednášky z fyziky II.*, Fragment, 2001

[5] B. Sedlák,I. Štoll :*Eletřina a magnetismus.* Academia, Praha, 2002..