

Formule

Indici Temporali

$$p(t, x) = \sum_{n=1}^N x_n (1 + i(t, T_n))^{-(T_n - t)}$$

Duration e Convexity

$$\begin{aligned} DU(t, x) &= \frac{\sum_{n=1}^N (T_n - t) x_n (1 + i(t, T_n))^{-(T_n - t)}}{p(t, x)} \\ DU^2(t, x) &= \frac{\sum_{n=1}^N (T_n - t)^2 x_n (1 + i(t, T_n))^{-(T_n - t)}}{p(t, x)} \\ C(t, x) &= \frac{\sum_{n=1}^N (T_n - t)(T_n - t + 1) x_n (1 + i(t, T_n))^{-(T_n - t + 2)}}{p(t, x)} \end{aligned}$$

Oppure con $e^{-y*(T_N - t)}$ al posto di $(1 + i)^{-(T_n - t)}$
Per portafoglio α, X :

$$DU(t, \alpha X) = \sum_{k=1}^K \frac{\alpha_k p_k}{\sum_{k=1}^K \alpha_k p_k} DU(t, x^k)$$

Approssimazione

Composta

$$\begin{aligned} \Delta p(t, x) &= -\frac{1}{1+i} DU(t, x) p(t, x) \Delta i + \\ &+ 1/2 p(t, x) C(t, x) \Delta i^2 \end{aligned}$$

Esponenziale

$$\begin{aligned} \Delta p(t, x) &= -DU(t, x) p(t, x) \Delta y + \\ &+ 1/2 p(t, x) DU^2(t, x) \Delta y^2 \end{aligned}$$

Immunizzazione

Fisher-Weil

Unica uscita L in $H > t$, per immunizzare $(V(t^+, x) \geq V(t^+, L))$ basta:

$$\begin{cases} V(t, x) = V(t, L) \\ DU(t, x) = H - t \end{cases}$$

Redington

Sia $V(t, x) = V(t, y)$, per immunizzare $(V(t^+, x) \geq V(t^+, L))$ basta:

$$\begin{cases} DU(t, x) = DU(t, y) \\ DU^2(t, x) \geq DU^2(t, y) \end{cases}$$

Scelte in rischio

Premio per il rischio

$$\rho_u(\tilde{x}) \text{ t.c. } u(\underbrace{E[\tilde{x}] - \rho_u(\tilde{x})}_{\text{CertoEquivalente}}) = E[u(\tilde{x})]$$

Coefficiente di avversione

$$r_u^a(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} \text{ e moltiplico per } x$$

Funzioni utilità

- **Esponenziale** $-\frac{1}{a}e^{-xa}$ e $r_u^a(x) = a$
- **Quadratica** $x - \frac{b}{2}x^2$ e $r_u^a(x) = \frac{b}{1-bx}$

Media-Varianza

Per due titoli rischiosi

$$(w, 1 - w)$$

$$\begin{cases} \tilde{r} = w\tilde{r}_1 + (1 - w)\tilde{r}_2 \\ E[\tilde{r}] = wE[\tilde{r}_1] + (1 - w)E[\tilde{r}_2] \\ \sigma^2(\tilde{r}) = w^2\sigma^2(\tilde{r}_1) + (1 - w)^2\sigma^2(\tilde{r}_2) \\ \quad + 2w(1 - w)\rho\sigma_1\sigma_2 \end{cases}$$

Scelte di Portafoglio

Massimizziamo utilità attesa $E[u(\tilde{x})]$, abbiamo un titolo sicuro r_f

$$\begin{aligned} \tilde{W} &= xr_f + \sum_{n=1}^N w_n(\tilde{r}_n - r_f) \\ E[u'(xr_f + w(\tilde{r} - r_f))(\tilde{r} - r_f)] &= 0 \end{aligned}$$

Con un titolo

Quadratica

$$\begin{aligned}
& x r_f + w(E[\tilde{r}] - r_f) - \frac{b}{2}[(x r_f + w(E[\tilde{r}] - r_f))^2 + \\
& \quad w^2 \sigma^2(\tilde{r})] \\
& E[(1 - b(x r_f + w(\tilde{r} - r_f))(\tilde{r} - r_f))] \\
& w^* = \frac{(1 - b x r_f) E[\tilde{r} - r_f]}{b(\sigma^2(\tilde{r} + (E[\tilde{r}] - r_f)^2))}
\end{aligned}$$

Esponenziale + Normali

Massimizzare $E[u(\tilde{w})]$ equivale a massimizzare l'esponente (lognormale)

$$\begin{aligned}
& E[\tilde{W}] - \frac{a}{2} \sigma^2(\tilde{W}) \\
& w^* = \frac{1}{a \sigma^2(\tilde{r})} (E[\tilde{r}] - r_f)
\end{aligned}$$

Con più titoli

Vettore media e e matrice Varianza V

Quadratica

$$\begin{aligned}
& E[(1 - b \tilde{W})(\tilde{r}_n - r_f)] = 0 \quad \forall n \in \{1, \dots, N\} \\
& w^* = \frac{(1 - b x E[\tilde{r}])}{b} V^{-1}(e - r_f \mathbf{1})
\end{aligned}$$

Esponenziale + Normali

Massimizzare $E[u(\tilde{w})]$ equivale a massimizzare l'esponente (lognormale)

$$\begin{aligned}
& x r_f + w \cdot (e - r_f \mathbf{1}) - \frac{1}{2} a w^T V w \\
& w^* = \frac{1}{a} V^{-1}(e - r_f \mathbf{1})
\end{aligned}$$

Frontiera dei portafogli

Solo rischiosi

Vettore delle medie e e matrice varianza V
Bisogna calcolare i **coefficienti**:

$$\begin{aligned}
A &= \mathbf{1}^T V^{-1} e \\
B &= e^T V^{-1} e \\
C &= \mathbf{1}^T V^{-1} \mathbf{1} \\
D &= B C - A^2
\end{aligned}$$

Ora ci scriviamo i vettori di frontiera g e h :

$$\begin{aligned}
g &= \frac{(B V^{-1} \mathbf{1} - A V^{-1} e)}{D} \\
h &= \frac{(C V^{-1} e - A V^{-1} \mathbf{1})}{D}
\end{aligned}$$

Possiamo scrivere i ptf della frontiera come:

$$w^p = g + h E[\tilde{r}^p]$$

Covarianza tra portafogli in FP

$$Cov(\tilde{r}^q, \tilde{r}^p) = \frac{C}{D} \left(E[\tilde{r}^p] - \frac{A}{C} \right) \left(E[\tilde{r}^q] - \frac{A}{C} \right) + \frac{1}{C}$$

Da cui posso trovare la varianza

Portafoglio a Varianza minima globale

$$w^* = \frac{V^{-1} \mathbf{1}}{C}$$

Da cui posso trovare la varianza

Con titolo privo di rischio

Rendimento del titolo privo di rischio r_f

Calcolo il coefficiente H :

$$H = (e - r_f \mathbf{1})^T V^{-1} (e - r_f \mathbf{1}) = B - 2A r_f + C r_f^2 > 0$$

La frontiera dei portafogli FP^* sono tutti i portafogli:

$$w^p = V^{-1}(e - r_f \mathbf{1}) \frac{E[\tilde{r}^p] - r_f}{H}$$

Per ottenere la varianza:

$$\sigma^2(w^p) = w^{pT} V w^p = \frac{(E[\tilde{r}^p] - r_f)^2}{H}$$

Portafoglio tangente

E' il portafoglio comune a FP e FP^* , o il portafoglio a Covarianza nulla con $w^p \in FP$ con $E[\tilde{w}^p] = r_f$

$$\begin{aligned}
w^e &= V^{-1} \frac{(e - r_f \mathbf{1})}{\mathbf{1}^T V^{-1} (e - r_f \mathbf{1})} \\
E[\tilde{r}^e] &= \frac{A r_f - B}{C r_f - A}
\end{aligned}$$

Modelli di Equilibrio

N titoli e S possibili stati.

Vettore prezzi $q = (q_1, \dots, q_N)$, matrice dei dividendi $D \in \mathbb{R}^{S \times N}$, ricchezza negli stati $y = Dw \in \mathbb{R}^S$

Completezza

Un mercato si dice completo se $\text{rank}(D) = S$ (con $N \geq S$).

Di solito si usa $\det(D) \neq 0$.

State price

Prezzo m_s che paga 1 nello stato s e 0 negli altri.

Dalla loro somma otteniamo il prezzo del titolo sicuro $m_0 = \sum_{s=1}^S m_s$ ed il suo rendimento $r_f = \frac{1}{m_0}$.

Se il mercato è completo, possiamo invertire D e fare:

$$m = (D^T)^{-1} q$$

Per replicarle mi basta creare il portafoglio il cui valore sia uguale ad m facendo:

$$Dw = \mathbf{1}$$

Assenza di Arbitraggio

In assenza di opportunità di Arbitraggio troveremo che:

$$m = D^{-T} q > 0$$

Arbitrage Pricing Theory

N titoli e un titolo sicuro r_f

I rendimenti sono generati da una media e da k fattori di rischio \tilde{x}_i

$$\tilde{r}_n = \alpha + \sum_{h=1}^k b_{nh} \tilde{x}_h \quad \forall n$$

Portafogli Puri

Il portafoglio puro w_s è il portafoglio tale che:

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^N w_s b_{ns} = 1 \\ \sum_{n=1}^N w_j b_{nj} = 0 \quad \forall j \neq s \\ \sum_{n=1}^N w_n = 1 \end{cases}$$

Portafoglio privo di rischio

Il portafoglio puro w_s è il portafoglio tale che:

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^N w_s b_{ns} = 0 \quad \forall s \\ \sum_{n=1}^N w_n = 1 \end{cases}$$

Portafoglio di replica

Dato un titolo:

$$\tilde{r}_{N+1} = \alpha + \sum_{h=1}^k b_{N+1,h} \tilde{x}_h$$

Il suo portafoglio di replica è il portafoglio tale che:

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^N w_n b_{nk} = b_{N+1,k} \quad \forall k \\ \sum_{n=1}^N w_n = 1 \end{cases}$$

Allora, se non c'è arbitraggio:

$$E[\tilde{r}_r] = \alpha$$

Verifica APT

Definiamo $\lambda_h = E[\tilde{r}_h] - r_f$ per ogni portafoglio puro. Se non c'è arbitraggio allora:

$$\alpha - r_f = b_{N+1} \cdot \lambda$$

Put e Call Option

Abbiamo un titolo rischioso (Stock) e uno non rischioso (Bond) i cui valori di mercato sono $S(t), B(t)$.

Abbiamo delle opzioni esercitabili sul sottostante S , con strike-price K .

Call

La call option restituisce:

$$\max[S - K, 0]$$

Put

La put option restituisce:

$$\max[0, K - S]$$

Albero Binomiale

- **Bond:** passa dal valore $B(0)$ in $t = 0$ al valore $B(0)r_f$ in $t = 1$
- **Stock:** il suo valore è una bernoulli di ragione p :

$$\begin{cases} S(0)u & \pi = p \\ S(0)d & \pi = 1 - p \end{cases}$$

Dove u, d stanno per *up*, *down*, e perchè non ci sia arbitraggio: $u > r_f > d$.

E per non arbitraggio:

$$\pi_u = \frac{r_f - d}{u - d}$$

Put e Call Europee

Per ricostruire il loro valore iniziale $F(S(0))$, possiamo procedere in due modi:

- **Con le probabilità:**

1. Ricavo i payoff dalle foglie dell'albero di $S(t)$
2. Iterativamente ricostruisco ogni nodo come:

$$F(S(t)) = \frac{1}{r_f} [F(S(t)u)\pi_u + F(S(t)d)\pi_d]$$

- **Con gli state price:**

1. Ricostruisco i vari state price come:

$$m = D^{-T}q \text{ oppure } m_s = \frac{\pi_s}{r_f^T}$$

2. Ora prezzare le option equivale a prezzare il portafoglio con gli stessi rendimenti, cioè a fare:

$$F(S(0)) = \vec{F}(S(T)) \cdot m$$

Put e Call Americane

Il loro valore iniziale $F(S(0))$ si può ricostruire solo nel caso binomiale

1. Ricostruire l'albero dei payoff per tutti i nodi
2. Partendo dalle foglie ricostruisco il valore come media pesata
3. Faccio il max tra questa e il payoff, e lo scrivo nell'albero e procedo

Put-Call parity

Viene soddisfatta solo dalle Europee:

$$P(t) + S(t) = C(t) + \frac{K}{r_f^{T-t}}$$

Portafoglio di Replica

Cerchiamo un portafoglio costituito di B e S che replichi i payoff a $t = 1$ del derivato. Nel caso di multiperiodale, prima dobbiamo ricostruire il valore a $t = 1$. Poi basta risolvere il sistema lineare:

$$\begin{bmatrix} r_f & S(0)u \\ r_f & S(0)d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(S(0)u) \\ F(S(0)d) \end{bmatrix}$$

E il suo valore di mercato sarà:

$$xB(0) + yS(0) = \frac{1}{r_f} [F(S(0)u)\pi_u + F(S(0)d)\pi_d]$$

Value at Risk e Expected Shortfall

I dati che ci servono sono:

μ , media, σ , deviazione std (fai la radice), h le unità di tempo passato e il livello p

- **Logaritmici Normali**

$$VaR = -h\mu + \sigma\sqrt{h}\Phi^{-1}(1-p)$$

$$ES = -h\mu + \frac{\sqrt{h}\sigma}{p}\phi(\Phi^{-1}(1-p))$$

- **Giornalieri**

$$VaR = h(1-\mu) + \sigma\sqrt{h}\Phi^{-1}(1-p)$$

$$ES = h(1-\mu) + \frac{\sqrt{h}\sigma}{p}\phi(\Phi^{-1}(1-p))$$

- **Perdita**

$$VaR = h\mu + \sigma\sqrt{h}\Phi^{-1}(1-p)$$

$$ES = h\mu + \frac{\sqrt{h}\sigma}{p}\phi(\Phi^{-1}(1-p))$$

Portafogli e Subadditività

Se abbiamo un portafoglio:

$\mu = w \cdot e$ e $\sigma = \sqrt{w^T V w}$, inoltre, se vale la Subadditività:

$$VaR(\tilde{R}) \leq \sum_{i=1}^N VaR(\tilde{R}_i)$$

L'ES è sempre subadditivo.

Specchietto sulla normale

$$\Phi^{-1}(0.99) = 2.3263$$

$$\phi(\Phi^{-1}(0.99)) = 0.0266$$