Formule

Indici Temporali

$$p(t,x) = \sum_{n=1}^{N} x_n(1+i(t,T_n))^{-(T_n-t)}$$

Duration e Convexity

$$DU(t,x) = \frac{\sum^N (T_n-t)x_n(1+i(t,T_n))^{-(T_n-t)}}{p(t,x)}$$

$$DU^2(t,x) = \frac{\sum^N (T_n-t)^2 x_n(1+i(t,T_n))^{-(T_n-t)}}{p(t,x)}$$

$$C(t,x) = \\ = \frac{\sum (T_n-t)(T_n-t+1)x_n(1+i(t,T_n))^{-(T_n-t+2)}}{p(t,x)}$$

Oppure con $e^{-y*(T_N-t)}$ al posto di $(1+i)^{-(Tn-t)}$
Per portafoglio α, X:

$$DU(t,\alpha X) = \sum_{k=1}^{K} \frac{\alpha_k p_k}{\sum_{k=1}^{K} \alpha_k p_k} Du(t,x^k)$$

Approssimazione

Composta

$$\Delta p(t,x) = -\frac{1}{1+i} DU(t,x)p(t,x)\Delta i + \\ + 1/2 p(t,x)C(t,x)\Delta i^2$$

Esponenziale

$$\Delta p(t,x) = -DU(t,x)p(t,x)\Delta y + \\ + 1/2 p(t,x)DU^2(t,x)\Delta y^2$$

Immunizzazione

Fisher-Weil

Unica uscita L in $H > t$, per immunizzare $(V(t^+,x) \geq V(t^+,L))$ basta:

$$\begin{cases} V(t,x) = V(t,L) \\ DU(t,x) = H - t \end{cases}$$

Redington

Sia $V(t,x) = V(t,y)$, per immunizzare $(V(t^+,x) \geq V(t^+,L))$ basta:

$$\begin{cases} DU(t,x) = DU(t,y) \\ DU^2(t,x) \geq DU^2(t,y) \end{cases}$$

Scelte in rischio

Premio per il rischio

$\rho_u(\tilde{x})$ t.c. $u(\underbrace{E[\tilde{x}] - \rho_u(\tilde{x})}_{CertoEquivalente}) = E[u(\tilde{x})]$

Coefficiente di avversione

$r_u^a(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$ e moltiplico per x

Funzioni utilità

- **Esponenziale** $-\frac{1}{a}e^{-xa}$ e $r_u^a(x) = a$
- **Quadratica** $x - \frac{b}{2}x^2$ e $r_u^a(x) = \frac{b}{1-bx}$

Media-Varianza

Per due titoli rischiosi

$(w, 1-w)$

$$\begin{cases} \tilde{r} = w\tilde{r}_1 + (1-w)\tilde{r}_2 \\ E[\tilde{r}] = wE[\tilde{r}_1] + (1-w)E[\tilde{r}_2] \\ \sigma^2(\tilde{r}) = w^2\sigma^2(\tilde{r}_1) + (1-w)^2\sigma^2(\tilde{r}_2) \\ \quad +2w(1-w)\rho\sigma_1\sigma_2 \end{cases}$$

Scelte di Portafoglio

Massimiziamo utilità attesa $E[u(\tilde{x})]$, abbiamo un titolo sicuro r_f

$$\tilde{W} = xr_f + \sum_{n=1}^{N} w_n(\tilde{r}_n - r_f)$$

$$E[u'(xr_f + w(\tilde{r} - r_f))(\tilde{r} - r_f)] = 0$$

Con un titolo

Quadratica

$$xr_f + w(E[\tilde{r}] - r_f) - \frac{b}{2}[(xr_f + w(E[\tilde{r}] - r_f))^2 + w^2\sigma^2(\tilde{r})]$$

$$E[(1 - b(xr_f + w(\tilde{r} - r_f))(\tilde{r} - r_f)]$$

$$w^* = \frac{(1 - bxr_f)E[\tilde{r} - r_f]}{b(\sigma^2(\tilde{r} + (E[\tilde{r}] - r_f)^2))}$$

Esponenziale + Normali

Massimizzare $E[u(\tilde{w})]$ equivale a massimizzare l'esponente (lognormale)

$$E[\tilde{W}] - \frac{a}{2}\sigma^2(\tilde{W})$$

$$w^* = \frac{1}{a\sigma^2(\tilde{r})}(E[\tilde{r}] - r_f)$$

Con più titoli

Vettore media e e matrice Varianza V

Quadratica

$$E[(1 - b\tilde{W})(\tilde{r}_n - r_f)] = 0 \quad \forall n \in \{1, \dots, N\}$$

$$w^* = \frac{(1 - bxE[\tilde{r}])}{b}V^{-1}(e - r_f\mathbf{1})$$

Esponenziale + Normali

Massimizzare $E[u(\tilde{w})]$ equivale a massimizzare l'esponente (lognormale)

$$xr_f + w \cdot (e - r_f\mathbf{1}) - \frac{1}{2}aw^TVw$$

$$w^* = \frac{1}{a}V^{-1}(e - r_f\mathbf{1})$$

Frontiera dei portafogli

Solo rischiosi

Vettore delle medie e e matrice varianza V
Bisogna calcolare i **coefficienti**:

$$A = \mathbf{1}^TV^{-1}e$$

$$B = e^TV^{-1}e$$

$$C = \mathbf{1}^TV^{-1}\mathbf{1}$$

$$D = BC - A^2$$

Ora ci scriviamo i vettori di frontiera g e h:

$$g = \frac{(BV^{-1}\mathbf{1} - AV^{-1}e)}{D}$$

$$h = \frac{(CV^{-1}e - AV^{-1}\mathbf{1})}{D}$$

Possiamo scrivere i ptf della frontiera come:

$$w^p = g + hE[\tilde{r}^p]$$

Covarianza tra portafogli in FP

$$Cov(\tilde{r}^q, \tilde{r}^p) = \frac{C}{D}\left(E[\tilde{r}^p] - \frac{A}{C}\right)\left(E[\tilde{r}^q] - \frac{A}{C}\right) + \frac{1}{C}$$

Da cui posso trovare la varianza

Portafoglio a Varianza minima globale

$$w* = \frac{V^{-1}\mathbf{1}}{C}$$

Da cui posso trovare la varianza

Con titolo privo di rischio

Rendimento del titolo privo di rischio r_f
Calcolo il coefficiente H:

$$H = (e - r_f\mathbf{1})^TV^{-1}(e - r_f\mathbf{1}) = B - 2Ar_f + Cr_f^2 > 0$$

La frontiera dei portafogli FP^* sono tutti i portafogli:

$$w^p = V^{-1}(e - r_f\mathbf{1})\frac{E[\tilde{r}^p] - r_f}{H}$$

Per ottenere la varianza:

$$\sigma^2(w^p) = w^{pT}Vw^p = \frac{(E[\tilde{r}^p] - r_f)^2}{H}$$

Portafoglio tangente

E' il portafoglio comune a FP e FP*, o il portafoglio a Covarianza nulla con $w^p \in FP$ con $E[\tilde{w}^p] = r_f$

$$w^e = V^{-1}\frac{(e - r_f\mathbf{1})}{\mathbf{1}^TV^{-1}(e - r_f\mathbf{1})}$$

$$E[\tilde{r}^e] = \frac{Ar_f - B}{Cr_f - A}$$

Modelli di Equilibrio

N titoli e S possibili stati.
Vettore prezzi $q = (q_1, \dots, q_n)$, matrice dei dividendi $D \in \mathbb{R}^{S \times N}$, ricchezza negli stati $y = Dw \in \mathbb{R}^S$

Completezza

Un mercato si dice completo se $rank(D) = S$ (con $N \geq S$).
Di solito si usa $\det(D) \neq 0$.

State price

Prezzo m_s che paga 1 nello stato s e 0 negli altri.
Dalla loro somma otteniamo il prezzo del titolo sicuro $m_0 = \sum_{s=1}^{S} m_s$ ed il suo rendimento $r_f = \frac{1}{m_0}$
Se il mercato è completo, possiamo invertire D e fare:

$$m = (D^T)^{-1} q$$

Per replicarle mi basta creare il portafoglio il cui valore sia uguale ad m facendo:

$$Dw = \mathbf{1}$$

Assenza di Arbitraggio

In assenza di opportunità di Arbitraggio troveremo che:

$$m = D^{-T} q > 0$$

Arbitrage Pricing Theory

N titoli e un titolo sicuro r_f
I rendimenti sono generati da una media e da k fattori di rischio $\tilde{x}_i$

$$\tilde{r}_n = \alpha + \sum_{h=1}^{k} b_{nh} \tilde{x}_h \quad \forall n$$

Portafogli Puri

Il portafoglio puro w_s è il portafoglio tale che:

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{N} w_s b_{ns} = 1 \\ \sum_{n=1}^{N} w_j b_{nj} = 0 \quad \forall j \neq s \\ \sum_{n=1}^{N} w_n = 1 \end{cases}$$

Portafoglio privo di rischio

Il portafoglio puro w_s è il portafoglio tale che:

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{N} w_s b_{ns} = 0 \quad \forall s \\ \sum_{n=1}^{N} w_n = 1 \end{cases}$$

Portafoglio di replica

Dato un titolo:

$$\tilde{r}_{N+1} = \alpha + \sum_{h=1}^{k} b_{N+1\,k} \tilde{x}_h$$

Il suo portafoglio di replica è il portafoglio tale che:

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{N} w_r b_{nk} = b_{N+1\,k} \quad \forall k \\ \sum_{n=1}^{N} w_n = 1 \end{cases}$$

Allora, se non c'è arbitraggio:

$$E[\tilde{r}_r] = \alpha$$

Verifica APT

Definiamo $\lambda_h = E[\tilde{r}_h] - r_f$ per ogni portafoglio puro. Se non c'è arbitraggio allora:

$$\alpha - r_f = b_{N+1} \cdot \lambda$$

Put e Call Option

Abbiamo un titolo rischioso (Stock) e uno non rischioso (Bond) i cui valori di mercato sono $S(t), B(t)$.
Abbiamo delle opzioni esercitabili sul sottostante S, con strike-price K.

Call

La call option restituisce:

$$max[S - K, 0]$$

Put

La put option restituisce:

$$max[0, K - S]$$

Albero Binomiale

- **Bond**: passa dal valore $B(0)$ in $t = 0$ al valore $B(0)r_f$ in $t = 1$
- **Stock**: il suo valore è una bernoulli di ragione p:

$$\begin{cases} S(0)u & \pi = p \\ S(0)d & \pi = 1 - p \end{cases}$$

Dove u, d stanno per *up, down*, e perchè non ci sia arbitraggio: $u > r_f > d$.
E per non arbitraggio:

$$\pi_u = \frac{r_f - d}{u - d}$$

Put e Call Europee

Per ricostruire il loro valore iniziale $F(S(0))$, possiamo procedere in due modi:

- **Con le probabilità:**
  1. Ricavo i payoff dalle foglie dell'albero di S(t)
  2. Iterativamente ricostruisco ogni nodo come:
  $$F(S(t)) = \frac{1}{r_f}[F(S(t)u)\pi_u + F(S(0)d)\pi_d]$$
- **Con gli state price:**
  1. Ricostruisco i vari state price come:
  $$m = D^{-T}q \text{ oppure } m_s = \frac{\pi_s}{r_f^T}$$
  2. Ora prezzare le option equivale a prezzare il portafoglio con gli stessi rendimenti, cioè a fare:
  $$F(S(0)) = \vec{F}(S(T)) \cdot m$$

Put e Call Americane

Il loro valore iniziale $F(S(0))$ si può ricostruire solo nel caso binomiale

1. Ricostruire l'albero dei payoff per tutti i nodi
2. Partendo dalle foglie ricostruisco il valore come media pesata
3. Faccio il max tra questa e il payoff, e lo scrivo nell'albero e procedo

Put-Call parity

Viene soddisfatta solo dalle Europee:

$$P(t) + S(t) = C(t) + \frac{K}{r_f^{T-t}}$$

Portafoglio di Replica

Cerchiamo un portafoglio costituito di B e S che replichi i payoff a $t = 1$ del derivato.
Nel caso di multiperiodale, prima dobbiamo ricostruire il valore a $t = 1$. Poi basta risolvere il sistema lineare:

$$\begin{bmatrix} r_f & S(0)u \\ r_f & S(0)d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(S(0)u) \\ F(S(0)d) \end{bmatrix}$$

E il suo valore di mercato sarà:

$$xB(0) + yS(0) = \frac{1}{r_f}[F(S(0)u)\pi_u + F(S(0)d)\pi_d]$$

Delta hedging

Voglio sapere quanto Δ devo vendere allo scoperto di S per neutralizzare le oscillazioni del Derivato.
In pratica:

$$\Delta = \frac{F(S(0)u) - F(S(0)d)}{S(0)(u-d)}$$

Anche questo modello nel caso di multiperiodale, necessita di ricondursi a $t = 1$.

Double checking

Notiamo che possiamo controllare di aver ottenuto dei risultati corretti se:

$$\Delta = y$$

Value at Risk e Expected Shortfall

I dati che ci servono sono:
μ, media, σ, deviazione std (fai la radice), h le unità di tempo passato e il livello p

- **Logaritmici Normali**
$$VaR = -h\mu + \sigma\sqrt{h}\Phi^{-1}(1-p)$$
$$ES = -h\mu + \frac{\sqrt{h}\sigma}{p}\phi(\Phi^{-1}(1-p))$$
- **Giornalieri**
$$VaR = h(1-\mu) + \sigma\sqrt{h}\Phi^{-1}(1-p)$$
$$ES = h(1-\mu) + \frac{\sqrt{h}\sigma}{p}\phi(\Phi^{-1}(1-p))$$
- **Perdita**
$$VaR = h\mu + \sigma\sqrt{h}\Phi^{-1}(1-p)$$
$$ES = h\mu + \frac{\sqrt{h}\sigma}{p}\phi(\Phi^{-1}(1-p))$$

Portafogli e Subadditività

Se abbiamo un portafoglio:
$\mu = w \cdot e$ e $\sigma = \sqrt{w^T V w}$, inoltre, se vale la Subadditività:

$$VaR(\tilde{R}) \leq \sum_{i=1}^{N} VaR(\tilde{R}_n)$$

L'ES è sempre subadditivo.

Specchieto sulla normale

$$\Phi^{-1}(0.99) = 2.3263$$
$$\phi(\Phi^{-1}(0.99)) = 0.0266$$