Formule e Teoremi utili

Probabilità

Distribuzione della trasformata

Sia $f_X(x)$ e $y = g(x)$.

- Se g crescente: $F_Y(y) = F_X(g^{-1}(y))$
- Se g decrescente: $F_Y(y) = 1 - F_X(g^{-1}(y))$
- Se g^{-1} derivabile:
  $f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))|\dot{g}^{-1}(y)|$

Varianza

$Var[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$

Marginali, Congiunte e Condizionate

$$f_{x,y} = f_{x|y} f_y$$
$$f_x = \int f_{x,y} dy$$

Media e Varianza Condizionati

$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]]$
$Var[X] = \mathbb{E}[Var[X|Y]] + Var[\mathbb{E}[X|Y]]$

Legge Forte Grandi Numeri

Sia $X_1, \ldots, X_n$ iid con μ, σ^2, allora:
$\bar{X}_n \overset{q.c.}{\to} \mu$

Teorema centrale del limite

Sia $X_1, \ldots, X_n$ iid con μ, σ^2, allora:
$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \overset{L}{\to} N(0, \sigma^2)$

Metodo delta

Sia $X_1, \ldots, X_n$ iid con μ, σ^2, tali che:
$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \overset{L}{\to} N(0, \sigma^2)$
Prendiamo una funzione $g(x)$:

- Se $g'(x) \neq 0$:
  $\sqrt{n}(g(\bar{X}_n) - g(\mu)) \overset{L}{\to} N(0, \sigma^2 g'(\mu)^2)$
- Se Se $g'(x) = 0$:
  $\sqrt{n}(g(\bar{X}_n) - g(\mu)) \overset{L}{\to} \frac{\sigma^2}{2} g''(\mu)\chi^2(1)$

Statistiche sufficienti

Definizione

Una statistica T è sufficiente per θ se:
$f(\vec{x}|T = t) \perp\!\!\!\perp \theta \quad \forall t$

Teorema di Fattorizzazione

Data la congiunta $f(\vec{x}, \theta)$, $T(x)$ è suff se:
$f(\vec{x}, \theta) = h(\vec{x})g(T(x), \theta)$
Questo vale anche per trasformazioni **biunivoche** di T

Famiglia Esponenziale

Se ho una distribuzione della FE:
$f(\vec{x}, \theta) = h(\vec{x})c(\theta) \exp\left\{\sum_{i=1}^k w_i(\theta)t_i(x)\right\}$
Allora $T = (\sum_j t_1(X_j), \ldots, \sum_j t_k(X_j))$ è sufficiente

Statistiche sufficienti e minimali

Definizione

Una statistica sufficiente T viene detta minimale se tutte le altre statistiche sufficienti sono funzioni di essa.

Lehmann-Scheffè sulla minimalità

Sia $f(\vec{x}, \theta)$ e T stat suff. T è minimale se:
$\frac{f(\vec{x},\theta)}{f(\vec{y},\theta)} = K$ con K costante $\iff$ $T(x) = T(y)$

Statistiche complete

Definizione

Sia $T(x)$ una statistica e $f(t, \theta)$ la sua legge. Diciamo $T(x)$ completa se:

$$\mathbb{E}_\theta[g(T)] = 0 \, \forall\theta \implies \mathbb{P}(g(T) = 0) = 1$$

Di solito usiamo la derivata rispetto a θ:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\theta}\mathbb{E}_\theta[g(T)] = 0 \\ &= h'(\theta)\overset{0}{\cancel{\mathbb{E}_\theta[g(T)]}} + h(\theta)g(t)f_T(t,\theta)\Big|_a^b \end{aligned}$$