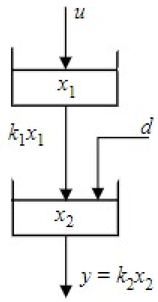
Fondamenti di Automatica

Simulazione 2

L. Maci, L. Paparo, M. Poggi, J. Stringara e G. Venturini

Quesito 1

Si consideri la rete idrica in figura composta da due serbatoi collegati in cascata caratterizzati dai volumi di invaso x_1 e x_2 e dalle costanti di deflusso $k_1 = 6$ e $k_2 = 1$. Il primo serbatoio è alimentato da una portata di ingresso u mentre sul secondo agisce un disturbo d.



Volendo fare in modo che la portata di uscita dal secondo serbatoio y sia più possibile prossima a una portata desiderata $\overline{w}$ occorre compensare l'effetto del disturbo d sull'uscita y supponendo che la variabile di ingresso u segua la legge:

$$u = \overline{w} - \alpha(y - \overline{w}) \qquad \alpha > 0$$

Punto a:

In primo luogo scriviamo le equazioni del sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u - k_1 x_1 \\ \dot{x}_2 &= k_1 x_1 - k_2 x_2 + d \\ y &= k_2 x_2 \end{aligned}$$

Ora consideriamo il nuovo ingresso $u = \overline{w} - \alpha(y - \overline{w})$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (1+\alpha)\overline{w} - \alpha k_2 x_2 - k_1 x_1 \\ \dot{x}_2 &= k_1 x_1 - k_2 x_2 + d \\ y &= k_2 x_2 \end{aligned}$$

Punto b:

Ciò significa che la matrice A sarà:

$$A = \begin{bmatrix} -k_1 & -\alpha k_2 \\ k_1 & -k_2 \end{bmatrix}$$

Per capirne la stabilità usiamo il criterio di traccia e determinante:

$$\begin{cases} tr(A) = -k_1 - k_2 < 0 \longrightarrow \text{ che è vero } \forall \alpha \\ \det(A) = k_1 k_2 (1+\alpha) > 0 \longrightarrow \alpha > -1 \end{cases}$$

Dunque il sistema sarà sempre **Asintoticamente Stabile** poichè la traccia del problema ci dice che $\alpha > 0$ per ipotesi (e ciò include l'insieme $\alpha > -1$).
Ora supponendo d costante all'equilibrio avremo le equazioni:

$$\begin{aligned} 0 &= (1+\alpha)\overline{w} - \alpha k_2 x_2 - k_2 x_1 \\ 0 &= k_1 x_1 - k_2 x_2 + d \\ y &= k_2 x_2 \end{aligned}$$

Che se rilavorate ci danno:

$$\begin{aligned} \overline{x}_1 &= \frac{1}{k_1}\left(\overline{w} - \frac{\alpha d}{(1+\alpha)}\right) \\ \overline{x}_2 &= \frac{1}{k_2}\left(\overline{w} + \frac{d}{(1+\alpha)}\right) \\ \overline{y} &= \overline{w} + \frac{d}{(1+\alpha)} \end{aligned}$$

Ora scopriamo gli autovalori della matrice A scrivendoci il polinomio caratteristico usando traccia e determinante:

$$\lambda^2 - tr(A)\lambda + \det(A) = \lambda^2 + (k_1 + k_2)\lambda + k_1 k_2 (1+\alpha) \xrightarrow{k_1=6, k_2=1} \lambda^2 + 7\lambda + 6(1+\alpha)$$

Che ci dà i valori:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{25 - 24\alpha}}{2}$$

Dunque:

$$\begin{aligned} &\text{Se } \alpha \geqslant \frac{25}{24} \quad \Re(\lambda_{1,2}) = -\frac{7}{2} \\ &\text{In caso contrario } -\frac{7}{2} < \Re(\lambda_D) < -1 \end{aligned}$$

Dandoci il seguente grafico per il tempo di risposta T_R del sistema:

Punto c:

Dati $\overline{w} = 10, \alpha = 2$ e:

$$d = \begin{cases} 3 \text{ per } 0 \leqslant t \leqslant 5 \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

Avremo le seguenti situazioni:

$\boxed{0 \leqslant t \leqslant 5}$

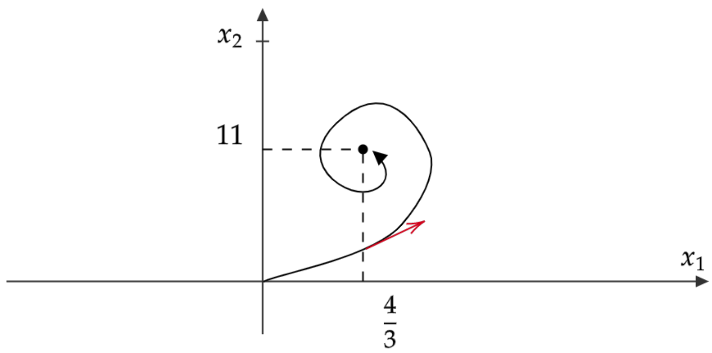
Ora nel caso $0 \leqslant t \leqslant 5$ le equazioni di equilibrio diventano:

$$\begin{aligned} \overline{x}_1 &= \frac{1}{k_1}\left(\overline{w} - \frac{\alpha d}{(1+\alpha)}\right) \longrightarrow \frac{1}{6}\left(10 - \frac{2 \cdot 3}{1+2}\right) = \frac{4}{3} \\ \overline{x}_2 &= \frac{1}{k_2}\left(\overline{w} + \frac{d}{(1+\alpha)}\right) \longrightarrow \frac{1}{1}\left(10 + \frac{3}{1+2}\right) = 11 \end{aligned}$$

Ora poichè siamo nel caso di autovalori complessi il sistema sarà asintoticamente stabile e convergerà all'equilibrio come ad un **Fuoco Stabile** dunque seguirà una spirale verso l'equilibrio $\left(\frac{4}{3}, 11\right)$, cerchiamo ora il verso di questa spirale:

$$x_1 = \frac{4}{3} \implies \begin{cases} \dot{x}_1 = 22 - 2x_2 \\ \dot{x}_2 = 11 - x_2 \end{cases} \quad \text{che per } x_2 < 11 \text{ ci danno:} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 > 0 \\ \dot{x}_2 > 0 \end{cases}$$

Dunque il senso della spirale sarà **anti-orario** e il grafico sarà circa il seguente:



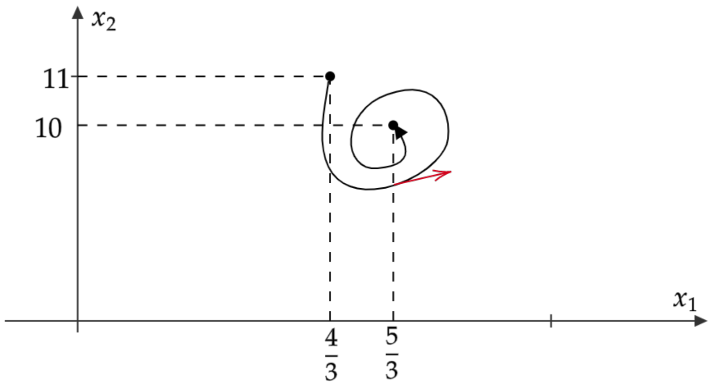
Inoltre notiamo che quest'equilibrio verrà raggiunto già in questo intervallo poichè $T_R < 5$.

$\boxed{t > 5}$

Similmente per $t > 5$ avremo un nuovo equilibrio:

$$\begin{aligned} \overline{x}_1 &= \frac{1}{k_1}\left(\overline{w} - \frac{\alpha d}{(1+\alpha)}\right) \longrightarrow \frac{1}{6}\left(10 - \frac{2 \cdot 0}{1+2}\right) = \frac{5}{3} \\ \overline{x}_2 &= \frac{1}{k_2}\left(\overline{w} + \frac{d}{(1+\alpha)}\right) \longrightarrow \frac{1}{1}\left(10 + \frac{0}{1+2}\right) = 10 \end{aligned}$$

Poichè gli autovalori rimangono invariati avremo un altro **Fuoco Stabile** che partendo da $\left(\frac{4}{3}, 11\right)$ si avvita su $\left(\frac{5}{3}, 10\right)$ e similmente a come abbiamo svolto per $0 \leqslant t \leqslant 5$ troviamo che la spirale ha sempre verso **anti-orario**, e quindi avrà circa questo andamento:



Quesito 2

Si consideri il seguente sistema non lineare a tempo continuo del second'ordine:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 3x_1 + 4x_2 - x_2^2 - 4 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 3\end{aligned}$$

Punto a:

Partiamo linearizzando il problema, per fare ciò scriviamoci la **matrice Jacobiana** del sistema:

$$J(x) = \begin{bmatrix} 3 & 4 - 2x_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ora cerchiamo i punti che annullano le derivate del sistema:

$$\begin{cases} 0 = 3x_1 + 4x_2 - x_2^2 - 4 \\ 0 = x_1 - 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_2 = 5 \lor x_2 = -1 \\ x_1 = 3 \end{cases}$$

Quindi abbiamo il punto $p_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ e il punto $p_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, ora valutiamo $J(x)$ in p_1 e p_2:

$$J(p_1) = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad J(p_2) = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

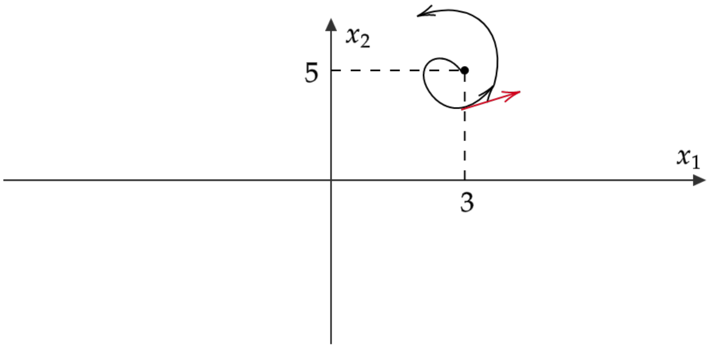
E usando traccia e determinante troviamo i seguenti polinomi caratteristici:

$$\begin{aligned} J(p_1) &\longrightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 6 \longrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 24}}{2} \longrightarrow \lambda_{1,2} \in \mathbb{C} \text{ e } \Re(\lambda_{1,2}) = \frac{3}{2} \\ J(p_2) &\longrightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 6 \longrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 24}}{2} \longrightarrow \lambda_{1,2} \in \mathbb{R} \text{ e } \lambda_1 < 0 \text{ e } \lambda_2 > 0 \end{aligned}$$

Perciò in p_1 avremo una situazione di **Fuoco Instabile** e in p_2 una **Sella**.

Punto b:

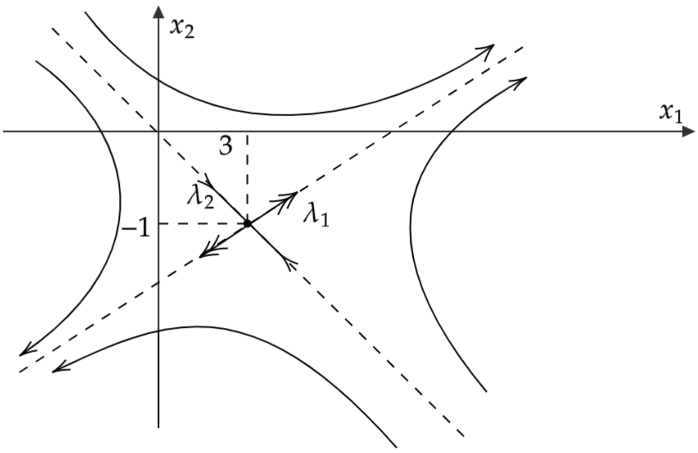
Come abbiamo accennato sopra il punto p_1 è un **Fuoco Instabile**, come svolto nel quesito 2 per valutarne il verso studiamo la derivata in un suo intorno e troviamo un grafico simile:



Per il punto p_2 invece abbiamo una situazione di **Sella**, per capire il verso delle derivate cerchiamo gli autovettori della matrice Jacobiana in p_2:

$$\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{33}}{2} \longrightarrow J(p_2)w = \lambda_1 w \longrightarrow w_2 = \frac{2}{3+\sqrt{33}} w_1$$
$$\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{33}}{2} \longrightarrow J(p_2)w = \lambda_2 w \longrightarrow w_2 = \frac{2}{3-\sqrt{33}} w_1$$

Che quindi ci danno il seguente grafico approssimativo:

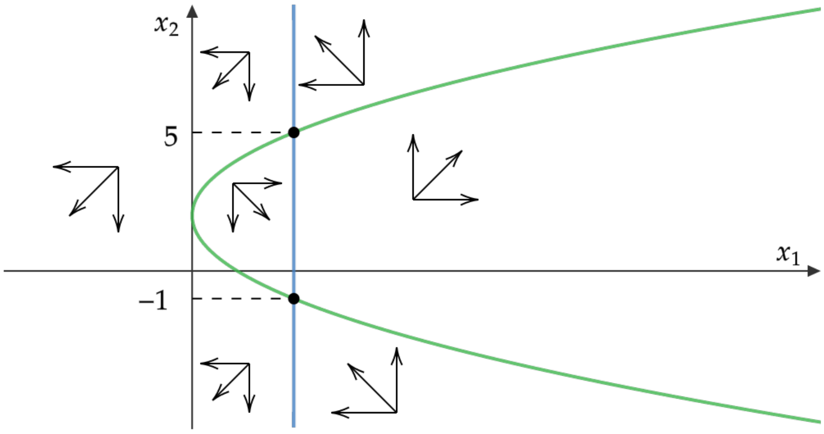


Punto c:

Per studiare la direzione del vettore tangente alle traiettorie dobbiamo prima scrivere le isocline. Notiamo che:

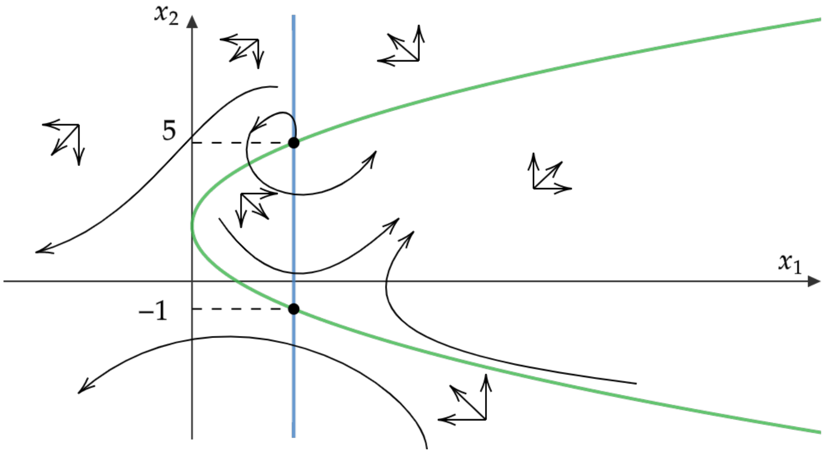
$$\dot{x}_2 > 0 \implies x_1 > 3 \text{ e } \dot{x}_1 > 0 \implies x_1 > \frac{1}{3}(x_2^2 - 4x_2 + 4)$$

Che ci porta a scrivere il seguente grafico:



Punto d:

Per disegnare l'ultimo grafico non ci resta che unire tutto insieme:



Quesito 3

Si consideri il seguente sistema lineare a tempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2x_1 - 6x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 + u \\ y &= x_2 \end{aligned}$$

Punto a:

In primis scriviamoci le variabili di sistema

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad d = 0$$

Per studiare la stabilità analizziamo la matrice A. Notiamo subito che $tr(A) = 1 > 0$ e $\det(A) = 4 > 0$ dunque per il criterio di traccia e determinante il sistema è **Instabile**. Per capire invece se ammetta o meno un **Regolatore Asintotico** studiamo la sua matrice di osservabilità e di raggiungibilità:

$$O = \begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Che hanno entrambe determinante diverso da zero, il sistema è **Completamente Osservabile** e **Completamente Raggiungibile**, perciò ammetterà un **Regolatore Lineare** e si potranno scegliere a piacere gli autovalori del sistema regolato.

Punto b:

Poichè il tempo di risposta T_R cercato è 5 ciò ci dice che il tempo dominante del sistema dovrà essere 1 e che dunque poichè $T_D = -\frac{1}{\Re(\lambda_D)}$ che $\Re(\lambda_D) = -1$. Per comodità scegliamo **tutti** gli autovalori di $A + bk$ uguali a -1. Inoltre poichè l'errore di stima dello stato deve tendere a 0 in 1 unità di tempo l'autovalore dominante di $A + lc$ dovà invece essere -5, come sopra scegliamo anche l'altro autovalore uguale a -5. Si noti che dato che gli autovalori del sistema regolato sono l'unione di quelli di $A + bk$ e di $A + lc$ la scelta appena operata non va ad influenzare il tempo di risposta del sistema regolato.
Ora cerchiamo i valori di l e k tali da rendere questa condizione veritiera. Partiamo da k:

$$A + bk = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 1 + k_1 & -1 + k_2 \end{bmatrix}$$

Tramite traccia e determinante ci costruiamo questo sistema:

$$\begin{cases} 1 + k_2 = -2 \\ 2(-1 + k_2) + 6(1 + k_1) = 1 \end{cases} \longrightarrow k = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -3 \end{bmatrix}$$

Svolgiamo lo stesso per O:

$$A + bk = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -6 + l_1 \\ 1 & -1 + l_2 \end{bmatrix}$$

Come sopra ricaviamo:

$$\begin{cases} 1 + l_2 = -10 \\ 2(-1 + l_2) - (-6 + l_1) = 25 \end{cases} \longrightarrow l = \begin{bmatrix} -43 \\ -11 \end{bmatrix}$$

Punto c:

Aggiungere una retroazione statica significa sostituire sostituire ad u un certo αy con $\alpha \in \mathbb{R}$, e dunque il sistema diventa:

$$\dot{x}_1 = 2x_1 - 6x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2 + \alpha x_2$$

E dunque la matrice A diventa:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -1 + \alpha \end{bmatrix}$$

Che tramite i criteri di traccia e determinante dà il sistema:

$$\begin{cases} 1 + \alpha < 0 \\ 4 + 2\alpha > 0 \end{cases} \longrightarrow \boxed{-2 < \alpha < -1}$$

Dunque è effetivamente possibile stabilizzare il sistema tramite una retroazione statica.

Quesito 4

Domanda a:

Un sistema lineare non completamente raggiungibile è stabilizzabile

[1] se e solo se la sua parte raggiungibile è instabile.
[2] se e solo se la sua parte non raggiungibile è instabile.
[3] se e solo se la sua parte raggiungibile è asintoticamente stabile.
[4] se e solo se la sua parte non raggiungibile è asintoticamente stabile.

Domanda b:

Per un sistema lineare gli stati non osservabili

[1] sono gli stati non visitabili dal sistema partendo da condizione iniziale nulla
[2] sono gli stati visitabili dal sistema partendo da condizione iniziale nulla.
[3] sono gli stati distinguibili dallo stato nullo.
[4] sono gli stati indistinguibili dallo stato nullo.

Domanda c:

Un sistema lineare a tempo discreto caratterizzato da 3 variabili di stato ha funzione di trasferimento

$$G(z) = \frac{z+2}{4z^2+1}$$

Si può affermare che

[1] non è né esternamente né asintoticamente stabile.
[2]è sia esternamente che asintoticamente stabile.
[3] è esternamente stabile ma nulla si può dire sulla asintotica stabilità.
[4] nessuna delle precedenti

Domanda d:

La matrice Jacobiana valutata nell'equilibrio di un sistema non lineare a tempo discreto di ordine 3 ha autovalori

$$\lambda_1 = -0.5,\ \lambda_2 = 0\ e\ \lambda_3 = 0.5$$

Per il sistema non lineare

[1] l'equilibrio è instabile.
[2] l'equilibrio è asintoticamente stabile.
[3] l'equilibrio è stabile ma non asintoticamente stabile.
[4] non si può affermare nulla circa la stabilità dell'equilibrio.

Quesito 5

Domanda a:

Per un sistema non lineare $\dot{x}(t) = f(x(t))$ un certo equilibrio $\overline{x}$ si dirà:

- **Stabile**, se:

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall x(0) : \; ||x(0) - \overline{x}|| < \delta \implies ||x(t) - \overline{x}|| < \epsilon \; \forall t$$

- **Asintoticamente Stabile**, se oltre ad essere **Stabile**:

$$x(t) \overset{t \to \infty}{\longrightarrow} \overline{x} \quad \forall x(0) \in I_{\overline{x},\delta} \text{ (Bolla di centro } \overline{x} \text{ e raggio } \delta)$$

Dato un equilibrio **Asintoticamente Stabile** $\overline{x}$ chiameremo bacino di attrazione di $\overline{x}$:

$$B(\overline{x}) = \left\{ x(0) \text{ tale che } x(t) \overset{t \to \infty}{\longrightarrow} \overline{x} \right\}$$

Domanda b:

Un sistema si dice **Rivelabile** se e solo se ammette un ricostruttore asintotico dello stato e ciò è vero se è **Completamente Osservabile** o la sua parte **Non-Osservabile** è asintoticamente stabile. Ora poichè gli autovalori di A sono l'unione degli Autovalori della parte osservabile e non-osservabile, se gli autovalori di A sono tutti instabili allora essa non sarà **Rivelabile**.

Data la matrice a tempo discreto:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Questa ha autovalori:

$$\lambda_1 = 2 \text{ e } \lambda_2 = 3$$

Dunque questo sistema deve per forza essere **Non-Rivelabile**.

Domanda c:

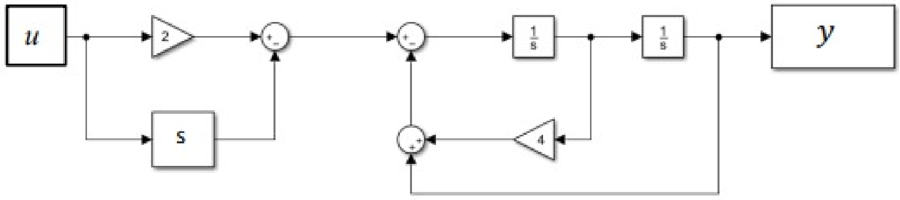
A un sistema lineare a tempo discreto esternamente stabile viene applicato un ingresso u(t) che in ogni istante di tempo è estratto casualmente nell'intervallo $[-1, +1]$. Duque è sicuramente vero che:

[1] L'uscita del sistema è limitata per ogni $x(0)$.
[2] L'uscita del sistema è limitata se $x(0) = 0$
[3] L'uscita del sistema tende a 0 per ogni $x(0)$
[4] L'uscita del sistema è illimitata per qualche $x(0)$
[5] L'uscita del sistema è limitata se la sua parte osservabile è asintoticamente stabile

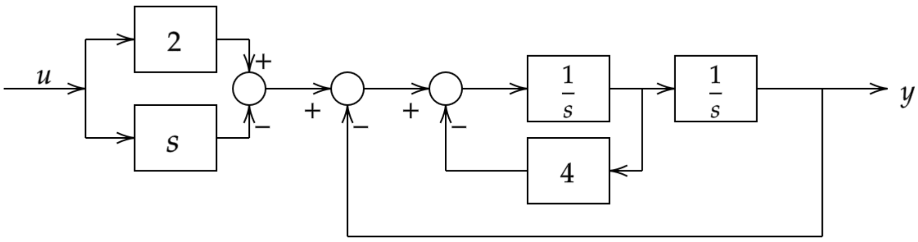
La [2] è vera poichè se la matrice è **Esternamente Stabile** e $x(0) = 0$ allora l'uscita forzata $y_F \equiv y$ e dunque poichè y_F è limitata allora lo è anche y

Domanda d:

Dato il sitema:



Notiamo subito che esso è equivalente a:



Che è equivalente a scrivere:

$$(2\|s)\cdot\left(\left(\left(\frac{1}{s}\circlearrowleft 4\right)\cdot\frac{1}{s}\right)\circlearrowleft\right)$$

Che se svolto propriamente ci dà:

$$G(s)=\frac{2-s}{s^2+4s+1}$$

Luca Maci
Luca Paparo
Marco Poggi
Jacopo Stringara
Giulio Venturini