Risoluzione Esercizi di Simulazione

Luca Maci e Jacopo Stringara

Quesito 1

I sottoscrittori di polizze RC auto "bonus/malus" stipulate da una compagnia di assicurazione sono suddivisi in quattro categorie (1, 2, 3 e 4). Ad ogni rinnovo annuale, un cliente che non abbia causato sinistri passa nella categoria inferiore (resta nella 1 se già lo era), mentre un cliente che abbia causato sinistri aumenta di due livelli la propria categoria (resta nella 4 se già lo era, passa dalla 3 alla 4 se era inizialmente in categoria 3). Tutti i nuovi clienti sono comunque inquadrati nella categoria 4. E' noto che ogni anno il 10% dei clienti in ogni categoria causa un sinistro; inoltre, un ulteriore 10% disdetta la polizza per passare a un'altra compagnia.

Il premio assicurativo riscosso dalla compagnia è di 100€ per ogni cliente di categoria 1, di 200€ per ogni cliente di categoria 2, 300€ per ogni cliente di categoria 3 e 400€ per ogni cliente di categoria 4.

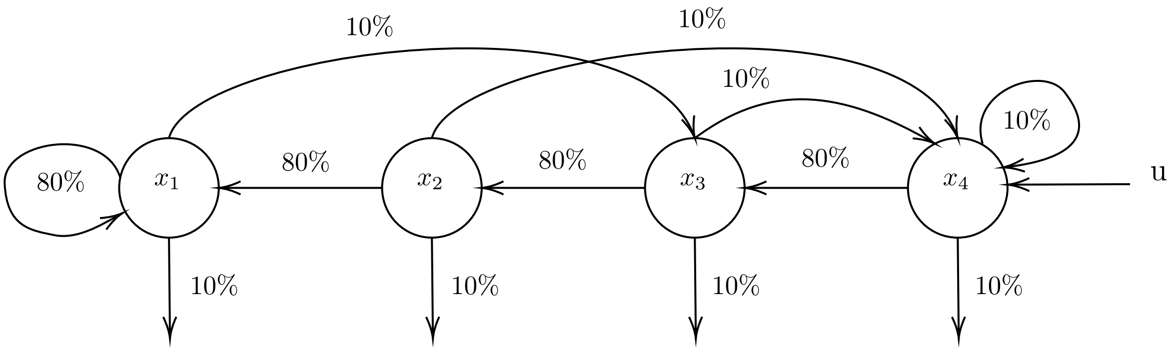
a) Descrivere il fenomeno in esame mediante un sistema dinamico nel quale l'uscita y rappresenti l'ammontare complessivo dei premi percepiti annualmente e l'ingresso u il numero di nuovi clienti. Specificare le matrici (A, b, c, d) che definiscono il sistema.

b) Studiare la stabilità del sistema determinandone, in caso di asintotica stabilità il tempo di risposta.

c) Supponendo ora che la compagnia voglia avere mediamente un numero di clienti di categoria 1 pari a 2000, quante nuove polizze dovranno essere emesse ogni anno? Quale sarà l'ammontare complessivo dei premi percepiti ogni anno dall'assicurazione?

Risposte:

a) Leggendo il testo del problema ci è facile disegnare il modello seguente:



Da questo modello deduciamo le seguenti equazioni alle differenze:

$$
\begin{aligned}
x_1(t+1) &= 0.8 \cdot x_1 + 0.8 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot u \\
x_2(t+1) &= 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0.8 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot u \\
x_3(t+1) &= 0.1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0.8 \cdot x_4 + 0 \cdot u \\
x_4(t+1) &= 0 \cdot x_1 + 0.1 \cdot x_2 + 0.1 \cdot x_3 + 0.1 \cdot x_4 + u
\end{aligned}
$$

Inoltre dal testo del problema deduciamo:

$$y = 100 \cdot x_1 + 200 \cdot x_2 + 300 \cdot x_3 + 400 \cdot x_4 + 0 \cdot u$$

Date tutte queste equazioni ci è facile dedurre che le variabili di sistema sono:

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0 & 0,8 \\ 0 & 0,1 & 0,1 & 0,1 \end{bmatrix}} \quad \boxed{b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{c = \begin{bmatrix} 100 & 200 & 300 & 400 \end{bmatrix}} \quad \boxed{d = 0}$$

b) Adesso dopo aver trovato la matrice A ne studiamo gli autovalori per determinare la stabilità/instabilità del sistema.

Per prima cosa notiamo che il sistema è positivo (a tempo discreto), infatti:

$$a_{ij} \geqslant 0 \quad \forall (i,j), b_i \geqslant 0 \quad \forall i, c_i \geqslant 0 \quad \forall i$$

Dunque per il Teorema sui sistemi lineari positivi a tempo discreto:

$$\exists \lambda_D \in \mathbb{R}, \quad \lambda_D \geqslant 0$$

e chiamiamo $\lambda_D = \lambda_F$ autovalore di Frobenius. Proprio per il teorema di Frobenius sappiamo che :

$$\max\{\min_i r_i^+, \min_i c_i^+\} \leqslant \lambda_F \leqslant \min\{\max_i r_i^+, \max_i c_i^+\}$$

Dove:

$$r_i^+ = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \text{ e } c_i^+ = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}$$

Ora poichè per questa matrice abbiamo $c_i^+ = 0,9 \ \forall i$ ne deduciamo che $\lambda_F \equiv 0,9$, dunque per il criterio sugli autovalori per sistemi a tempo discreto poichè $|0,9| \leqslant 1$ il sistema è **Asintoticamente Stabile**

E avremo che: $T_R = 5 \cdot T_D = 5 \cdot -\frac{1}{\ln(|\lambda_D|)} \approx 47.4561\ldots$

c) Dato $\overline{x}_1 = 2000$ all'equilibrio ne deduciamo le seguenti equazioni:

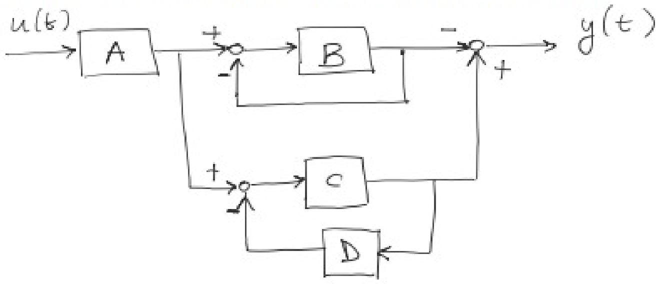
$$\begin{aligned}
\overline{x}_1 &= 0.8 \cdot \overline{x}_1 + 0.8 \cdot \overline{x}_2 + 0 \cdot \overline{x}_3 + 0 \cdot \overline{x}_4 \longrightarrow \overline{x}_2 = 500 \\
\overline{x}_2 &= 0 \cdot \overline{x}_1 + 0 \cdot \overline{x}_2 + 0.8 \cdot \overline{x}_3 + 0 \cdot \overline{x}_4 \longrightarrow \overline{x}_3 = 625 \\
\overline{x}_3 &= 0.1 \cdot \overline{x}_1 + 0 \cdot \overline{x}_2 + 0 \cdot \overline{x}_3 + 0.8 \cdot \overline{x}_4 \longrightarrow \overline{x}_4 = 531,25 \\
\overline{x}_4 &= 0 \cdot \overline{x}_1 + 0.1 \cdot \overline{x}_2 + 0.1 \cdot \overline{x}_3 + 0.1 \cdot \overline{x}_4 + \overline{u} \longrightarrow \overline{u} = 365.625
\end{aligned}$$

Dove $\overline{u}$ è il numero di nuove polizze da emettere ogni anno. Infine poichè conosciamo $\overline{x} = [2000 \quad 500 \quad 625 \quad 531,25]^T$ possiamo calcolarci $\overline{y}$ come:

$$\overline{y} = c \cdot \overline{x} = [100 \quad 200 \quad 300 \quad 400] \cdot [2000 \quad 500 \quad 625 \quad 531,25]^T = 700000$$

Quesito 2

Si consideri il sistema a tempo continuo rappresentato in figura



Il blocco A è caratterizzato dalla matrice di stato $A_A = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$, il blocco B è descritto dal modello ingresso/uscita $\dddot{y}_B + 3\ddot{y}_B + 3\dot{y}_B = u_B$, il blocco C è descritto dalla funzione di trasferimento $G_C(s) = \frac{\alpha}{s+\beta}$, mentre il blocco D è un integratore.

a) Determinare per quali valori di α e β il sistema in figura risulta asintoticamente stabile.
b) Scelta una qualunque coppia (α, β) che rende il sistema asintoticamente stabile, determinarne tutte le costanti di tempo, il tempo di risposta e la presenza di eventuali oscillazioni nel movimento.
c) Come cambierebbe la stabilità del sistema se il blocco B fosse descritto dal modello $\dddot{y}_B + 3\ddot{y}_B + 3\dot{y}_B = 10u_B$?

Risposte:

a) Notiamo che questo sistema non è altro che il sistema A in serie al parallelo di due retroazioni negative ($\ominus$). Dunque per scoprire la stabilità del sistema dobbiamo provare che i sistemi A, $B \ominus 1$, $C \ominus D$ sono tutti stabili.

- Partiamo da A. Ora, il problema ci dice che:

$$A_A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Notiamo che la matrice A_A è triangolare alta a blocchi con:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } A_2 = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Poichè A_2 stessa è triangolare alta è immediato vedere che $\lambda_1 = -5$ e $\lambda_2 = -2$. Per A_1 invece risolviamo il polinomio caratteristico:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 \longrightarrow \lambda_{1,2} = -1 \pm i$$

Quindi gli autovalori della matrice A_A sono $\{\lambda\}_A = \{-5, -2, -1+i, -1-i\}$ e poichè $\Re(\lambda_i) \leqslant 0 \quad \forall i$ il sistema è **Asintoticamente Stabile**

- Passiamo ora al sistema $B \ominus 1$, il problema ci dice che:

$$\dddot{y}_B + 3\ddot{y}_B + 3\dot{y}_B = u_B \xrightarrow{\text{passando per il polinomio in s}} G_B(s) = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 3s}$$

Per le proprietà dei sistemi a retroazione negativa:

$$G_{(B\ominus 1)}(s) = \frac{G_B(s)}{1+G_B(s)} = \frac{1}{s^3+3s^2+3s} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{s^3+3s^2+3s}} =$$

$$= \frac{1}{\cancel{s^3+3s^2+3s}} \cdot \frac{\cancel{s^3+3s^2+3s}}{s^3+3s^2+3s+1} = \boxed{\frac{1}{s^3+3s^2+3s+1}}$$

Ora ci è facile vedere che il numeratore non è nient'altro che un cubo di binomio:

$$G_{(B\ominus 1)}(s) = \frac{1}{s^3+3s^2+3s+1} = \frac{1}{(s+1)^3}$$

Da ciò deduciamo che $\{\lambda\}_{(B\ominus 1)} = \{-1\}$ con molteplictà 3. Visto che $\Re(-1) < 0$ il sistema è **Asintoticamente stabile**.

- Infine analiziamo il sistema $C\ominus D$, il problema ci dice:

$$G_C(s) = \frac{\alpha}{s+\beta}$$

e che D è un intregatore ($\dot{y} = u$) ossia che:

$$G_D(s) = \frac{1}{s}$$

sempre per le proprietà della retroazione negativa:

$$G_{C\ominus D}(s) = \frac{G_C(s)}{1+G_C(s)\cdot G_D(s)} = \frac{\alpha}{s+\beta} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{s}\cdot\frac{\alpha}{s+\beta}}$$

$$= \frac{\alpha}{s+\beta} \cdot \frac{s^2+\beta}{s^2+\beta s+\alpha} = \frac{\alpha}{\cancel{s+\beta}} \cdot \frac{s\cancel{(s+\beta)}}{s^2+\beta s+\alpha}$$

$$= \boxed{\frac{\alpha s}{s^2+\beta s+\alpha}}$$

data questa funzione di trasferimento usiamo il criterio di traccia e determinante per sistemi lineari a tempo continuo, con $\det(A) = \alpha$ e $\operatorname{tr}(A) = -\beta$

$$\boxed{A.S.} \iff \begin{cases} \operatorname{tr}(A) < 0 \\ \det(A) > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -\beta < 0 = \beta > 0 \\ \alpha > 0 \end{cases}$$

Dunque poichè il sistema $S = A \cdot ((B\ominus 1) \parallel (C\ominus D))$ ha come autovalori l'unione di tutti gli autovalori dei sistemi che lo compongono e poichè ognuno di questi sistemi (premesso che $\alpha > 0$ e $\beta > 0$) è **Asintoticamente stabile** allora anche S lo è.

b) Poichè ci vengono chieste le costanti di tempo e queste sono legate agli autovalori dalla relazione $T_i = -\frac{1}{\Re(\lambda_i)}$ dobbiamo calcolarci questi ultimi. Come detto al punto a):

$$\{\lambda\}_S = \{\lambda\}_A \cup \{\lambda\}_{B\ominus 1} \cup \{\lambda\}_{C\ominus D}$$

Ora, conosciamo già gli autovalori di A ($\{-5, -2, -1+i, -1-i\}$) e di $C\ominus D$ ($\{-1\}$), ci restano quindi da determinare gli autovalori di $B\ominus 1$, scegliamo $\alpha = 1$ e $\beta = 2$, se operiamo questa scelta:

$$G_{B\ominus 1} = \frac{s}{s^2+2s+1} = \frac{s}{(s+1)^2} \implies \lambda_{1,2} = -1 \text{ con molteplicità doppia}$$

Dunque gli autovalori saranno $\{\lambda\}_S = \{-1+i, -1-i, -1, -5, -2\}$ e i tempi di risposta saranno quindi $\{T\}_S = \{\frac{1}{5}, \frac{1}{2}, 1\}$, notiamo che il tempo di risposta $T = 1$ è associato a più sottosistemi (e più autovalori) ed è anche la costante di tempo dominante $T_D = 1$, da cio deduciamo che:

$$T_R = 5 \cdot T_D = 5$$

Inoltre poichè nel sistema sono presenti due autovalori complessi saranno anche **presenti delle oscillazioni**.

c) Se la funzione di trasferimento di B diventa $G_B(s) = \frac{10}{s^3+3s^2+3s}$ la funzione di trasferimento di $B \ominus 1$ diventa:

$$G_{B\ominus 1}(s) = \frac{10}{s^3+3s^2+3s} \cdot \frac{1}{1+\frac{10}{s^3+3s^2+3s}} = \frac{10}{\cancel{s^3+3s^2+3s}} \cdot \frac{\cancel{s^3+3s^2+3s}}{s^3+3s^2+3s+10}$$

Dunque data $G_{B\ominus 1}(s) = \frac{10}{s^3+3s^2+3s+10}$ utiliziamo il criterio di Hurwitz per matrici 3×3 con $\alpha_1 = 3, \alpha_2 = 3, \alpha_3 = 10$, infatti:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 3 > 0 \\ \alpha_2 = 3 > 0 \\ \alpha_3 = 10 > 0 \\ \alpha_1\alpha_2 > \alpha_3 = 9 > 10 \text{ che è falso} \end{cases}$$

Dunque possiamo affermare che non esistono autovalori con parte reale strettamente negativa (quindi il sistema non è **Asintoticamente Stabile**), dobbiamo provare che non esistono autovalori con $\Re(\lambda) = 0$ che soddisfano il polinomio caratteristico di $B\ominus 1$ cioè che il sistema non è nemmeno **Semplicemente Stabile**.

Ora, poichè $P(0)_A = 10 \neq 0$, l'autovalore che cerchiamo (se esiste) è della forma $\pm i\omega$ e:

$$\text{per } i\omega \text{ otteniamo } \longrightarrow -i\omega^3 - 3\omega^2 + 3i\omega + 10 = 0$$

Da cui otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} -\omega^3 + 3\omega = 0 \\ -3\omega^2 + 10 = 0 \end{cases}$$

Che non ha soluzione, dunque il sistema è **Instabile**.

Quesito 3

Risposte:

Domanda 1) risposta 3

Domanda 2) risposta 2

Domanda 3) risposta 2

Domanda 4) risposta 4

Domanda 5) risposta 3, la perdita di grado è dovuta al fatto che il sistema è proprio ($d = 0$).

Quesito 4

Discutere le proprietà di esistenza e unicità dell'equilibrio per un sistema lineare di ordine n a tempo continuo e a tempo discreto, classificando tutti i casi possibili.

Tempo continuo:

Esistenza e Unicità:

Se esiste l'equilibrio esiste allora $x(t) = \overline{x} \quad \forall t \implies \frac{dx}{dt} = \dot{x} = 0 \quad \forall t$ e $\dot{x} = Ax + bu \xrightarrow{\text{equilibrio}}$

$A\overline{x} + b\overline{u} = 0$ che ci da n equazioni in n incognite, dunque per il teorema di Rouchè-Capelli:

- $\exists A^{-1} \iff \det(A) \neq 0 \iff \nexists \lambda = 0 \iff \exists! \overline{x} = -A^{-1}b\overline{u}$

- $\nexists A^{-1} \iff \det(A) = 0 \iff \exists \lambda = 0 \iff$ fissato $\overline{u}$ allora: $\begin{cases} \nexists \overline{x} \\ \exists_{\infty} \overline{x} \end{cases}$

Classificazione Equilibri:

- $\Re(\lambda_i) < 0 \forall i \iff A.S.$
- $\exists j / \Re(\lambda_i) > 0 \implies$ I (forte o esponenziale)
- $\Re(\lambda_i) \leqslant 0 \forall i, \exists j : \Re(\lambda_i) = 0$
  1. $b_j = 1$ (λ_j è una radice semplice di ψ_A) $\iff$ S.S.
  2. $b_j > 1$ (λ_j è una radice multipla di ψ_A) $\iff$ I (debole o polinomiale)

Tempo discreto:

Esistenza e Unicità:
$\exists! \overline{x}$ tale che $x(t+1) = Ax(t) + bu(t)$ e $u(t9 = \overline{u}, \quad x(t) = \overline{x} \quad \forall t$ e $x(t+1) = x(t) = \overline{x}$ e il sistema $\overline{x} = A\overline{x} + b\overline{u}$ ci dà n equazioni in n incognite e se lo modifichiamo $(I - A)\overline{x} = b\overline{u}$, dunque sempre il teorema di Rouchè-Capelli:

- $\exists (I - A)^{-1} \iff \det(I - A) \neq 0 \iff$ A non ha autovalori in 1 $\iff \exists! \overline{x} = (I - A)^{-1} b\overline{u}$
- $\nexists (I - A)^{-1} \iff \det(I - A) = 0 \iff$ A ha almeno autovalore in 1 $\iff \begin{cases} \nexists \overline{x} \\ \exists_{\infty} \overline{x} \end{cases}$

Classificazione Equilibri:

- $|\lambda_i| < 1 \forall i \iff A.S.$
- $\exists j / |\lambda_i| > 1 \implies$ I (forte)
- $|\lambda_i| \leqslant 1 \forall i, \exists j : |\lambda_i| = 1$
  1. $b_j = 1 \quad \forall j / |\lambda_j| = 1$ (λ_j è una radice semplice di ψ_A) $\iff$ S.S.
  2. $b_j \neq 1$ (λ_j è una radice multipla di ψ_A) $\iff$ I (debole o polinomiale)