Formulario Meccanica

Definizioni

Vettore AB:

$$AB = A \longrightarrow B$$

Vincoli:

- **Olonomo:** vincolo in funzione solo delle coordinate.
- **Anolonomo:** vincolo anche in funzione delle derivate.
- **Unilatero:** vincolo con $\Phi > 0$
- **Bilatero:** vincolo con $\Phi \gtreqless 0$

Forze:

- **Attive:** Prescritte a priori da leggi
- **Reattive:** Reazione Vincolare, sconosciuta a priori
- **Interne**
- **Esterne**

Velocità

Atto di moto rigido:

$$\vec{v}(P) = \vec{v}(Q) + \vec{\omega} \wedge \vec{QP}$$

Invariante cinematico:

$$I = v(P) \cdot \omega$$

Legge di composizione delle velocità:

$$\vec{v}_{ass}(P) = \vec{v}_{rel}(P) + \vec{v}_{trasc} = \vec{v}_{rel} + \vec{v}(Q) + \vec{\omega} \wedge \vec{QP}$$

Forze

Risultante:

$$\vec{R} = \sum_i \vec{f_i}$$

Momento:

$$\vec{M}_A = \sum_i \vec{AP}_i \wedge \vec{f_i}$$

Legge cambiamento di polo:

$$\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{R} \wedge \vec{AB}$$

Invariante scalare:

$$I = \vec{M}_A \cdot \vec{R}$$

Reazione Vincolare per RSS:

$$\mu \cdot \Phi_N \geqslant \Phi_T \longrightarrow \mu \geqslant \frac{\Phi_T}{\Phi_N}$$

Statica

Equazioni Cardinali:

$$\vec{R}^{Est} = 0 \quad \vec{M}^{Est} = 0$$

Principio dei Lavori Virtuali (PLV): In un sistema con vincoli ideali:

$$\delta L^{att} = 0 \quad \forall \delta P$$

Principio di Stazionarietà del Potenziale (PSP)
Per forze attive conservative (es. elastica e gravitazionale):

$$\exists U(q_k) : Q_k = \frac{\partial U}{\partial q_k} = 0 \quad \forall q_k \iff \text{Equilibrio}$$

Dinamica

Centro di Massa:

$$x_G = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \frac{\int x\rho(x)dx}{\int \rho(x)dx}$$

Baricentro:

$$x(G) = \frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i} = \frac{\int_V \rho(x)xdV}{\int_V \rho(x)dV}$$

Momento d'Inerzia:

$$I_a = mR^2 = \sum_i m_i R_i^2 = \int_V \rho(P)R^2(P)dV$$

Per un corpo piano:

$$I_z = I_x + I_y \text{ e l'asse z è sempre il principale}$$

Teorema di Huygens:
Con $\bar{\mu}$ passante per il baricentro

$$I_\mu = I_{\bar{\mu}} + m\Delta^2$$

Quantità di Moto:

$$\underline{Q} = m\underline{v} = \sum_i m_i \underline{v}_i = \int_V \rho \underline{v} dV$$

Con G centro di Massa:

$$\underline{Q} = m \cdot \underline{v}(G)$$

Momento delle quantità di Moto:

$$\underline{K}_A = m\underline{v}(G) \wedge \underline{GA} = \sum_i \underline{AP}_i \wedge m_i \underline{v}_i = \int_V \underline{(AP)} \wedge \rho \underline{v} dV$$

Con G centro di massa:

$$K_A = m\vec{v}(G) \wedge GA \implies K_G \equiv 0$$

Con moto rotatorio, A è il C.I.R. :

$$K_A = I_A \cdot \omega$$

Legge del Cambiamento di Polo:

$$\underline{K}_B = \underline{K}_A + \underline{Q} \wedge \underline{AB}$$

Moto rototraslatorio, Q polo qualunque, G centro di massa:

$$K_Q = I_G \cdot \omega + mv(G) \wedge GQ$$

Energia Cinetica:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\int_V \rho(P)v^2(P)dV = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_\omega\omega^2$$

Teorema di König:

$$T_{ass} = \frac{1}{2}mv^2 + T_{rel}$$

Energia Potenziale:

$$U = mgh - \frac{1}{2}ks^2$$

Equazioni cardinali della Dinamica:

$$\vec{R}^{Est} = \frac{dQ}{dt} = m \cdot a(G) \quad \vec{M}_A = \frac{d}{dt}\vec{K}_A + \dot{A} \wedge Q$$

Potenza delle forze per Corpo Rigido:

$$\Pi = \sum -i\vec{f}_i \cdot \vec{v}_i = \vec{R} \cdot \vec{v}(Q) + \vec{M}_Q \cdot \omega$$

Teorema dell'Energia Cinetica:

$$\frac{d}{dt}T = \Pi^{tutte}$$

Con vincoli ideali, bilateri e fissi:

$$\frac{d}{dt}T = \Pi^{attive}$$

Teorema di Conservazione dell'Energia Meccanica:
Con vincoli ideali, bilateri e fissi, forze conservative

$$E = T - U = costante(\text{serve spesso una c.l. in t=0 }) \iff \Delta T - \Delta U = 0$$

Teorema dell'Energia Cinetica per un Corpo Rigido:

$$\frac{d}{dt}T = \Pi^{Est}$$

Equazioni di Langrange:

$$L = T + U \longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

Momento Cinetico e Integrale del Moto:

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \text{ è detto momento cinetico}$$

Per Lagrange se:

$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$ è detto 'Interale del Moto' $\implies \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) = 0 \implies \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = costante$ (Utile se in quiete per mettere in co
$\frac{\partial L}{\partial q_k} = costante \implies \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) = costante$ (Utile per scoprire accelerazioni)

Forza e Potenziale Centrifughi:

$$F_C = m\omega^2 R \text{ e } U_C = \frac{1}{2}I \cdot \omega$$