Formule e Teoremi utili

Probabilità

Distribuzione della trasformata

Sia $f_X(x)$ e $y = g(x)$.

- Se g crescente: $F_Y(y) = F_X(g^{-1}(y))$
- Se g decrescente: $F_Y(y) = 1 - F_X(g^{-1}(y))$
- Se g^{-1} derivabile:
  $f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))|\dot{g}^{-1}(y)|$

Varianza

$Var[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$

Marginali, Congiunte e Condizionate

$$f_{x,y} = f_{x|y} f_y$$
$$f_x = \int f_{x,y} dy$$

Media e Varianza Condizionati

$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]]$
$Var[X] = \mathbb{E}[Var[X|Y]] + Var[\mathbb{E}[X|Y]]$

Legge Forte Grandi Numeri

Sia $X_1, \dots, X_n$ iid con μ, σ^2, allora:
$\bar{X}_n \xrightarrow{q.c.} \mu$

Teorema centrale del limite

Sia $X_1, \dots, X_n$ iid con μ, σ^2, allora:
$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow{L} N(0, \sigma^2)$

Metodo delta

Sia $X_1, \dots, X_n$ iid con μ, σ^2, tali che:
$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow{L} N(0, \sigma^2)$
Prendiamo una funzione $g(x)$ e un certo θ:

- Se $g'(\theta) \neq 0$:
  $\sqrt{n}(g(\bar{X}_n) - g(\mu)) \xrightarrow{L} N(0, \sigma^2 g'(\mu)^2)$
- Se Se $g'(\theta) = 0$:
  $\sqrt{n}(g(\bar{X}_n) - g(\mu)) \xrightarrow{L} \frac{\sigma^2}{2} g''(\mu)\chi^2(1)$

Statistiche sufficienti

Definizione

Una statistica T è sufficiente per θ se:
$f(\vec{x}|T = t) \perp\!\!\!\perp \theta \quad \forall t$

Teorema di Fattorizzazione

Data la congiunta $f(\vec{x}, \theta)$, $T(x)$ è suff se:
$f(\vec{x}, \theta) = h(\vec{x}) g(T(x), \theta)$
Questo vale anche per trasformazioni **biunivoche** di T

Famiglia Esponenziale

Se ho una distribuzione della FE:
$f(\vec{x}, \theta) = h(\vec{x}) c(\theta) \exp\left\{\sum_{i=1}^{k} w_i(\theta) t_i(x)\right\}$
Allora $T = (\sum_j t_1(X_j), \dots, \sum_j t_k(X_j))$ è sufficiente

Statistiche sufficienti e minimali

Definizione

Una statistica sufficiente T viene detta minimale se tutte le altre statistiche sufficienti sono funzioni di essa.

Lehmann-Scheffè sulla minimalità

Sia $f(\vec{x},\theta)$ e T stat suff. T è minimale se: $\frac{f(\vec{x},\theta)}{f(\vec{y},\theta)} = K$ con K costante in $\theta \iff T(x) = T(y)$

Statistiche complete

Definizione

Sia $T(x)$ una statistica e $f(t,\theta)$ la sua legge. Diciamo $T(x)$ completa se:

$$\mathbb{E}_\theta[g(T)] = 0\, \forall\theta \implies \mathbb{P}(g(T) = 0) = 1$$

Di solito usiamo la derivata rispetto a θ:

$$\frac{d}{d\theta}\mathbb{E}_\theta[g(T)] = 0$$
$$= h'(\theta)\overset{0}{\cancel{\mathbb{E}_\theta[g(T)]}} + h(\theta)g(t)f_T(t,\theta)\Big|_a^b$$

Teorema di Bahadur

Se T è una statistica sufficiente e completa $\implies$ minima

Famiglia Esponenziale

Sia:
$f(\vec{x},\theta) = h(\vec{x})c(\theta)\exp\left\{\sum_{i=1}^k w_i(\theta)t_i(x)\right\}$
Allora $T = (\sum_j t_1(X_j), \ldots, \sum_j t_k(X_j))$ è sufficiente ed è completa se il codominio di $w_1,\ldots,w_k : \Theta \to \mathbb{R}^k$ contiene un aperto di $\mathbb{R}^k$.

Stimatori Puntuali

Metodo dei Momenti

$$\begin{cases} m_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^n X_i = \mathbb{E}[X] \\ \vdots \\ m_k = \mathbb{E}[X^k] \end{cases}$$

I momenti saranno funzione di θ, risolvo il sistema lineare e trovo $\hat{\theta}_{Mom}$
Il risultato potrebbe non appartenere a Θ

Metodo della Verosomiglianza

Massimizzo la congiunta:

$$\hat{\theta}_{MLE} = \arg\sup_{\theta\in\Theta} L(\theta,\vec{x})$$

Con $L(\theta,\vec{x}) = f(\vec{x},\theta)$, dà sempre valori ammissibili. Di solito usiamo:
$\frac{\partial L(\theta,\vec{x})}{\partial\theta} = 0$

Proprietà

Invarianza
L'MLE per $\tau(\theta)$ è $\tau(\hat{\theta}_{MLE})$ per qualsiasi funzione τ

Scarto quadratico media

Definizione

$MSE[T] = \mathbb{E}_\theta[(T-\theta)^2]$

Bias

$Bias[T] = \mathbb{E}_\theta[T] - \theta$

Scomposizione

$MSE[t] = Var_\theta[T] + Bias[T]^2$

Stimatore non distorto

Uno stimatore T è non distorto se:

UMVUE

Definizione

Uno stimatore T è UMVUE se:

- è non distorto: $\mathbb{E}[T] = \theta$
- $Var[T] \leq Var[T^*] \quad \forall T^*$ non distorto

Inoltre l'UMVUE è **unico**.

Disuguaglianza di Cramer-Rao

Siano $f(\vec{x},\theta)$ legge congiunta e T stimatore che soddisfi:

- $\frac{d}{d\theta}\mathbb{E}_\theta[T(X)] = \int \frac{\partial}{\partial\theta}[T(x)f_X(x,\theta)]dx$
- $Var_\theta[T] < \infty$

Allora:

$$Var_\theta(T) \geq \frac{(\frac{d}{d\theta}\mathbb{E}_\theta[T(X)])^2}{\mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f_X(x,\theta)\right)^2\right]} = \frac{(\frac{d}{d\theta}\mathbb{E}_\theta[T(X)])^2}{I_n(\theta)}$$

Se alle ipotesi iniziali aggiungiamo:
$\frac{d}{d\theta}\mathbb{E}[\frac{\partial}{\partial\theta}f_X(x,\theta)] = \int \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}f_X(x,\theta)dx$ allora
$I_n = -\mathbb{E}[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f_X(x,\theta)]$

Informazione di Fisher

$I_n(\theta) = \mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f_X(x,\theta)\right)^2\right]$ Inoltre se iid:
$I_n = nI_1(\theta)$ Inoltre se viene rispettato

Lehmann-Scheffè per UMVUE

Siano T non distorto e W sufficiente e completa (e minima). Allora:
$M = \mathbb{E}_\theta[T|W]$ è UMVUE.
E analogamente per una funzione di θ

UMVUE per $\phi(\theta)$

Sia T sufficiente e completa e $\phi(T)$, allora $\phi(T)$ è UMVUE per $\mathbb{E}_\theta[\phi(T)]$

UMVUE per Famiglia Esponenziale

Se $X_1, \ldots, X_n \in EF$ e:
$f(\vec{x},\theta) = h(\vec{x})c(\theta)\exp\{w_1(\theta)t_1(x)\}$ Tale che $\exists \frac{d}{d\theta}w(\theta) \neq 0$ e continua $\forall\theta$. Allora:
$T(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_1(X_j)$ è UMVUE per $\mathbb{E}_\theta[T_1(X)]$
E **raggiunge il limite di C-R** che vale:
$Var(T) = \frac{Var(T_1)}{n}$

Test d'Ipotesi

Regione Critica

$R = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^k | \text{ rifiuto } H_0\right\}$
Di solito si basa su una statistica.

Rapporto di Verosimiglianza

$R = \{\vec{x}|\lambda(x) \leq c\}$ con $c \in [0,1]$

$$\lambda(x) = \frac{\sup_{\Theta_0} L(\theta,x)}{\sup_{\Theta} L(\theta,x)}$$

Funzione potenza

$\beta(\theta) = \mathbb{P}_\theta(x \in R)$

Dimensione

$\alpha = sup_{\Theta_0}\beta(\theta)$

Livello

$\alpha \geq sup_{\Theta_0}\beta(\theta)$

UMP

Un test di una classe C è UMP se:
$\beta(\theta) \geq \beta'(\theta) \quad \forall\theta \in \Theta_0^c \quad \forall\beta' \in C$

Lemma di Neymann-Perason

Sia $H_0 : \theta = \theta_0 \quad H_1 : \theta = \theta_1$ Allora se uso:

1. $R = \{x|f(x,\theta_1) > kf(x,\theta_0)\}$, $k \geq 0$
2. $\alpha = \mathbb{P}_{\theta_0}(x \in R)$

Allora:

a Qualsiasi test che soddisfi queste due è UMP di livello α.

b Se esiste un test UMP del punto a con $k \geq 0$ allora:
Ogni UMP di livello α è anche di dimensione α e soddisfa la 1 tranne che per un insieme di misura nulla.

Nota: questo si applica anche per le distribuzioni, basta usare:
$R = \{x|f_1(x,\theta) > kf_0(x,\theta)\}$

Monotone Likelihood Ratio

Sia una famiglia di leggi $g(x,\theta) \quad \theta \in \Theta$, la diciamo LRT se per $\theta_2 > \theta_1$
$\frac{g(t,\theta_2)}{g(t,\theta_1)}$ è monotona in t (non-crescente o non-decrescente)

Teorema di Karlin-Rubin

Sia $H_0 : \theta \leq \theta_0 \quad H_1 : \theta > \theta_1$, T statistica sufficiente con MLR non-decrescente. Allora:
$\forall t_0$ il test con $R = \{T > t_0\}$ è UMP di livello $\alpha = \mathbb{P}_{\theta_0}(T > t_0)$

Estensione di Karlin-Rubin

- $H_0 : \theta \leq \theta_0 \quad H_1 : \theta > \theta_1$
  - **Non-decrescente:** $R = \{T > t_0\}$
  - **Non-crescente:** $R = \{-T > t_0\}$
- $H_0 : \theta \geq \theta_0 \quad H_1 : \theta < \theta_1$
  - **Non-decrescente:** $R = \{T < t_0\}$
  - **Non-crescente:** $R = \{-T < t_0\}$

Stime intervallari

Definzione

E' una coppia di statistiche $L(x), U(X)$ con $L(X) \leq U(X)$

Probabilità di copertura

$\mathbb{P}_\theta(\theta \in [L; U])$

Livello di Confidenza

$\alpha = \inf_\Theta \mathbb{P}_\theta(\theta \in [L; U])$

Metodi di Costruzione

Inversione di test d'ipotesi

Sia $\forall \theta_0 \in \Theta$ sia $A(\theta_0) = R^C$ la regione d'accettazione di un test semplice di livello α.
Definiamo: $IC(X) = \{\theta | x \in A(\theta)\}$

Metodo della quantità pivotale

Definiamo una v.a. una quantità pivot $Q(x, \theta)$ se la sua distribuzione non dipende da θ. Cerchiamo a e b tali che:
$\mathbb{P}(a \leq Q \leq b) = 1 - \alpha$ e $C = \{\theta | a \leq Q \leq b\}$

Unimodalità

Una v.a. $X, f_X(x)$ è unimodale se $\exists x*$ tale che:
$f_X(x)$ è crescente se $x \leq x*$ e decrescente se $x \geq x*$ cioè è fatta come una gaussiana.

Teorema lunghezza minima

Sia f_X unimodale, se lintervallo $[a, b]$ soddisfa:

- $\mathbb{P}(a \leq x \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx = 1 - \alpha$
- $f_X(a) = f_X(b) \geq 0$
- $a \leq x* \leq b$ con $x*$ moda

Allora $[a, b]$ è l'intervallo minimo tra quelli che soddisfano la 1.
Quindi:

- Se IC dipende direttamente da $(b - a)$ applico.
- In caso negativo minimizzo come segue:
  1. Penso a b come funzione di a, $b = b(a)$
  2. Derivo il vincolo:
     $f(b(a))b'(a) - f(a) = 0$ e trovo $b'(a)$
  3. Derivo la lunghezza rispetto ad a e sostituisco b'
  4. Trovo se minimizzare o massimizzare a, scelgo b di conseguenza e sostituisco nel vincolo per ottenere a, fai attenzione al codominio di Q.

Statistica Asintotica

Consistenza

Diremo una succesione di stimatori W_n consistente per θ se:
$\forall \epsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[|W_n - \theta| > \epsilon] = 1$
Nota:
Se $W_n \xrightarrow{L} \theta$ e θ costante $\implies W_n \xrightarrow{P} \theta$

Consistenza in MSE

Se $MSE[W_n] \to 0$, cioè:
$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[W_n] = \theta$
$\lim_{n\to\infty} Var[W_n] = 0$

Efficienza asintotica MLE

Sia $\hat{\theta}_{MLE}$ e f_X soddisfa Cramer-Rao:
$\sqrt{n}[\tau(\hat{\theta}_{MLE}) - \tau(\theta)] \xrightarrow{L} N(0, v(\theta))$
con $v(\theta) = \frac{[\tau'(\theta)]^2}{I_1(\theta)}$

Efficienza Relativa Asintotica

Due successioni di stimatori:
$\sqrt{n}[W_n - \tau(\theta)] \xrightarrow{L} N(0, \sigma_W^2)$
$\sqrt{n}[V_n - \tau(\theta)] \xrightarrow{L} N(0, \sigma_V^2)$
Allora definiamo l'ARE come:
$ARE(V_n, W_n) = \frac{\sigma_W^2}{\sigma_V^2}$, cerchiamo il più piccolo.