

Formule e Teoremi utili

Probabilità

Distribuzione della trasformata

Sia $f_X(x)$ e $y = g(x)$.

- Se g crescente: $F_Y(y) = F_X(g^{-1}(y))$
- Se g decrescente: $F_Y(y) = 1 - F_X(g^{-1}(y))$
- Se g^{-1} derivabile:
 $f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))|g^{-1}(y)|$

Varianza

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

Marginali, Congiunte e Condizionate

$$\begin{aligned} f_{x,y} &= f_{x|y}f_y \\ f_x &= \int f_{x,y}dy \end{aligned}$$

Media e Varianza Condizionati

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]] \\ \text{Var}[X] &= \mathbb{E}[\text{Var}[X|Y]] + \text{Var}[\mathbb{E}[X|Y]] \end{aligned}$$

Legge Forte Grandi Numeri

Sia X_1, \dots, X_n iid con μ, σ^2 , allora:
 $\bar{X}_n \xrightarrow{q.c.} \mu$

Teorema centrale del limite

Sia X_1, \dots, X_n iid con μ, σ^2 , allora:
 $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow{L} N(0, \sigma^2)$

Metodo delta

Sia X_1, \dots, X_n iid con μ, σ^2 , tali che:

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow{L} N(0, \sigma^2)$$

Prendiamo una funzione $g(x)$ e un certo θ :

- Se $g'(\theta) \neq 0$:
 $\sqrt{n}(g(\bar{X}_n) - g(\mu)) \xrightarrow{L} N(0, \sigma^2 g'(\mu)^2)$
- Se $g'(\theta) = 0$:
 $\sqrt{n}(g(\bar{X}_n) - g(\mu)) \xrightarrow{L} \frac{\sigma^2}{2} g''(\mu) \chi^2(1)$

Statistiche sufficienti

Definizione

Una statistica T è sufficiente per θ se:
 $f(\vec{x}|T=t) \propto \theta \quad \forall t$

Teorema di Fattorizzazione

Data la congiunta $f(\vec{x}, \theta)$, $T(x)$ è suff se:

$$f(\vec{x}, \theta) = h(\vec{x})g(T(x), \theta)$$

Questo vale anche per trasformazioni biunivoche di T

Famiglia Esponenziale

Se ho una distribuzione della FE:

$$f(\vec{x}, \theta) = h(\vec{x})c(\theta) \exp \left\{ \sum_{i=1}^k w_i(\theta)t_i(x) \right\}$$

Allora $T = (\sum_j t_1(X_j), \dots, \sum_j t_k(X_j))$ è sufficiente

Statistiche sufficienti e minimali

Definizione

Una statistica sufficiente T viene detta minimale se tutte le altre statistiche sufficienti sono funzioni di essa.

Lehmann-Scheffè sulla minimalità

Sia $f(\vec{x}, \theta)$ e T stat suff. T è minimale se:

$$\frac{f(\vec{x}, \theta)}{f(\vec{y}, \theta)} = K \text{ con } K \text{ costante} \iff T(x) = T(y)$$

Statistiche complete

Definizione

Sia $T(x)$ una statistica e $f(t, \theta)$ la sua legge. Diciamo $T(x)$ completa se:

$$\mathbb{E}_\theta[g(T)] = 0 \forall \theta \implies \mathbb{P}(g(T) = 0) = 1$$

Di solito usiamo la derivata rispetto a θ :

$$\frac{d}{d\theta} \mathbb{E}_\theta[g(T)] = 0 \\ = h'(\theta) \mathbb{E}_\theta[g(T)] + h(\theta) g(t) f_T(t, \theta) \Big|_a^b$$

Teorema di Bahadur

Se T è una statistica sufficiente e completa \implies minima

Famiglia Esponenziale

Sia:

$$f(\vec{x}, \theta) = h(\vec{x}) c(\theta) \exp \left\{ \sum_{i=1}^k w_i(\theta) t_i(x) \right\}$$

Allora $T = (\sum_j t_1(X_j), \dots, \sum_j t_k(X_j))$ è sufficiente ed è completa se il codominio di $w_1, \dots, w_k : \Theta \rightarrow \mathbb{R}^k$ contiene un aperto di \mathbb{R}^k .

Stimatori Puntuali

Metodo dei Momenti

$$\begin{cases} m_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \mathbb{E}[X] \\ \vdots \\ m_k = \mathbb{E}[X^k] \end{cases}$$

I momenti saranno funzione di θ , risolvo il sistema lineare e trovo $\hat{\theta}_{Mom}$

Il risultato potrebbe non appartenere a Θ

Metodo della Verosomiglianza

Massimizzo la congiunta:

$$\hat{\theta}_{MLE} = \arg \sup_{\theta \in \Theta} L(\theta, \vec{x})$$

Con $L(\theta, \vec{x}) = f(\vec{x}, \theta)$, dà sempre valori ammissibili. Di solito usiamo:

$$\frac{\partial L(\theta, \vec{x})}{\partial \theta} = 0$$

Proprietà

Invarianza

L'MLE per $\tau(\theta)$ è $\tau(\hat{\theta}_{MLE})$ per qualsiasi funzione τ

Scarto quadratico media

Definizione

$$MSE[T] = \mathbb{E}_\theta[(T - \theta)^2]$$

Bias

$$Bias[T] = \mathbb{E}_\theta[T] - \theta$$

Scomposizione

$$MSE[t] = Var_\theta[T] + Bias[T]^2$$

Stimatore non distorto

Uno stimatore T è non distorto se:

UMVUE

Definizione

Uno stimatore T è UMVUE se:

- è non distorto: $\mathbb{E}[T] = \theta$
- $Var[T] \leq Var[T^*] \quad \forall T^* \text{ non distorto}$

Inoltre l'UMVUE è **unico**.

Lehmann-Scheffè per UMVUE

Siano T non distorto e W sufficiente e completa (e minima). Allora:

$M = \mathbb{E}_\theta[T|W]$ è UMVUE.

E analogamente per una funzione di θ

UMVUE per $\phi(\theta)$

Sia T sufficiente e completa e $\phi(T)$, allora $\phi(T)$ è UMVUE per $\mathbb{E}_\theta[\phi(T)]$

UMVUE per Famiglia Esponenziale

Se $X_1, \dots, X_n \in EF$ e:

$f(\vec{x}, \theta) = h(\vec{x})c(\theta) \exp \{w_1(\theta)t_1(x)\}$ Tale
che $\exists \frac{d}{d\theta} w(\theta) \neq 0$ e continua $\forall \theta$. Allora:

$T(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_1(X_j)$ è UMVUE per
 $\mathbb{E}_\theta[T_1(X)]$

Test d'Ipotesi

Regione Critica

$R = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^k \mid \text{rifiuto } H_0\}$

Di solito si basa su una statistica.

Rapporto di Verosimiglianza

$R = \{\vec{x} \mid \lambda(x) \leq c\}$ con $c \in [0, 1]$

$$\lambda(x) = \frac{\sup_{\Theta_0} L(\theta, x)}{\sup_{\Theta} L(\theta, x)}$$

Funzione potenza

$$\beta(\theta) = \mathbb{P}_\theta(x \in R)$$

Dimensione

$$\alpha = \sup_{\Theta_0} \beta(\theta)$$

Livello

$$\alpha \geq \sup_{\Theta_0} \beta(\theta)$$

UMP

Un test di una classe C è UMP se:

$$\beta(\theta) \geq \beta'(\theta) \quad \forall \theta \in \Theta_0^c \quad \forall \beta' \in C$$

Lemma di Neymann-Perason