

## Formule

### Capitalizzazioni

- **Semplice**  $W(t) = S(1 + it)$
- **Composta**  $W(t) = S(1 + i)^t$
- **Esponenziale**  $W(t) = Se^{yt=t \ln(1+i)}$

## A pronti e a Termine

### A pronti

- $i(t, T) = -\frac{p(t, T)-1}{(T-t)p(t, T)}$
- $y(t, T) = -\frac{\ln(p(t, T))}{(T-t)}$

### Relazione Prezzi

$$p(t, S, T) = \frac{p(t, T)}{p(t, S)}$$

### A termine

- $i(t, S, T) = -\frac{p(t, S, T)-1}{(T-S)p(t, S, T)}$
- $y(t, S, T) = -\frac{\ln(p(t, S, T))}{(T-S)}$

### Relazione Tassi

$$(1 + i(t, t+k))^k = \prod_{j=1}^k (1 + i(t, t+j-1, t+j))$$

$$y(t, t+k) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k y(t, t+j-1, t+j)$$

## Bootstrapping

$$x \in [T_1, T_2]$$

$$i(t, x) = \frac{(T_2 - x)i(t, T_1) + (x - T_1)i(t, T_2)}{T_2 - T_1}$$

## Investimenti

### Valore Attuale

$$Va(t) = \sum_{i=0}^N \frac{x_i}{(1 + i(t, T_i))^{(T_n - t)}}$$

### TIR

$$i^* \text{ t.c. } \sum_{i=0}^N \frac{x_i}{(1 + i^*)^{(T_n - t)}} = 0$$

## Indici Temporal

$$p(t, x) = \sum_{n=1}^N x_n (1 + i(t, T_n))^{-(T_n - t)}$$

### Duration e Convexity

$$DU(t, x) = \frac{\sum_{n=1}^N (T_n - t) x_n (1 + i(t, T_n))^{-(T_n - t)}}{p(t, x)}$$

$$DU^2(t, x) = \frac{\sum_{n=1}^N (T_n - t)^2 x_n (1 + i(t, T_n))^{-(T_n - t)}}{p(t, x)}$$

Oppure con  $e^{-y^*(t, T_N)}$

Per portafoglio  $\alpha, X$ :

$$DU(t, \alpha X) = \sum_{k=1}^K \frac{\alpha_k p_k}{\sum_{k=1}^K \alpha_k p_k} Du(t, x^k)$$

## Approssimazione

### Composta

$$\Delta p(t, x) = -\frac{1}{1+i} DU(t, x) p(t, x) \Delta i + \frac{1}{2} p(t, x) C(t, x) \Delta i^2$$

### Esponenziale

$$\Delta p(t, x) = -DU(t, x) p(t, x) \Delta y + \frac{1}{2} p(t, x) DU^2(t, x) \Delta y^2$$

## Immunizzazione

### Fisher-Weil

Unica uscita  $L$  in  $H > t$ , per immunizzare  $(V(t^+, x) \geq V(t^+, L))$  basta:

$$\begin{cases} V(t, x) = V(t, L) \\ DU(t, x) = H - t \end{cases}$$

### Redington

Sia  $V(t, x) = V(t, y)$ , per immunizzare  $(V(t^+, x) \geq V(t^+, L))$  basta:

$$\begin{cases} DU(t, x) = DU(t, y) \\ DU^2(t, x) \geq DU^2(t, y) \end{cases}$$

## Scelte in rischio

### Premio per il rischio

$$\rho_u(\tilde{x}) \text{ t.c. } u\left(\underbrace{E[\tilde{x}] - \rho_u(\tilde{x})}_{\text{CertoEquivalente}}\right) = E[u(\tilde{x})]$$

### Coefficiente di avversione

$$r_u^a(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} \text{ e moltiplico per } x$$

### Relazione

$$\rho_u(\tilde{x}) \approx \frac{1}{2} r_u^a(x) \sigma^2 \text{ localmente per } E[\tilde{x}] = x$$

### Funzioni utilità

- **Esponenziale**  $-\frac{1}{a}e^{-xa}$  e  $r_u^a(x) = a$
- **Quadratica**  $x - \frac{b}{2}x^2$  e  $r_u^a(x) = \frac{b}{1-bx}$

## Media-Varianza

### Per due titoli rischiosi

$$(w, 1-w)$$

$$\begin{cases} \tilde{r} = w\tilde{r}_1 + (1-w)\tilde{r}_2 \\ E[\tilde{r}] = wE[\tilde{r}_1] + (1-w)E[\tilde{r}_2] \\ \sigma^2(\tilde{r}) = w^2\sigma^2(\tilde{r}_1) + (1-w)^2\sigma^2(\tilde{r}_2) \\ \quad + 2w(1-w)\rho\sigma_1\sigma_2 \end{cases}$$

## Scelte di Portafoglio

Massimizziamo utilità attesa  $E[u(\tilde{x})]$ , abbiamo un titolo sicuro  $r_f$

$$\begin{aligned} \tilde{W} &= xr_f + \sum_{n=1}^N w_n(\tilde{r}_n - r_f) \\ E[u'(xr_f + w(\tilde{r} - r_f))(\tilde{r} - r_f)] &= 0 \end{aligned}$$

### Con un titolo

#### Quadratica

$$\begin{aligned} xr_f + w(E[\tilde{r}] - r_f) - \frac{b}{2}[(xr_f + w(E[\tilde{r}] - r_f))^2 + \\ w^2\sigma^2(\tilde{r})] \\ E[(1 - b(xr_f + w(\tilde{r} - r_f))(\tilde{r} - r_f)] \\ w^* = \frac{(1 - bxr_f)E[\tilde{r} - r_f]}{b(\sigma^2(\tilde{r} + (E[\tilde{r}] - r_f)^2))} \end{aligned}$$

### Esponenziale + Normali

Massimizzare  $E[u(\tilde{w})]$  equivale a massimizzare l'esponente (lognormale)

$$\begin{aligned} E[\tilde{W}] - \frac{a}{2}\sigma^2(\tilde{W}) \\ w^* = \frac{1}{a\sigma^2(\tilde{r})}(E[\tilde{r}] - r_f) \end{aligned}$$

### Con più titoli

Vettore media  $e$  e matrice Varianza  $V$

#### Quadratica

$$\begin{aligned} E[(1 - b\tilde{W})(\tilde{r}_n - r_f)] &= 0 \quad \forall n \in \{1, \dots, N\} \\ w^* &= \frac{(1 - bxE[\tilde{r}])}{b}V^{-1}(e - r_f\mathbf{1}) \end{aligned}$$

### Esponenziale + Normali

Massimizzare  $E[u(\tilde{w})]$  equivale a massimizzare l'esponente (lognormale)

$$\begin{aligned} xr_f + w \cdot (e - r_f\mathbf{1}) - \frac{1}{2}aw^TVw \\ w^* = \frac{1}{a}V^{-1}(e - r_f\mathbf{1}) \end{aligned}$$

## Frontiera dei portafogli

### Solo rischiosi

Vettore delle medie  $e$  e matrice varianza  $V$   
Bisogna calcolare i **coefficienti**:

$$\begin{aligned} A &= \mathbf{1}^TV^{-1}e \\ B &= e^TV^{-1}e \\ C &= \mathbf{1}^TV^{-1}\mathbf{1} \\ D &= BC - A^2 \end{aligned}$$

Ora ci scriviamo i vettori di frontiera  $g$  e  $h$ :

$$\begin{aligned} g &= \frac{(BV^{-1}\mathbf{1} - AV^{-1}e)}{D} \\ h &= \frac{(CV^{-1}e - AV^{-1}\mathbf{1})}{D} \end{aligned}$$

Possiamo scrivere i ptf della frontiera come:

$$w^p = g + hE[\tilde{r}^p]$$

### Covarianza tra portafogli in FP

$$Cov(\tilde{r}^q, \tilde{r}^p) = \frac{C}{D} \left( E[\tilde{r}^p] - \frac{A}{C} \right) \left( E[\tilde{r}^q] - \frac{A}{C} \right) + \frac{1}{C}$$

Da cui posso trovare la varianza

## Con titolo privo di rischio

Rendimento del titolo privo di rischio  $r_f$   
Calcolo il coefficiente  $H$ :

$$H = (e - r_f \mathbf{1})^T V^{-1} (e - r_f \mathbf{1}) = B - 2Ar_f + Cr_f^2 > 0$$

La frontiera dei portafogli  $FP^*$  sono tutti i portafogli:

$$w^p = V^{-1} (e - r_f \mathbf{1}) \frac{E[\tilde{r}^p] - r_f}{H}$$

Per ottenere la varianza:

$$\sigma^2(w^p) = w^{pT} V w^p = \frac{(E[\tilde{r}^p] - r_f)^2}{H}$$

## Portafoglio tangente

E' il portafoglio comune a  $FP$  e  $FP^*$ , o il portafoglio a Covarianza nulla con  $w^p \in FP$  con  $E[\tilde{w}^p] = r_f$

$$w^e = V^{-1} \frac{(e - r_f \mathbf{1})}{\mathbf{1}^T V^{-1} (e - r_f \mathbf{1})}$$

## Assicurazione

Danno  $D$  con probabilità  $q \in [0, 1]$ ,  $w$  coverage ratio.

$$E[u(\tilde{x})] = \pi u(x - D - wq + w) + (1 - \pi) u(x - wq)$$

## Danno generico

Danno generico  $\tilde{z}$ , pago  $(1 + \lambda)E[\tilde{z}]$ , devo massimizzare:

$$E[u(x - (1 - w)\tilde{z} - w(1 + \lambda)E[\tilde{z}])]$$

Che equivale a fare

$$E[u'(x - (1 - w)\tilde{z} - w(1 + \lambda)E[\tilde{z}])(\tilde{z} - (1 + \lambda)E[\tilde{z}])] = 0$$

$N$  titoli e un titolo sicuro  $r_f$   
I rendimenti sono generati da una media e da  $k$  fattori di rischio  $\tilde{x}_i$

## Modelli di Equilibrio

$N$  titoli e  $S$  possibili stati.

Vettore prezzi  $q = (q_1, \dots, q_N)$ , matrice dei dividendi  $D \in \mathbb{R}^{S \times N}$ , ricchezza negli stati  $y = Dw \in \mathbb{R}^S$

## Completezza

Un mercato si dice completo se  $rank(D) = S$  (con  $N \geq S$ ).

Di solito si usa  $\det(D) \neq 0$ .

## State price

Prezzo  $m_s$  che paga 1 nello stato  $s$  e 0 negli altri.

Dalla loro somma otteniamo il prezzo del titolo sicuro  $m_0 = \sum_{s=1}^S m_s$  ed il suo rendimento  $r_f = \frac{1}{m_0}$

Se il mercato è completo, possiamo investire  $D$  e fare:

$$m = (D^T)^{-1} q$$

Per replicarle mi basta creare il portafoglio il cui valore sia uguale ad  $m$  facendo:

$$Dw = \mathbf{1}$$

## Assenza di Arbitraggio

In assenza di opportunità di Arbitraggio troveremo che:

$$m = D^{-T} q > 0$$

## CAPM

## CCAPM

1. Trovo il ptf  $\tilde{r}^m$  che riproduce la ricchezza in tutti i dati stati, il suo prezzo ed il suo rendimento atteso
2. Trovo  $\beta_{CAPM} = \frac{Cov(u'(\tilde{x}^m, \tilde{r}_n))}{Cov(u'(\tilde{x}^m, \tilde{r}_m))}$
3. Trovo il rendimento del titolo privo di rischio  $r_f$
4. Uso la relazione

$$E[\tilde{r}_n] - r_f = \beta(E[\tilde{r}^m] - r_f)$$

## Arbitrage Pricing Theory

$N$  titoli e un titolo sicuro  $r_f$   
I rendimenti sono generati da una media e da  $k$  fattori di rischio  $\tilde{x}_i$

$$\tilde{r}_n = \sum_{h=1}^k b_{nh} \tilde{x}_h \quad \forall n$$

## Portafogli Puri

Il portafoglio puro  $w_s$  è il portafoglio tale che:

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^N w_s b_{ns} = 1 \\ \sum_{n=1}^N w_j b_{nj} = 0 \quad \forall j \neq s \\ \sum_{n=1}^N w_n = 1 \end{cases}$$

## Portafoglio privo di rischio

Il portafoglio puro  $w_s$  è il portafoglio tale che:

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^N w_s b_{ns} = 0 & \forall s \\ \sum_{n=1}^N w_n = 1 \end{cases}$$

## Portafoglio di replica

Dato un titolo:

$$\tilde{r}_{N+1} = \alpha + \sum_{h=1}^k b_{N+1,h} \tilde{x}_h$$

Il suo portafoglio di replica è il portafoglio tale che:

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^N w_r b_{nk} = b_{N+1,k} & \forall k \\ \sum_{n=1}^N w_n = 1 \end{cases}$$

Allora:

$$E[\tilde{r}_r] = \alpha$$

## Verifica APT

Definiamo  $\lambda_h = E[\tilde{r}_h] - r_f$  per ogni portafoglio puro. Se non c'è arbitraggio allora:

$$\alpha - r_f = w_r \cdot \lambda$$

## Albero Binomiale

Abbiamo un titolo rischioso (Stock) e uno non rischioso (Bond) i cui valori di mercato sono  $S(t), B(t)$ .

- **Bond:** passa dal valore  $B(0)$  in  $t = 0$  al valore  $B(0)r_f$  in  $t = 1$
- **Stock:** il suo valore è una bernoulli di ragione  $p$ :

$$\begin{cases} S(0)u & \pi = p \\ S(0)d & \pi = 1 - p \end{cases}$$

Dove  $u, d$  stanno per *up*, *down*, e perchè non ci sia arbitraggio:  $u > r_f > d$

## Value at Risk e Expected Shortfall

I dati che ci servono sono:

$\mu$ , media,  $\sigma$ , deviazione std (fai la radice),  $h$  le unità di tempo passato e il livello  $p$

### • Logaritmici Normali

$$VaR = -h\mu + \sigma\sqrt{h}\Phi(1-p)$$

$$ES = -h\mu + \frac{\sigma}{ph}\Phi(\phi(1-p))$$

### • Giornalieri

$$VaR = h(1-\mu) + \sigma\sqrt{h}\Phi(1-p)$$

$$ES = h(1-\mu) + \frac{\sigma}{ph}\Phi(\phi(1-p))$$

### • Perdita

$$VaR = h\mu + \sigma\sqrt{h}\Phi(1-p)$$

$$ES = h\mu + \frac{\sigma}{ph}\Phi(\phi(1-p))$$

## Portafogli e Subadditività

Se abbiamo un portafoglio:

$\mu = w \cdot e$  e  $\sigma = \sqrt{W^t V w}$ , inoltre, se vale la Subadditività:

$$VaR(\tilde{R}) \leq \sum_{i=1}^N VaR(\tilde{R}_i)$$

L'ES è sempre subadditivo.

## Specchietto sulla normale

$$\Phi(0.99) = 0.83891$$

$$\Phi(\phi(0.99)) = 0.00667$$