

Formule e Teoremi utili

Probabilità

Distribuzione della trasformata

Sia $f_X(x)$ e $y = g(x)$.

- Se g crescente: $F_Y(y) = F_X(g^{-1}(y))$
- Se g decrescente: $F_Y(y) = 1 - F_X(g^{-1}(y))$
- Se g^{-1} derivabile:
 $f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))|g^{-1}(y)|$

Varianza

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

Marginali, Congiunte e Condizionate

$$f_{x,y} = f_{x|y}f_y$$
$$f_x = \int f_{x,y}dy$$

Media e Varianza Condizionati

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]]$$
$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[\text{Var}[X|Y]] + \text{Var}[\mathbb{E}[X|Y]]$$

Legge Forte Grandi Numeri

Sia X_1, \dots, X_n iid con μ, σ^2 , allora:
 $\bar{X}_n \xrightarrow{q.c.} \mu$

Teorema centrale del limite

Sia X_1, \dots, X_n iid con μ, σ^2 , allora:
 $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow{L} N(0, \sigma^2)$

Metodo delta

Sia X_1, \dots, X_n iid con μ, σ^2 , tali che:
 $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow{L} N(0, \sigma^2)$
Prendiamo una funzione $g(x)$:

- Se $g'(x) \neq 0$:
 $\sqrt{n}(g(\bar{X}_n) - g(\mu)) \xrightarrow{L} N(0, \sigma^2 g'(\mu)^2)$
- Se $g'(x) = 0$:
 $\sqrt{n}(g(\bar{X}_n) - g(\mu)) \xrightarrow{L} \frac{\sigma^2}{2} g''(\mu) \chi^2(1)$

Statistiche sufficienti

Definizione

Una statistica T è sufficiente per θ se:
 $f(\vec{x}|T=t) \propto \theta \quad \forall t$

Teorema di Fattorizzazione

Data la congiunta $f(\vec{x}, \theta)$, $T(x)$ è suff se:
 $f(\vec{x}, \theta) = h(\vec{x})g(T(x), \theta)$
Questo vale anche per trasformazioni biunivoche di T

Famiglia Esponenziale

Se ho una distribuzione della FE:
 $f(\vec{x}, \theta) = h(\vec{x})c(\theta) \exp \left\{ \sum_{i=1}^k w_i(\theta)t_i(x) \right\}$
Allora $T = (\sum_j t_1(X_j), \dots, \sum_j t_k(X_j))$ è sufficiente

Statistiche sufficienti e minimali

Definizione

Una statistica sufficiente T viene detta minimale se tutte le altre statistiche sufficienti sono funzioni di essa.

Lehmann-Scheffè sulla minimalità

Sia $f(\vec{x}, \theta)$ e T stat suff. T è minimale se:

$$\frac{f(\vec{x}, \theta)}{f(\vec{y}, \theta)} = K \text{ con } K \text{ costante} \iff T(x) = T(y)$$

Statistiche complete

Definizione

Sia $T(x)$ una statistica e $f(t, \theta)$ la sua legge.

Diciamo $T(x)$ completa se:

$$\mathbb{E}_\theta[g(T)] = 0 \forall \theta \implies \mathbb{P}(g(T) = 0) = 1$$

Di solito usiamo la derivata rispetto a θ :

$$\frac{d}{d\theta} \mathbb{E}_\theta[g(T)] = 0 = h'(\theta) \mathbb{E}_\theta[g(T)] + h(\theta) [g(t) f_T(t)]$$

Avremo: