Analisi Complessa

Serie di Potenze

Forma

$$\text{Classica} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{Laurent} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

Raggio di Convergenza

$$\frac{1}{R} = \limsup_{x\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$
$$\frac{1}{R} = \lim_{x\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \text{ se vale } \frac{\infty}{0} \implies R = \frac{0}{\infty}$$

Funzioni a Valori Complessi

Olomorfia

Una funzione $f = u + iv : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ si dice Olormorfa in un aperto A se è derivabile in senso complesso in tutto A.
Inoltre la sua parte reale e immaginaria sono entrambe armoniche ($\Delta f = 0$) e rispetta le **Condizioni di Cauchy Riemann**

$$u, v \in C^1 \quad u_x = v_y \quad u_y = -v_x$$

Analiticità

Una funzione si dice **Analitica** se è localmente scrivibile come serie di Potenze.
Inoltre se $R = \infty$ si dice Intera

Singolarità

Tipi di Singolarità al finito z_0:

- **Eliminabile:** se $\exists \lim_{x\to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$ e $a_n = 0 \quad \forall n < 0$.
- **Polo:** se $\exists \lim_{x\to z_0} f(z) = \infty$, $a_n = 0 \quad \forall n < m$ e m è il grado.
- **Essenziale:** se $\nexists \lim_{x\to z_0} f(z)$ o $m = \infty$
- **Non Isolata:** se trovo una Successione di Singolarità $z_k \xrightarrow{k\to\infty} z_0$

All'infinito $z = \infty$

- **Eliminabile:** se $\exists \lim_{x\to \infty} f(z) \in \mathbb{C}$ e $a_n = 0 \quad \forall n < 0$.
- **Polo:** se $\exists \lim_{x\to \infty} f(z) = \infty$, $a_n = 0 \quad \forall n < m$ e m è il grado.
- **Essenziale:** se $\nexists \lim_{x\to \infty} f(z)$ o $m = \infty$
- **Non Isolata:** se trovo una Successione di Singolarità $z_k \xrightarrow{k\to\infty} \infty$

Studio dei Poli

Le seguenti sono equivalenti:

- f ha un polo in z_0 di ordine m
- $g(z) = (z - z_0)^m f(x)$ ha una singolarità eliminabile in z_0 e $\lim_{x\to z_0} g(z) \neq 0$
- $f(z) \approx |z - z_0|^m$ per $z \to z_0$
- $\frac{1}{f(z)}$ ha uno zero di ordine m in z_0

Residui

Il residuo in z_0 è:

$$Res(f, z_0) = a_{-1} = a_n z^{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) dz$$

NB. $Res(f, \infty) = -a_{-1}$
Inoltre:

- $z_0 \neq \infty$:
  - **Eliminabile** $\implies Res(f, z_0) = 0$
  - **Poli:**
    * $p = 1$
      $$Res(f, z_0) = \lim_{x\to z_0} f(z)(z - z_0)$$
    * $p \geq 2$
      $$Res(f, z_0) = \frac{\lim_{x\to z_0} [f(z)(z - z_0)^p]^{(p-1)}}{(p-1)!}$$
  - **Essenziale:** Svolgo Laurent
- $z = \infty$
  $$Res(f, \infty) = Res\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$$

Infine Ricordo:

$$\sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k) + Res(f, \infty) = 0$$

$F = \dfrac{f}{g}, g(z_0) = 0$ primo ° e $g'(z_0) \neq 0$:

$$Res\left(\frac{f}{g}, z_0\right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$$

Integrali Complessi

Teorema sull'integrale nullo di Cauchy

Sia $f \in H(A)$ $(u, v \in C^1)$, A semplicemente connesso, $\gamma : [a, b] \to A$ chiusa, semplice e regolare $(\gamma(a) = \gamma(b))$, allora:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt = 0$$

Inoltre:
Siano $f \in H(A) \cap C^1(\bar{A})$, $\gamma_1 = \partial A$ e $\gamma_2 \subset A$ chiusa, allora:

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

Teorema dei Residui

Sia $f \in H(\mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_n\})$ se $R > max|z_k|$ allora:

$$\int_{\partial B(0,R)} f(z)dz = 2\pi i \left[\sum_{k=1}^{n} Res(f, z_n)\right]$$

Lemmi di Jordan

Primo:
Sia $f(z)$ funzione Olomorfa:

- Se $|f(z)| \leq \frac{k}{|z^\alpha|}$ con $\alpha > 1 \quad \forall z, |z| > k$, allora:
$$\int_{C_R(\theta_1,\theta_2)} \xrightarrow{R\to\infty} 0$$
- Similmente se vale lo stesso con $\alpha < 1, \forall z, |z| < k$:
$$\int_{C_R(\theta_1,\theta_2)} \xrightarrow{R\to 0} 0$$

Secondo:
Sia $g(z)e^{i\alpha z}$, allora:

- $\alpha > 0$: Va a zero sulla circonferenza **Sopra**
- $\alpha < 0$: Va a zero sulla circonferenza di **Sotto**

Per Dribling:
Sia z_0 polo semplice per $f(z)$, allora:

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{C_\epsilon(\alpha,\beta)} f(z)dz = (\beta - \alpha)i \cdot Res(f, z_0)$$

Tipi di Integrali

- $\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt$, uso:

  $z = e^{it}, dz = ie^{it}dt,$ e uso la formula di Eulero:
$$\to \int_{|z|=1} R\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)\frac{dz}{iz}$$

- $\int_{\mathbb{R}} R(x)dx$ o $\int_{\mathbb{R}} R(x)\left\{\begin{array}{c} e^{ix} \\ \cos x \\ \sin x \end{array}\right\}dx$
  Integro su un semicerchio, eventualmente evitando singolarità sulla l'asse reale con piccoli semicerchi.

- $\int_{\mathbb{R}} R(e^x)\left\{\begin{array}{c} 1 \\ e^{ix} \end{array}\right\}dx$
  Integro su un rettangolo con eventuali dribling di Singolarità

- $\int_0^\infty x^\alpha R(x^m)$ con $\alpha \in \mathbb{R}, m > 2 \in \mathbb{N}$, Riscrivo $x^\alpha = e^{\alpha \ln(z)}$
  - Se $\alpha \in \mathbb{N}$: spicchio di circonferenza di angolo $\frac{2\pi}{m}$ e raggio R
  - Se $\alpha \notin \mathbb{N}$: spicchio di corona fra ϵ e R con angolo $\frac{2\pi}{m}$

- $\int_0^\infty x^\alpha R(x)dx, \int_0^\infty R(x)dx, \int_0^\infty \ln(x)R(x)dx$:
  Circonferenza Interna di raggio ϵ e esterna di raggio R, con due segmenti lungo l'asse x positivo e cambio in:

$$e^{\alpha \ln_{2\pi} z}R(z) \quad \ln_{2\pi} zR(z) \quad (\ln_{2\pi} z)^2 R(z)$$

Spazi L^p

Appartenenza

Diciamo che $f(z) \in L^p(\Omega)$ se:

$$\int_\Omega |f(z)|^p dz < \infty$$

Teoremi su Integrali

Teorema di Convergenza Monotona

Sia $f_n : A \to [0, +\infty)$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \tilde{\forall} x \in A$ e $f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \quad \forall n, x$, allora:

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)dx = \int_A f(x)dx$$

Teorema di Convergenza Dominata

Sia $f_n : A \to \mathbb{C}$ e $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \tilde{\forall} x \in A$, allora:

Se $\exists g \in L^1(A)$ tale che $|f_n(x)| \leq g(x) \quad \tilde{\forall} x \in A$

$$\implies \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)dx = \int_A f(x)dx \text{ e } f \in L^1$$

Serie di Fourier

Coefficienti

Sia $f \in L^2(A)$ con periodo T, allora:

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2\pi n}{T}x + b_n \sin\frac{2\pi n}{T}x$$

con:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_A f(x)dx$$
$$a_n = \frac{2}{T}\int_A f(x)\cos\frac{2\pi n}{T}xdx$$
$$b_n = \frac{2}{T}\int_A f(x)\sin\frac{2\pi n}{T}xdx$$

Inoltre:
In tutti i punti in cui f è continua avremo: $F(x) = f(x)$
Nei punti di salto $F(x) = \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$

Convergenza

Puntuale

Continua a tratti $\implies$ Convergenza Puntuale

Uniforme

Se f non è continua non si può avere convergenza Uniforme. Se no classico metodo.

Totale

Dico che la serie converge **Totalmente** se

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| + |b-k| < \infty \implies \text{Uniforme e Puntuale}$$

Quadratica

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 + |b_k|^2 < \infty$$

Parceval

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2$$

Trasformata di Fourier

Una funzione $f(x)$ si dice **Fourier-Trasformabile** se:

$$f \in L^1(\mathbb{R}) \text{ e } \hat{f}(\xi) : \mathbb{R} \to \mathbb{C} = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x)dx < \infty$$

Proprietà

- **Scaling:** $u(ax) = \frac{1}{|a|}\hat{u}(\frac{\xi}{a})$
- **Shifting:** $u(x-a) = e^{-ia\xi}\hat{u}(\xi)$
- **Modulazione:** $u(x)e^{iax} = \hat{u}(\xi - a)$
- **Linearità:** $F(au(x) + bv(x)) = a\hat{u}(\xi) + b\hat{v}(\xi)$
- **Derivazione:** $\hat{u}'(\xi) = i\xi\hat{u}(\xi)$ e $F(u') = i\xi\hat{u}$
- **Integrazione:** $u(x) = \hat{u}(\xi)$
- **Convoluzione:** $F(f * g) = \hat{f}\hat{g}$
- **Prodotto con Polinomio** $F(xf(x)) = i\hat{f}'(\xi)$

Inversa

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi z}\hat{f}dz$$

Plancherel

Sia $u \in L^2 \cap L^1$ allora $\|\hat{u}\|_2 = \sqrt{2\pi}\|u\|_2$

Fourier su S'

Sia $u \in S', \hat{u} \in S', \phi \in S, \phi' \in S'$, allora:

$$(\hat{u}, \phi) = (u, \hat{\phi})$$

Trasformate Notevoli

Trasformata di Laplace

Sia $u \in L^1_{loc} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, S(u) \subset [0, \infty), \exists \lambda \in \mathbb{R}$ tc $e^{-\lambda x} \in L^1(\mathbb{R})$, allora:

$$L(u) = \int_{\mathbb{R}}^{+} e^{-sx}u(x)dx$$

Proprietà

- **Scaling:** $u(ax) = \frac{1}{a}\hat{u}(\frac{s}{a})$
- **Shifting:** $u(x-a) = e^{-as}\hat{u}(s)$
- **Modulazione:** $u(x)e^{ax} = \hat{u}(s-a)$
- **Linearità:** $F(au(x)+bv(x)) = a\hat{u}(s) + b\hat{v}(s)$
- **Derivazione:** $\hat{u}'(s) = -L(tf(t))$ e $L(y') = s\hat{y} - y(0)$
- **Integrazione:** $L(\int_0^t f(\tau)d\tau) = \frac{1}{s}\hat{f}$
- **Convoluzione:** $L(f*g) = \hat{f}\hat{g}$

Inversa

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{u}(s)e^s xds$$

Trasformate Notevoli

$$\begin{aligned}
\sin\omega t &\to \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \\
\cos\omega t &\to \frac{s}{s^2+\omega^2} \\
t^n &\to \frac{n!}{s^{n+1}} \\
\chi_[a,b](t) &\to \frac{e^{-as}-e^{-bs}}{s} \\
\delta_0 &\to 1
\end{aligned}$$

Funzioni a Supporto Compatto

$\phi \in D(A)$ se $\phi : A \to \mathbb{R} \in C^\infty(A)$ con supporto compatto (cioè si deve annullare). Queste vengono anche dette funzioni test.

Convergenza

Sia $f_n \subset D(A)$, allora $f_n \xrightarrow{D(A)} f$ se :

- $\exists K \subset A$ tale che $S(f_n) \subset K$
- $\forall k \in \mathbb{N}, \quad f_n^{(n)} \to f^{(n)}$ uniformemente

Funzioni di Schwartz

$\phi \in S(A)$ se $\phi \in C^\infty(A)$ e $x^k f^{(n)}$ è limitata $\forall k \in \mathbb{N}$

Convergenza

Sia $f_n \subset S(\mathbb{R})$, allora $f_n \xrightarrow{D(A)} f$ se :

- $f \in C^\infty(\mathbb{R})$
- $x^k f^{(k)}$ è limitata $\forall k \in \mathbb{N}$

Distribuzioni

Sia $A \subset \mathbb{R}$ un aperto, una distribuzione su A è un funzionale $f : D(A) \to D'(A)$

Prodotto Scalare

$$(f,\phi) = \int_A f(x)\phi(x)dx$$

Convergenza

$$(\Lambda_k, \phi(x)) \to (\lambda, \phi) \text{ con } \Lambda_n \subset D'(A)$$

Derivata

Sia $\Lambda \in D'(A)$, allora:

$$\forall\phi \in D(A) \quad (\Lambda', \phi) = -(\Lambda, \phi')$$

Temperate

Distribuzione da $S(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Notiamo che $\psi \in D(\mathbb{R}) \implies \psi \in S(\mathbb{R})$. Dunque $S'(\mathbb{R}) \subset D'(\mathbb{R})$

Da $L^1_{loc} a S'$

Sia $u \in L^1_{loc}$, è temperata se:

$$\exists n \text{ tale che } (1+|x|)^{-n}u \in L^1(\mathbb{R})$$

Da $L^p a S'$

Sia $u \in L^p$, allora $u \in S'(\mathbb{R})$

Formule Utili e Risultati Notevoli

Funzioni Trigonometriche, Iperboliche ed Esponenziali

$$
\begin{aligned}
e^{iz} &= \cos z + i \sin z \\
\sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\
\cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\
\sinh z &= \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} = \frac{e^{2z} - 1}{2e^{z}} = \frac{1 - e^{-2z}}{2e^{-z}} \\
\cosh z &= \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} = \frac{e^{2z} + 1}{2e^{z}} = \frac{1 + e^{-2z}}{2e^{-z}}
\end{aligned}
$$

Serie di Laurent

$$
\begin{aligned}
e^{z} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \\
\cosh z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \\
\sinh z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
\cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \\
\sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
\frac{1}{1-z} &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n
\end{aligned}
$$

Convoluzione

Date $u, v \in L^1(\mathbb{R})$ allora:

$$
(u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}} u(x-t)v(t)dt = \int_{R} u(t)v(x-t)dt
$$