Formule

Capitalizzazioni

- **Semplice** $W(t) = S(1+it)$
- **Composta** $W(t) = S(1+i)^t$
- **Esponenziale** $W(t) = Se^{yt=t\ln(1+i)}$

A pronti e a Termine

A pronti

- $i(t,T) = -\frac{p(t,T)-1}{(T-t)p(t,T)}$
- $y(t,T) = -\frac{\ln(p(t,T))}{(T-t)}$

Relazione Prezzi

$$p(t,S,T) = \frac{p(t,T)}{p(t,S)}$$

A termine

- $i(t,S,T) = -\frac{p(t,S,T)-1}{(T-S)p(t,S,T)}$
- $y(t,S,T) = -\frac{\ln(p(t,S,T))}{(T-S)}$

Relazione Tassi

$$(1+i(t,t+k))^k = \prod_{j=1}^{k}(1+i(t,t+j-1,t+j))$$

$$y(t,t+k) = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} y(t,t+j-1,t+j)$$

Bootstrapping

$x \in [T_1, T_2]$

$$i(t,x) = \frac{(T_2-x)i(t,T_1)+(x-T_1)i(t,T_2)}{T_2-T_1}$$

Investimenti

Valore Attuale

$$Va(t) = \sum_{i=0}^{N} \frac{x_i}{(1+i(t,T_i))^{(T_n-t)}}$$

TIR

$$i^* \text{ t.c. } \sum_{i=0}^{N} \frac{x_i}{(1+i*)^{(T_n-t)}} = 0$$

Indici Temporali

$$p(t,x) = \sum_{n=1}^{N} x_n(1+i(t,T_n))^{-(T_n-t)}$$

Duration e Convexity

$$DU(t,x) = \frac{\sum_{n=1}^{N}(T_n-t)x_n(1+i(t,T_n))^{-(T_n-t)}}{p(t,x)}$$

$$DU^2(t,x) = \frac{\sum_{n=1}^{N}(T_n-t)^2 x_n(1+i(t,T_n))^{-(T_n-t)}}{p(t,x)}$$

Oppure con $e^{-y*(t,T_N)}$
Per portafoglio α, X:

$$DU(t,\alpha X) = \sum_{k=1}^{K} \frac{\alpha_k p_k}{\sum_{k=1}^{K}\alpha_k p_k} Du(t,x^k)$$

Approssimazione

Composta

$$\Delta p(t,x) = -\frac{1}{1+i}DU(t,x)p(t,x)\Delta i + \frac{1}{2}p(t,x)C(t,x)\Delta i^2$$

Esponenziale

$$\Delta p(t,x) = -DU(t,x)p(t,x)\Delta y + \frac{1}{2}p(t,x)DU^2(t,x)\Delta y^2$$

Immunizzazione

Fisher-Weil

Unica uscita L in $H > t$, per immunizzare $(V(t^+,x) \geq V(t^+,L))$ basta:

$$\begin{cases} V(t,x) = V(t,L) \\ DU(t,x) = H-t \end{cases}$$

Redington

Sia $V(t,x) = V(t,y)$, per immunizzare $(V(t^+,x) \geq V(t^+,L))$ basta:

$$\begin{cases} DU(t,x) = DU(t,y) \\ DU^2(t,x) \geq DU^2(t,y) \end{cases}$$

Scelte in rischio

Premio per il rischio

$\rho_u(\tilde{x})$ t.c. $u(\underbrace{E[\tilde{x}] - \rho_u(\tilde{x})}_{CertoEquivalente}) = E[u(\tilde{x})]$

Coefficiente di avversione

$r_u^a(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$ e moltiplico per x

Relazione

$\rho_u(\tilde{x}) \approx \frac{1}{2} r_u^a(x)\sigma^2$ localmente per $E[\tilde{x}] = x$

Funzioni utilità

- **Esponenziale** $-\frac{1}{a}e^{-xa}$ e $r_u^a(x) = a$
- **Quadratica** $x - \frac{b}{2}x^2$ e $r_u^a(x) = \frac{b}{1-bx}$

Media-Varianza

Per due titoli rischiosi

$(w, 1-w)$

$$\begin{cases} \tilde{r} = w\tilde{r}_1 + (1-w)\tilde{r}_2 \\ E[\tilde{r}] = wE[\tilde{r}_1] + (1-w)E[\tilde{r}_2] \\ \sigma^2(\tilde{r}) = w^2\sigma^2(\tilde{r}_1) + (1-w)^2\sigma^2(\tilde{r}_2) \\ \quad +2w(1-w)\rho\sigma_1\sigma_2 \end{cases}$$

Scelte di Portafoglio

Massimiziamo utilità attesa $E[u(\tilde{x})]$, abbiamo un titolo sicuro r_f

$$\tilde{W} = xr_f + \sum_{n=1}^{N} w_n(\tilde{r}_n - r_f)$$
$$E[u'(xr_f + w(\tilde{r} - r_f))(\tilde{r} - r_f)] = 0$$

Con un titolo

Quadratica

$$xr_f + w(E[\tilde{r}] - r_f) - \frac{b}{2}[(xr_f + w(E[\tilde{r}] - r_f))^2 + w^2\sigma^2(\tilde{r})]$$
$$E[(1 - b(xr_f + w(\tilde{r} - r_f))(\tilde{r} - r_f)]$$
$$w^* = \frac{(1 - bxr_f)E[\tilde{r} - r_f]}{b(\sigma^2(\tilde{r} + (E[\tilde{r}] - r_f)^2))}$$

Esponenziale + Normali

Massimizzare $E[u(\tilde{w})]$ equivale a massimizzare l'esponente (lognormale)

$$E[\tilde{W}] - \frac{a}{2}\sigma^2(\tilde{W})$$
$$w^* = \frac{1}{a\sigma^2(\tilde{r})}(E[\tilde{r}] - r_f)$$

Con più titoli

Vettore media e e matrice Varianza V

Quadratica

$$E[(1 - b\tilde{W})(\tilde{r}_n - r_f)] = 0 \quad \forall n \in \{1, \dots, N\}$$
$$w^* = \frac{(1 - bxE[\tilde{r}])}{b}V^{-1}(e - r_f\mathbf{1})$$

Esponenziale + Normali

Massimizzare $E[u(\tilde{w})]$ equivale a massimizzare l'esponente (lognormale)

$$xr_f + w \cdot (e - r_f\mathbf{1}) - \frac{1}{2}aw^TVw$$
$$w^* = \frac{1}{a}V^{-1}(e - r_f\mathbf{1})$$

Frontiera dei portafogli

Solo rischiosi

Vettore delle medie e e matrice varianza V
Bisogna calcolare i **coefficienti**:

$$A = \mathbf{1}^TV^{-1}e$$
$$B = e^TV^{-1}e$$
$$C = \mathbf{1}^TV^{-1}\mathbf{1}$$
$$D = BC - A^2$$

Ora ci scriviamo i vettori di frontiera g e h:

$$g = \frac{(BV^{-1}\mathbf{1} - AV^{-1}e)}{D}$$
$$h = \frac{(CV^{-1}e - AV^{-1}\mathbf{1})}{D}$$

Possiamo scrivere i ptf della frontiera come:

$$w^p = g + hE[\tilde{r}^p]$$

Covarianza tra portafogli in FP

$$Cov(\tilde{r}^q, \tilde{r}^p) = \frac{C}{D}\left(E[\tilde{r}^p] - \frac{A}{C}\right)\left(E[\tilde{r}^q] - \frac{A}{C}\right) + \frac{1}{C}$$

Da cui posso trovare la varianza

Portafoglio a Varianza minima globale

$$w* = \frac{V^{-1}\mathbf{1}}{C}$$

Da cui posso trovare la varianza

Con titolo privo di rischio

Rendimento del titolo privo di rischio r_f
Calcolo il coefficiente H:

$$H = (e - r_f\mathbf{1})^T V^{-1}(e - r_f\mathbf{1}) = B - 2Ar_f + Cr_f^2 > 0$$

La frontiera dei portafogli FP^* sono tutti i portafogli:

$$w^p = V^{-1}(e - r_f\mathbf{1})\frac{E[\tilde{r}^p] - r_f}{H}$$

Per ottenere la varianza:

$$\sigma^2(w^p) = w^{pT} V w^p = \frac{(E[\tilde{r}^p] - r_f)^2}{H}$$

Portafoglio tangente

E' il portafoglio comune a FP e FP*, o il portafoglio a Covarianza nulla con $w^p \in FP$ con $E[\tilde{w}^p] = r_f$

$$w^e = V^{-1}\frac{(e - r_f\mathbf{1})}{\mathbf{1}^T V^{-1}(e - r_f\mathbf{1})}$$

$$E[\tilde{r}^e] = \frac{Ar_f - B}{Cr_f - A}$$

Assicurazione

Danno D con probabilità $q \in [0,1]$, w coverage ratio.

$$E[u(\tilde{x})] = \pi u(x - D - wq + w) + (1 - \pi)u(x - wq)$$

Danno generico

Danno generico $\tilde{z}$, pago $(1 + \lambda)E[\tilde{z}]$, devo massimizzare:

$$E[u(x - (1 - w)\tilde{z} - w(1 + \lambda)E[\tilde{z}])]$$

Che equivale a fare

$$E[u'(x - (1 - w)\tilde{z} - w(1 + \lambda)E[\tilde{z}])(\tilde{z} - (1 + \lambda)E[\tilde{z}])] = 0$$

Modelli di Equilibrio

N titoli e S possibili stati.
Vettore prezzi $q = (q_1, \ldots, q_n)$, matrice dei dividendi $D \in \mathbb{R}^{S \times N}$, ricchezza negli stati $y = Dw \in \mathbb{R}^S$

Completezza

Un mercato si dice completo se $rank(D) = S$ (con $N \geq S$).
Di solito si usa $\det(D) \neq 0$.

State price

Prezzo m_s che paga 1 nello stato s e 0 negli altri.
Dalla loro somma otteniamo il prezzo del titolo sicuro $m_0 = \sum_{s=1}^S m_s$ ed il suo rendimento $r_f = \frac{1}{m_0}$
Se il mercato è completo, possiamo invertire D e fare:

$$m = (D^T)^{-1}q$$

Per replicarle mi basta creare il portafoglio il cui valore sia uguale ad m facendo:

$$Dw = \mathbf{1}$$

Assenza di Arbitraggio

In assenza di opportunità di Arbitraggio troveremo che:

$$m = D^{-T}q > 0$$

CAPM

CCAPM

1. Trovo il ptf $\tilde{r}^m$ che riproduce la ricchezza in tutti i dati stati, il suo prezzo ed il suo rendimento atteso
2. Trovo $\beta_{CAPM} = \frac{Cov(u'(\tilde{x}^m, \tilde{r}_n))}{Cov(u'(\tilde{x}^m, \tilde{r}_m)}$
3. Trovo il rendimento del titolo privo di rischio r_f
4. Uso la relazione

$$E[\tilde{r}_n] - r_f = \beta(E[\tilde{r}^m] - r_f)$$

Arbitrage Pricing Theory

N titoli e un titolo sicuro r_f
I rendimenti sono generati da una media e da k fattori di rischio $\tilde{x}_i$

$$\tilde{r}_n = \sum_{h=1}^k b_{nh}\tilde{x}_h \quad \forall n$$

Portafogli Puri

Il portafoglio puro w_s è il portafoglio tale che:

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{N} w_s b_{ns} = 1 \\ \sum_{n=1}^{N} w_j b_{nj} = 0 \quad \forall j \neq s \\ \sum_{n=1}^{N} w_n = 1 \end{cases}$$

Portafoglio privo di rischio

Il portafoglio puro w_s è il portafoglio tale che:

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{N} w_s b_{ns} = 0 \quad \forall s \\ \sum_{n=1}^{N} w_n = 1 \end{cases}$$

Portafoglio di replica

Dato un titolo:

$$\tilde{r}_{N+1} = \alpha + \sum_{h=1}^{k} b_{N+1\,k} \tilde{x}_h$$

Il suo portafoglio di replica è il portafoglio tale che:

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{N} w_r b_{nk} = b_{N+1\,k} \quad \forall k \\ \sum_{n=1}^{N} w_n = 1 \end{cases}$$

Allora:

$$E[\tilde{r}_r] = \alpha$$

Verifica APT

Definiamo $\lambda_h = E[\tilde{r}_h] - r_f$ per ogni portafoglio puro. Se non c'è arbitraggio allora:

$$\alpha - r_f = w_r \cdot \lambda$$

Put e Call Option

Abbiamo un titolo rischioso (Stock) e uno non rischioso (Bond) i cui valori di mercato sono $S(t), B(t)$.
Abbiamo delle opzioni esercitabili sul sottostante S, con strike-price K.

Call

La call option restituisce:

$$max(S - K, 0)$$

Put

La put option restituisce:

$$max(0, K - S)$$

Albero Binomiale

- **Bond**: passa dal valore $B(0)$ in $t = 0$ al valore $B(0)r_f$ in $t = 1$
- **Stock**: il suo valore è una bernoulli di ragione p:

$$\begin{cases} S(0)u & \pi = p \\ S(0)d & \pi = 1 - p \end{cases}$$

Dove u, d stanno per *up, down*, e perchè non ci sia arbitraggio: $u > r_f > d$

Value at Risk e Expected Shortfall

I dati che ci servono sono:
μ, media, σ, deviazione std (fai la radice), h le unità di tempo passato e il livello p

- **Logaritmici Normali**

$$VaR = -h\mu + \sigma\sqrt{h}\Phi(1 - p)$$
$$ES = -h\mu + \frac{\sigma}{ph}\Phi(\phi(1 - p))$$

- **Giornalieri**

$$VaR = h(1 - \mu) + \sigma\sqrt{h}\Phi(1 - p)$$
$$ES = h(1 - \mu) + \frac{\sigma}{ph}\Phi(\phi(1 - p))$$

- **Perdita**

$$VaR = h\mu + \sigma\sqrt{h}\Phi(1 - p)$$
$$ES = h\mu + \frac{\sigma}{ph}\Phi(\phi(1 - p))$$

Portafogli e Subadditività

Se abbiamo un portafoglio:
$\mu = w \cdot e$ e $\sigma = \sqrt{W^t V w}$, inoltre, se vale la Subadditività:

$$VaR(\tilde{R}) \leq \sum_{i=1}^{N} VaR(\tilde{R}_n)$$

L'ES è sempre subadditivo.

Specchieto sulla normale

$$\Phi(0.99) = 0.83891$$
$$\Phi(\phi(0.99)) = 0.00667$$