Risposte ai Quesiti Teorici

del corso di Analisi II del prof. Fabio Punzo

Jacopo Stringara

12 agosto 2020

Indice

1 Foglio 1 **4**
Quesito 1 . . . 4
Quesito 2 . . . 4
Quesito 3 . . . 5
Quesito 4 . . . 5
Quesito 5 . . . 6
Quesito 6 . . . 6
Quesito 7 . . . 6
Quesito 8 . . . 6
Quesito 9 . . . 6
Quesito 10 . . . 6

2 Foglio 2 **7**
Quesito 1 . . . 7
Quesito 2 . . . 7
Quesito 3 . . . 7
Quesito 4 . . . 7
Quesito 5 . . . 7
Quesito 6 . . . 8
Quesito 7 . . . 8
Quesito 8 . . . 8
Quesito 9 . . . 8
Quesito 10 . . . 8

3 Foglio 3 **9**
Quesito 1 . . . 9
Quesito 2 . . . 9
Quesito 3 . . . 9
Quesito 4 . . . 9
Quesito 5 . . . 9
Quesito 6 . . . 10
Quesito 7 . . . 10
Quesito 8 . . . 10
Quesito 9 . . . 10
Quesito 10 . . . 10

4 Foglio 4 **11**
Quesito 1 . . . 11
Quesito 2 . . . 11
Quesito 3 . . . 11
Quesito 4 . . . 11
Quesito 5 . . . 11
Quesito 6 . . . 11

Quesito 7 . . . 12
Quesito 8 . . . 12
Quesito 9 . . . 12
Quesito 10 . . . 12

5 Foglio 5 **13**
Quesito 1 . . . 13
Quesito 2 . . . 13
Quesito 3 . . . 13
Quesito 4 . . . 13
Quesito 5 . . . 13
Quesito 6 . . . 13
Quesito 7 . . . 14
Quesito 8 . . . 14
Quesito 9 . . . 14
Quesito 10 . . . 14

6 Foglio 6 **15**
Quesito 1 . . . 15
Quesito 2 . . . 15
Quesito 3 . . . 15
Quesito 4 . . . 15
Quesito 5 . . . 15
Quesito 6 . . . 15
Quesito 7 . . . 16
Quesito 8 . . . 16
Quesito 9 . . . 16
Quesito 10 . . . 16

7 Foglio 7 **17**
Quesito 1 . . . 17
Quesito 2 . . . 17
Quesito 3 . . . 17
Quesito 4 . . . 17
Quesito 5 . . . 17
Quesito 6 . . . 17
Quesito 7 . . . 18
Quesito 8 . . . 18
Quesito 9 . . . 18
Quesito 10 . . . 18

8 Foglio 8 **19**
Quesito 1 . . . 19
Quesito 2 . . . 19
Quesito 3 . . . 19
Quesito 4 . . . 19
Quesito 5 . . . 19
Quesito 6 . . . 20
Quesito 7 . . . 20
Quesito 8 . . . 20
Quesito 9 . . . 20
Quesito 10 . . . 20

9 Foglio 9 **21**
Quesito 1 . . . 21
Quesito 2 . . . 21
Quesito 3 . . . 21
Quesito 4 . . . 21
Quesito 5 . . . 21
Quesito 6 . . . 22
Quesito 7 . . . 22
Quesito 8 . . . 22
Quesito 9 . . . 22
Quesito 10 . . . 22

10 Foglio 10 **23**
Quesito 1 . . . 23
Quesito 2 . . . 23
Quesito 3 . . . 23
Quesito 4 . . . 23
Quesito 5 . . . 23
Quesito 6 . . . 23
Quesito 7 . . . 24
Quesito 8 . . . 24
Quesito 9 . . . 24
Quesito 10 . . . 24

11 Foglio 11 **25**
Quesito 1 . . . 25
Quesito 2 . . . 25
Quesito 3 . . . 25
Quesito 4 . . . 25
Quesito 5 . . . 25
Quesito 6 . . . 25
Quesito 7 . . . 26
Quesito 8 . . . 26
Quesito 9 . . . 26
Quesito 10 . . . 26

12 Foglio 12 **27**
Quesito 1 . . . 27
Quesito 2 . . . 27
Quesito 3 . . . 27
Quesito 4 . . . 27
Quesito 5 . . . 27
Quesito 6 . . . 28
Quesito 7 . . . 28
Quesito 8 . . . 28
Quesito 9 . . . 28
Quesito 10 . . . 28

Foglio 1

Quesito 1

Dare le definizioni di: curva, equazioni parametriche di una curva, sostegno di una curva, curva semplice, curva chiusa. Esibire: una curva semplice, una curva che non è semplice, una curva chiusa, una curva che non è chiusa, due curve diverse con lo stesso sostegno.

Soluzione

Si dice **Curva** un'applicazione continua $\varphi : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ e chiamiamo **Equazioni Parametriche** le equazioni:

$$t \in I \quad \varphi(t) = \begin{cases} x_1 = \varphi_1(t) \\ \vdots \\ x_n = \varphi_n(t) \end{cases}$$

Inoltre definiamo **Sostegno** della Curva l'insieme $\varphi(I) \subseteq \mathbb{R}^n$
Diremo che una Curva $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ è **Semplice** se:

$$\forall t_1, t_2 \in I \text{ con } t_1 \neq t_2 \text{ (di cui uno interno)} \implies \varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$$

Una curva $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ invece si dice **Chiusa** se $\varphi(a) = \varphi(b)$.
Esempi:

Semplice: $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)\ t \in [0, 2\pi]$
Non Semplice: $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)\ t \in [0, 4\pi]$
Chiusa: $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)\ t \in [0, 2\pi]$
Non Chiusa: $\gamma(t) = (t^2, t)\ t \in [0, 1]$
Curve diverse con stesso sostegno: $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)\ t \in [0, 2\pi]$ e $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)\ t \in [0, 4\pi]$

Quesito 2

Dare le definizioni di curva regolare, di curva regolare a tratti, di versore tangente T. Esibire una curva di classe C^1 il cui sostegno abbia una cuspide.

Soluzione

Diremo che una Curva $\varphi : I = [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ è **Regolare** se:

$$\varphi \in C^1(I) \text{ e } \forall t \in (a, b) \quad \varphi'(t) \neq 0 \text{ (o equivalentemente } \|\varphi'(t)\|^2 \neq 0).$$

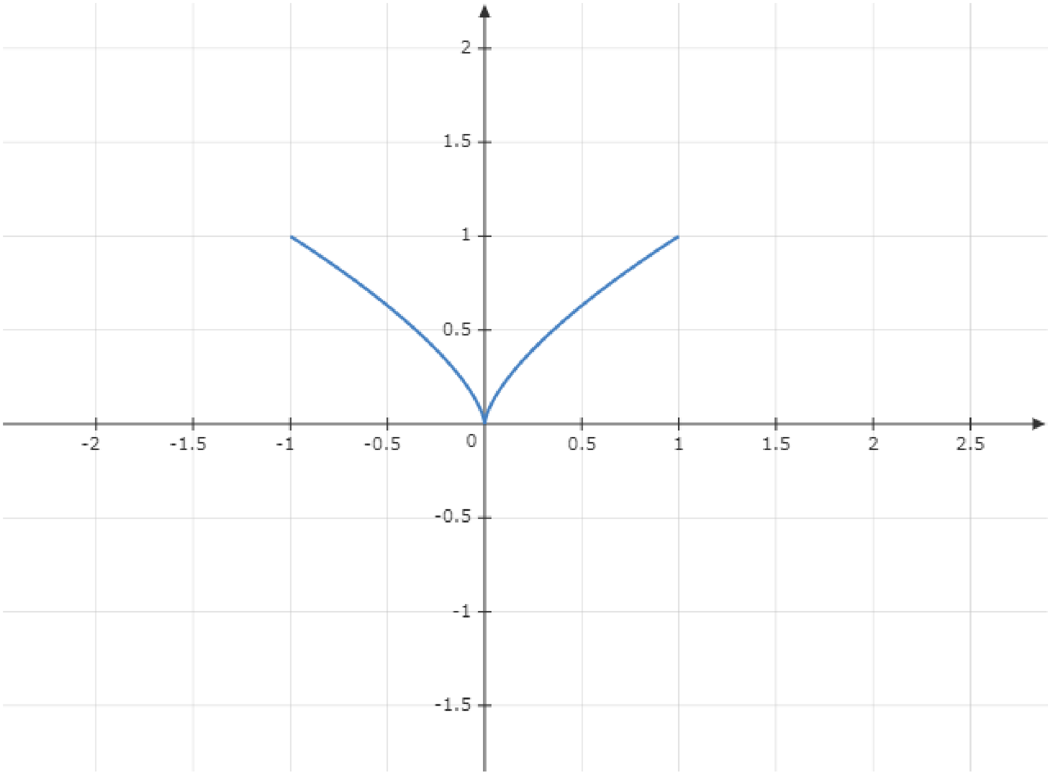
Diremo invece che è **Regolare a Tratti** se l'insieme I è divisibile in N ($\in \mathbb{N}$) tratti in cui φ è Regolare. Infine chiamiamo **Versore Tangente** alla Curva nel punto t_0 il vettore:

$$T(t_0) = \frac{\varphi'(t_0)}{\|\varphi'(t_0)\|}$$

Un esempio di Curva C^1 con Cuspide è il seguente:

$$\varphi(t) = (t^3, t^2) \quad t \in [-1, 1]$$

Infatti si nota facilmente che $\varphi \in C^1([-1, 1])$, tuttavia non è Regolare in 0 poichè $\varphi'(0) = (0, 0)$. Se ne facciamo il grafico:



Quesito 3

Dire cosa si intende per orientamento o verso di percorrenza di una curva. Esibire due curve con lo stesso sostegno, ma con orientamento opposto. Dare la definizione di curve equivalenti. Sotto quali condizioni sul cambiamento di parametro due curve equivalenti hanno lo stesso orientamento o orientamento opposto?

Soluzione

Diremo che un punto $P_1 = \varphi(t_1)$ di una Curva precede un altro punto $P_2 = \varphi(t_2)$ se $t_1 < t_2$. Due curve con stesso sostegno ma orientamento opposto sono le seguenti:

$$\varphi(t) = (\cos t, \sin t) \text{ e } \gamma(t) = (\sin t, \cos t) \text{ con } t \in [0, 2\pi]$$

Diremo che due Curve $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ e $\gamma : J \to \mathbb{R}^n$ sono **Equivalenti** se:

$$\exists\, g : I \to J \text{ suriettiva, } C^1,\ g'(t) \neq 0\ \forall t \in I \text{ tale che: } \varphi(t) = \gamma(g(t))$$

E inoltre avranno lo stesso verso se $g'(t) > 0$ e opposto se invece $g'(t) < 0$

Quesito 4

Dare le definizioni di lunghezza di una curva e di curva rettificabile. Scrivere la formula che fornisce la lunghezza di una curva di classe C^1.

Soluzione

Quesito 5

Cosa si intende per ascissa curvilinea (o parametro d'arco). Mostrare che data una curva regolare si può sempre trovare una curva ad essa equivalente parametrizzata con l'ascissa curvilinea.

Soluzione

Quesito 6

Scrivere la definizione di integrale curvilineo di prima specie. Dimostrare che l'integrale curvilineo di prima specie è invariante per curve equivalenti. Dedurne che due curve equivalenti hanno la stessa lunghezza.

Soluzione

Quesito 7

Sia $\varphi = \varphi(s)$ una curva con s ascissa curvilinea. Dare la definizione di curvatura di φ e spiegarne il significato geometrico. Quando φ si dice biregolare? Riferendosi a φ, dare le definizioni di: versore normale principale $N(s)$, versore binormale $B(s)$. Mostrare che $T(s)$, $N(s)$, $B(s)$ formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$. Scrivere le definizioni dei piani osculatore, normale, rettificante. Dire cosa si intende per cerchio osculatore e per raggio di curvatura.

Soluzione

Quesito 8

Dare la definizione di curva piana. Sia $\varphi = \varphi(s)$ una curva con s ascissa curvilinea. Definire la torsione di φ e illustrarne il significato geometrico. In che modo la torsione e il versore binormale sono collegati al fatto che una curva è piana?

Soluzione

Quesito 9

Scrivere e dimostrare le formule di Frénet.

Soluzione

Quesito 10

Data una curva $\varphi = \varphi(t)$ con t parametro qualsiasi, scrivere $T(t)$, $N(t)$, $B(t)$, la curvatura $\kappa(t)$ e la torsione $\tau(t)$. Inoltre, scrivere e dimostrare la formula di decomposizione dell'accelerazione.

Soluzione

Foglio 2

Quesito 1

Dire cosa si intende per equazione differenziale ordinaria lineare del primo ordine. Scrivere la formula risolutiva e dimostrarla. Inoltre, scrivere la formula risolutiva del problema di Cauchy associato e dimostrarla

Soluzione

Quesito 2

Dire cosa si intende per equazioni differenziale ordinaria lineare del secondo ordine a coefficienti costanti omogenea. Qual è il polinomio caratteristico? Dire qual è l'integrale generale e spiegare come si ricava.

Soluzione

Quesito 3

Qual è la struttura dell'integrale generale di una equazione differenziale ordinaria lineare del secondo ordine completa? Illustrare il metodo di somiglianza per la determinazione di una soluzione particolare, nei casi in cui il termine noto è un polinomio o una funzione esponenziale o una funzione trigonometrica.

Soluzione

Quesito 4

Dare le definizioni di: punto interno, punto esterno, punto di frontiera (o di bordo), interno di un insieme, frontiera (o bordo), chiusura. Fornire esempi.

Soluzione

Quesito 5

Dire cosa si intende per insieme aperto, per insieme chiuso e per insieme limitato. Caratterizzare gli insiemi aperti in termini del loro interno, e gli insiemi chiusi in termini della loro chiusura. Fornire esempi.

Soluzione

Quesito 6

Dare la definizione di insieme compatto. Enunciare il teorema di Heine-Borel. Dare la definizione di insiemi connesso e le definizioni equivalenti di insieme connesso per archi e di insieme connesso per poligonali. Dare la definizione di insieme convesso. Fornire esempi.

Soluzione

Quesito 7

Dire cosa si intende per insieme di definizione di una funzione di più variabili $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e per insieme di livello. Scrivere la definizione di limite.

Soluzione

Quesito 8

Spiegare come le restrizioni di una funzione $f(x, y)$ lungo successioni, grafici di funzioni e curve permettono di dedurre la non esistenza del limite o di determinare un candidato limite.

Soluzione

Quesito 9

Illustrare come si può utilizzare il teorema del confronto (o dei due carabinieri) per il calcolo di limiti di funzioni di più variabili. Enunciare il criterio che permette il 1 calcolo di limiti per funzioni di due variabili tramite le coordinate polari. E' vero che se

$$f(x_0 + \rho\cos\vartheta, y_0 + \rho\sin\vartheta) \xrightarrow[\rho\to 0]{} L \quad \forall\vartheta \in [0, 2\pi],$$

allora

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L\ ?$$

Soluzione

Quesito 10

Dare la definizione di funzione di più variabili continua in un punto e di funzione Lipschitziana in un sottoinsieme. Enunciare il teorema di Weierstrass e il teorema di esistenza dei valori intermedi.

Soluzione

Foglio 3

Quesito 1

Dare la definizione di derivate parziali, di funzione derivabile e di gradiente. Può una funzione di due variabili essere derivabile in un punto (x_0, y_0) e non essere continua in (x_0, y_0)?

Soluzione

Quesito 2

Dare la definizione di derivata direzionale. In che modo le derivata parziali sono collegate alle derivate direzionali? Può una funzione di due variabili essere derivabile in un punto (x_0, y_0) lungo ogni direzione e non essere continua in (x_0, y_0)?

Soluzione

Quesito 3

Dare la definizione di funzione differenziabile in un punto. Scrivere l'equazione del piano tangente in un punto al grafico di una funzione di due variabili; sotto quale ipotesi su f esiste? Dimostrare che una funzione differenziabile in un punto (x_0, y_0) è continua e derivabile in (x_0, y_0). Enunciare e dimostrare la formula del gradiente.

Soluzione

Quesito 4

Enunciare e dimostrare il teorema del differenziale totale.

Soluzione

Quesito 5

Enunciare e dimostrare il teorema sulle direzioni di massima e di minima crescita.

Soluzione

Quesito 6

Enunciare il teorema di derivazione di funzioni composte. Dimostrare che il gradiente di una funzione di due variabili è ortogonale alle curve di livello.

Soluzione

Quesito 7

Definire le derivate parziali seconde e la matrice Hessiana. Esibire una funzione per cui $f_{xy}(x_0, y_0) \neq f_{yx}(x_0, y_0)$, per qualche (x_0, y_0).

Soluzione

Quesito 8

Enunciare il teorema di Schwarz. Sotto quale ipotesi su f la matrice Hessiana è simmetrica?

Soluzione

Quesito 9

Enunciare e dimostrare il teorema di Lagrange e la formula di Taylor con resto di Lagrange per funzioni di più variabili.

Soluzione

Quesito 10

Enunciare e dimostrare la formula di Taylor con resto di Peano.

Soluzione

Foglio 4

Quesito 1

Dare la definizione di funzione k volte differenziabile in un punto. Sotto quali ipotesi su f, vale la formula di Taylor di ordine k (cioè f è k volte differenziabile)?

Soluzione

Quesito 2

Cosa si intende per matrice Jacobiana di una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$? Scrivere la formula sulla matrice Jacobiana di funzione composta.

Soluzione

Quesito 3

Dare le definizioni di punto: di minimo relativo, di massimo relativo, di sella, critico o stazionario. Enunciare e dimostrare il teorema di Fermat.

Soluzione

Quesito 4

Enunciare e dimostrare il criterio della matrice Hessiana per la classificazione di punti critici.

Soluzione

Quesito 5

Enunciare e dimostrare la condizione necessaria perché un punto sia di massimo o di minimo relativo.

Soluzione

Quesito 6

Illustrare, anche mediante degli esempi, come si procede per classificare un punto critico quando la matrice Hessiana nel punto è semidefinita negativa o positiva.

Soluzione

Quesito 7

Enunciare e dimostrare il teorema del Dini

Soluzione

Quesito 8

Enunciare il teorema del Dini nel caso in cui $F(x_0, y_0) = 0,\ F_x(x_0, y_0) \neq 0$

Soluzione

Quesito 9

Enunciare e dimostrare la versione globale del teorema della funzione implicita.

Soluzione

Quesito 10

Sotto quali ipotesi su F, la funzione definita implicitamente f è di classe C^k? Nel caso esista, come si trova $f''(x)$?

Soluzione

Foglio 5

Quesito 1

Enunciare il teorema del Dini nel caso in cui $F : A \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$.

Soluzione

Quesito 2

Enunciare il teorema del Dini nel caso in cui $F : A \subseteq \mathbb{R}^{n+h} \to \mathbb{R}^h$.

Soluzione

Quesito 3

Mostrare che, applicando il teorema precedente in un intorno di un punto P_0 ad una funzione $F : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, si vede che l'insieme degli zeri di F in un intorno di P_0 è il sostegno di una curva regolare, semplice. Ricavare un vettore parallelo al vettore tangente alla curva nel punto.

Soluzione

Quesito 4

Illustrare come si studia il grafico di una funzione $y = f(x)$ definita implicitamente globalmente da una equazione del tipo $F(x, y) = 0$.

Soluzione

Quesito 5

Utilizzando il teorema del Dini, dimostrare che ∇F è ortogonale all'insieme degli zeri di una funzione $F(x, y)$. Come si ottiene lo stesso risultato nel caso di un insieme di livello generale?

Soluzione

Quesito 6

Dire cosa si intende per vincolo di uguaglianza. Dare le definizioni di: punto di minimo vincolato, punto di massimo vincolato, punto di estremo vincolato, punto di minimo relativo vincolato, punto di massimo relativo vincolato, punto di estremo relativo vincolato.

Soluzione

Quesito 7

Cosa si intende per derivata tangenziale al vincolo? Dare la definizione per punto critico (o singolare) vincolato.

Soluzione

Quesito 8

Illustrare come si determinano punti di massimo e di minimo vincolati nel caso di vincolo esplicitabile tramite il sostegno di una curva o l'unione di un numero finito di grafici di funzioni di una variabile.

Soluzione

Quesito 9

Dare le definizioni di punto regolare e di punto singolare di un vincolo. Come si definisce la Lagrangiana? Enunciare e dimostrare il teorema dei moltiplicatori di Lagrange. Quale parte del teorema dei moltiplicatori di Lagrange può essere vista come una versione vincolata del teorema di Fermat?

Soluzione

Quesito 10

Illustrare come si determinano i punti di minimo e di massimo assoluto di una funzione $f(x, y)$ continua in un insieme compatto $K \subseteq \mathbb{R}^2$.

Soluzione

Foglio 6

Quesito 1

Dare le definizioni di misura interna ed esterna di un insieme limitato di $\mathbb{R}^n$, di insieme misurabile secondo Peano-Jordan e di misura di un insieme.

Soluzione

Quesito 2

Esibire delle classi di insiemi misurabili in $\mathbb{R}^2$ e in $\mathbb{R}^3$.

Soluzione

Quesito 3

Esibire, motivando la risposta, un insieme di $\mathbb{R}^2$ non misurabile secondo PeanoJordan.

Soluzione

Quesito 4

Dare le definizioni di somme inferiori e superiori di Riemann, di funzione integrabile secondo Riemann e di integrale di Riemann. Quale classe di funzioni è integrabile secondo Riemann su insiemi compatti misurabili?

Soluzione

Quesito 5

Scrivere le formule di riduzione (o di Fubini-Tonelli) per integrali doppi. Dare una giustificazione approssimativa della formula.

Soluzione

Quesito 6

Dare le definizioni di dominio normale regolare e di dominio regolare. Scrivere il teorema sulla formula di cambiamento di coordinate negli integrali doppi. Spiegare come va intesa l'ipotesi ϕ di classe C^1 sul dominio regolare Ω', che è chiuso.

Soluzione

Quesito 7

Perché non si può applicare il teorema del Quesito 6 per ricavare il passaggio da coordinate cartesiane a polari negli integrali doppi? Quale estensione del precedente teorema permette di ottenere tale cambio di coordinate? Motivare le risposte.

Soluzione

Quesito 8

Scrivere le formule di integrazione per fili e per strati negli integrali tripli. Dare una giustificazione approssimativa della formula.

Soluzione

Quesito 9

Enunciare e dimostrare il teorema di Pappo-Guldino.

Soluzione

Quesito 10

Spiegare come si definiscono gli integrali impropri (o generalizzati) in $\mathbb{R}^n$, considerando il segno della funzione. Calcolare l'integrale della Gaussiana.

Soluzione

Foglio 7

Quesito 1

Dare le definizioni di forma differenziale e di campo vettoriale.

Soluzione

Quesito 2

Come si definisce l'integrale curvilineo di seconda specie di una forma differenziale? E quello di un campo vettoriale?

Soluzione

Quesito 3

L'integrale curvilineo di seconda specie di una forma differenziale su due curve equivalenti cambia? Motivare la risposta.

Soluzione

Quesito 4

Dare la definizione di forma differenziale esatta e di campo vettoriale conservativo. Cosa si intende per primitiva di una forma differenziale e per potenziale di un campo vettoriale?

Soluzione

Quesito 5

Come si calcola l'integrale curvilineo di seconda specie di una forma differenziale esatta o di un campo vettoriale conservativo?

Soluzione

Quesito 6

Quanto vale l'integrale curvilineo di seconda specie di una forma differenziale esatta lungo una curva chiusa? Motivare la risposta. Come si riformula lo stesso risultato per i campi vettoriali conservativi?

Soluzione

Quesito 7

Enunciare e dimostrare il teorema sulla caratterizzazione delle forme differenziali esatte.

Soluzione

Quesito 8

Dare la definizione di forma differenziale chiusa e di campo vettoriale irrotazionale.

Soluzione

Quesito 9

Dimostrare che una forma differenziale esatta è anche chiusa.

Soluzione

Quesito 10

Esibire una forma differenziale chiusa che non sia esatta.

Soluzione

Foglio 8

Quesito 1

Dare la definizione di insieme semplicemente connesso. Fornire esempi di insiemi di insiemi semplicemente connessi e di insiemi non semplicemente connessi, in $\mathbb{R}^2$ e in $\mathbb{R}^3$.

Soluzione

Quesito 2

Dare le definizioni di insieme convesso e di insieme stellato rispetto a un punto. In che relazione sono con gli insiemi semplicemente connessi? Fornire un esempio di insiemi semplicemente connesso che non sia convesso e un altro che non sia stellato.

Soluzione

Quesito 3

Sotto quale ipotesi sull'insieme A, una forma differenziale chiusa in A (un campo vettoriale irrotazionale) è anche esatta in A (conservativo)? Che succede se si elimina tale ipotesi su A?

Soluzione

Quesito 4

Come si può rappresentare il bordo di un dominio regolare di $\mathbb{R}^2$? Sul bordo sono ben definiti i versori tangente e normale?

Soluzione

Quesito 5

Cosa si intende per orientazione positiva della frontiera di un dominio regolare di $\mathbb{R}^2$? E' corretto dire che coincide con la frontiera percorsa in verso antiorario? Motivare la risposta con degli esempi.

Soluzione

Quesito 6

Enunciare e dimostrare le formule di Gauss-Green in domini normali regolari rispetto all'asse x o rispetto all'asse y.

Soluzione

Quesito 7

Dedurre le formule di Gauss-Green in domini regolari che sono normali sia rispetto all'asse x che all'asse y.

Soluzione

Quesito 8

Enunciare le formule di Gauss-Green in domini regolari.

Soluzione

Quesito 9

Scrivere e dimostrare le formule che permettono di calcolare l'area di una regione piana mediante le formule di Gauss-Green.

Soluzione

Quesito 10

Come si calcola l'area di una regione del piano racchiusa dal sostegno di una curva di cui è data l'equazione polare? Perché?

Soluzione

Foglio 9

Quesito 1

Dare la definizione di superficie regolare, di equazioni parametriche di una superficie regolare, di sostegno di una superficie regolare. Inoltre, dare le definizioni di superficie, di superficie semplice, di punti regolari di una superficie.

Soluzione

Quesito 2

Qual è il piano tangente a una superficie regolare in un punto? Qual è il versore normale?

Soluzione

Quesito 3

Qual è l'area di una superficie regolare? Come si definisce l'integrale di superficie di una funzione continua definita sul sostegno della superficie?

Soluzione

Quesito 4

Dare la definizione di superficie orientabile. Spiegare il significato geometrico di superficie orientabile e di superficie non orientabile. Come si costruisce il nastro di Moebius?

Soluzione

Quesito 5

Dare la definizione di superficie regolare con bordo. Inoltre, dire come si può definire, in maniera geometrica, il bordo del sostegno di una superficie orientabile. Una superficie orientabile quando si dice chiusa? Dare la definizione di orientazione positiva del bordo di una superficie con bordo. Come si può spiegare geometricamente tale orientazione?

Soluzione

Quesito 6

Dare la definizione di flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie; cosa si intende per flusso entrante o uscente? Dare la definizione di circuitazione di un campo vettoriale lungo il bordo di una superficie.

Soluzione

Quesito 7

Enunciare il teorema di Stokes.

Soluzione

Quesito 8

Qual è la divergenza di un campo vettoriale C^1 ? Enunciare il teorema della divergenza nello spazio. Ricavare le formule di integrazione per parti che seguono dal teorema della divergenza nello spazio. Enunciare e dimostrare il teorema della divergenza nel piano.

Soluzione

Quesito 9

Dare le definizioni di convergenza puntuale e di convergenza uniforme di una successione di funzioni. Dimostrare che se $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ uniformemente in $I \subseteq \mathbb{R}$, allora $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ puntualmente in I; inoltre, mostrare che il viceversa non è vero in generale.

Soluzione

Quesito 10

Scrivere le condizioni di Cauchy puntuale ed uniforme per una successione di funzioni. Enunciare il criterio di Cauchy puntuale. Enunciare e dimostrare il criterio di Cauchy uniforme.

Soluzione

Foglio 10

Quesito 1

Enunciare e dimostrare il teorema dell'inversione dei limiti per successioni di funzioni e il corollario sulla continuità della funzione limite. In che modo il corollario si può usare per lo studio della convergenza uniforme?

Soluzione

Quesito 2

Enunciare i teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale e sotto il segno di derivata. Discutere, mediante esempi, l'importanza delle ipotesi.

Soluzione

Quesito 3

Dare le definizioni di serie di funzioni, di somma, di convergenza puntuale e uniforme.

Soluzione

Quesito 4

Enunciare i criteri di Cauchy puntuale e uniforme per le serie di funzioni. Dare la definizione di convergenza totale per una serie di funzioni. Enunciare e dimostrare il criterio di Weierstrass.

Soluzione

Quesito 5

Enunciare i teoremi sulla continuità della somma, di integrazione per serie, di derivazione per serie.

Soluzione

Quesito 6

Dare le definizioni di distanza (o metrica) su un insieme e di spazio metrico. Fornire esempi. Dare le definizioni di successione convergente e di successione di Cauchy in uno spazio metrico. Dare la definizione di spazio metrico completo.

Soluzione

Quesito 7

Caratterizzare la convergenza e la condizione di Cauchy per successioni nello spazio metrico $C^0([a,b])$ equipaggiato con la metrica Lagrangiana. Dimostrare che tale spazio metrico è completo. Esibire una metrica che rende $C^0([a,b])$ uno spazio metrico non completo.

Soluzione

Quesito 8

Dare la definizione di insieme chiuso in uno spazio metrico. Dimostrare che un insieme chiuso in uno spazio metrico completo è esso stesso uno spazio metrico completo.

Soluzione

Quesito 9

Per una funzione definita in uno spazio metrico e a valori in uno spazio metrico dare le definizioni di: continuità in un punto, Lipschitzianità. Cosa si intende per contrazione? Enunciare e dimostrare il teorema delle contrazioni (o di Banach-Caccioppoli).

Soluzione

Quesito 10

Dire cosa si intende: per equazione differenziale ordinaria di ordine n e per soluzione; per equazione differenziale ordinaria di ordine n in forma normale; per sistema di equazioni differenziali del primo ordine di n equazioni e per soluzione. Un sistema differenziale quando si dice lineare? Quando si dice autonomo? Dimostrare l'equivalenza tra equazioni differenziali ordinarie di ordine n in forma normale e sistemi di equazioni differenziali del primo ordine di n equazioni.

Soluzione

Foglio 11

Quesito 1

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ un aperto, $f : A \to R^n$. Per $(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$ poniamo $(x, y) \equiv (x, y^1, \dots, y^n)$. Dire cosa si intende per funzione f: (i) Lipischitziana nell'insieme A nella variabile y uniformemente rispetto alla variabile x; (ii) localmente Lipischitziana nell'insieme A nella variabile y uniformemente rispetto alla variabile x.

Soluzione

Quesito 2

Enunciare e dimostrare il teorema sull'equivalenza tra problema di Cauchy ed equazione integrale di Volterra.

Soluzione

Quesito 3

Enunciare e dimostrare il teorema di esistenza ed unicità locale per il problema di Cauchy.

Soluzione

Quesito 4

Enunciare il teorema di esistenza ed unicità globale per il problema di Cauchy.

Soluzione

Quesito 5

Illustrare, mediante esempi, cosa può succedere quando non è soddisfatta l'ipotesi di sublinearità richiesta nel teorema di esistenza ed unicità globale per il problema di Cauchy.

Soluzione

Quesito 6

Spiegare come si risolvono equazioni differenziali lineari del primo ordine: a variabili separabili, ad esse riconducibili, omogenee, esatte, di Bernoulli.

Soluzione

Quesito 7

Due soluzioni di una equazione differenziale ordinaria del primo ordine, con $f(x, y)$ verificante le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità locale, possono essere uguali in un solo punto x_0? Perché?

Soluzione

Quesito 8

Dare la definizione di prolungamento di una soluzione, di prolungamento massimale e di intervallo massimale di esistenza. Mostrare che la soluzione data dal teorema di esistenza ed unicità locale ammette un prolungamento. Cosa succede se si itera la costruzione del prolungamento? Sia $I = (\alpha, \beta)$ l'intervallo massimale di esistenza; cosa può succedere alla soluzione $y(x)$ per $x \to \beta^-$ e per $x \to \alpha^+$?

Soluzione

Quesito 9

Enunciare e dimostrare il lemma di Gronwall. Come si può dimostrare l'unicità di soluzioni con il lemma di Gronwall?

Soluzione

Quesito 10

Enunciare e dimostrare i teoremi sulla dipendenza continua dal dato iniziale e da parametri.

Soluzione

Foglio 12

Quesito 1

Enunciare il teorema di esistenza Peano per il problema di Cauchy per equazioni differenziali ordine del primo ordine. Mostrare con un esempio che in generale, sotto le ipotesi del teorema, non vale l'unicità.

Soluzione

Quesito 2

Cosa si intende per analisi qualitativa di soluzioni di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine? Illustrare i vari punti in cui è solitamente articolata. Enunciare: il criterio dell'asintoto, il teorema del confronto e il teorema di monotonìa.

Soluzione

Quesito 3

Dire cosa si intende per sistema differenziale lineare del primo ordine di n equazioni, per sistema omogeneo e per sistema autonomo. Introdurre l'applicazione associata e dimostrare che è lineare. Quali conseguenze ha la linearità sulla somma di soluzioni? Qual è il sistema lineare associato a una equazione differenziale lineare di ordine n? Perché?

Enunciare e dimostrare il teorema di esistenza ed unicità globale per sistemi differenziali lineari del primo ordine di n equazioni.

Soluzione

Quesito 4

Enunciare e dimostrare il teorema di struttura dell'insieme delle soluzioni di sistemi differenziali lineari del primo ordine di n equazioni omogenei e completi.

Soluzione

Quesito 5

Dare le definizioni di soluzioni, di un sistema differenziale lineare omogeneo, linearmente indipendenti e linearmente dipendenti. Per quali $x \in I$ si richiede che le dovute condizioni siano verificate? Perchè? Dare la definizione di sistema fondamentale di soluzioni per un sistema differenziale lineare omogeneo.

Soluzione

Quesito 6

Dare la definizione di matrice Wronskiana e di determinante Wronskiano per sistemi lineari omogenei. Come si caratterizzano, in termini di determinante Wronskiano, n soluzioni linearmente indipendenti di un sistema omogeneo di n equazioni? Qual è la matrice Wronskiana per una equazione lineare omogenea di ordine n? Enunciare e dimostrare le proprietà della matrice Wronskiana. Enunciare il teorema di Liouville.

Soluzione

Quesito 7

Dire qual è l'integrale generale di un sistema differenziale del primo ordine omogeneo a coefficienti costanti di 2 equazioni e dimostrarlo.

Soluzione

Quesito 8

Dire qual è l'integrale generale di una equazione differenziale del secondo ordine omogenea a coefficienti costanti e dimostrarlo.

Soluzione

Quesito 9

Scrivere e dimostrare la formula risolutiva di un sistema differenziale del primo ordine completo di n equazioni a coefficienti continui, mediante il metodo di variazione delle costanti.

Soluzione

Quesito 10

Illustrare, fornendone la dimostrazione, il metodo di variazione delle costanti per equazioni differenziali del secondo ordine complete a coefficienti costanti.

Soluzione