Formule

Capitalizzazioni

- **Semplice** $W(t) = S(1+it)$
- **Composta** $W(t) = S(1+i)^t$
- **Esponenziale** $W(t) = Se^{yt = t\ln(1+i)}$

A pronti e a Termine

A pronti

- $i(t,T) = -\frac{p(t,T)-1}{(T-t)p(t,T)}$
- $y(t,T) = -\frac{\ln(p(t,T))}{(T-t)}$

Relazione Prezzi

$$p(t,S,T) = \frac{p(t,T)}{p(t,S)}$$

A termine

- $i(t,S,T) = -\frac{p(t,S,T)-1}{(T-S)p(t,S,T)}$
- $y(t,S,T) = -\frac{\ln(p(t,S,T))}{(T-S)}$

Relazione Tassi

$$(1+i(t,t+k))^k = \prod_{j=1}^{k}(1+i(t,t+j-1,t+j))$$

$$y(t,t+k) = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} y(t,t+j-1,t+j)$$

Bootstrapping

$x \in [T_1, T_2]$

$$i(t,x) = \frac{(T_2-x)i(t,T_1)+(x-T_1)i(t,T_2)}{T_2-T_1}$$

Investimenti

Valore Attuale

$$Va(t) = \sum_{i=0}^{N}\frac{x_i}{(1+i(t,T_i))^{(T_n-t)}}$$

TIR

$$i^* \text{ t.c. } \sum_{i=0}^{N}\frac{x_i}{(1+i*)^{(T_n-t)}} = 0$$

Indici Temporali

$$p(t,x) = \sum_{n=1}^{N} x_n(1+i(t,T_n))^{-(T_n-t)}$$

Duration e Convexity

$$DU(t,x) = \frac{\sum_{n=1}^{N}(T_n-t)x_n(1+i(t,T_n))^{-(T_n-t)}}{p(t,x)}$$

$$DU^2(t,x) = \frac{\sum_{n=1}^{N}(T_n-t)^2x_n(1+i(t,T_n))^{-(T_n-t)}}{p(t,x)}$$

Oppure con $e^{-y*(t,T_N)}$
Per portafoglio α, X:

$$DU(t,\alpha X) = \sum_{k=1}^{K}\frac{\alpha_k p_k}{\sum_{k=1}^{K}\alpha_k p_k}Du(t,x^k)$$

Approssimazione

Composta

$$\Delta p(t,x) = -\frac{1}{1+i}DU(t,x)p(t,x)\Delta i + \frac{1}{2}p(t,x)C(t,x)\Delta i^2$$

Esponenziale

$$\Delta p(t,x) = -DU(t,x)p(t,x)\Delta y + \frac{1}{2}p(t,x)DU^2(t,x)\Delta y^2$$

Immunizzazione

Fisher-Weil

Unica uscita L in $H > t$, per immunizzare $(V(t^+,x) \geq V(t^+,L))$ basta:

$$\begin{cases} V(t,x) = V(t,L) \\ DU(t,x) = H-t \end{cases}$$

Redington

Sia $V(t,x) = V(t,y)$, per immunizzare $(V(t^+,x) \geq V(t^+,L))$ basta:

$$\begin{cases} DU(t,x) = DU(t,y) \\ DU^2(t,x) \geq DU^2(t,y) \end{cases}$$

Scelte in rischio

Premio per il rischio

$\rho_u(\tilde{x})$ t.c. $u(\underbrace{E[\tilde{x}] - \rho_u(\tilde{x})}_{CertoEquivalente}) = E[u(\tilde{x})]$

Coefficiente di avversione

$r_u^a(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$ e moltiplico per x

Relazione

$\rho_u(\tilde{x}) \approx \frac{1}{2} r_u^a(x)\sigma^2$ localmente per $E[\tilde{x}] = x$

Funzioni utilità

- **Esponenziale** $-\frac{1}{a}e^{-xa}$ e $r_u^a(x) = a$
- **Quadratica** $x - \frac{b}{2}x^2$ e $r_u^a(x) = \frac{b}{1-bx}$

Media-Varianza

Per due titoli rischiosi

$(w, 1-w)$

$$\begin{cases} \tilde{r} = w\tilde{r}_1 + (1-w)\tilde{r}_2 \\ E[\tilde{r}] = wE[\tilde{r}_1] + (1-w)E[\tilde{r}_2] \\ \sigma^2(\tilde{r}) = w^2\sigma^2(\tilde{r}_1) + (1-w)^2\sigma^2(\tilde{r}_2) \\ \quad +2w(1-w)\rho\sigma_1\sigma_2 \end{cases}$$

Scelte di Portafoglio

Massimiziamo utilità attesa $E[u(\tilde{x})]$, abbiamo un titolo sicuro r_f

$$\tilde{W} = xr_f + \sum_{n=1}^{N} w_n(\tilde{r}_n - r_f)$$
$$E[u'(xr_f + w(\tilde{r} - r_f))(\tilde{r} - r_f)] = 0$$

Con un titolo

Quadratica

$$xr_f + w(E[\tilde{r}] - r_f) - \frac{b}{2}[(xr_f + w(E[\tilde{r}] - r_f))^2 + w^2\sigma^2(\tilde{r})]$$
$$E[(1 - b(xr_f + w(\tilde{r} - r_f))(\tilde{r} - r_f)]$$
$$w^* = \frac{(1 - bxr_f)E[\tilde{r} - r_f]}{b(\sigma^2(\tilde{r} + (E[\tilde{r}] - r_f)^2))}$$

Esponenziale + Normali

Massimizzare $E[u(\tilde{w})]$ equivale a massimizzare l'esponente (lognormale)

$$E[\tilde{W}] - \frac{a}{2}\sigma^2(\tilde{W})$$
$$w^* = \frac{1}{a\sigma^2(\tilde{r})}(E[\tilde{r}] - r_f)$$

Con più titoli

Vettore media e e matrice Varianza V

Quadratica

$$E[(1 - b\tilde{W})(\tilde{r}_n - r_f)] = 0 \quad \forall n \in \{1, \dots, N\}$$
$$w^* = \frac{(1 - bxE[\tilde{r}])}{b} V^{-1}(e - r_f\mathbf{1})$$

Esponenziale + Normali

Massimizzare $E[u(\tilde{w})]$ equivale a massimizzare l'esponente (lognormale)

$$xr_f + w \cdot (e - r_f\mathbf{1}) - \frac{1}{2}aw^TVw$$
$$w^* = \frac{1}{a}V^{-1}(e - r_f\mathbf{1})$$

Frontiera dei portafogli

Solo rischiosi

Vettore delle medie e e matrice varianza V
Bisogna calcolare i **coefficienti**:

$$A = \mathbf{1}^TV^{-1}e$$
$$B = e^TV^{-1}e$$
$$C = \mathbf{1}^TV^{-1}\mathbf{1}$$
$$D = BC - A^2$$

Ora ci scriviamo i vettori di frontiera g e h:

$$g = \frac{(BV^{-1}\mathbf{1} - AV^{-1}e)}{D}$$
$$h = \frac{(CV^{-1}e - AV^{-1}\mathbf{1})}{D}$$

Possiamo scrivere i ptf della frontiera come:

$$w^p = g + hE[\tilde{r}^p]$$

Covarianza tra portafogli in FP

$$Cov(\tilde{r}^q, \tilde{r}^p) = \frac{C}{D}\left(E[\tilde{r}^p] - \frac{A}{C}\right)\left(E[\tilde{r}^q] - \frac{A}{C}\right) + \frac{1}{C}$$

Da cui posso trovare la varianza

Con titolo privo di rischio

Rendimento del titolo privo di rischio r_f
Calcolo il coefficiente H:

$$H = (e - r_f \mathbf{1})^T V^{-1} (e - r_f \mathbf{1}) = B - 2Ar_f + Cr_f^2 > 0$$

La frontiera dei portafogli FP^* sono tutti i portafogli:

$$w^p = V^{-1}(e - r_f \mathbf{1}) \frac{E[\tilde{r}^p] - r_f}{H}$$

Per ottenere la varianza:

$$\sigma^2(w^p) = w^{pT} V w^p = \frac{(E[\tilde{r}^p] - r_f)^2}{H}$$

Portafoglio tangente

E' il portafoglio comune a FP e FP*, o il portafoglio a Covarianza nulla con $w^p \in FP$ con $E[\tilde{w}^p] = r_f$

$$w^e = V^{-1} \frac{(e - r_f \mathbf{1})}{\mathbf{1}^T V^{-1} (e - r_f \mathbf{1})}$$

Assicurazione

Danno D con probabilità $q \in [0, 1]$, w coverage ratio.

$$E[u(\tilde{x})] = \pi u(x - D - wq + w) + (1 - \pi) u(x - wq)$$

Danno generico

Danno generico $\tilde{z}$, pago $(1 + \lambda)E[\tilde{z}]$, devo massimizzare:

$$E[u(x - (1 - w)\tilde{z} - w(1 + \lambda)E[\tilde{z}])]$$

Che equivale a fare

$$E[u'(x - (1 - w)\tilde{z} - w(1 + \lambda)E[\tilde{z})(\tilde{z} - (1 + \lambda)E[\tilde{z}])] = 0$$

Modelli di Equilibrio

N titoli e S possibili stati.
Vettore prezzi $q = (q_1, \ldots, q_n)$, matrice dei dividendi $D \in \mathbb{R}^{S \times N}$, ricchezza negli stati $y = Dw \in \mathbb{R}^S$

Completezza

Un mercato si dice completo se $rank(D) = S$ (con $N \geq S$).
Di solito si usa $\det(D) \neq 0$.

State price

Prezzo m_s che paga 1 nello stato s e 0 negli altri.
Dalla loro somma otteniamo il prezzo del titolo sicuro $m_0 = \sum_{s=1}^{S} m_s$ ed il suo rendimento $r_f = \frac{1}{m_0}$
Se il mercato è completo, possiamo invertire D e fare:

$$m = (D^T)^{-1} q$$

Per replicarle mi basta creare il portafoglio il cui valore sia uguale ad m facendo:

$$Dw = \mathbf{1}$$

CAPM

CCAPM

1. Trovo il ptf $\tilde{r}^m$ che riproduce la ricchezza in tutti i dati stati, il suo prezzo ed il suo rendimento atteso
2. Trovo $\beta_{CAPM} = \frac{Cov(u'(\tilde{x}^m, \tilde{r}_n))}{Cov(u'(\tilde{x}^m, \tilde{r}_m)}$
3. Trovo il rendimento del titolo privo di rischio r_f
4. Uso la relazione
$$E[\tilde{r}_n] - r_f = \beta(E[\tilde{r}^m] - r_f)$$

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.