

Obliczenia inżynierskie

Projekt 1

Analiza dokładności obliczeń komputerowych

Autor

Jakub Strzelczyk **325325**

Prowadzący

dr inż. Jakub Wagner

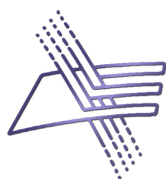
15 kwietnia 2024

Oświadczam, że niniejsza praca, stanowiąca podstawę do uznania osiągnięcia efektów uczenia się z przedmiotu Obliczenia inżynierskie została wykonana przeze mnie samodzielnie.

Jakub Strzelczyk

Spis treści

1. Lista symboli matematycznych	3
2. Wprowadzenie	3
3. Zadanie 1	4
3.1. Metodyka i wyniki doświadczeń	4
3.1.1. Metoda rachunku epsilonów	4
3.1.2. Metoda różniczkowania analitycznego	5
3.2. Dyskusja wyników eksperymentów numerycznych	5
3.3. Wnioski	6
4. Zadanie 2	6
4.1. Metodyka i wyniki doświadczeń	6
4.2. Dyskusja wyników eksperymentów numerycznych	8
4.3. Wnioski	8
5. Zadanie 3	8
5.1. Metodyka i wyniki doświadczeń	8
5.2. Dyskusja wyników eksperymentów numerycznych	9
5.3. Wnioski	9
6. Zadanie 4	9
6.1. Metodyka i wyniki doświadczeń	9
6.2. Dyskusja wyników eksperymentów numerycznych	10
6.3. Wnioski	11
7. Zadanie 5	11
7.1. Metodyka i wyniki doświadczeń	11
7.2. Dyskusja wyników eksperymentów numerycznych	13
7.3. Wnioski	14
8. Zadanie 6	14
8.1. Metodyka i wyniki doświadczeń	14
8.2. Dyskusja wyników eksperymentów numerycznych	15
8.3. Wnioski	15
9. Listing programów	16
Literatura	19



**Wydział Elektroniki
i Technik Informatycznych**

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

1. Lista symboli matematycznych

- $x, y, z, r, \theta, \phi, v$ - zmienne skalarne
- $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{r}, \tilde{\theta}, \tilde{\phi}, \tilde{v}$ - zaburzone wartości zmiennych skalarnych
- $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ - błędy danych
- η_1, η_2 - błędy zaokrągleń operacji zmiennoprzecinkowych
- $\delta(\tilde{v}), \delta[\phi(\tilde{x}, y, z), \delta[\tilde{y}(\tilde{r}, \tilde{\theta}, \tilde{\phi})]]$ - błędy względne $\tilde{v}, \tilde{\phi}, \tilde{y}$
- $T(v), T_{x\phi}(x, y, z), T(z)$ - współczynniki charakteryzujące przenoszenie błędu względnego
- L - liczba cyfr znaczących mantysy
- eps - graniczny błąd względny

2. Wprowadzenie

Reprezentacja zmiennoprzecinkowa liczb jest oparta o notację wykładniczą, gdzie liczba przedstawiana jest za pomocą dwóch głównych komponentów: mantysy i cechy. Zakładając, że podstawa systemu liczbowego wynosi 10, ogólną formę takiej liczby x można wyrazić jako [1]:

$$x = \pm m \cdot 10^c \quad (1)$$

gdzie mantysa m jest postaci $m = 0.m_1m_2 \dots m_{L-1}m_Lm_{L+1} \dots$, przy czym $m_i \in \{0, \dots, 9\}$ i $m_1 \neq 0$, natomiast cecha $c \in \mathbb{Z}$.

Ze względu na ograniczoną precyzję z jaką mantysa i cecha są przechowywane w komputerze, przetrzymywane w pamięci liczby zmiennoprzecinkowe są tylko przybliżeniami liczby rzeczywistej, którą próbują przedstawić. Wartość zaburzona (zaokrąglona) \tilde{x} można obliczyć korzystając z poniższego wzoru:

$$\tilde{x} = \pm \tilde{m} \cdot 10^c, \quad \text{gdzie } \tilde{m} = \begin{cases} 0.m_1m_2 \dots m_L & \text{dla } 0 \leq m_{L+1} < 5 \\ 0.m_1m_2 \dots m_L + 10^{-L} & \text{dla } 5 \leq m_{L+1} < 9 \end{cases} \quad (2)$$

Korzystając z definicji błędu względnego składowego \tilde{x} oznaczonego jako $\delta(\tilde{x})$, możemy oszacować jego maksymalną wartość:

$$|\delta(\tilde{x})| = \left| \frac{\tilde{x} - x}{x} \right| = \left| \frac{\tilde{m} \cdot 10^c - m \cdot 10^c}{m \cdot 10^c} \right| = \left| \frac{\tilde{m} - m}{m} \right| \quad (3)$$

Powyższy wzór przyjmie największą wartość, gdy licznik jest największy, natomiast mianownik najmniejszy z możliwych. Dla przyjętej reprezentacji licznik może maksymalnie przyjąć wartość $\frac{1}{2} \cdot 10^{-L}$ - dokładna wartość mantysy będzie znajdować się na osi liczbowej w połowie odległości między liczbą $0.m_1m_2 \dots m_L$ a $0.m_1m_2 \dots m_L + 10^{-L}$. Minimalna wartość mantysy w tym przypadku wynosi 0.1, zatem:

$$|\delta(\tilde{x})| \leq \frac{\frac{1}{2} \cdot 10^{-L}}{10^{-1}} = 5 \cdot 10^{-L} \quad (4)$$

Wówczas liczbę o powyższej wartości oznaczamy jako **eps** i błąd względny danej nie może przekroczyć tej wartości. Dzięki niej możemy szacować przenoszenie błędów względnych na określone dane. Powyższa wartość jest przyjęta dla określonych powyżej warunków. Do obliczania przenoszonych błędów względnych stosujemy metody rachunku epsilon i różniczkowania analitycznego, które zostaną zastosowane w dalszej części projektu.

Wartość liczby **eps** zależy od precyzji, w jakiej komputer reprezentuje liczby. Najważniejszym standardem reprezentacji binarnej i operacji na liczbach zmiennoprzecinkowych jest **IEEE754** [2]. Standard ten definiuje dwa rodzaje liczb zmiennoprzecinkowych - pojedynczej i podwójnej precyzji. Przykładowo dla liczby pojedynczej precyzji w standardzie IEEE754 wartość eps wynosi $5,96 \cdot 10^{-8}$, natomiast dla liczby podwójnej precyzji wartość ta wynosi $1,11 \cdot 10^{-16}$.

Liczbę **pojedynczej precyzji** w tym formacie zapisujemy za pomocą 32 bitów - pierwszy bit jest bitem znaku, 8 bitów kodujących cechę (BIAS=127) oraz kolejne 23 bity to mantysa liczby.

Liczba **podwójnej precyzji** zapisana jest za pomocą 64 bitów - bit znaku, 11 bitów na cechę (BIAS=1023) i 52 bity mantysy.

Oprócz błędów danych wynikających z reprezentacji poszczególnych liczb, występują także błędy zaokrągleń wynikające z przybliżeń wykonywanych przez komputer po wykonywanych operacjach zmiennoprzecinkowych. Przykładowo, podczas dodawania dwóch liczb zmiennoprzecinkowych, komputer najpierw reprezentuje dwie

liczby z określoną precyzją, a następnie po dodaniu zaburzonych wartości liczb zaokrągla sumę.

Kolejność i sposób wykonywania działań w algorytmach mają wpływ na wartość błędów zaokrągleń. Posługując się metodami numerycznymi, można oszacować błędy dla poszczególnych algorytmów i porównać je między sobą. Składowa błędu wyniku spowodowana przenoszeniem błędów danych nie zależy od algorytmu, natomiast składowa spowodowana przenoszeniem błędów zaokrągleń wyników operacji zależy od niego, zatem porównując dwa algorytmy prowadzące do wykonania tego samego zadania, możemy skupić się jedynie na błędach spowodowanych przybliżaniem wyników operacji zmiennoprzecinkowych.

W celu wykonania projektu skorzystałem z następujących wzorów dotyczących powiązania współrzędnych kartezjańskich $\langle x, y, z \rangle$ i sferycznych $\langle r, \theta, \phi \rangle$:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arccos(\frac{z}{r}) \\ \phi = \operatorname{sgn}(y) \arccos(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}) \end{cases} \quad \begin{cases} x = r \sin(\theta) \cos(\phi) \\ y = r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ z = r \cos(\theta) \end{cases}$$

Celem projektu jest zbadanie i analiza wpływu dokładności reprezentacji numerycznej na przekształcenia między współrzędnymi kartezjańskimi i sferycznymi w przestrzeni trójwymiarowej.

3. Zadanie 1

3.1. Metodyka i wyniki doświadczeń

W przestrzeni trójwymiarowej współrzędna sferyczna ϕ jest powiązana ze współrzędnymi kartezjańskimi $\langle x, y, z \rangle$ w następujący sposób:

$$\phi = \operatorname{sgn}(y) \cdot \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \quad (5)$$

W celu wyznaczenia współczynnika charakteryzującego przenoszenie błędu względnego, jakim obarczona jest dana x na wartość współrzędnej ϕ , można skorzystać z metody różniczkowania analitycznego i metody rachunku epsilonów.

3.1.1. Metoda rachunku epsilonów

Najpierw obliczyłem przenoszenie błędu przez funkcję \arccos :

$$\arccos(\tilde{v}) = \arccos(v(1 + \delta(\tilde{v}))) = \arccos(v) \cdot (1 + T(v)\delta(\tilde{v})) \quad (6)$$

$$T(v) = \frac{v}{\arccos(v)} \frac{d \arccos(v)}{dv} = \frac{v}{\arccos(v)} \frac{-1}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{-v}{\sqrt{1 - v^2} \arccos(v)} \quad (7)$$

$$\arccos(\tilde{v}) = \arccos(v) \cdot \left(1 - \frac{v}{\sqrt{1 - v^2} \arccos(v)} \delta(\tilde{v})\right) \quad (8)$$

Następnie wykonałem obliczenia pozwalające obliczyć współczynnik $T(x)$ metodą rachunku epsilonów. Przyjąłem, że y jest stałą, która nie jest obarczona błędem danych, natomiast x jest reprezentowana w komputerze poprzez przybliżenie.

$$\tilde{x} = x(1 + \varepsilon) \quad (9)$$

$$\tilde{\phi} = \operatorname{sgn}(y) \arccos\left(\frac{x(1 + \varepsilon)}{\sqrt{x^2(1 + \varepsilon)^2 + y^2}}\right) \quad (10)$$

$$\tilde{\phi} \cong \operatorname{sgn}(y) \arccos\left(\frac{x(1 + \varepsilon)}{\sqrt{x^2(1 + 2\varepsilon) + y^2}}\right) \quad (11)$$

$$\tilde{\phi} \cong \operatorname{sgn}(y) \arccos\left(\frac{x(1 + \varepsilon)}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{1 + \frac{2x^2\varepsilon}{x^2 + y^2}}}\right) \quad (12)$$

$$\tilde{\phi} \cong \operatorname{sgn}(y) \arccos \left(\frac{x(1+\varepsilon)}{\sqrt{x^2+y^2} \left(1 + \frac{x^2\varepsilon}{x^2+y^2}\right)} \right) \quad (13)$$

$$\tilde{\phi} \cong \operatorname{sgn}(y) \arccos \left(\frac{x(1+\varepsilon)}{\sqrt{x^2+y^2}} \left(1 - \frac{x^2\varepsilon}{x^2+y^2}\right) \right) \quad (14)$$

$$\tilde{\phi} \cong \operatorname{sgn}(y) \arccos \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \left[1 + \varepsilon \left(1 - \frac{x^2}{x^2+y^2}\right)\right] \right) \quad (15)$$

$$\tilde{\phi} \cong \operatorname{sgn}(y) \arccos \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \cdot \left(1 - \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{x^2+y^2}} \arccos \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)} \left(1 - \frac{x^2}{x^2+y^2}\right) \varepsilon \right) \quad (16)$$

$$\tilde{\phi} \cong \operatorname{sgn}(y) \arccos \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \cdot \left(1 - \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\frac{\sqrt{y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \arccos \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)} \frac{x^2 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \varepsilon \right) \quad (17)$$

$$\tilde{\phi} \cong \operatorname{sgn}(y) \arccos \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \cdot \left(1 + \frac{-xy^2}{|y| \arccos \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \cdot (x^2 + y^2)} \varepsilon \right) \quad (18)$$

$$T_{x\phi}(x, y, z) = - \frac{xy^2}{|y| \arccos \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \cdot (x^2 + y^2)} \quad (19)$$

3.1.2. Metoda różniczkowania analitycznego

$$T(x) = \frac{x}{\phi} \frac{d\phi}{dx} \quad (20)$$

$$T_{x\phi}(x, y, z) = \frac{x}{\operatorname{sgn}(y) \arccos \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)} \cdot \operatorname{sgn}(y) \cdot \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{x^2+y^2}}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2 + y^2} \quad (21)$$

$$T_{x\phi}(x, y, z) = \frac{-x}{\arccos \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}} \cdot \frac{\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2 + y^2} \quad (22)$$

$$T_{x\phi}(x, y, z) = - \frac{xy^2}{|y| \arccos \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \cdot (x^2 + y^2)} \quad (23)$$

3.2. Dyskusja wyników eksperymentów numerycznych

Zarówno w przypadku metody rachunku epsilonów, jak i metody różniczkowania analitycznego uzyskaliśmy takie same wyniki współczynnika charakteryzującego przenoszenie błędu względnego, jakim obarczona jest dana x , na wartość współrzędnej ϕ . Metoda rachunku epsilonów wymagała nieco więcej obliczeń oraz zastosowania podstawowych reguł rachunku epsilonów, upraszczających działania. Z kolei metoda różniczkowania analitycznego wymagała znajomości podstawowych pochodnych funkcji złożonych. Oba wyniki są identyczne, co potwierdza spójność wykonanych działań za pomocą obu metod.

3.3. Wnioski

Metody różniczkowania analitycznego oraz rachunku epsilonów umożliwiły obliczenie szukanego współczynnika, a otrzymane wyniki są takie same, co świadczy o możliwości zamienności stosowania obu metod. W celu obliczenia współczynnika możemy przeanalizować funkcję, a następnie wybrać metodę, która w prostszy sposób umożliwi estymację szukanego parametru. Kolejnym podejściem może być wykonanie obliczeń obiema metodami w celu uzyskania pewności poprawności wykonania działań - tak jak w przypadku tego zadania. Gdy wykonane przez nas obliczenia będą poprawne, otrzymamy identyczne wyniki dla obu przypadków.

4. Zadanie 2

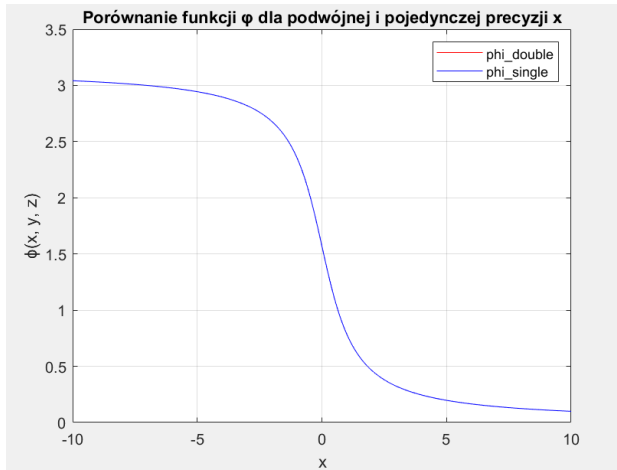
4.1. Metodyka i wyniki doświadczeń

W celu wykonania zadania przyjąłem następujące wartości danych: $x \in [-10, 10]$, $y = 1$, $z = -0.1$.

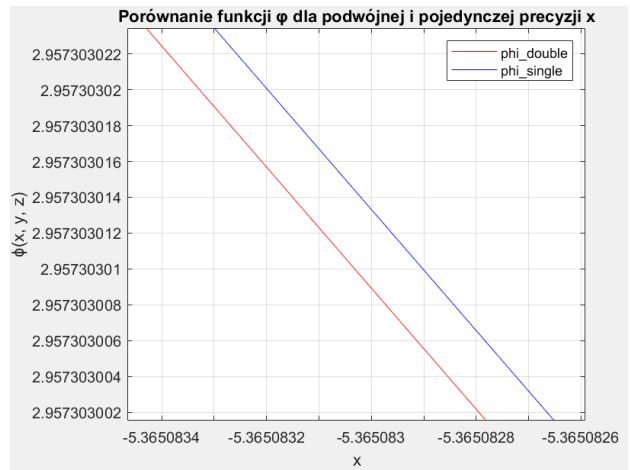
Korzystając z MATLABa wyznaczyłem wartość $\phi(x, y, z)$, używając reprezentacji zmiennopozycyjnej podwójnej precyzji, a następnie $\phi(\tilde{x}, y, z)$, gdzie \tilde{x} jest wynikiem zapisu wartości x z pojedynczą precyzją.

Używając wbudowanej funkcji *plot* utworzyłem wykresy uzyskanych funkcji. Kod mojego programu został zorganizowany w logicznie uporządkowane funkcje, z których każda odpowiada za określoną funkcjonalność. W celu zwiększenia czytelności każda funkcja jest poprzedzona komentarzem, opisującym jej przeznaczenie.

Na rysunku 1. przedstawiono oryginalny wykres, prezentujący różnice pomiędzy $\phi(x, y, z)$ oraz $\phi(\tilde{x}, y, z)$ w zależności od wartości x ; natomiast na rysunku 2. przedstawiono ten sam wykres po powiększeniu.



Rysunek 1. Wykres porównujący wartości $\phi(x, y, z)$ oraz $\phi(\tilde{x}, y, z)$

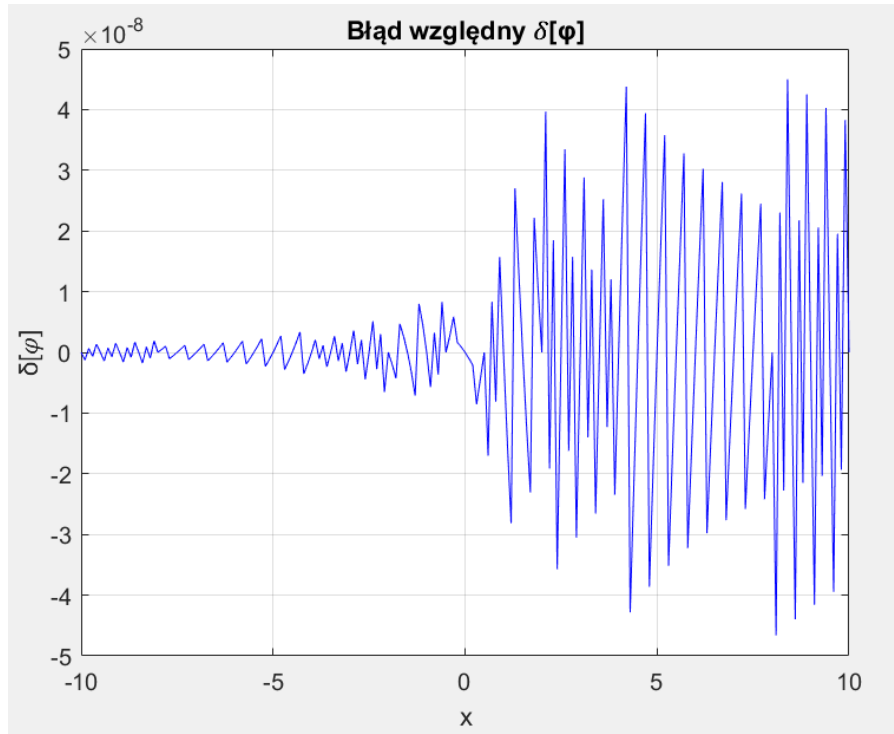


Rysunek 2. Wykres szczegółowo porównujący wartości $\phi(x, y, z)$ oraz $\phi(\tilde{x}, y, z)$

Następnie wyznaczyłem błąd względny korzystając z następującego wzoru:

$$\delta[\phi(\tilde{x}, y, z)] = \frac{\phi(\tilde{x}, y, z) - \phi(x, y, z)}{\phi(x, y, z)} \quad (24)$$

Na rysunku 3. przedstawiono wykres prezentujący wartość błędu względnego $\delta[\phi(\tilde{x}, y, z)]$ w zależności od zmiany wartości x .



Rysunek 3. Wykres wartości błędu względnego $\delta[\phi(\tilde{x}, y, z)]$

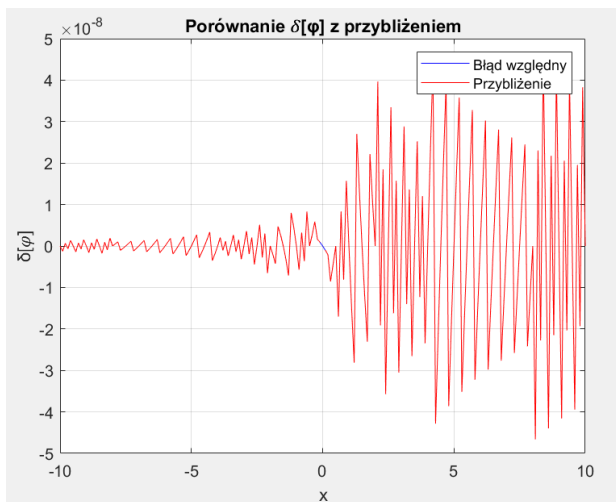
Następnie porównałem uzyskane wyniki z następującym przybliżeniem, uzyskanym dzięki współczynnikowi wyznaczonym w poprzednim zadaniu:

$$\delta[\phi(\tilde{x}, y, z)] \cong T_{x\phi}(x, y, z)\delta(\tilde{x}) \quad (25)$$

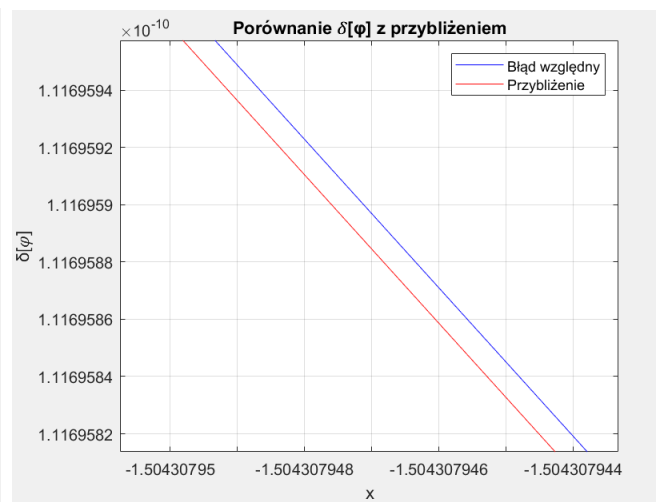
gdzie

$$\delta[\tilde{x}] = \frac{\tilde{x} - x}{x} \quad (26)$$

Na rysunku 4. przedstawiono wykres porównujący wartość błędu $\delta[\phi(\tilde{x}, y, z)]$ z jego przybliżeniem, natomiast na rysunku 5. przedstawiono ten sam wykres po zastosowaniu powiększenia.



Rysunek 4. Wykres porównujący wartość błędu $\delta[\phi(\tilde{x}, y, z)]$ z przybliżeniem



Rysunek 5. Wykres po powiększeniu, porównujący wartość błędu $\delta[\phi(\tilde{x}, y, z)]$ z jego przybliżeniem

4.2. Dyskusja wyników eksperymentów numerycznych

Wartości $\phi(x, y, z)$ oraz $\phi(\tilde{x}, y, z)$ zaznaczone na wykresie widocznym na rysunku 1. na pierwszy rzut oka nie różnią się, natomiast po powiększeniu wykresu jak na rysunku 2. widać różnice pomiędzy wartościami uzyskanymi dla pojedynczej i podwójnej precyzji x . Na podstawie kolejnego wykresu widocznego na rysunku 3. można odczytać wartość błędu względnego $\delta[\phi(\tilde{x}, y, z)]$ - nie przekracza ona $5 \cdot 10^{-8}$, a przenoszony błąd względny jest mniejszy dla wartości ujemnych x , niż dla wartości dodatnich, co może sugerować asymetrię w sposobie w jakim błędy są przenoszone w tej funkcji. Obliczony współczynnik przenoszenia wyznaczony w zadaniu 1. umożliwił mi przybliżenie uzyskanych wyników $\delta[\phi(\tilde{x}, y, z)]$. Wartość przybliżenia nieznacznie różni się od dokładnej wartości, a w celu ujżenia różnic na wykresie widocznym na rysunku 4., musiałem go powiększyć.

4.3. Wnioski

Zaburzenie x poprzez zapis jego wartości w pojedynczej precyzji spowodowało także nieznaczne zmiany w wynikach funkcji zależnej od tej zmiennej. Jakikolwiek błąd danych argumentów funkcji powoduje także zmianę wartości funkcji, co ma praktyczne skutki w projektowaniu, programowaniu różnych urządzeń, systemów. W zależności od wartości argumentów danej funkcji, przenoszony błąd względny się różni; a przybliżenia, np. błędu $\delta[\phi(\tilde{x}, y, z)]$, wprowadzają kolejne błędy do wyniku końcowego. Gdy projektujemy aplikację mniej krytyczną i dopuszczalna jest w niej zmniejszona precyzja, wówczas możemy dokonywać przybliżeń. Dla zastosowań wymagających wyjątkowej dokładności, ważne jest stosowanie jak największej precyzji i unikanie przybliżeń, które wprowadzają kolejne błędy. Zatem, wybór stosowanych przez nas algorytmów czy upraszczania działań zależy od wymagań zadań projektowych.

5. Zadanie 3

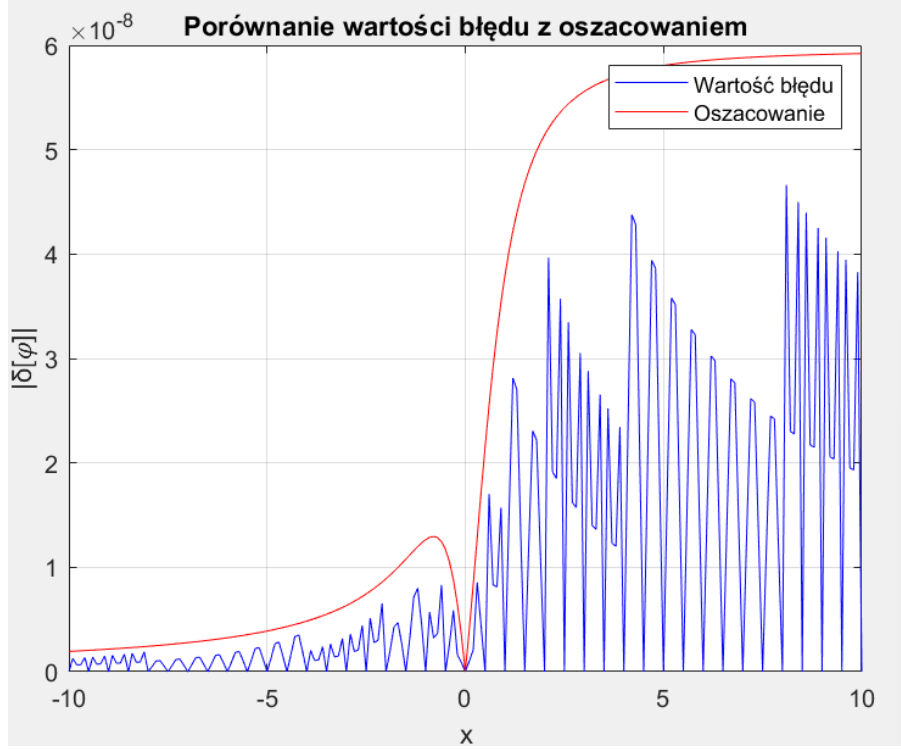
5.1. Metodyka i wyniki doświadczeń

Korzystając z poniższego wzoru:

$$|\delta[\phi(\tilde{x}, y, z)]| \leq |T_{x\phi}(x, y, z)| \text{eps}_{\text{single}} \quad (27)$$

gdzie $\text{eps}_{\text{single}}$ oznacza wartość **eps** dla pojedynczej precyzji, dokonałem porównania wartości błędów, wyznaczonych w ramach zadania 2, z oszacowaniem.

Na rysunku 6. przedstawiono wykres porównujący moduł wartości błędów $\delta[\phi(\tilde{x}, y, z)]$ z ich oszacowaniem, obliczonym z wykorzystaniem wartości **eps**.



Rysunek 6. Wykres porównujący wartość błędu $\delta[\phi(\tilde{x}, y, z)]$ z oszacowaniem

5.2. Dyskusja wyników eksperymentów numerycznych

Na wykresie przedstawionym na rysunku 6. widoczne jest porównanie modułu wartości błędu $\delta[\phi(\tilde{x}, y, z)]$ z oszacowaniem. Oszacowane wartości są zawsze większe niż rzeczywista wartość, natomiast prezentują te same rzędy wielkości. Estymacja dla dodatnich wartości x nieco bardziej odbiega od rzeczywistych wartości błędów niż w przypadku wartości ujemnych.

5.3. Wnioski

Oszacowanie przenoszenia błędów z wykorzystaniem wartości ϵ pozwala dokładnie określić graniczny błąd względny określonej danej. Posiadając tę wiedzę, możemy ustalić górną granicę odchyleń, które mogą wystąpić, co umożliwia przewidywanie zachowania danego systemu lub algorytmu w najbardziej krytycznych scenariuszach.

6. Zadanie 4

6.1. Metodyka i wyniki doświadczeń

Za pomocą rachunku epsilon wykonałem działania umożliwiające obliczenie błędów względnych, jakimi obarczona jest wartość współrzędnej y wyznaczona na podstawie współrzędnych sferycznych r , θ i ϕ zapisanych w reprezentacji zmiennopozycyjnej. Tym razem wziąłem pod uwagę zarówno błędy danych, jak i błędy zaokrągleń wyników zmiennopozycyjnych. Wyniki działań przedstawiam poniżej:

$$y = r \sin(\theta) \sin(\phi) \quad (28)$$

Błędy danych i błędy zaokrągleń:

$$\tilde{r} = r(1 + \epsilon_1) \quad (29)$$

$$\tilde{\theta} = \theta(1 + \epsilon_2) \quad (30)$$

$$\tilde{\phi} = \phi(1 + \epsilon_3) \quad (31)$$

$$v_1 = \sin(\theta) \quad (32)$$

$$\tilde{v}_1 = v_1(1 + \eta_1) \quad (33)$$

$$v_2 = \sin(\phi) \quad (34)$$

$$\tilde{v}_2 = v_2(1 + \eta_2) \quad (35)$$

$$v_3 = rv_1 \quad (36)$$

$$\tilde{v}_3 = v_3(1 + \eta_3) \quad (37)$$

$$v_4 = v_3v_2 \quad (38)$$

$$\tilde{v}_4 = v_4(1 + \eta_4) \quad (39)$$

Przenoszenie błędu przez funkcję sinus:

$$\sin(\tilde{z}) = \sin(z(1 + \delta(\tilde{z}))) = \sin(z) \cdot (1 + T(z)\delta(\tilde{z})) \quad (40)$$

$$T(z) = \frac{z}{\sin(z)} \frac{d \sin(z)}{dz} = \frac{z}{\sin(z)} \cos(z) = z \cot(z) \quad (41)$$

$$\sin(\tilde{z}) = \sin(z) \cdot (1 + z \cot(z)) \quad (42)$$

Podstawiając zaburzone wartości danych, kontynuowałem działania:

$$\tilde{y} = \{[r(1 + \varepsilon_1) \sin(\theta(1 + \varepsilon_2))(1 + \eta_1)](1 + \eta_3) \sin(\phi(1 + \varepsilon_3))(1 + \eta_2)\}(1 + \eta_4) \quad (43)$$

$$\tilde{y} = \{[r(1 + \varepsilon_1) \sin(\theta)(1 + \theta \cot(\theta)\varepsilon_2)(1 + \eta_1)](1 + \eta_3) \sin(\phi)(1 + \phi \cot(\phi)\varepsilon_3)(1 + \eta_2)\}(1 + \eta_4) \quad (44)$$

$$\tilde{y} = r(1 + \varepsilon_1) \sin(\theta)(1 + \theta \cot(\theta)\varepsilon_2)(1 + \eta_1)(1 + \eta_3) \sin(\phi)(1 + \phi \cot(\phi)\varepsilon_3)(1 + \eta_2)(1 + \eta_4) \quad (45)$$

$$\tilde{y} \cong r \sin(\theta) \sin(\phi)(1 + \varepsilon_1 + \theta \cot(\theta)\varepsilon_2 + \phi \cot(\phi)\varepsilon_3 + \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4) \quad (46)$$

$$\tilde{y} \cong y(1 + \varepsilon_1 + \theta \cot(\theta)\varepsilon_2 + \phi \cot(\phi)\varepsilon_3 + \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4) \quad (47)$$

Mając \tilde{y} przedstawione w powyższej formie, dokonałem oszacowania błędu względnego $\delta(\tilde{y})$ jakim obarczona jest wartość y :

$$|\delta[\tilde{y}]| \leq |\varepsilon_1| + |\theta \cot(\theta)|\varepsilon_2 + |\phi \cot(\phi)|\varepsilon_3 + |\eta_1| + |\eta_2| + |\eta_3| + |\eta_4| \quad (48)$$

$$|\delta[\tilde{y}]| \leq |\theta \cot(\theta)|\varepsilon_2 + |\phi \cot(\phi)|\varepsilon_3 + 5\varepsilon_1 \quad (49)$$

6.2. Dyskusja wyników eksperymentów numerycznych

Błąd względny współrzędnej y , wynikający z błędów danych oraz zaokrągleń wyników zmiennoprzecinkowych, dla dokładnych wartości θ , ϕ , co do modułu nie przekroczy wartości $|\theta \cot(\theta)|\varepsilon + |\phi \cot(\phi)|\varepsilon + 5\varepsilon$. Działania wykonałem korzystając z rachunku epsilon, przyjmując, że każda z wartości współrzędnych sferycznych jest zaburzona, a także wartości wyników zmiennopozycyjnych są zaokrąglane. Podstawowa zasada, która umożliwiła mi wykonanie powyższych obliczeń określona jest poniższym wzorem:

$$(1 + \varepsilon_1) \cdot (1 + \varepsilon_2) \cong 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad (50)$$

6.3. Wnioski

Za pomocą prostych przekształceń matematycznych metoda epsilonów umożliwia sprawne oszacowanie błędów spowodowanych zaokrągleniami danych oraz zaokrągleniem wyników operacji zmiennopozycyjnych. Wymagana jest znajomość podstawowych reguł rachunku epsilonów a także pochodnych prostych funkcji.

7. Zadanie 5

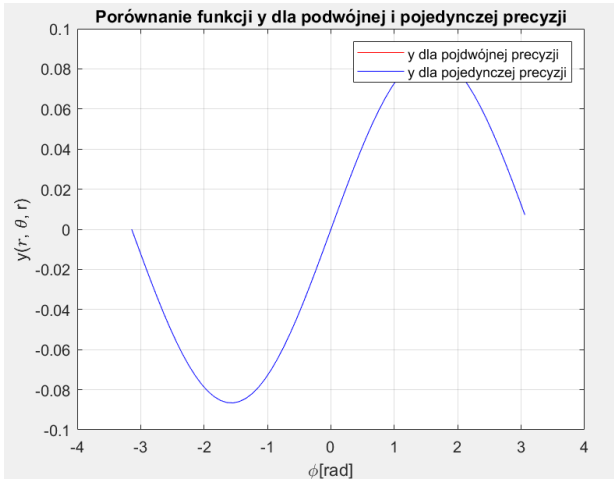
7.1. Metodyka i wyniki doświadczeń

W celu wykonania zadania przyjąłem następujące wartości danych: $r = 0.1$, $\theta = \frac{\pi}{3}$, $\phi \in [-\pi, \pi]$.

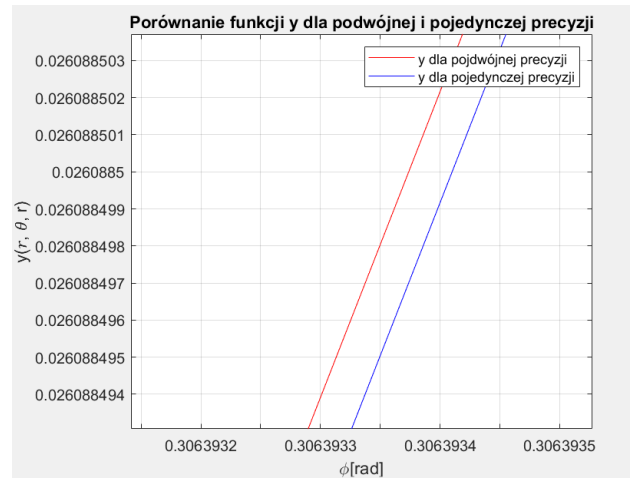
Korzystając z MATLABa wyznaczyłem wartość $y(r, \theta, \phi)$, używając reprezentacji zmiennopozycyjnej podwójnej precyzji, a następnie $\tilde{y}(\tilde{r}, \tilde{\theta}, \tilde{\phi})$, używając reprezentacji zmiennopozycyjnej pojedynczej precyzji.

Korzystając z wbudowanych funkcji plot oraz semilogy utworzyłem wykresy uzyskanych funkcji. Kod mojego programu został zorganizowany w logicznie uporządkowane funkcje, z których każda odpowiada za określoną funkcjonalność. W celu zwiększenia czytelności, każda funkcja jest poprzedzona komentarzem, opisującym jej przeznaczenie.

Na rysunku 6. przedstawiono oryginalny wykres oraz po przybliżeniu, prezentujący różnice pomiędzy $y(r, \theta, \phi)$ oraz $y(\tilde{r}, \tilde{\theta}, \tilde{\phi})$ w zależności od wartości x , natomiast na rysunku 7. przedstawiono ten sam wykres po przybliżeniu.



Rysunek 7. Wykres porównujący wartości $y(r, \theta, \phi)$ oraz $\tilde{y}(\tilde{r}, \tilde{\theta}, \tilde{\phi})$

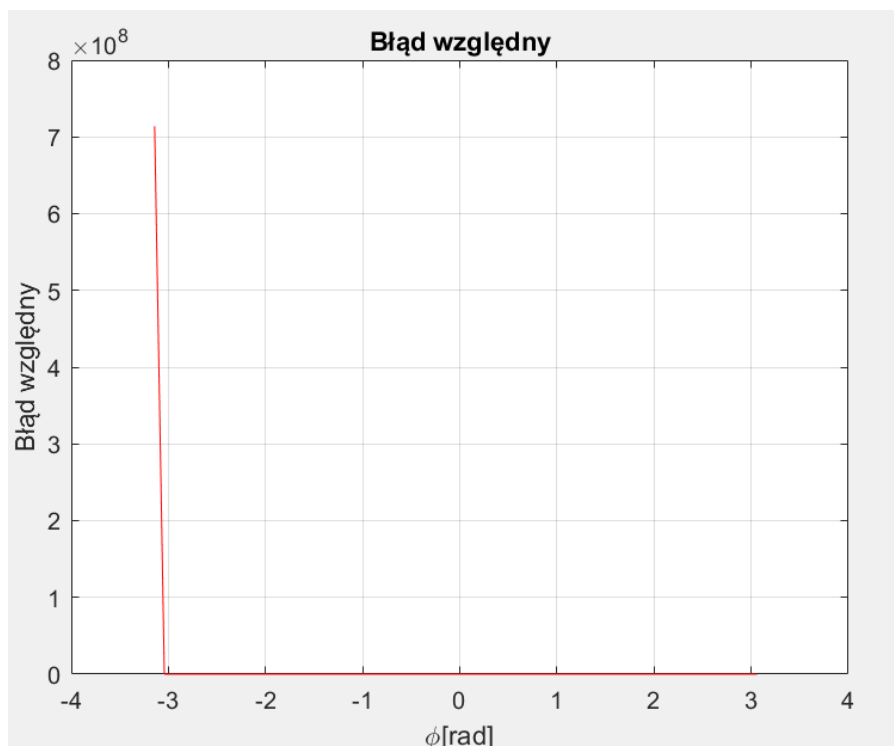


Rysunek 8. Wykres szczegółowo porównujący wartości $y(r, \theta, \phi)$ oraz $\tilde{y}(\tilde{r}, \tilde{\theta}, \tilde{\phi})$

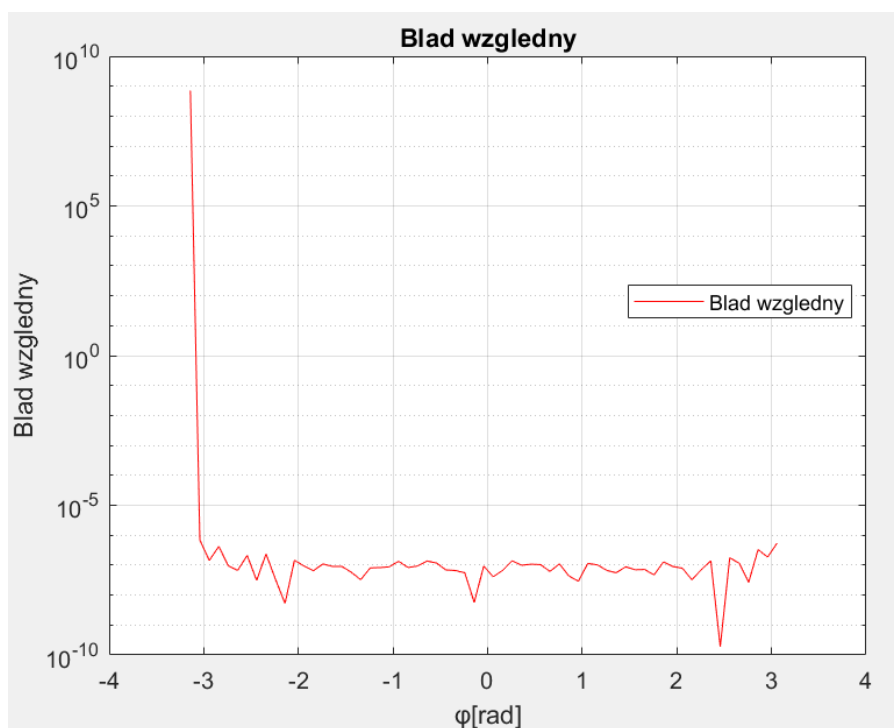
Następnie wyznaczyłem błąd względny korzystając z następującego wzoru:

$$\delta[\tilde{y}(\tilde{r}, \tilde{\theta}, \tilde{\phi})] = \frac{\tilde{y}(\tilde{r}, \tilde{\theta}, \tilde{\phi}) - y(r, \theta, \phi)}{y(r, \theta, \phi)} \quad (51)$$

Na rysunku 9. przedstawiono wykres prezentujący wartość błędu względnego $\delta[\tilde{y}(\tilde{r}, \tilde{\theta}, \tilde{\phi})]$ w zależności od zmiany wartości ϕ , natomiast na rysunku 10. zaprezentowano ten sam wykres po zastosowaniu skali logarytmicznej na osi pionowej.



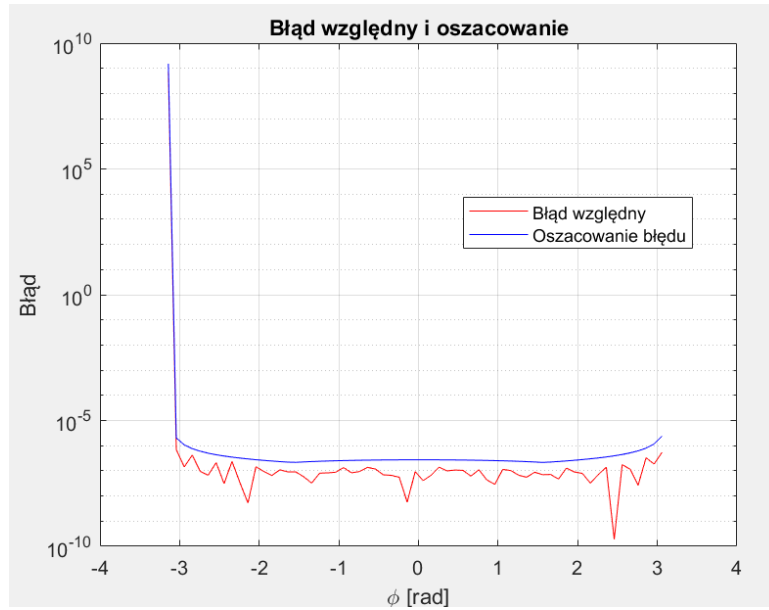
Rysunek 9. Wykres wartości błędu względnego $\delta[\tilde{y}(\tilde{r}, \tilde{\theta}, \tilde{\phi})]$



Rysunek 10. Wykres wartości błędu względnego $\delta[\tilde{y}(\tilde{r}, \tilde{\theta}, \tilde{\phi})]$ po zastosowaniu skali logarytmicznej

Następnie porównałem uzyskane wyniki z oszacowaniem uzyskanym w ramach zadania 4.

Na rysunku 11. przedstawiono wykres porównujący moduł wartości błędu $\delta[\tilde{y}(\tilde{r}, \tilde{\theta}, \tilde{\phi})]$ z oszacowaniem z wykorzystaniem wartości eps.



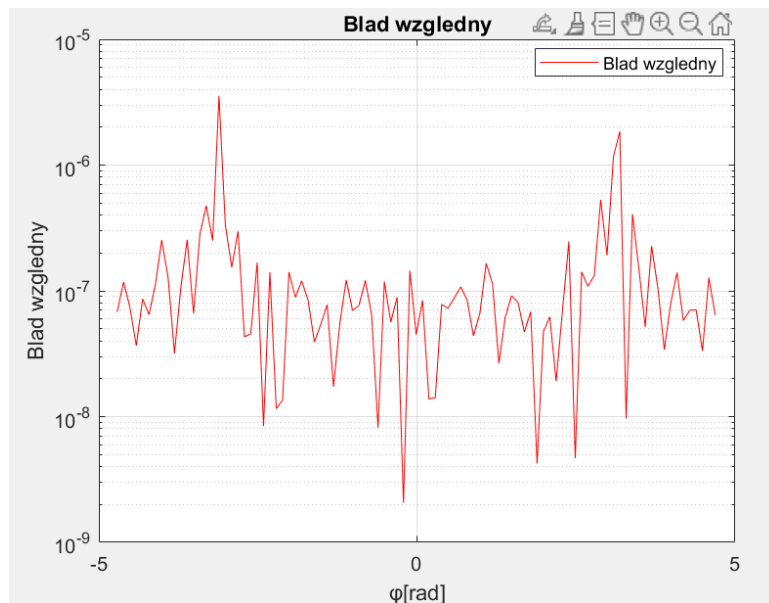
Rysunek 11. Wykres porównujący wartość błędu $\delta[\tilde{y}(\tilde{r}, \tilde{\theta}, \tilde{\phi})]$ z oszacowaniem

Na wykresie na osi pionowej została ustawiona skala logarytmiczna w celu uzyskania większej czytelności różnic pomiędzy oszacowaniem a wartością dokładną.

7.2. Dyskusja wyników eksperymentów numerycznych

W pierwszej analizie, wartości $y(r, \theta, \phi)$ oraz $\tilde{y}(\tilde{r}, \tilde{\theta}, \tilde{\phi})$, prezentowane na wykresie Rysunku 7. mogą na pierwszy rzut oka wydawać się identyczne. Jednakże, dokładniejsze przyjrzenie się danym, szczególnie po powiększeniu wykresu jak na Rysunku 8., ukazuje różnice między wartościami uzyskanymi przy użyciu pojedynczej i podwójnej precyzji.

Z kolejnych wykresów, widocznych na Rysunkach 9. oraz 10. wynika, że wartość błędu względnego $\delta[\tilde{y}(\tilde{r}, \tilde{\theta}, \tilde{\phi})]$ dla wartości $\phi = -\pi$ jest znacząco wysoka. Następnie, w miarę wzrostu wartości ϕ , błąd ten szybko maleje, aż stabilizuje się na poziomie bliskim 10^{-7} . Równie istotny jest fakt, iż wysoki błąd przy $\phi = -\pi$ może wynikać z błędów numerycznych w MATLAB-ie, spowodowanych przez wartość funkcji sinus, która wówczas wynosi zero i występuje w mianowniku. Rozszerzenie zakresu wartości ϕ do przedziału $[-\pi, \pi]$ umożliwiło uzyskanie bardziej szczegółowego wykresu wartości błędu $\delta[\tilde{y}(\tilde{r}, \tilde{\theta}, \tilde{\phi})]$, który przedstawiono na Rysunku 12.



Rysunek 12. Wykres porównujący wartość błędu $\delta[\tilde{y}(\tilde{r}, \tilde{\theta}, \tilde{\phi})]$ z oszacowaniem

Wyniki przedstawione na wykresie na Rysunku 10. mogą wynikać z metody obliczeń błędów w MATLAB-ie, szczególnie, gdy wartości funkcji sinus są bliskie zeru. W rzeczywistości, błąd dla tych wartości jest mniejszy, co można zauważyć po zmianie zakresu na osi poziomej.

Na wykresie na Rysunku 11. obserwujemy porównanie modułu wartości błędów $\delta[\tilde{y}(\tilde{r}, \tilde{\theta}, \tilde{\phi})]$ z jego oszacowaniem. Oszacowane wartości błędów są większe niż rzeczywiste, ale są tego samego rzędu wielkości. Estymata błędów jest zbliżona do rzeczywistych wartości. Obserwując wartości błędów względnego można zauważyć jego charakterystyczne wahania, natomiast oszacowany błąd prezentuje się bardziej równomiernie.

7.3. Wnioski

Proste przekształcenia matematyczne oraz metoda epsilonów umożliwiają skuteczne oszacowanie błędów wynikających z zaokrągleń danych oraz zaokrągleń wyników operacji zmiennopozycyjnych. Błędy zaokrągleń operacji zmiennoprzecinkowych także wpływają na wyniki operacji, co należy brać pod uwagę np. przy wybieraniu konkretnego algorytmu rozwiązywania zadania numerycznego.

8. Zadanie 6

8.1. Metodyka i wyniki doświadczeń

W celu oszacowania minimalnej liczby cyfr znaczących mantysy reprezentacji zmiennoprzecinkowej o podstawie 2, dla której: $\left| \delta \left[\tilde{y} \left(\tilde{r}, \tilde{\theta}, \tilde{\phi} \right) \right] \right| \leq 10^{-9}$ gdy $r = 0.01$, $\theta = \frac{\pi}{8}$, $\phi = \frac{\pi}{4}$ skorzystałem z następującego oszacowania obliczonego w zadaniu 4:

$$|\delta[\tilde{y}]| \leq |\theta \cot(\theta)|eps + |\phi \cot(\phi)|eps + 5eps \quad (52)$$

Przeprowadzając podobne rozumowanie do zawartego we wprowadzeniu, można obliczyć wartość liczby eps dla reprezentacji zmiennopozycyjnej o podstawie 2 i liczbie cyfr znaczących mantysy L:

$$eps = \frac{\sup|\tilde{m} - m|}{\inf|m|} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2^{-L}}{1 \cdot 2^{-1}} = 2^{-L} \quad (53)$$

Podstawiając wartość eps oraz wartości r , θ , ϕ , $\delta[\tilde{y}]$ do nierówności (45) otrzymałem:

$$|\delta[\tilde{y}]| \leq \left| \frac{\pi}{8} \cot\left(\frac{\pi}{8}\right) \right| 2^{-L} + \left| \frac{\pi}{4} \cot\left(\frac{\pi}{4}\right) \right| 2^{-L} + 5 \cdot 2^{-L} \quad (54)$$

$$|\delta[\tilde{y}]| \leq \left| \frac{\pi}{8} \cot\left(\frac{\pi}{8}\right) \right| 2^{-L} + \left| \frac{\pi}{4} \cot\left(\frac{\pi}{4}\right) \right| 2^{-L} + 5 \cdot 2^{-L} \quad (55)$$

$$|\delta[\tilde{y}]| \leq 2^{-L} \left(\frac{\pi}{8} \cdot (1 + \sqrt{2}) + \frac{\pi}{4} + 5 \right) \quad (56)$$

Błąd napewno będzie mniejszy niż 10^{-9} , gdy:

$$10^{-9} \geq 2^{-L} \left(\frac{\pi}{8} \cdot (1 + \sqrt{2}) + \frac{\pi}{4} + 5 \right) \quad (57)$$

$$10^{-9} \geq 2^{-L} \left(\frac{3 + \sqrt{2}}{8} \pi + 5 \right) \quad (58)$$

$$2^{-L} \leq \left(\frac{10^{-9}}{\frac{3 + \sqrt{2}}{8} \pi + 5} \right) \quad (59)$$

$$-L \leq \log_2 \left(\frac{10^{-9}}{\frac{3 + \sqrt{2}}{8} \pi + 5} \right) \quad (60)$$

$$L \geq \log_2 \left(\frac{\frac{3 + \sqrt{2}}{8} \pi + 5}{10^{-9}} \right) \quad (61)$$

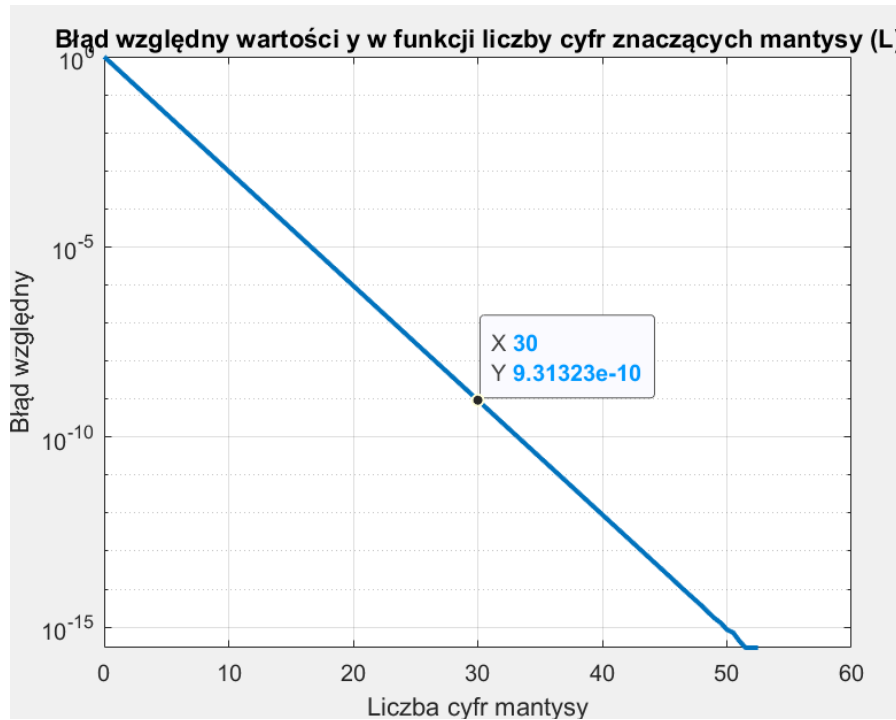
$$L \geq 32.99 \quad (62)$$

Powyższa metoda korzysta z oszacowania z Zadania 4. Zadanie można wykonać również poprzez obliczenie następującej wartości:

$$\delta[\tilde{y}(\tilde{r}, \tilde{\theta}, \tilde{\phi})] = \frac{\tilde{y}(\tilde{r}, \tilde{\theta}, \tilde{\phi}) - y(r, \theta, \phi)}{y(r, \theta, \phi)} \quad (63)$$

obliczając y na podstawie dostarczonych w treści zadania danych i podstawiając $\tilde{y} = y(1 + 2^{-L})$, gdzie L to liczba cyfr znaczących mantysy. Zatem przyjąłem, że liczba \tilde{y} jest obarczona błędem względnym ϵ . Wykonałem powyższe działanie w Matlabie a następnie narysowałem wykres błędu względnego w zależności od liczby cyfr mantysy. Z wykresu odczytałem wartość L , dla której uzyskany błąd jest mniejszy niż 10^{-9} , ale jak najbliższy niemu.

Na rysunku 13. przedstawiono wykres oszacowanego błędu względnego w zależności od liczby cyfr znaczących mantysy.



Rysunek 13. Wykres oszacowanego błędu względnego w zależności od liczby cyfr znaczących mantysy

8.2. Dyskusja wyników eksperymentów numerycznych

Dla pierwszego sposobu nierówność zachodzi dla $L \geq 32.99$, zatem minimalna liczba cyfr znaczących mantysy reprezentacji zmiennoprzecinkowej wynosi 33. Przeprowadzenie powyższych działań daje pewność, że błąd względny będzie mniejszy bądź równy szukanej wartości. Gwarantuje nam to użycie oszacowanej wartości błędu względnego, w której wykorzystana jest wartość ϵ do określenia granicznego błędu względnego dla y . Dla drugiego sposobu minimalna liczba cyfr mantysy, dla której spełnione jest szukane równanie wynosi 30. Oba wyniki różnią się o 3 cyfry, wynika to z różnych sposobów szacowania.

8.3. Wnioski

Pierwszy sposób polega na ręcznym szacowaniu wykorzystanym dzięki rachunkowi epsilonów. Wartość uzyskana za pomocą pierwszego sposobu jest większa, gdyż używając w tym przypadku rachunku epsilonów, zakładamy najgorszy możliwy scenariusz dla każdej operacji. W drugim sposobie za y podstawiamy dokładną wartość, a szacujemy tylko wartość błędu względnego y za pomocą wartości ϵ . Korzystając z rysunku 13. warto zauważyć, że po zastosowaniu skali logarytmicznej na osi pionowej wykres jest linią prostą. Linia prosta na wykresie logarytmicznym wskazuje na eksponencyjną zależność między błędem względnym a liczbą cyfr znaczących mantysy.

9. Listing programów

Listing 1. Zadanie2.m

```
1 % Inicjalizacja zmiennych x, y
2 x = -10:0.1:10;
3 y = 1;
4
5 % Funkcja  $\varphi$  dla podwojnej precyzji x
6 function out = phi_double(x, y)
7     out = sign(y) .* acos(x ./ (sqrt(x.^2 + y.^2)));
8 end
9
10 % Funkcja  $\varphi$  dla pojedynczej precyzji x
11 function out = phi_single(x, y)
12     xs = single(x);
13     xd = double(xs);
14     out = sign(y) .* acos(xd ./ (sqrt(xd.^2 + y.^2)));
15 end
16
17 %wykres -  $\varphi$  dla podwojnej i pojedynczej precyzji x
18 phi_1 = phi_double(x, y);
19 phi_2 = phi_single(x, y);
20
21 plot(x, phi_1, 'r')
22 hold on
23 plot(x, phi_2, 'b')
24 xlabel('x')
25 ylabel('φ(x, y, z)')
26 title('Porównanie funkcji φ dla podwojnej i pojedynczej precyzji x')
27 grid on
28 legend('phi\_double', 'phi\_single')
29
30
31 % Funkcja obliczająca błąd względny  $\delta[\varphi(\tilde{x}, y, z)]$ 
32 function out = relative_err(phi_double, phi_single)
33     out = (phi_single - phi_double) ./ phi_double;
34 end
35
36 % Obliczenie i wykres błędu względnego  $\delta[\varphi(\tilde{x}, y, z)]$ 
37 error = relative_err(phi_double(x, y), phi_single(x, y));
38 figure;
39 plot(x, error, 'b')
40 xlabel('x')
41 ylabel('δ[φ]')
42 title('Błąd względny δ[φ]')
43 grid on
44
45 % funkcja obliczająca  $\delta[\tilde{x}]$ 
46 function out = x_err(x)
47     xs = single(x);
48     xd = double(xs);
49     out = (xd - x) ./ x;
50 end
51
52 % funkcja obliczająca współczynnik przenoszenia błędu względnego
53 function out = T(x, y)
54     out = - x.*y.^2 ./ (abs(y).*acos(x./sqrt(x.^2 + y.^2)).*(x.^2+y.^2));
55 end
56
57 % wykres porównujący uzyskany wynik błędu względnego  $\delta[\varphi(\tilde{x}, y, z)]$ 
58 % z przybliżeniem:
59 delta_2 = T(x, y) .* x_err(x);
60 figure;
61 plot(x, error, 'b')
```



```

62 xlabel('x')
63 ylabel('δ[φ]')
64 title('Porównanie δ[φ] z przybliżeniem')
65 grid on
66 hold on
67 plot(x, delta_2, 'r')
68 legend('Błąd względny', 'Przybliżenie')

```

Listing 2. Zadanie3.m

```

1  %Inicjalizacja zmiennych x, y
2  x = -10:0.1:10;
3  y = 1;
4  eps_value = eps('single')/2;
5
6  %Funkcja φ dla x podwójnej precyzji
7  function out = phi_double(x, y)
8      out = sign(y) .* acos(x ./ (sqrt(x.^2 + y.^2)));
9  end
10
11 %Funkcja φ dla x pojedynczej precyzji
12 function out = phi_single(x, y)
13     xs = single(x);
14     xd = double(xs);
15     out = sign(y) .* acos(xd ./ (sqrt(xd.^2 + y.^2)));
16 end
17
18 %Funkcja obliczająca błąd względny δ[φ(̃x, y, z)]
19 function out = relative_err(phi_double, phi_single)
20     out = (phi_single - phi_double) ./ phi_double;
21 end
22
23 %Funkcja obliczająca współczynnik przenoszenia błędu względnego
24 function out = T(x, y)
25     out = -x.*y.^2./(abs(y).*acos(x./(sqrt(x.^2+y.^2))).*(x.^2+y.^2));
26 end
27
28 %Porównanie wartości błędów, wyznaczone w ramach Zadania 2, z oszacowaniem
29 error_abs = abs(relative_err(phi_double(x, y), phi_single(x, y)));
30 plot(x, error_abs, 'b')
31 xlabel('x')
32 ylabel('|δ[φ]|')
33 title('Porównanie wartości błędu z oszacowaniem')
34 grid on
35 hold on
36 plot(x, abs(T(x,y))*eps_value, 'r')
37 legend('Wartość błędu', 'Oszacowanie')

```

Listing 3. Zadanie5.m

```

1  %inicjalizacja zmiennych
2  r = 0.1;
3  theta = pi/3;
4  phi = -1.5*pi:0.1:1.5*pi;
5
6  %funkcja do obliczenia y korzystając z podwójnej precyzji
7  function out = calculate_y_double(r, theta, phi)
8      out = r .* sin(theta) .* sin(phi);
9  end
10
11 %funkcja do obliczenia y korzystając z pojedynczej precyzji
12 function out = calculate_y_single(r, theta, phi)
13     r_s = single(r);
14     theta_s = single(theta);
15     phi_s = single(phi);

```

```

16     out = r_s .* sin(theta_s) .* sin(phi_s);
17 end
18
19 %wykres -  $\varphi$  dla podwójnej i pojedynczej precyzji x
20 y_2 = calculate_y_double(r, theta, phi);
21 y_1 = calculate_y_single(r, theta, phi);
22
23 figure;
24 plot(phi, y_1, 'r')
25 hold on
26 plot(phi, y_2, 'b')
27 xlabel('φ[rad]')
28 ylabel('y(r, θ, φ)')
29 title('Porównanie funkcji y dla podwójnej i pojedynczej precyzji')
30 grid on
31 legend('y dla podwójnej precyzji', 'y dla pojedynczej precyzji')
32
33 %funkcja wyznaczająca błąd względny  $\delta[\sim y(\sim r, \sim \theta, \sim \varphi)]$ 
34 function out = relative_err(y_2, y_1)
35     out = abs((y_1 - y_2) ./ y_2);
36 end
37
38 %wykres przedstawiający błąd względny  $\delta[\sim y(\sim r, \sim \theta, \sim \varphi)]$ 
39 error = relative_err(y_2, y_1);
40 figure;
41 plot(phi, error, 'r')
42 xlabel('φ[rad]')
43 grid on
44 ylabel('Błąd względny')
45 title('Błąd względny')
46
47 %wykres prezentujący błąd względny po zastosowaniu skali log na osi y
48 % Wykres ilustrujący błąd względny oraz jego oszacowanie na skali logarytmicznej
49 figure
50 semilogy(phi, error, 'r')
51 xlabel('φ[rad]')
52 ylabel('Błąd względny')
53 title('Błąd względny')
54 legend('Błąd względny', 'Location', 'best')
55 grid on
56
57
58
59
60
61 estimated_delta = estimate_delta(theta, phi);
62
63 %funkcja zwracająca oszacowanie błędu
64 function out = estimate_delta(theta, phi)
65     eps_s = eps('single')/2;
66     out = abs(theta .* cot(theta)).*eps_s + abs(phi .* cot(phi)).* eps_s + 5.*eps_s;
67 end
68
69 % Wykres ilustrujący błąd względny oraz jego oszacowanie na skali logarytmicznej
70 figure
71 semilogy(phi, error, 'r', phi, estimated_delta, 'b')
72 xlabel('φ[rad]')
73 ylabel('Błąd')
74 title('Błąd względny i oszacowanie')
75 legend('Błąd względny', 'Oszacowanie błędu', 'Location', 'best')
76 grid on

```

Listing 4. Zadanie6.m

```

1 %inicjalizacja zmiennych

```

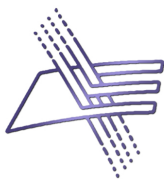
```

2 r = 0.01;
3 theta = pi/8;
4 phi = pi/4;
5 l = 0:0.5:60;
6
7 %funkcja zwracajaca wartosc y
8 function out = y(r, theta, phi)
9     out = r .* sin(theta) .* phi;
10 end
11
12 %funkcja zwracajaca y zaburzone bledem względnym 2^{-l}
13 function out = y_err(y, l)
14     out = y .* (1 + 2.^(-l));
15 end
16
17 % Wywołanie funkcji dla obliczenia dokładnej wartosci y
18 y_exact = y(r, theta, phi);
19
20 % Obliczanie y z bledem względnym
21 y_dist = y_err(y_exact, l);
22
23 %funkcja zwracajaca blad względnym
24 function out = error(y_acc, y_err)
25     out = (y_err - y_acc) ./ y_acc;
26 end
27
28 % Obliczenie błędu względnego
29 error_y = error(y_exact, y_dist);
30
31 % Tworzenie wykresu
32 figure;
33 semilogy(l, error_y, 'LineWidth', 2);
34 xlabel('Liczba cyfr mantysy');
35 ylabel('Bład względny');
36 title('Bład względny wartosci y w funkcji liczby cyfr znaczących mantysy (L)');
37 grid on;

```

Literatura

- [1] R. Z. Morawski, materiały do przedmiotu Obliczenia inżynierskie, Politechnika Warszawska, Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych, semestr zimowy 2023/24.
- [2] <https://pl.wikipedia.org/wiki/IEEE754> [12.02.2024]



**Wydział Elektroniki
i Technik Informacyjnych**

POLITECHNIKA WARSZAWSKA