Part I

高等数学

Chapter 1

函数、极限、连续

1.1 考点解析

1.2 经典例题

例 1. (1) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$

$$\begin{aligned} sol &= \lim_{x\to 0}\left[1+(\cos x-1)\right]^{\frac{1}{\ln 1+x^2}} \\ &= \exp\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\ln(1+x^2)} = \exp\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = e^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)$

$$\begin{aligned} sol &= \lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}} \\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}} = 1 \end{aligned}$$

例 2. (1) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{a}{x}-(\frac{1}{x^2}-a^2)\ln(1+ax)\right]$, a 为常数。

$$\begin{aligned} sol &= \lim_{x\to 0}\frac{ax+\ln(1+ax)}{x^2}+a^2\lim_{x\to 0}\ln(1+ax) \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{a-\frac{a}{1+ax}}{2x}+a^2\lim_{x\to 0}ax = \lim_{x\to 0}\frac{a^2}{2(1+ax)}+0 = \frac{1}{2}a^2 \end{aligned}$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{2\sin x}}{x^3}$

$$
\begin{aligned}
sol &= \lim_{x\to 0} e^{2\sin x}\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x-2\sin x}-1}{x^3} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x+2\sin x}{x^3} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x-2\cos x}{3x^2} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-4\sin 2x+2\sin x}{6x} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-8\sin 2x+2\cos x}{6} \\
&= -1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
or &= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x(\cos x-1)}{x^3} \\
&= \lim_{x\to 0}-\frac{2\sin x\frac{1}{2}x^2}{x^3} \\
&= \lim_{x\to 0}-\frac{\sin x}{x} \\
&= -1
\end{aligned}
$$

例 3. (1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$

$$
\begin{aligned}
sol &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}-e}{x} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}-1}{x}e = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}{x}e \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}e = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}e \\
&= \lim_{x\to 0}-\frac{1}{2(1+x)}e = -\frac{1}{2}e
\end{aligned}
$$

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-x^x}{1-x+\ln x}$

$$
\begin{aligned}
sol &= \lim_{x\to 1}\frac{1-x^{(x-1)}}{1-x+\ln x}\lim_{x\to 1}x = \lim_{x\to 1}\frac{1-e^{(x-1)\ln x}}{1-x+\ln x} \\
&= \lim_{x\to 1}\frac{-(x-1)\ln x}{1-x+\ln x} = \lim_{x\to 1}-\frac{\ln x+\frac{x-1}{x}}{-1+\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to 1}-\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 1}\frac{x+1}{1} = 2
\end{aligned}
$$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\tan\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

$n\to+\infty$ 是 $x\to+\infty$ 的特殊情况，将 n 换为 x，有 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\tan\frac{1}{x})^{x^2}$，

$x\to+\infty$ 求极限不方便，倒代换 $t=\frac{1}{x}$，

$$
sol \xrightarrow{t=\frac{1}{x}} \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{\tan t}{t}\right)^{\frac{1}{t^2}} = \exp\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln(\frac{\tan t}{t})}{t^2}
$$

$$= \exp \lim_{t\to0^+} \frac{\ln(\frac{\tan t}{t}-1+1)}{t^2} = \exp \lim_{t\to0^+} \frac{\frac{\tan t}{t}-1}{t^2}$$
$$= \exp \lim_{t\to0^+} \frac{\tan t - t}{t^3} = \exp \lim_{t\to0^+} \frac{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}{3t^2}$$
$$= \exp \lim_{t\to0^+} \frac{t^2}{3t^2} = e^{\frac{1}{3}}$$

(4) $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x \ln(1-x)$

$$sol \xrightarrow{\ln(1-x)\sim -x} \lim_{x\to0^+} -x\ln x$$
$$= \lim_{x\to0^+} -\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0^x} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}$$
$$= \lim_{x\to0^x} x = 0$$

例 4. (1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[x-(1+e^{-x})\ln(1+e^x)\right]$

sol : 看 e^x 不顺眼，换

1°

$$\xrightarrow{t=e^x\to\infty} \lim_{t\to\infty}[\ln t-(1+t^{-1})\ln(1+t)]$$
$$= \lim_{t\to\infty}[\ln t-\ln(1+t)-\frac{\ln(1+t)}{t}]$$
$$= \lim_{t\to\infty}[\ln\frac{t}{1+t}-\frac{\ln(1+t)}{t}]$$
$$= \lim_{t\to\infty}\ln\frac{1}{\frac{1}{t}+1}-\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{1+t}}{1}$$
$$= 0-0=0$$

2°

$$\xrightarrow{t=e^{-x}\to0^+} \lim_{t\to0^+}[-\ln t-(1+t)\ln(1+t^{-1})]$$
$$= \lim_{t\to0^+}[-\ln t-\ln(1+\frac{1}{t})-t\ln(1+\frac{1}{t})]$$
$$= \lim_{t\to0^+}[-\ln(t+1)]-\lim_{t\to0^+}\frac{\ln(1+\frac{1}{t})}{\frac{1}{t}}$$
$$= \lim_{t\to0^+}[-\ln(t+1)]-\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{-\frac{1}{t^2}}{1+\frac{1}{t}}}{-\frac{1}{t^2}}$$
$$= 0-0=0$$

3° 或恒等变换

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to+\infty}[x-\ln(1+e^x)] - \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{e^x} \\
&= \lim_{x\to+\infty}[\ln e^x-\ln(1+e^x)] - \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{e^x} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\ln\frac{1+e^x}{e^x} - \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x}{1+e^x}}{e^x} \\
&= 0-0=0
\end{aligned}
$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)$

遇绝对值，分左右极限。

sol

$$
\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+1\right)=1
$$

$$
\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=1
$$

$\therefore$ 原式 $=1$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$

$$
\begin{aligned}
sol &= \lim_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{3\sin x}{2x}+\lim_{x\to 0}\frac{x\cos\frac{1}{x}}{2} \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

例 5. (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$

$sol = \exp\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(\frac{\pi}{2}-\arctan x)}{\ln x} = \exp\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x}{(1+x^2)(\frac{\pi}{2}-\arctan x)}$

1°

$$
\begin{aligned}
&= \exp\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{x}}{(\frac{1}{x^2}+1)(\frac{\pi}{2}-\arctan x)} \\
&= \exp\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{x}{1+x^2}}{\frac{\pi}{2}-\arctan x} \\
&= \exp\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}}{-\frac{1}{1+x^2}}
\end{aligned}
$$

$$= \exp \lim_{x\to+\infty} \frac{1-x^2}{1+x^2} = e^{-1}$$

2°

$$= \exp \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{x}}{(1+\frac{1}{x^2})(\frac{\pi}{x} - \arctan x)}$$
$$= \exp \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{x}}{\frac{\pi}{2} - \arctan x}$$
$$= \exp \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{1+x^2}} = e^{-1}$$

3°

$$= \exp \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{2x(\frac{\pi}{2} - \arctan x) - 1}$$
$$\xrightarrow{\text{先求}} \lim_{x\to+\infty} x(\frac{\pi}{2} - \arctan x)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = 1$$
$$\therefore \exp \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{2-1} = e^{-1}$$

(2) $\lim_{x\to0^+} \frac{1-\cos x}{\sqrt{1-x}-\cos\sqrt{x}}$

$$sol = \lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt{1-x}\cos x}{1-x-\cos^2\sqrt{x}} \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos^2 x}$$
$$= \lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt{1x}+\cos\sqrt{x}}{1+\cos x} \frac{\sin^2 x}{1-x-\cos^2\sqrt{x}}$$
$$= \lim_{x\to0^+} \frac{2}{2} \frac{x^2}{\sin^2\sqrt{x}-x}$$
$$\xrightarrow{t=\sqrt{x}} \lim_{x\to0^+} \frac{t^4}{\sin^2 t - t^2} = \lim_{x\to0^+} \frac{2t^3}{\sin t\cos t - t}$$
$$= \lim_{x\to0^+} \frac{6t^2}{\cos^2 t - \sin^2 t - 1} = \lim_{x\to0^+} \frac{3t^2}{-\sin^2 t}$$
$$= -3$$

例 6. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[(x^5+6x^4+2)^\alpha-x\right]=\beta$, 求 α，β 的值。

$$sol:\because \lim_{x\to\infty}\left[(x^5+6x^4+2)^\alpha-x\right]=\beta$$

$$\therefore \lim_{x\to+\infty}[(x^5+7x^4+2)^\alpha-x]=\lim_{x\to+\infty}x\left[\frac{(x^5+7x^4+2)^\alpha}{x}-1\right]=0$$

$$即 \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^5+7x^4+2}{x^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^\alpha=1$$

$$\therefore \frac{1}{\alpha}=5\Rightarrow\alpha=5$$

$$又\because \beta=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[5]{x^5+7x^4+2}-x)$$

1°

$$=\lim_{x\to+\infty}x(\sqrt[5]{x^5+7x^4+2}-1)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\frac{1}{5}(\frac{7}{x}+\frac{2}{x^5})=\frac{7}{5}$$

2°

$$\xrightarrow{t=\frac{1}{x}\to0^+}\lim_{t\to0^+}\left(\sqrt[5]{\frac{1}{t^5}+\frac{7}{t^4}+2}-\frac{1}{t}\right)$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t}(\sqrt[5]{1+7t+2t^5}-1)$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{5}(7t+2t^5)=\frac{7}{5}$$

例 7. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导, $f(x)>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ 且 $\lim\limits_{h\to0}\left[\frac{f(x+hx)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}}=e^{\frac{1}{x}}$，求 $f(x)$。

$$sol:\because \lim_{h\to0}\left[\frac{f(x+hx)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}}=e^{\frac{1}{x}}$$

$$\therefore \lim_{h\to0}\frac{\ln\frac{f(x+hx)}{f(x)}}{h}=\frac{1}{x}$$

1° “$+1-1$” 法

$$\lim_{h\to0}\frac{\ln(\frac{f(x+hx)-f(x)}{f(x)}+1)}{h}=\frac{1}{x}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+hx)-f(x)}{hf(x)}=\frac{1}{x}$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+hx)-f(x)}{hx}=\frac{1}{x^2}f(x)$$
$$f'(x)=\frac{1}{x^2}f(x)$$
$$\therefore f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$$

2°

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln f(x+hx)-\ln f(x)}{h}=\frac{1}{x}$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln f(x+hx)-\ln f(x)}{hx}\cdot x=\frac{1}{x}$$
$$x\cdot[\ln f(x)]'=\frac{1}{x}$$
$$\therefore (\ln f(x))'=\frac{1}{x}$$
$$\ln f(x)=\frac{1}{x}$$
$$f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$$

3° 泰勒展开法

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$$
$$\therefore f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x)\Delta x+o(\Delta x)$$
$$\therefore \ln f(x+hx)=\ln f(x)+[\ln f(x)]'hx+o(hx)$$
$$\text{则}\lim_{h\to 0}\frac{\ln f(x+hx)-\ln f(x)}{h}=\frac{1}{x}$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{[\ln f(x)]'hx+o(hx)}{h}=\frac{1}{x}$$
$$[\ln f(x)]'=\frac{1}{x^2}$$
$$\therefore f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$$

例 8. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，$f(0)\neq 0$，$f'(0)\neq 0$，当 $h\to 0$ 时，$af(h)+bf(2h)-f(0)$ 是比 h 更高阶的无穷小，求 a，b 的值。

$$sol:\because \lim_{h\to 0}af(h)+bf(2h)-f(0)=0$$

并且$f(x)$在$x=0$可导，$\to$ 连续，代入

$af(0)+bf(0)-f(0)=0$
$(a+b-1)f(0)=0$
$a+b=1$
回代

$$\lim_{h\to 0}\frac{af(h)+bf(2h)-(a+b)f(0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}a\frac{f(h)-f(0)}{h}+\lim_{h\to 0}2b\frac{f(2h)-f(0)}{2h}$$
$$=af'(0)+2bf'(0)=0$$
$$\therefore\begin{cases}a+b=1\\a+2b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=-1\end{cases}$$

例 9. 设 $f(x)$ 为连续函数，$f(0)\neq 0$，求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x(x-t)f(t)dt}{x\int_0^x f(t)dt}$。

$sol:$

$$\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)+\int_0^x f(t)dt-xf(x)}{xf(x)+\int_0^x f(t)dt}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{xf(x)+\int_0^x f(t)dt}$$

1°

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}}{f(x)+\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}}$$
$$\text{先计算}\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}f(x)$$
$$=f(0)$$
$$\therefore\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{f(0)}{f(x)+f(0)}$$
$$=\frac{1}{2}$$

2° 泰勒展开

$$\text{设}F(x)=\int_0^x f(t)dt$$

$$
\begin{aligned}
&F(x) = F(0) + F'(0)x + o(x) \\
&= 0 + f(x)x + o(x) \\
&\therefore \text{原式} = \lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{xf(x) + F(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{xf(x) + o(x)}{xf(x) + xf(x) + o(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{f(x) + \frac{o(x)}{x}}{2f(x) + \frac{o(x)}{x}} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

例 10. 当 $x \to 0$ 时，$1 - \cos x \cos 2x \cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小，求常数 a 与 n 的值。

sol :泰勒展开

$$
\begin{aligned}
&\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \\
&\therefore 1 - \cos x \cos 2x \cos 3x \\
&= 1 - [1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)][1 - \frac{1}{2}(2x)^2 + o(x^2)][1 - \frac{1}{2}(3x)^2 + o(x^2)] \\
&= (\frac{1}{2} + \frac{4}{2} + \frac{9}{2})x^2 + o(x^2) \\
&= 7x^2 + o(x^2) \\
&\because \text{与} ax^n \text{等价无穷小} \\
&\therefore n = 2, a = 7
\end{aligned}
$$

例 11. 当 $x \to 0$ 时，$x^2 + \ln(1 + x)\ln(1 - x)$ 与 ax^n 为等价无穷小，求常数 a 与 n 的值。

sol :泰勒展开

$$
\begin{aligned}
&\ln(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \\
&\therefore x^2 + \ln(1 + x)\ln(1 - x) \\
&= x^2 + [x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)][-x - \frac{1}{2}(-x)^2 + \frac{1}{3}(-x)^3 - o(x^3)] \\
&= x^2 - [x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)][x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)] \\
&= (-\frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4})x^4 + o(x^4)
\end{aligned}
$$

$$= -\frac{5}{12}x^4 + o(x^4)$$
$\because$ 与ax^n等价无穷小
$$\therefore n = 4, a = -\frac{5}{12}$$

例 12. 已知 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a\tan x + b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x) + d(1-e^{-x^2})} = 2$，$(a^2 + c^2 \neq 0)$，则 (　)
$A.b = 4d \quad B.b = -4d \quad C.a = 4c \quad D.a = -4c$

sol :

1° 洛必达

$$\lim_{x\to 0} \frac{a\frac{1}{\cos^2 x} + b\sin x}{c\frac{-2}{1-2x} + d2xe^{-x^2}} = \frac{a}{-2c} = 2 \Rightarrow a = -4c$$

2°

$$\lim_{x\to 0} \frac{a\frac{\tan x}{x} + b\frac{\ln(1-\cos x)}{x}}{c\frac{\ln(1-2x)}{x} + d\frac{1-e^{-x^2}}{x}} = \frac{a}{-2c} = 2 \Rightarrow a = -4c$$

例 13. 设 $f(x)$ 对一切正数 x_1，x_2 有 $f(x_1, x_2) = f(x_1) + f(x_2)$，且 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处连续，证明 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 连续。

sol :取$x_1 = x_2 = 1 \Rightarrow f(1) = f(1) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x + \Delta x) = \lim_{\Delta x\to 0} f\left[x\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)\right]$$
$$= \lim_{\Delta x}\left[f(x) + f\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)\right]$$
$\because f(x)$在$x = 1$处连续
$$\therefore \lim_{\Delta x\to 0} f\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = f(1) = 0$$
$$\therefore \lim_{\Delta x\to 0} f(x + \Delta x) = \lim_{\Delta x\to 0}[f(x) + 0] = f(x)$$
$\therefore f(x)$在$(0, +\infty)$连续

例 14. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导，$f(0) < 0$，$f'(x) \geq k > 0$，（k 为常数），证明方程 $f(x) = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上有唯一根。

sol :构造$F(x) = f(x) - f(0) - kx$
$$F'(x) = f'(x) - k \geq 0$$

$$
\begin{aligned}
&又 \because F(0)=0\\
&\therefore F(x)\geq F(0)=0\\
&\therefore f(x)\geq f(0)+kx\\
&\because 当 f(0)+kx_0=0\Rightarrow x_0=-\frac{f(0)}{k}>0 时 f(-\frac{f(0)}{k})\geq 0\\
&且 f(0)<0, f'(x)\geq k>0\\
&\therefore f(x)=0 在 (0,+\infty) 上有唯一根
\end{aligned}
$$

例 15. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上二阶可导，$f(a)<0$，$f'(a)>0$ 当 $x>a$ 时,$f''(x)>0$, 证明方程 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上存在唯一根。

$sol:\because f''(x)>0$

$$
\begin{aligned}
&\therefore 当 x\in(a,+\infty) 时 f'(x)>f'(a)\\
&构造 F(x)=f(x)-f(a)-f'(a)x\\
&F'(x)=f'(x)-f'(a)>0 \quad (x\in(a,+\infty))\\
&\therefore f(x)-f(a)-f'(a)x>-f'(a)a\\
&f(x)>f(a)+f'(a)x=f'(a)a\\
&令 f(a)+f'(a)x_0-f'(a)a=0\Rightarrow x_0=a-\frac{f(a)}{f'(a)}>a\\
&\therefore f(x_0)>0\\
&又 \because f(a)<0, f'(x)>f'(a)>0\\
&\therefore f(x)=0 在 (a,+\infty) 上存在唯一跟
\end{aligned}
$$

例 16. 设 $x_1>0$，当 $n\geq 1$ 时，$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})$，$a$ 为正常数，证明数列 $\{x_n\}$ 存在极限并求其极限。

$sol: x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}\Big(x_n+\frac{a}{x_n}\Big)-x_n=\frac{a-x_n^2}{2x_n}$

$$
\begin{aligned}
&x_{n+1}=\frac{1}{2}\Big(x_n+\frac{a}{x_n}\Big)\geq\sqrt{a}\\
&\therefore x_{n+1}-x_n\leq 0\\
&\therefore n\geq 2 时 \{x_n\} 单调不增，有下界为 \sqrt{a}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}x_n 存在\\
&设 \lim_{n\to\infty}x_n=A，在 x_{n+1}=\frac{1}{2}\Big(x_n+\frac{a}{x_n}\Big) 两边令 n\to\infty\\
&则有 A=\frac{1}{2}\Big(A+\frac{a}{A}\Big)\Rightarrow A=\sqrt{a}\\
&\therefore \lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}
\end{aligned}
$$

例 17. 设 $a>0$，$x_1>\sqrt{a}$，当 $n\geq 1$ 时，$x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}$，证明 $\{x_n\}$ 存在极限并求出其极限。

$$sol: x_{n+a}^2 = a + x_n$$
$$\therefore x_{n+1}^2 - x_n^2 = x_n - x_{n-1}$$
$$\because x_3^2 - x_2^2 = x_2 - x_1 = \sqrt{a+\sqrt{a}} - \sqrt{a} > 0$$
$$\therefore x_3 > x_2$$
$$x_{n+1} = \frac{a}{x_{n+a}} + \frac{x_n}{x_{n+1}} \leq \frac{a}{x_1} + 1 = \sqrt{a} + 1$$
显然$x_{n+1}>x_n$，$\{x_n\}$单调增加，有上界为$\sqrt{a}+1\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，在$x_{n+1}^2=a+x_n$两边令$n\to\infty$

则有$A^2=a+A\Rightarrow A=\dfrac{1}{2}\pm\sqrt{\dfrac{1}{4}+a}$

又 $\because A\geq\sqrt{a}>0 \quad \therefore A=\dfrac{1}{2}+\sqrt{\dfrac{1}{4}+a}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+a}$$

例 18. 设 $x_1>0$，当 $n\geq 1$ 时，$x_{n+1}=\sqrt{ax_n}$，证明 $\{x_n\}$ 存在极限并求出其极限。

$$\begin{aligned} sol: x_{n+1}-x_n &= \sqrt{ax_n}-x_n \\ &= \sqrt{x_n}(\sqrt{a}-\sqrt{x_n}) \\ x_{n+1}-a &= \sqrt{ax_n}-a \\ &= \sqrt{a}(\sqrt{x_n}-\sqrt{a}) \end{aligned}$$

(i) 当 $x_1<a$ 时

$\because \sqrt{x_1}-\sqrt{a}<0 \therefore x_{n+1}-x_n>0$，且$x_{n+1}-a<0\Rightarrow x_{n+1}<a$

$\therefore \{x_n\}$单调递增，且上界为$a\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，在$x_{n+1}=\sqrt{ax_n}$两边令$n\to\infty$

则有$A=\sqrt{aA}\Rightarrow A=a$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

(ii) 当 $x_1>a$ 时

$\because \sqrt{x_1}-\sqrt{a}>0 \therefore x_{n+1}-x_n<0$，且$x_{n+1}-a>0\Rightarrow x_{n+1}>a$

$$\therefore \{x_n\}\text{单调递减，且下界为}a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n\text{存在}$$
$$\text{设}\lim_{n\to\infty} x_n = A\text{，在}x_{n+1} = \sqrt{ax_n}\text{两边令}n \to \infty$$
$$\text{则有}A = \sqrt{aA} \Rightarrow A = a$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

(iii) 当 $x_1 = a$ 时，$x_{n+1} = x_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = a$

$\therefore$ 综上所述，数列 $\{x_n\}$ 存在极限，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

例 19. 设 $x_1 = 2$，当 $n \geq 1$ 时，$x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{1+x_n}$，证明 $\{x_n\}$ 存在极限并求出其极限。

$$sol: x_{n+1} - x_n = 1 + \frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 - \frac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}}$$
$$= \frac{x_n(1 + x_{n-1}) - (1 + x_n)x_{n-1}}{(1 + x_n)(1 + x_{n-1})}$$
$$\because x_2 = 1 + \frac{2}{1+2} = 1\frac{2}{3} < x_1$$
$$\therefore x_{n+1} - x_n < 0\text{，即}\{x_n\}\text{单调递减}$$
$$\because x_{n+1} > 1 \quad \therefore \text{有下界为 }1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n\text{存在}$$
$$\text{设}\lim_{n\to\infty} x_n = A\text{，对}x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{1 + x_n}\text{两边令}n \to \infty$$
$$\therefore A = 1 + \frac{A}{1 + A} \Rightarrow A = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$
$$\because A > 1 \quad \therefore A = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

例 20. 设 $0 < x_1 < 3$，当 $n \geq 1$ 时，$x_{n+1} = \sqrt{x_n(3 - x_n)}$，证明 $\{x_n\}$ 存在极限并求出其极限。

$$sol: \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\sqrt{x_n(3 - x_n)}}{x_n} = \sqrt{\frac{3}{x_n} - 1}$$
$$x_{n+1} = \sqrt{x_n(3 - x_n)} \leq \frac{3}{2}$$
$$or \quad x_{n+1}^2 - \frac{9}{4} = -x_n^2 + 3x_n - \frac{9}{4} = -(x_n - \frac{3}{2})^2 \leq 0$$

$\therefore$ 当$n \geq 2$时$\dfrac{x_{n+1}}{x_n} > 1$，且$x_{n+1} \leq \dfrac{3}{2}$

即$\{x_n\}$单调不减，且有上界为$\dfrac{3}{2} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在

设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，对$x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)}$两边令$n \to \infty$

$\therefore A = \sqrt{A(3-A)} \Rightarrow A = 0 \quad or \quad A = \dfrac{3}{2} \quad \because x_2 > 0 \therefore A = \dfrac{3}{2}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{3}{2}$

例 21. 设 $0 < a < 1$，$x_1 = \frac{a}{2}$，当 $n \geq 1$ 时，$x_{n+1} = \frac{a+x_n^2}{2}$，证明 $\{x_n\}$ 存在极限并求出其极限。

例 22. 设 $a_0 \geq b_0 > 0$，当 $n \geq 0$ 时，$a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$，$b_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}$，证明数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的极限均存在，并求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n$。

$sol: a_{n+1} - a_n = \dfrac{b_n - a_n}{2} \quad \dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \dfrac{2a_n}{1_n + b_n}$

$\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \dfrac{(a_n+b_n)^2}{4a_nb_n} \geq \dfrac{(2\sqrt{a_nb_n})^2}{4a_nb_n} = 1$

$\therefore a_n \geq b_n$

$\therefore \{a_n\}$为单调不增，$\{b_n\}$为单调不减，且$a_0 \geq a_n \geq b_n \geq b_0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n, \lim\limits_{n\to\infty} b_n$存在，设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$

则分别对$a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}, b_{n+1} = \dfrac{2a_nb_n}{a_n+b_n}$两边令$n \to \infty$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = \frac{A+B}{2} \\ B = \frac{2AB}{A+B} \end{cases} \Rightarrow A = B$$

$\because a_{n+1}b_{n+1} = a_nb_n = \cdots = a_0b_0$

$\therefore AB = a_0b_0 \Rightarrow A = B = \sqrt{a_0b_0}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \sqrt{a_0b_0}$

例 23. 设 $x_0 > 0$，$y_0 > 0$，当 $n \geq 0$ 时，$x_{n+1} = \sqrt{x_ny_n}$，$y_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2}$，证明数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 的极限均存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$。

$sol: \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \sqrt{\dfrac{y_n}{x_n}} \quad , y_{n+1} - y_n = \dfrac{x_n - y_n}{2}$

$\because y_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n) \geq \sqrt{x_n y_n} = x_{n+1}$

$\therefore \{x_n\}$单调不减，$\{y_n\}$单调不增

$\because y_0 \geq y_n \geq x_n \geq x_0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n, \lim\limits_{n\to\infty} y_n$存在

设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = X, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = Y$，则对$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$,

$y_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}$两边分别令$n \to \infty$

$$\Rightarrow \begin{cases} X = \sqrt{XY} \\ Y = \frac{X+Y}{2} \end{cases} \Rightarrow X = Y$$

即$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

例 24. 设 $x_1 = a$，$x_2 = b$，$a < b$，当 $n \geq 2$ 时，$x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}}{2}$，求

(1) $y_n = x_n - x_{n-1}$，$n \geq 2$;

(2) $\sum\limits_{k=2}^{n} y_k$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$。

sol :

(1)

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n + x_{n+1}}{2} - x_n = -\frac{1}{2}(x_n - x_{n-1})$$
$$\therefore y_{n+1} = -\frac{1}{2} y_n$$
$$y_2 = x_2 - x_1 = b - a \Rightarrow y_n = (-\frac{1}{2})^{n-2}(b-a)$$

(2)

$$\sum_{k=2}^{n} y_k = \sum_{k=2}^{n} (b-a)(-\frac{1}{2})^{k-2}$$
$$= (b-a)\frac{1 - (-\frac{1}{2})^{n-1}}{1 - (-\frac{1}{2})}$$
$$= (b-a)\frac{1 - (-\frac{1}{2})^{n-1}}{\frac{3}{2}}$$

(3)

$$x_n = y_n + y_{n-1} + \cdots + y_2 + x_1$$

$$= \sum_{k=2}^{n} y_k + x_1$$
$$= (b-a)\frac{1-(-\frac{1}{2})^{n-1}}{\frac{3}{2}} + x_1$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(b-a)\frac{1-(-\frac{1}{2})^{n-1}}{\frac{3}{2}} + a$$
$$= \frac{2}{3}(b-a) + a = \frac{1}{3}(2b-a)$$

例 25. 设 $x_1=1$，$x_2=2$，当 $n\geq 2$ 时，$x_{n+1}=\sqrt{x_n x_{n+1}}$，求

(1) $y_n = \ln x_n - \ln x_{n-1}$，$n\geq 2$;

(2) $\sum\limits_{k=2}^{n} y_k$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$。

sol :

(1)

$$\ln x_{n+1} = \frac{1}{2}(\ln x_n + \ln x_{n-1})$$
$$\ln x_{n+1} - \ln x_n = -\frac{1}{2}(\ln x_n - \ln x_{n-1})$$
$$\therefore y_{n+1} = -\frac{1}{2}y_n$$
$$y_2 = \ln 2$$
$$\therefore y_n = (-\frac{1}{2})^{n-2}\ln 2$$

(2)

$$\sum_{k=2}^{n} y_k = \sum_{k=2}^{n} \ln 2(-\frac{1}{2})^{n-2} = \ln 2\frac{1-(-\frac{1}{2})^{n-1}}{\frac{3}{2}}$$

(3)

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \exp \lim_{n\to\infty} \ln x_n$$
$$= \exp \lim_{n\to\infty}[y_n + y_{n-1} + \cdots + y_2 + \ln x_1]$$

$$
\begin{aligned}
&= \exp \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{k=2}^{n} y_k + \ln x_1 \right] \\
&= \exp \lim_{n\to\infty} \left[\ln 2 \frac{1-(-\frac{1}{2})^{n-1}}{\frac{3}{2}} + \ln 1 \right] \\
&= \exp \left[\ln 2 \cdot \frac{2}{3} + 0 \right] \\
&= \sqrt[3]{4}
\end{aligned}
$$

例 26. 设 n 为正整数，且 $n\pi \le x < (n+1)\pi$，

(1) 证明 $2n \le \int_0^x |\sin t|\,dt < 2(n+1)$；

(2) 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x |\sin t| dt}{x}$。

sol :

(1)

$$
\int_0^{n\pi} |\sin t|\,dt \le \int_0^{x} |\sin t|\,dt \le \int_0^{(n+1)\pi} |\sin t|\,dt
$$

$$\Downarrow$$

$$
2n \le \int_0^{x} |\sin t|\,dt \le 2(n+1)
$$

(2)

$$
\frac{2n}{x} \le \frac{\int_0^x |\sin t|\,dt}{x} \le \frac{2(n+1)}{x}
$$

$$\Downarrow$$

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{(n+1)\pi} \le \frac{2n}{x} \le \frac{\int_0^x |\sin t|\,dt}{x} \le \frac{2(n+1)}{x} \le \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)}{n\pi}
$$

$$
\begin{aligned}
\because \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{(n+1)\pi} &= \frac{2}{\pi} \\
\lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)}{n\pi} &= \frac{2}{\pi} \\
\therefore \lim_{x\to\infty} \frac{\int_0^x |\sin t|\,dt}{x} &= \frac{2}{\pi}
\end{aligned}
$$

例 27. 当 $0 < x < 1$ 时，证明 $\sin\frac{\pi x}{2} > x$；又设 $0 < x_1 < 1$，当 $n \ge 1$ 时，$x_{n+1} = \sin\frac{\pi x_n}{2}$，证明数列 $\{x_n\}$ 存在极限并求出其极限。*sol* :

(1)

$$\text{令}f(x) = \sin\frac{\pi x}{2} - x$$
$$f'(x) = \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2} - 1$$
$$\text{令}f'(x_0) = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{2}{\pi}\arccos\frac{2}{\pi}$$
$$0 < x < x_0\text{时}f'(x) > 0 \quad \therefore f(x) > f(0) = 0$$
$$x_0 < x < 1\text{时}f'(x) > 0 \quad \therefore f(x) > f(0) = 0$$
$$\therefore f(x) > 0 \quad (x \in (0,1))$$
$$\therefore \text{当}0 < x < 1\text{时，}\sin\frac{[}{\pi}x]2 > x$$

(2)

$$\text{已知}0 < x < 1$$
$$\text{设}0 < x_n < 1$$
$$\text{则由 (1) 可知：}0 < x_n < x_{n+1} = \frac{\pi x_n}{2} < 1$$
$$\therefore 0 < x_{n+1} < 1$$
$$\therefore x_{n+1} > x_n \Rightarrow \{x_n\}\text{单调递增} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\text{存在}$$
$$\text{设}\lim_{n\to\infty} x_n = A$$
$$\text{则}A = \sin\frac{\pi A}{2} \quad \text{显然}A = 1$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty} x_n = 1$$

例 28. 证明方程 $x^n + x^{n+1} + \cdots + x^2 + x = 1$，$(n \geq 2)$ 在 $(0,1)$ 上存在唯一根，并将此根记为 x_n，证明数列 $\{x_n\}$ 存在极限并求出其极限。

sol :

(1)

$$\text{令}f(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x - 1$$
$$f^{|prime}(x) = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \cdots + 2x + 1$$
$$x \in (0,1)\text{时}f'(x) > 0\text{显然成立}$$
$$\because f(0) = -1 < 0 \quad f(1) = n - 1 > 0$$
$$\therefore f(x) = 0\text{在}(0,1)\text{上存在有唯一根，即}$$
$$x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x = 1 \quad (n \geq 2)\text{在}(0,1)\text{上存在唯一根}$$

(2)

$$
\begin{aligned}
&n=2\text{时}x^2+x=1\Rightarrow x_2\\
&n=3\text{时}x^3+x^2+x=1\Rightarrow x_3\\
&n\text{时}x_n^n+x_n^{n-1}+\cdots+x_n=1\Rightarrow x_n\\
&n+1\text{时}x_{n+1}^{n+1}+x_{n+1}^n+\cdots+x_{n+1}=1\Rightarrow x_{n+1}\\
&\text{若}x_{n+1}>x_n\text{，则}x_{n+1}^{n+1}<0\text{矛盾}\\
&\therefore x_{n+1}\le x_n\text{且}x_n>0\Rightarrow \lim_{n\to\infty}x_n\text{存在}\\
&\lim_{n\to\infty}x_n^n+x_n^{n-1}+\cdots+x_n^2+x_n=1\Rightarrow \lim_{n\to\infty}x_n\cdot\frac{1-x_n^n}{1-x_n}=1\\
&\because 0<x_n\le x_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}<1\\
&\therefore \lim_{n\to\infty}x_n^n=0\text{，设}\lim_{n\to\infty}x_n=A\\
&\therefore \lim_{n\to\infty}x_n\cdot\frac{1-x_n^n}{1-x_n}=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\frac{1}{1-x_n}=A\cdot\frac{1}{1-A}=1\\
&\Rightarrow A=\frac{1}{2}\quad \therefore \lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Chapter 2

导数与微分

2.1 考点解析

2.2 经典例题

例 1. 设 $f(x)$ 在 x_0 处二阶可导，求 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}$。

$sol:$

1°

$$
\begin{aligned}
&\because f(x)\text{在}x_0\text{处二阶可导}\\
&\therefore f(x)\text{一阶导数在}x_0\text{的某个邻域内有定义}\\
&\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h}\\
&=\frac{1}{2}\left[\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0-h)-f'(x_0)}{-h}\right]\\
&=\frac{1}{2}\cdot 2f''(x_0)=f''(x_0)
\end{aligned}
$$

2° 泰勒展开

$$
\begin{aligned}
&f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{1}{2}f''(x_0)h^2+o(h^2)\\
&\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{1}{2}f''(x_0)h^2+o(h^2)}{h^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)-f'(x_0)h+\frac{1}{2}f''(x_0)h^2+o(h^2)-2f(x_0)}{h^2}\\
&=\lim h\to 0\frac{f''(x_0)h^2+o(h^2)}{h^2}\\
&=f''(x_0)
\end{aligned}
$$

例 2. 设 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，$f''(0)=2$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{x^2}$。

sol :

1°

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{f''}{2}=1$$

2°

$$f(x+0)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2)=x+x^2+o(x^2)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2+o(x^2)-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+o(x^2)}{x^2}=1$$

例 3. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$，求 $f'(0)$，$f''(0)$。

$$
\begin{aligned}
sol\ :f'(0)&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{2x}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{2x}=0\quad or\quad =\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2}=0\\
&x\neq 0\text{时}f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\\
&\therefore f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{3x^2}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{3x}=-\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

例 4. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1} & x\neq 0\\ \frac{1}{2} & x=0\end{cases}$，试讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性、可导性。

sol :

(1) 连续性

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2}$$
$$= \frac{1}{2} = f(0)$$
$\therefore$ 连续

(2) 可导性

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(2-x)(e^x - 1) - 2x}{2x^2(e^x - 1)}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{(2-x)e^x - 2 - x}{2x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-e^x + (2-x)e^x - 1}{6x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-e^x + (1-x)e^x}{12x} = \lim_{x\to 0} \frac{-xe^x}{12x} = -\frac{1}{12}$$
$\therefore$ 可导

例 5. $f(x)$ 在 $x = 0$ 处二阶可导，$f(0) = 0$，$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & x \neq 0 \\ f'(0) & x = 0 \end{cases}$，证明 $g'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续。

$$sol\ :g'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{f(x)}{x} - f'(0)}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - xf'(0)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - f'(0) - xf''(0)}{2x} = \frac{1}{2} f''$$
$$x \neq 0\text{时} \quad g'(x) \frac{f'(x) - f(x)}{x^2}$$
$$\lim_{x\to 0} g'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x) + xf''(x) - f'(x)}{2x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{f''}{(}x)2 = \frac{f''(x)}{2} = \frac{f''(0)}{2} = g'(0)$$
$\therefore g'(x)$在$x = 0$处连续

例 6. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续，$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = A$，$A$ 为常数，$\varphi(x) =$

$\int_0^1 f(xt)dt$，试讨论 $\varphi'(x)$ 的连续性。

$$sol: \because \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = A \quad \therefore f(0) = 0$$

$$\therefore \varphi(0) = \int_0^1 f(0)dt = 0$$

$$x = 0\text{时，}\varphi(x) \xrightarrow{u=xt} \varphi(x) = \int_0^x f(u)\frac{du}{x} = \frac{1}{x}\int_0^x f(u)du$$

$$\therefore \varphi'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}\int_0^x f(u)du - 0}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)du}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x} = \frac{A}{2}$$

$$x \neq 0\text{时，}\varphi'(x) = \frac{f(x)x - \int_0^x f(u)du}{x^2}$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\varphi'(x) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)x - \int_0^x f(u)du}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} - \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(udu)}{x^2}$$

$$= A - \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x} = A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2}$$

$$\therefore \varphi(x)\text{连续}$$

例 7. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义，对任意 x、y 有 $f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x)$，且 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导，$f'(0) = 2$，证明 $f(x)$ 在任一点处可导，并求 $f(x)$。

$$sol: \text{令}x = y = 0 \Rightarrow f(0) = 2f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

$$\therefore f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^x f(\Delta x) + e^{\Delta x}f(x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} e^x\frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0} f(x)\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

$$= e^x \cdot f'(0) + f(x) = 2e^x + f(x)$$

$$\therefore f'(x) - f(x) = 2e^x \Rightarrow f(x) = e^{-\int -1dx}\left[C + \int 2e^x \cdot e^{\int -1dx}dx\right]$$

$$\therefore f(x) = e^x[C + 2x] = 2xe^x + Ce^x$$

$$\because f'(0) = 2 \Rightarrow C = 0$$

$$\therefore f(x) = 2xe^x$$

例 8. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续，$f(1) = 3$，对任意 $x > 0$，$y > 0$ 有 $\int_1^{xy} f(x)dt = x\int_1^y f(t)dt + y\int_1^x f(t)dt$，求 $f(x)$。

$$sol: \text{对}y$$

例 9. 设 $f(x)=\begin{cases}x^3\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$，求使得 $f^{(n)}(0)$ 存在的最大 n。

例 10. 设 $f(x)=3x^3+x^2|x|$，求使得 $f^{(n)}(0)$ 存在的最大 n。

例 11. 设 $y=(2x+3)^3(3x+2)^2$，求 $y^{(5)}$，$y^{(6)}$。

例 12. 设 $y=\frac{x^4-x^3+2x^2-3x}{x-1}$，求 $y^{(5)}$。

例 13. 设 $y=y(x)$ 由方程 $y=\cos x+xe^y$ 所确定，求 $y'(0)$，$y''(0)$。

例 14. 设 $y=y(x)$ 由方程 $2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$ 所确定，求 $f(x)$ 的驻点，并判别该驻点是否为极值点。

例 15. 通过变换 $x=\sin t$ 化简方程 $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+a^2y=0$，并求原方程的通解。

例 16. 通过变换 $x=\frac{u}{\cos x}$ 化简方程 $\cos x\frac{d^2y}{dx^2}-2\sin x\frac{dy}{dx}+3y\cos x=e^x$，并求原方程的通解。

例 17. 设 $f(x)=y(x)$ 满足方程 $y''+(x+e^{2y})y'^3=0$，$y'\neq 0$，试将该方程化为 $y=y(x)$ 的反函数 $x=x(y)$ 满足的微分方程，并求原方程的通解。

Chapter 3

导数与微分

3.1 考点解析

3.2 经典例题

例 1. (1) $\int \frac{\ln x}{x} dx$

(2) $\int \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} dx$

(3) $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} dx$

(4) $\int \frac{\ln \tan x}{\sin x \cos x} dx$

例 2. (1) $\int \frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2} dx$

(2) $\int \frac{\ln(1+x)-\ln x}{x(1+x)} dx$

(3) $\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}} dx$

(4) $\int \frac{1+x}{x(1+xe^x)} dx$

例 3. (1) $\int \frac{1}{x(1+x^n)} dx \quad (n \neq 0)$

(2) $\int \frac{1}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}} dx$

(3) $\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$

例 4. (1) $\int \frac{x^2 \arctan x}{1+x^2} dx$

(2) $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)^2} dx$

(3) $\int \frac{1}{x\sqrt{4-x^2}} dx$

(4) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-x+1}}dx$

例 5. (1) $\int \frac{\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx$

(2) $\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx$

(3) $\int \frac{1}{2-\sqrt[3]{x+1}}dx$

(4) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}dx$

例 6. (1) $\int \frac{1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-1}}dx$

(2) $\int \frac{1}{(1+e^x)^2}dx$

(3) $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$

(4) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}dx$

例 7. (1) $\int \frac{\sqrt{x}}{(x-1)^2}dx$

(2) $\int \frac{\arctan e^x}{e^x}dx$

(3) $\int \frac{\arctan e^x}{e^{2x}}dx$

(4) $\int \frac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}dx$

例 8. (1) $\int \frac{x}{1+\cos x}dx$

(2) $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x dx$

(3) $\int \frac{e^x}{x}(1+x\ln x)dx$

(4) $\int e^{-|x|}dx$

例 9. (1) $\int \frac{1}{\sin 2x-2\sin x}dx$

(2) $\int \frac{1}{\sin^2 x+3}dx$

(3) $\int \frac{1}{2+\cos x}dx$

(4) $\int \frac{1}{\sin x+\cos x}dx$

例 10. 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，$F(x)>0$，$F(0)=1$，当 $x>0$ 时，$f(x)F(x)=\frac{xe^x}{2(1+x)^2}$，求 $f(x)$。

例 11. 已知 $a\neq b$，求 A，B 的值，使得 $\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^2}=\frac{A\sin x}{a+b\cos x}+B\int \frac{dx}{a+b\cos x}$。

Part II

线性代数

Part III

概率论与数理统计

Part IV

习题

Chapter 4

习题

4.1 习题1

1. 设 $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \le 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$ $\quad g(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & |x| \le 1 \\ 2 & |x| > 1 \end{cases}$, 求 $f(f(x))$, $f(g(x))$, $g(f(x))$，$g(g(x))$。

2. $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & x \ge 1 \\ 1 & -1 \le x < 1 \\ x^2 - x + 1 & x < -1 \end{cases}$，求 $f(-x)$。

3. $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < 1 \\ -1 & 1 \le x \le 2 \end{cases}$，求 $f(2x)$，$f(x^2)$，$f(x-2)$。

4. 作半径为 R 的球的外切正圆锥，试建立圆锥体积 V 与其高 h 的关系，何时体积最小。

5. 一矩形内接于半径为 R，中心角为 $2\varphi(\varphi < \frac{\pi}{2})$ 的圆扇形中，矩形的一对对边也平行于扇形中心角的角平分线，试建立矩形面积 S 与 θ 及 S 与边长 x 的关系，何时面积最大。

6. 求下列极限

   (1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sec x - \cos x}$

   (2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \arcsin x}{(e^x-1)^3}$

   (3) $\lim\limits_{x\to 0} \left[\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}\right]$

   (4) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1-x\ln x}{(x-1)\ln x}$

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^{x}$

(6) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln\sin 3x}{\ln\sin 2x}$

(7) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

(8) $\lim\limits_{x\to0^+}\left[\frac{\ln x}{(1+x)^2}-\ln\frac{x}{1+x}\right]$

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x-\frac{2}{\pi}x\arctan x}{e^x+x}$

(10) $\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{\tan\frac{\pi x}{2}}$

(11) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$

(12) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{x}}$

(13) $\lim\limits_{x\to1}\left(\tan\frac{\pi x}{4}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2}}$

(14) $\lim\limits_{x\to0}\frac{xe^{2x}+xe^x-2e^{2x}+2e^x}{x^3}$

(15) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\cot c\right)^{\frac{1}{\ln x}}$

(16) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(1-x\sin\frac{1}{x}\right)$

7. 由条件 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+2}-ax-b\right)=0$，解出 a，b。

8. 指出下列函数间断点的类型

(1) $y=\frac{x^2+x}{|x|(x^2-1)}$

(2) $y=\frac{x}{\tan x}$

(3) $y=\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$

(4) $y=\arctan\frac{1}{x}$

9. 讨论 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$ 的连续性，若有间断点，指出其类型。

10. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，求 a，b 的值。

11. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，且在 $x=0$ 处连续，对任意 x_1，x_2 有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$。证明 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续。

12. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2a](a>0)$ 上连续，且 $f(0)=f(2a)$。证明方程 $f(x)=f(x+a)$ 在 $[0,a]$ 上至少有一个根。

13. 直径相同的圆排成 n 行填满了等边三角形，如图 $n=3$ 的情况。设 A 为等边三角形的面积，A_n 为所有圆的面积，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{A_n}{A}$。

14. 设数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 满足 $x_n\le A\le y_n$，其中 A 为常数，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-x_n)=0$，试用夹逼定理证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A$。

15. 试用夹逼定理求下列极限

    (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+1}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+1}\right)$

    (2) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$

    (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$

4.2 习题2

1. 选择题

(1) 设 $f(x)=\frac{x}{a+e^{bx}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，则 ( )。

(A) $a<0,b<0$
(B) $a>0,b>0$
(C) $a\leq 0,b>0$
(D) $a\geq 0,b<0$

(2) 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，则 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处不可导的充分条件是 ( )。

(A) $f(a)=0$ 且 $f'(a)=0$
(B) $f(a)=0$ 且 $f'(a)\neq 0$
(C) $f(a)>0$ 且 $f'(a)>0$
(D) $f(a)<0$ 且 $f'(a)<0$

(3) 下列条件与 $f(x)$ 在 x_0 处可导的定义等价的是 ( )。

(A) $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ 存在
(B) $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0+h)}{h}$ 存在
(C) $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$ 存在
(D) $\lim\limits_{n\to0}n[f(x_0+\frac{1}{n})-f(x_0)]$ 存在

(4) 设 $f(x)$ 可导，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$。则 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的 ( )。

(A) 充要条件
(B) 充分条件
(C) 必要条件
(D) 无关条件

(5) 设 $f(x)$ 在 $(-\delta,\delta)$ 内有定义，且 $|f(x)|\leq x^2$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的 ( )。

(A) 间断点
(B) 连续不可导点
(C) 可导点且 $f'(0)=0$
(D) 可导点且 $f'(0)\neq 0$

(6) 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}x^3 & x\leq 1\\ x^2 & x>1\end{cases}$ 则 $f^{|prime}$ 在 $x=1$ 处 ( )。

(A) 左、右导数都存在
(B) 左导数存在，右导数不存在

(C) 左导数不存在，右导数存在
(D) 左、右导数都不存在

2. 设 $f(x)\begin{cases} x\arctan\frac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$，则 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续

3. 设 $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$ 上连续，对任意 x，y 满足 $f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$，且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,$f'(0)=2$。
   (1) 用导数定义求 $f'(x)$
   (2) 求 $f(x)$

4. $f(x)$ 是周期为 5 的连续函数, 在 $x=0$ 的某个邻域内满足 $f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+\alpha(x)$，$\alpha(x)$ 是当 $x\to 0$ 时比 x 更高阶的无穷小，且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(6,f(6))$ 处的切线方程。

5. $f(x)$ 在 $x=0$ 处满足 $f(0)=0$、$f'(0)=0$、$f''(0)=6$ 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x)}{x^4}$。

6. $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足 $f(x+1)=2f(x)$，当 $0\leq x<1$ 时 $f(x)=x(1-x^2)$。证明 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导。

7. 设 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)} & x\neq 0, x>-1 \\ -\frac{1}{2} & x=0 \end{cases}$ 试讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续、可导性。

8. 设 $f(x)=\max\{\cos x,\left|\frac{2}{\pi}x+1\right|\}$，指出 $f(x)$ 不可导的点，并说明理由。

9. 令 $t=\sqrt{x}$，将方程 $4x\frac{d^2y}{dx^2}+2(1-\sqrt{x})\frac{dy}{dx}-6y=e^{\sqrt[3]{x}}$ 化为 y 对 t 的微分方程，并求原方程的通解。

10. 设 $f(x)=\begin{cases} \frac{g(x)-e^{-x}}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$，其中 $g(x)$ 在 $x=0$ 处存在二阶导数，且 $g(0)=1$、$g'(0)=-1$，试讨论 f' 在 $x=0$ 处的连续性。

11. 设 $\rho=\rho(x)$ 是抛物线 $y=\sqrt{x}$ 上任一点 $M(x,y)\quad(x\geq 1)$ 处的曲率半径，$s=s(x)$ 是该曲线上介于点 $A(1,1)$ 与 M 之间的弧长，计算 $3\rho\frac{d^2\rho}{ds^2}-(\frac{d\rho}{dx})^2$ 的值。（在直角坐标系下曲率的公式 $K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$）

12. 从点 $\rho_1(1,0)$ 作 x 轴的垂线，交抛物线 $y=x^2$ 于 $Q_1(1,1)$，再从 Q 作抛物线的切线与 x 轴交于 P_2，过 P_2 作 x 轴的垂线交抛物线于 Q_2，依次重复得 $P_1,Q_1;P_2,Q_2;\ldots;P_n,Q_n;\ldots$

(1) 求 $\overline{OP_n}$ 的长度

(2) 求 $\sum\limits_{n-1}^{\infty} \overline{Q_n P_n}$ 的和

13. $f(x)\quad n+1$ 阶可导，$F(x) = \lim\limits_{t\to\infty} t^2[f(x+\frac{\pi}{t}) - f(x)]\sin\frac{x}{t}$，试求 $F^{(n)}(x)$。

14. 试证曲线 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}\quad (a > 0)$ 上任一点的切线在两坐标轴上的截距和为常数。