

Part I

高等数学

Chapter 1

函数、极限、连续

1.1 考点解析

1.2 经典例题

例 1. (1) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$

$$\begin{aligned} \text{sol} &= \lim_{x \rightarrow 0} [1 + (\cos x - 1)]^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}} \\ &= \exp \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\ln(1+x^2)} = \exp \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = e^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}})$

$$\begin{aligned} \text{sol} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x - \sqrt{x}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} + \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{x}}}} = 1 \end{aligned}$$

例 2. (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{a}{x} - \left(\frac{1}{x^2} - a^2 \right) \ln(1 + ax) \right]$, a 为常数。

$$\begin{aligned} \text{sol} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax + \ln(1 + ax)}{x^2} + a^2 \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1 + ax) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - \frac{a}{1+ax}}{2x} + a^2 \lim_{x \rightarrow 0} ax = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^2}{2(1 + ax)} + 0 = \frac{1}{2}a^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{2 \sin x}}{x^3} \\
 \text{sol} = & \lim_{x \rightarrow 0} e^{2 \sin x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x - 2 \sin x} - 1}{x^3} \\
 = & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + 2 \sin x}{x^3} \\
 = & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 2x - 2 \cos x}{3x^2} & \text{or} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x (\cos x - 1)}{x^3} \\
 = & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4 \sin 2x + 2 \sin x}{6x} & = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{2 \sin x \frac{1}{2} x^2}{x^3} \\
 = & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-8 \sin 2x + 2 \cos x}{6} & = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\sin x}{x} \\
 = & -1 & = -1
 \end{aligned}$$

例 3. (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$

$$\begin{aligned}
 \text{sol} = & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} - e}{x} \\
 = & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1} - 1}{x} e = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1}{x} e \\
 = & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} e = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} e \\
 = & \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2(1+x)} e = -\frac{1}{2} e
 \end{aligned}$$

(2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - x^x}{1 - x + \ln x}$

$$\begin{aligned}
 \text{sol} = & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^{(x-1)}}{1 - x + \ln x} \lim_{x \rightarrow 1} x = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - e^{(x-1) \ln x}}{1 - x + \ln x} \\
 = & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1) \ln x}{1 - x + \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} -\frac{\ln x + \frac{x-1}{x}}{-1 + \frac{1}{x}} \\
 = & \lim_{x \rightarrow 1} -\frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{1} = 2
 \end{aligned}$$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \tan \frac{1}{n} \right)^{n^2}$

$n \rightarrow +\infty$ 是 $x \rightarrow +\infty$ 的特殊情况, 将 n 换为 x , 有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \tan \frac{1}{x})^{x^2}$,
 $x \rightarrow +\infty$ 求极限不方便, 倒代换 $t = \frac{1}{x}$,

$$\text{sol} \xrightarrow{t=\frac{1}{x}} \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{\tan t}{t} \right)^{\frac{1}{t^2}} = \exp \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\frac{\tan t}{t})}{t^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \exp \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\frac{\tan t}{t} - 1 + 1)}{t^2} = \exp \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\tan t}{t} - 1}{t^2} \\
&= \exp \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\tan t - t}{t^3} = \exp \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}{3t^2} \\
&= \exp \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^2}{3t^2} = e^{\frac{1}{3}}
\end{aligned}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \ln(1-x)$$

$$\begin{aligned}
&\text{sol} \xrightarrow{\ln(1-x) \sim -x} \lim_{x \rightarrow 0^+} -x \ln x \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0
\end{aligned}$$

$$\text{例 4. (1)} \lim_{x \rightarrow +\infty} [x - (1 + e^{-x}) \ln(1 + e^x)]$$

sol : 看 e^x 不顺眼, 换

1°

$$\begin{aligned}
&\xrightarrow{t=e^x \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow \infty} [\ln t - (1 + t^{-1}) \ln(1 + t)] \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} [\ln t - \ln(1 + t) - \frac{\ln(1 + t)}{t}] \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} [\ln \frac{t}{1 + t} - \frac{\ln(1 + t)}{t}] \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \ln \frac{1}{\frac{1}{t} + 1} - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+t}}{1} \\
&= 0 - 0 = 0
\end{aligned}$$

2°

$$\begin{aligned}
&\xrightarrow{t=e^{-x} \rightarrow 0^+} \lim_{t \rightarrow 0^+} [-\ln t - (1 + t) \ln(1 + t^{-1})] \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} [-\ln t - \ln(1 + \frac{1}{t}) - t \ln(1 + \frac{1}{t})] \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} [-\ln(t + 1)] - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + \frac{1}{t})}{\frac{1}{t}} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} [-\ln(t + 1)] - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{-\frac{1}{t^2}}{1 + \frac{1}{t}}}{-\frac{1}{t^2}} \\
&= 0 - 0 = 0
\end{aligned}$$

3° 或恒等变换

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [x - \ln(1 + e^x)] - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{e^x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln e^x - \ln(1 + e^x)] - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{e^x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{1 + e^x}{e^x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^x}{1+e^x}}{e^x} \\
 &= 0 - 0 = 0
 \end{aligned}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right)$$

遇绝对值, 分左右极限。

sol

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2e^{-\frac{4}{x} + e^{-\frac{3}{x}}}}{e^{-\frac{4}{x} + 1}} + 1 \right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = 1$$

\therefore 原式 = 1

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{(1 + \cos x) \ln(1 + x)}$$

$$\begin{aligned}
 \text{sol} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x}{2x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos \frac{1}{x}}{2} \\
 &= \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

$$\text{例 5. (1)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)^{\frac{1}{\ln x}}$$

$$\text{sol} = \exp \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\frac{\pi}{2} - \arctan x)}{\ln x} = \exp \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{(1+x^2)(\frac{\pi}{2} - \arctan x)}$$

1°

$$= \exp \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{x}}{(\frac{1}{x^2} + 1)(\frac{\pi}{2} - \arctan x)}$$

$$= \exp \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{x}{1+x^2}}{\frac{\pi}{2} - \arctan x}$$

$$= \exp \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}}{-\frac{1}{1+x^2}}$$

$$= \exp \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x^2}{1+x^2} = e^{-1}$$

2°

$$\begin{aligned} &= \exp \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{x}}{(1+\frac{1}{x^2})(\frac{\pi}{x} - \arctan x)} \\ &= \exp \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{x}}{\frac{\pi}{2} - \arctan x} \\ &= \exp \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{1+x^2}} = e^{-1} \end{aligned}$$

3°

$$\begin{aligned} &= \exp \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{2x(\frac{\pi}{2} - \arctan x) - 1} \\ &\xrightarrow{\text{先求}} \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\frac{\pi}{2} - \arctan x) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = 1 \\ &\therefore \exp \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{2-1} = e^{-1} \end{aligned}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-\cos x}{\sqrt{1-x}-\cos \sqrt{x}}$$

$$\begin{aligned} \text{sol} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1-x} \cos x}{1-x-\cos^2 \sqrt{x}} \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1-x} + \cos \sqrt{x}}{1+\cos x} \frac{\sin^2 x}{1-x-\cos^2 \sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{2} \frac{x^2}{\sin^2 \sqrt{x} - x} \\ &\xrightarrow{t=\sqrt{x}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{t^4}{\sin^2 t - t^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2t^3}{\sin t \cos t - t} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{6t^2}{\cos^2 t - \sin^2 t - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3t^2}{-\sin^2 t} \\ &= -3 \end{aligned}$$

例 6. 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} [(x^5 + 6x^4 + 2)^\alpha - x] = \beta$, 求 α, β 的值。

$$\begin{aligned} \text{sol: } & \because \lim_{x \rightarrow \infty} [(x^5 + 6x^4 + 2)^\alpha - x] = \beta \\ & \therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x^5 + 7x^4 + 2)^\alpha - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\frac{(x^5 + 7x^4 + 2)^\alpha}{x} - 1 \right] = 0 \\ & \text{即 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^5 + 7x^4 + 2}{x^{\frac{1}{\alpha}}} \right)^\alpha = 1 \\ & \therefore \frac{1}{\alpha} = 5 \Rightarrow \alpha = 5 \end{aligned}$$

$$\text{又 } \because \beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[5]{x^5 + 7x^4 + 2} - x)$$

1°

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt[5]{x^5 + 7x^4 + 2} - 1) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{1}{5} \left(\frac{7}{x} + \frac{2}{x^5} \right) = \frac{7}{5} \end{aligned}$$

2°

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{t=\frac{1}{x} \rightarrow 0^+} \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\sqrt[5]{\frac{1}{t^5} + \frac{7}{t^4} + 2} - \frac{1}{t} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} (\sqrt[5]{1 + 7t + 2t^5} - 1) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{5} (7t + 2t^5) = \frac{7}{5} \end{aligned}$$

例 7. 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内可导, $f(x) > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ 且 $\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+hx)}{f(x)} \right]^{\frac{1}{h}} = e^{\frac{1}{x}}$, 求 $f(x)$ 。

$$\begin{aligned} \text{sol: } & \because \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+hx)}{f(x)} \right]^{\frac{1}{h}} = e^{\frac{1}{x}} \\ & \therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{f(x+hx)}{f(x)}}{h} = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

1° “+1-1” 法

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\frac{f(x+hx)-f(x)}{f(x)} + 1 \right)}{h} = \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+hx) - f(x)}{hf(x)} &= \frac{1}{x} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+hx) - f(x)}{hx} &= \frac{1}{x^2} f(x) \\ f'(x) &= \frac{1}{x^2} f(x) \\ \therefore f(x) &= e^{-\frac{1}{x}}\end{aligned}$$

2°

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln f(x+hx) - \ln f(x)}{h} &= \frac{1}{x} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln f(x+hx) - \ln f(x)}{hx} \cdot x &= \frac{1}{x} \\ x \cdot [\ln f(x)]' &= \frac{1}{x} \\ \therefore (\ln f(x))' &= \frac{1}{x^2} \\ \ln f(x) &= -\frac{1}{x} \\ f(x) &= e^{-\frac{1}{x}}\end{aligned}$$

3° 泰勒展开法

$$\begin{aligned}f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \\ \therefore f(x + \Delta x) &= f(x) + f'(x)\Delta x + o(\Delta x) \\ \therefore \ln f(x + hx) &= \ln f(x) + [\ln f(x)]'hx + o(hx) \\ \text{则 } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln f(x + hx) - \ln f(x)}{h} &= \frac{1}{x} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[\ln f(x)]'hx + o(hx)}{h} &= \frac{1}{x} \\ [\ln f(x)]' &= \frac{1}{x^2} \\ \therefore f(x) &= e^{-\frac{1}{x}}\end{aligned}$$

例 8. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, $f(0) \neq 0$, $f'(0) \neq 0$, 当 $h \rightarrow 0$ 时, $af(h) + bf(2h) - f(0)$ 是比 h 更高阶的无穷小, 求 a, b 的值。

$$\text{sol: } \because \lim_{h \rightarrow 0} af(h) + bf(2h) - f(0) = 0$$

并且 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导, \rightarrow 连续, 代入

$$af(0) + bf(0) - f(0) = 0$$

$$(a + b - 1)f(0) = 0$$

$$a + b = 1$$

回代

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{af(h) + bf(2h) - (a+b)f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} a \frac{f(h) - f(0)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} 2b \frac{f(2h) - f(0)}{2h} \\ &= af'(0) + 2bf'(0) = 0 \\ &\therefore \begin{cases} a + b = 1 \\ a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

例 9. 设 $f(x)$ 为连续函数, $f(0) \neq 0$, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x \int_0^x f(t)dt}$ 。

sol :

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) + \int_0^x f(t)dt - xf(x)}{xf(x) + \int_0^x f(t)dt} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t)dt}{xf(x) + \int_0^x f(t)dt} \end{aligned}$$

1°

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}}{f(x) + \frac{\int_0^x f(t)dt}{x}} \\ \text{先计算 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t)dt}{x} & \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \\ &= f(0) \\ \therefore \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(0)}{f(x) + f(0)} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2° 泰勒展开

$$\text{设 } F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

$$\begin{aligned}
F(x) &= F(0) + F'(0)x + o(x) \\
&= 0 + f(x)x + o(x) \\
\therefore \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{xf(x) + F(x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) + o(x)}{xf(x) + xf(x) + o(x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \frac{o(x)}{x}}{2f(x) + \frac{o(x)}{x}} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

例 10. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x \cos 2x \cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小, 求常数 a 与 n 的值。

例 11. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $x^2 + \ln(1+x)\ln(1-x)$ 与 ax^n 为等价无穷小, 求常数 a 与 n 的值。

例 12. 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \tan x + b(1 - \cos x)}{c \ln(1-2x) + d(1 - e^{-x^2})} = 2$, ($a^2 + c^2 \neq 0$), 则 ()
 $A. b = 4d$ $B. b = -4d$ $C. a = 4c$ $D. a = -4c$

例 13. 设 $f(x)$ 对一切正数 x_1, x_2 有 $f(x_1, x_2) = f(x_1) + f(x_2)$, 且 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处连续, 证明 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有唯一根。

例 14. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, $f(0) < 0$, $f'(x) \geq k > 0$, (k 为常数), 证明方程 $f(x) = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上有唯一根。

例 15. 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上二阶可导, $f(a) < 0$, $f'(a) > 0$ 当 $x > a$ 时, $f''(x) > 0$, 证明方程 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上存在唯一根。

例 16. 设 $x_1 > 0$, 当 $n \geq 1$ 时, $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$, a 为正常数, 证明数列 $\{x_n\}$ 存在极限并求其极限。

例 17. 设 $a > 0$, $x_1 > \sqrt{a}$, 当 $n \geq 1$ 时, $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$, 证明 $\{x_n\}$ 存在极限并求出其极限。

例 18. 设 $x_1 > 0$, 当 $n \geq 1$ 时, $x_{n+1} = \sqrt{ax_n}$, 证明 $\{x_n\}$ 存在极限并求出其极限。

例 19. 设 $x_1 = 2$, 当 $n \geq 1$ 时, $x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{1+x_n}$, 证明 $\{x_n\}$ 存在极限并求出其极限。

例 20. 设 $0 < x_1 < 3$, 当 $n \geq 1$ 时, $x_{n+1} = \sqrt{x_n(3 - x_n)}$, 证明 $\{x_n\}$ 存在极限并求出其极限。

例 21. 设 $0 < a < 1$, $x_1 = \frac{a}{2}$, 当 $n \geq 1$ 时, $x_{n+1} = \frac{a+x_n^2}{2}$, 证明 $\{x_n\}$ 存在极限并求出其极限。

例 22. 设 $a_0 \geq b_0 > 0$, 当 $n \geq 0$ 时, $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$, $b_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}$, 证明数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的极限均存在, 并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 。

例 23. 设 $x_0 > 0$, $y_0 > 0$, 当 $n \geq 0$ 时, $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$, $y_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2}$, 证明数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 的极限均存在, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 。

例 24. 设 $x_1 = a$, $x_2 = b$, $a < b$, 当 $n \geq 2$ 时, $x_{n+1} = \frac{x_n+x_{n-1}}{2}$, 求

(1) $y_n = x_n - x_{n-1}$, $n \geq 2$;

(2) $\sum_{k=2}^n y_k$;

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 。

例 25. 设 $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, 当 $n \geq 2$ 时, $x_{n+1} = \sqrt{x_n x_{n+1}}$, 求

(1) $y_n = \ln x_n - \ln x_{n-1}$, $n \geq 2$;

(2) $\sum_{k=2}^n y_k$;

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 。

例 26. 设 n 为正整数, 且 $n\pi \leq x < (n+1)\pi$,

(1) 证明 $2n \leq \int_0^x |\sin t| dt < 2(n+1)$;

(2) 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x |\sin t| dt}{x}$ 。

例 27. 当 $0 < x < 1$ 时, 证明 $\sin \frac{\pi x}{2} > x$; 又设 $0 < x_1 < 1$, 当 $n \geq 1$ 时, $x_{n+1} = \sin \frac{\pi x_n}{2}$, 证明数列 $\{x_n\}$ 存在极限并求出其极限。

例 28. 证明方程 $x^n + x^{n+1} + \cdots + x^2 + x = 1$, ($n \geq 2$) 在 $(0, 1)$ 上存在唯一根, 并将此根记为 x_n , 证明数列 $\{x_n\}$ 存在极限并求出其极限。

Chapter 2

导数与微分

2.1 考点解析

2.2 经典例题

例 1. 设 $f(x)$ 在 x_0 处二阶可导, 求 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}$ 。

例 2. 设 $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 2$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-x}{x^2}$ 。

例 3. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$, 求 $f'(0)$, $f''(0)$ 。

例 4. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1} & x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \end{cases}$, 试讨论 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性、可导性。

例 5. $f(x)$ 在 $x = 0$ 处二阶可导, $f(0) = 0$, $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & x \neq 0 \\ f'(0) & x = 0 \end{cases}$, 证明 $g'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续。

例 6. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$, A 为常数, $\varphi(x) = \int_0^1 f(xt)dt$, 试讨论 $\varphi'(x)$ 的连续性。

例 7. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, 对任意 x, y 有 $f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x)$, 且 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, $f'(0) = 2$, 证明 $f(x)$ 在任一点处可导, 并求 $f(x)$ 。

例 8. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, $f(1) = 3$, 对任意 $x > 0, y > 0$ 有 $\int_1^{xy} f(t)dt = x \int_1^y f(t)dt + y \int_1^x f(t)dt$, 求 $f(x)$ 。

例 9. 设 $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, 求使得 $f^{(n)}(0)$ 存在的最大 n 。

例 10. 设 $f(x) = 3x^3 + x^2|x|$, 求使得 $f^{(n)}(0)$ 存在的最大 n 。

例 11. 设 $y = (2x + 3)^3(3x + 2)^2$, 求 $y^{(5)}, y^{(6)}$ 。

例 12. 设 $y = \frac{x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x}{x-1}$, 求 $y^{(5)}$ 。

例 13. 设 $y = y(x)$ 由方程 $y = \cos x + xe^y$ 所确定, 求 $y'(0), y''(0)$ 。

例 14. 设 $y = y(x)$ 由方程 $2y^3 - 2y^2 + 2xy - x^2 = 1$ 所确定, 求 $f(x)$ 的驻点, 并判别该驻点是否为极值点。

例 15. 通过变换 $x = \sin t$ 化简方程 $(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + a^2y = 0$, 并求原方程的通解。

例 16. 通过变换 $x = \frac{u}{\cos x}$ 化简方程 $\cos x \frac{d^2y}{dx^2} - 2 \sin x \frac{dy}{dx} + 3y \cos x = e^x$, 并求原方程的通解。

例 17. 设 $f(x) = y(x)$ 满足方程 $y'' + (x + e^{2y})y'^3 = 0, y' \neq 0$, 试将该方程化为 $y = y(x)$ 的反函数 $x = x(y)$ 满足的微分方程, 并求原方程的通解。

Chapter 3

导数与微分

3.1 考点解析

3.2 经典例题

例 1. (1) $\int \frac{\ln x}{x} dx$

(2) $\int \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} dx$

(3) $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} dx$

(4) $\int \frac{\ln \tan x}{\sin x \cos x} dx$

例 2. (1) $\int \frac{1+\ln x}{(x \ln x)^2} dx$

(2) $\int \frac{\ln(1+x) - \ln x}{x(1+x)} dx$

(3) $\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}} dx$

(4) $\int \frac{1+x}{x(1+xe^x)} dx$

例 3. (1) $\int \frac{1}{x(1+x^n)} dx \quad (n \neq 0)$

(2) $\int \frac{1}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}} dx$

(3) $\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$

例 4. (1) $\int \frac{x^2 \arctan x}{1+x^2} dx$

(2) $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)^2} dx$

(3) $\int \frac{1}{x\sqrt{4-x^2}} dx$

$$(4) \int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 - x + 1}} dx$$

例 5. (1) $\int \frac{\arcsin x}{x^2 \sqrt{1-x^2}} dx$

$$(2) \int \frac{x e^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx$$

$$(3) \int \frac{1}{2 - \sqrt[3]{x+1}} dx$$

$$(4) \int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})} dx$$

例 6. (1) $\int \frac{1}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-1}} dx$

$$(2) \int \frac{1}{(1+e^x)^2} dx$$

$$(3) \int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$$

$$(4) \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx$$

例 7. (1) $\int \frac{\sqrt{x}}{(x-1)^2} dx$

$$(2) \int \frac{\arctan e^x}{e^x} dx$$

$$(3) \int \frac{\arctan e^x}{e^{2x}} dx$$

$$(4) \int \frac{x^2}{(x \sin x + \cos x)^2} dx$$

例 8. (1) $\int \frac{x}{1+\cos x} dx$

$$(2) \int \frac{1+\sin x}{1+\cos x} e^x dx$$

$$(3) \int \frac{e^x}{x} (1 + x \ln x) dx$$

$$(4) \int e^{-|x|} dx$$

例 9. (1) $\int \frac{1}{\sin 2x - 2 \sin x} dx$

$$(2) \int \frac{1}{\sin^2 x + 3} dx$$

$$(3) \int \frac{1}{2+\cos x} dx$$

$$(4) \int \frac{1}{\sin x + \cos x} dx$$

例 10. 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, $F(x) > 0$, $F(0) = 1$, 当 $x > 0$ 时, $f(x)F(x) = \frac{x e^x}{2(1+x)^2}$, 求 $f(x)$ 。

例 11. 已知 $a \neq b$, 求 A, B 的值, 使得 $\int \frac{dx}{(a+b \cos x)^2} = \frac{A \sin x}{a+b \cos x} + B \int \frac{dx}{a+b \cos x}$ 。

Part II

线性代数

Part III

概率论与数理统计

Part IV

习题

Chapter 4

习题

4.1 习题1

1. 设 $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & |x| \leq 1 \\ 2 & |x| > 1 \end{cases}$, 求 $f(f(x))$, $f(g(x))$, $g(f(x))$, $g(g(x))$ 。

2. $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & x \geq 1 \\ 1 & -1 \leq x < 1 \\ x^2 - x + 1 & x < -1 \end{cases}$, 求 $f(-x)$ 。

3. $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ -1 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$, 求 $f(2x)$, $f(x^2)$, $f(x-2)$ 。

4. 作半径为 R 的球的外切正圆锥, 试建立圆锥体积 V 与其高 h 的关系, 何时体积最小。

5. 一矩形内接于半径为 R , 中心角为 2φ ($\varphi < \frac{\pi}{2}$) 的圆扇形中, 矩形的一对对边也平行于扇形中心角的角平分线, 试建立矩形面积 S 与 θ 及 S 与边长 x 的关系, 何时面积最大。

6. 求下列极限

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sec x - \cos x}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{(e^x - 1)^3}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right]$

(4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1-x \ln x}{(x-1) \ln x}$

$$(5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctan x \right)^x$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin 3x}{\ln \sin 2x}$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\ln x}{(1+x)^2} - \ln \frac{x}{1+x} \right]$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - \frac{2}{\pi} x \arctan x}{e^x + x}$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 1} (2 - x)^{\tan \frac{\pi x}{2}}$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{1 - \cos x}}$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)^{\frac{1}{x}}$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\tan \frac{\pi x}{4} \right)^{\tan \frac{\pi x}{2}}$$

$$(14) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^{2x} + x e^x - 2 e^{2x} + 2 e^x}{x^3}$$

$$(15) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$$

$$(16) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 - x \sin \frac{1}{x} \right)$$

7. 由条件 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 2} - ax - b) = 0$, 解出 a, b 。

8. 指出下列函数间断点的类型

$$(1) y = \frac{x^2 + x}{|x|(x^2 - 1)}$$

$$(2) y = \frac{x}{\tan x}$$

$$(3) y = \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$$

$$(4) y = \arctan \frac{1}{x}$$

9. 讨论 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^{2n}}{1 + x^{2n}} x$ 的连续性, 若有间断点, 指出其类型。

10. 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n-1} + ax^2 + bx}{x^{2n} + 1}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 求 a, b 的值。

11. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, 且在 $x = 0$ 处连续, 对任意 x_1, x_2 有 $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ 。证明 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续。

12. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 2a] (a > 0)$ 上连续, 且 $f(0) = f(2a)$ 。证明方程 $f(x) = f(x + a)$ 在 $[0, a]$ 上至少有一个根。

13. 直径相同的圆排成 n 行填满了等边三角形, 如图 $n = 3$ 的情况。设 A 为等边三角形的面积, A_n 为所有圆的面积, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{A}$ 。
14. 设数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 满足 $x_n \leq A \leq y_n$, 其中 A 为常数, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = 0$, 试用夹逼定理证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A$ 。
15. 试用夹逼定理求下列极限

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+1} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+1} \right)$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}}$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}$

4.2 习题2

1. 选择题

- (1) 设 $f(x) = \frac{x}{a+e^{bx}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, 则 ()。
- (A) $a < 0, b < 0$
 (B) $a > 0, b > 0$
 (C) $a \leq 0, b > 0$
 (D) $a \geq 0, b < 0$
- (2) 设 $f(x)$ 在 $x = a$ 处可导, 则 $|f(x)|$ 在 $x = a$ 处不可导的充分条件是 ()。
- (A) $f(a) = 0$ 且 $f'(a) = 0$
 (B) $f(a) = 0$ 且 $f'(a) \neq 0$
 (C) $f(a) > 0$ 且 $f'(a) > 0$
 (D) $f(a) < 0$ 且 $f'(a) < 0$
- (3) 下列条件与 $f(x)$ 在 x_0 处可导的定义等价的是 ()。
- (A) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ 存在
 (B) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+2h)-f(x_0+h)}{h}$ 存在
 (C) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$ 存在
 (D) $\lim_{n \rightarrow 0} n[f(x_0 + \frac{1}{n}) - f(x_0)]$ 存在
- (4) 设 $f(x)$ 可导, $F(x) = f(x)(1 + |\sin x|)$ 。则 $f(0) = 0$ 是 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处可导的 ()。
- (A) 充要条件
 (B) 充分条件
 (C) 必要条件
 (D) 无关条件
- (5) 设 $f(x)$ 在 $(-\delta, \delta)$ 内有定义, 且 $|f(x)| \leq x^2$, 则 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的 ()。
- (A) 间断点
 (B) 连续不可导点
 (C) 可导点且 $f'(0) = 0$
 (D) 可导点且 $f'(0) \neq 0$
- (6) 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x^3 & x \leq 1 \\ x^2 & x > 1 \end{cases}$ 则 $f|_{\text{prime}}$ 在 $x = 1$ 处 ()。
- (A) 左、右导数都存在
 (B) 左导数存在, 右导数不存在

- (C) 左导数不存在, 右导数存在
(D) 左、右导数都不存在

2. 设 $f(x) = \begin{cases} x \arctan \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, 则 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续
3. 设 $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ 上连续, 对任意 x, y 满足 $f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$, 且 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, $f'(0) = 2$.
(1) 用导数定义求 $f'(x)$
(2) 求 $f(x)$
4. $f(x)$ 是周期为 5 的连续函数, 在 $x = 0$ 的某个邻域内满足 $f(1+\sin x) - 3f(1-\sin x) = 8x + \alpha(x)$, $\alpha(x)$ 是当 $x \rightarrow 0$ 时比 x 更高阶的无穷小, 且 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(6, f(6))$ 处的切线方程。
5. $f(x)$ 在 $x = 0$ 处满足 $f(0) = 0$ 、 $f'(0) = 0$ 、 $f''(0) = 6$ 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x)}{x^4}$ 。
6. $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上满足 $f(x+1) = 2f(x)$, 当 $0 \leq x < 1$ 时 $f(x) = x(1-x^2)$ 。证明 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不可导。
7. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} & x \neq 0, x > -1 \\ -\frac{1}{2} & x = 0 \end{cases}$ 试讨论 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续、可导性。
8. 设 $f(x) = \max\{\cos x, |\frac{2}{\pi}x + 1|\}$, 指出 $f(x)$ 不可导的点, 并说明理由。
9. 令 $t = \sqrt{x}$, 将方程 $4x \frac{d^2 y}{dx^2} + 2(1 - \sqrt{x}) \frac{dy}{dx} - 6y = e^{\sqrt[3]{x}}$ 化为 y 对 t 的微分方程, 并求原方程的通解。
10. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)-e^{-x}}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, 其中 $g(x)$ 在 $x = 0$ 处存在二阶导数, 且 $g(0) = 1$ 、 $g'(0) = -1$, 试讨论 f' 在 $x = 0$ 处的连续性。
11. 设 $\rho = \rho(x)$ 是抛物线 $y = \sqrt{x}$ 上任一点 $M(x, y)$ ($x \geq 1$) 处的曲率半径, $s = s(x)$ 是该曲线上介于点 $A(1, 1)$ 与 M 之间的弧长, 计算 $3\rho \frac{d^2 \rho}{ds^2} - (\frac{d\rho}{ds})^2$ 的值。(在直角坐标系下曲率的公式 $K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$)
12. 从点 $P_1(1, 0)$ 作 x 轴的垂线, 交抛物线 $y = x^2$ 于 $Q_1(1, 1)$, 再从 Q 作抛物线的切线与 x 轴交于 P_2 , 过 P_2 作 x 轴的垂线交抛物线于 Q_2 , 依次重复得 $P_1, Q_1; P_2, Q_2; \dots; P_n, Q_n; \dots$

- (1) 求 $\overline{OP_n}$ 的长度
- (2) 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{Q_n P_n}$ 的和
13. $f(x)$ $n+1$ 阶可导, $F(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} t^2 [f(x + \frac{\pi}{t}) - f(x)] \sin \frac{x}{t}$, 试求 $F^{(n)}(x)$ 。
14. 试证曲线 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ ($a > 0$) 上任一点的切线在两坐标轴上的截距和为常数。