Projekt 5

A18B0474P - Jiří Švamberg

12. listopadu 2020

FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD
ZÁPADOČESKÉ UNIVERZITY V PLZNI

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

KATEDRA KYBERNETIKY

Obsah

1 Zadání **2**

2 Zjednodušený model **3**

2.1 Návrh zjednodušeného modelu 3

2.2 Stavový popis zjednodušeného modelu 4

2.3 Dosazení konkrétních hodnot 6

2.4 Grafy 7

3 Návrh regulátoru **11**

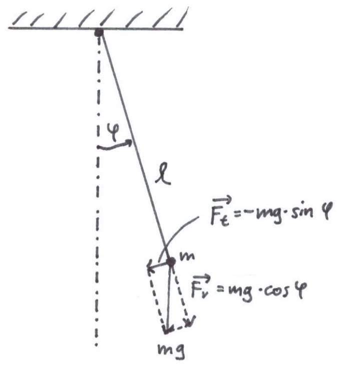
1 Zadání

1. Navrhněte zjednodušený model soustavy kvadrotorová helikoptéra - břemeno
2. Pro zjednodušený model navrhněte regulátor
3. Implementujte regulátor do zjednodušeného modelu

2 Zjednodušený model

2.1 Návrh zjednodušeného modelu

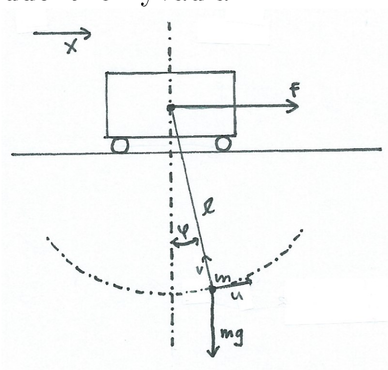
Zjednodušený model budeme navrhovat ve 2D jako kyvadlo zavěšené na vozíku. Pro potřeby návrhu tohoto modelu budeme uvažovat lano závěsu jako dokonale nepružné, o stálé délce l a nulové hmotnosti $m_l = 0\,\mathrm{kg}$. Úhel vychýlení závěsu od osy vozíku označíme jako φ. Jako těleso si představíme bezrozměrný hmotný bod o hmotnosti m.
Pro jednoduché kyvadlo připevněné k nepohybujícímu se tělesu o kinetické energii $T = \frac{1}{2}mv^2$ a potenciální energii $V = -mgl\cos\varphi$ (obr. 1) platí pohybová rovnice:



Obrázek 1: Schéma jednoduchého kyvadla

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$$

Po zavěšení jednoduchého kyvadla na vozík(obr. 2) budeme muset ještě do modelu přidat dynamiku vozíku o hmotnosti M. Na ten může působit síla ve směru osy x. Pro hmotný bod, zavěšený na laně budeme muset spočítat souřadnice $[u, v]$, jelikož při pohybu vozíku se nepohybuje po jasné trajektorii (kružnice, přímka):



Obrázek 2: Schéma soustavy vozík-kyvadlo

$$u = x + l\sin\varphi \rightarrow \dot{u} = \dot{x} + l\dot{\varphi}\cos\varphi$$
$$v = -l\cos\varphi \rightarrow \dot{v} = l\dot{\varphi}\sin\varphi$$

K odvození modelu využijeme Lagrangeovu metodu.
Potenciální energii V budeme uvažovat stejnou, jako u jednoduchého kyvadla.

$$V = -mgl\cos\varphi$$

Jako základ pro vzorec kinetické energie použijeme vzorec kinetické energie obyčejného matematického kyvadla $T = \frac{1}{2}mv^2$. Musíme ale uvažovat rychlost ve směru všech souřadnic (x, u, v).

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{u}^2 + \frac{1}{2}m\dot{v}^2$$

Po dosazení souřadnic pro hmotný bod zavěšený na laně dostaneme kinetickou energii ve tvaru:

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x} + l\dot{\varphi}\cos\varphi\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(l\dot{\varphi}\sin\varphi\right)^2$$

Zjistíme si Lagrangián $L = T - V$:

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x} + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x} + l\dot{\varphi}\cos\varphi\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(l\dot{\varphi}\sin\varphi\right)^2 + mgl\cos\varphi$$

, který nyní budeme parciálně derivovat.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = M\dot{x} + 2m\dot{x} + ml\dot{\varphi}\cos\varphi$$
$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi}l^2 m\sin(\varphi) + \dot{x}lm\cos(\varphi) + \dot{\varphi}l^2 m\cos^2(\varphi)$$
$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = \dot{\varphi}^2 l^2 m\cos(\varphi)\sin(\varphi) - glm\sin(\varphi) - \dot{\varphi}\dot{x}lm\sin(\varphi) - \dot{\varphi}^2 l^2 m\sin(\varphi)\cos(\varphi)$$

Vztahy pro hledané dvě rovnice vypadají následovně:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = f$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

, kde f je síla působící na vozík. Nyní můžeme dopočítat dvě rovnice modelu vozík-kyvadlo.

$$M\ddot{x} + 2m\ddot{x} + \ddot{\varphi}lm\cos(\varphi) - \dot{\varphi}lm\sin(\varphi) = f$$
$$\ddot{\varphi}l^2 m + \ddot{x}lm\cos(\varphi) - \dot{x}lm\sin(\varphi) + glm\sin(\varphi) + lm\dot{\varphi}\dot{x}\sin(\varphi) = 0$$

thr Dále můžeme vyjádřit nejvyšší derivace:

$$\ddot{x} = \frac{-\ddot{\varphi}lm\cos(\varphi) - \dot{\varphi}lmsin(\varphi) + f}{M + 2m}$$
$$\ddot{\varphi} = \frac{-\ddot{x}lm\cos(\varphi) + \dot{x}lm\sin(\varphi) - glm\sin(\varphi) - lm\dot{\varphi}\dot{x}\sin(\varphi)}{l^2 m}$$

Vidíme, že rovnice na sobě závisí. Můžeme tedy jednu dosadit do druhé a opačně.

$$\ddot{x} = \frac{f - \dot{\varphi}lm\sin(\varphi) - \dot{x}m\cos(\varphi)\sin(\varphi) + gm\cos(\varphi)\sin(\varphi) + \dot{\varphi}\dot{x}m\cos(\varphi)\sin(\varphi)}{M + 2m - m\cos^2(\varphi)}$$
$$\ddot{\varphi} = -\frac{f\cos(\varphi) - 2\dot{x}m\sin(\varphi) + 2gm\sin(\varphi) - M\dot{x}\sin(\varphi) + Mg\sin(\varphi) + M\dot{\varphi}\dot{x}\sin(\varphi)}{l(M + 2m + m\cos^2(\varphi))} +$$
$$+ \frac{2\dot{\varphi}\dot{x}m\sin(\varphi) - \dot{\varphi}lm\cos(\varphi)}{l(M + 2m + m\cos^2(\varphi))}$$

2.2 Stavový popis zjednodušeného modelu

Zavedeme si stavové proměnné

$$x = y_1$$
$$\varphi = y_2$$
$$\dot{y_1} = \dot{x} = y_3$$
$$\dot{y_2} = \dot{\varphi} = y_4$$
$$f = u$$

Stavový popis systému uvažujeme ve tvaru:

$$\dot{x} = \mathbf{A}\vec{x} + \mathbf{B}\vec{u}$$
$$y = \mathbf{C}\vec{x}$$

, kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \frac{\partial f_1}{\partial y_3} & \frac{\partial f_1}{\partial y_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \frac{\partial f_2}{\partial y_3} & \frac{\partial f_2}{\partial y_4} \\ \frac{\partial f_3}{\partial y_1} & \frac{\partial f_3}{\partial y_2} & \frac{\partial f_3}{\partial y_3} & \frac{\partial f_3}{\partial y_4} \\ \frac{\partial f_4}{\partial y_1} & \frac{\partial f_4}{\partial y_2} & \frac{\partial f_4}{\partial y_3} & \frac{\partial f_4}{\partial y_4} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} \\ \frac{\partial f_4}{\partial u} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dosadíme do rovnic a budeme moct derivovat.

$$\begin{aligned} f_1 : \dot{y}_1 =& y_3 \\ f_2 : \dot{y}_2 =& y_4 \\ f_3 : \dot{y}_3 =& \frac{f - \dot{\varphi} lm \sin(\varphi) - \dot{x} m \cos(\varphi)\sin(\varphi) + gm\cos(\varphi)\sin(\varphi) + \dot{\varphi}\dot{x} m \cos(\varphi)\sin(\varphi)}{M + 2m - m\cos^2(\varphi)} \\ f_4 : \dot{y}_4 =& -\frac{f\cos(\varphi) - 2\dot{x} m \sin(\varphi) + 2gm\sin(\varphi) - M\dot{x}\sin(\varphi) + Mg\sin(\varphi) + M\dot{\varphi}\dot{x}\sin(\varphi)}{l(M + 2m + m\cos^2(\varphi))} + \\ &+ \frac{2\dot{\varphi}\dot{x} m \sin(\varphi) - \dot{\varphi} lm \cos(\varphi)}{l(M + 2m + m\cos^2(\varphi))} \end{aligned}$$

Po zderivování můžeme linearizovat. To chceme udělat okolo rovnovážného bodu, tj. $x = y_1 = 0$, $\varphi = y_2 = 0$, $\dot{x} = y_3 = 0$ a $\dot{\varphi} = y_4 = 0$, takže tyto hodnoty do vypočítaných hodnot dosadíme a dostaneme tak matice:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{gm}{M+m} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{mg+Mg}{l(M+3m)} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M+m} \\ \frac{-1}{l(M+3m)} \end{bmatrix}$$

Výsledný stavový popis v okolí pracovního bodu $[\dot{x}, \dot{\varphi}, x, \varphi] = [0, 0, 0, 0]$ bude tedy vypadat:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-gm}{M+2m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mg+Mg}{l(M+2m)} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M+2m} \\ \frac{1}{l(M+2m)} \end{bmatrix} u \\
y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

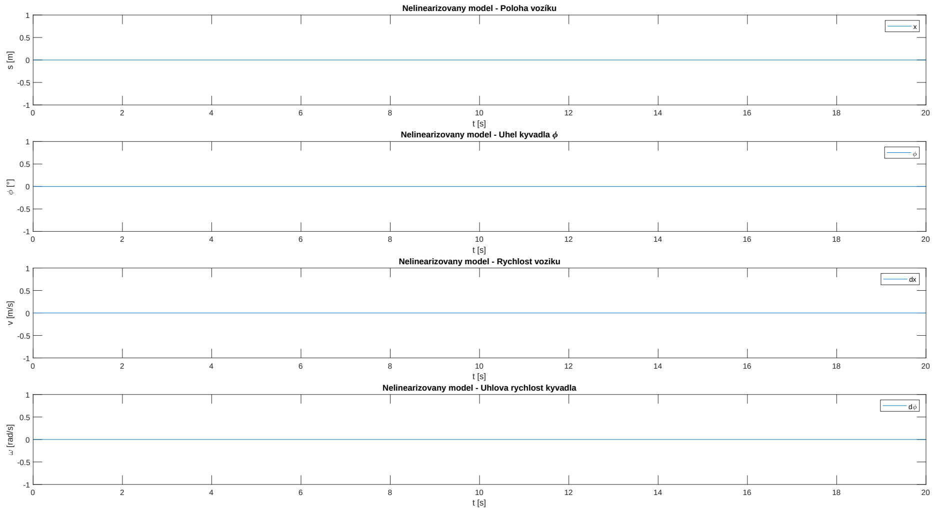
2.3 Dosazení konkrétních hodnot

Nyní si můžeme zvolit konkrétní hodnoty našeho modelu.

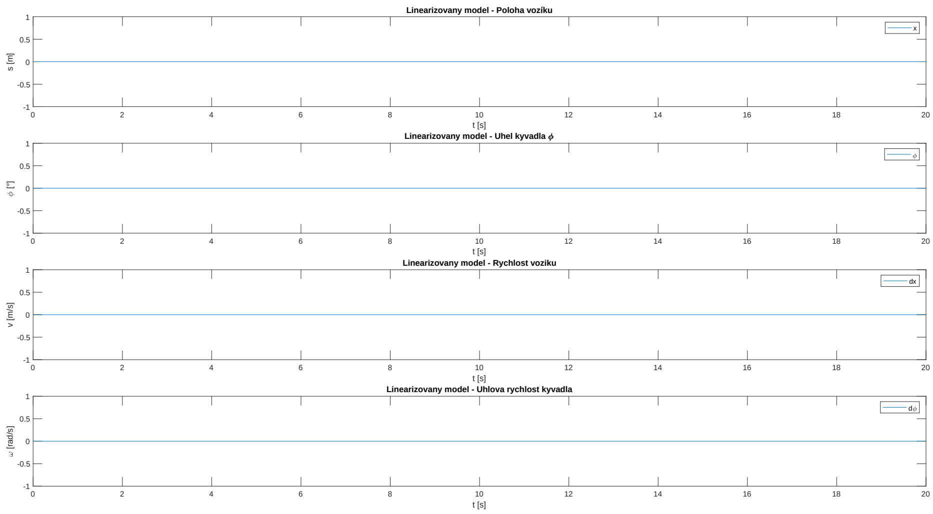
$$
\begin{aligned}
M &= 15\,\mathrm{kg} \\
m &= 5\,\mathrm{kg} \\
l &= 1\,\mathrm{m} \\
g &= 9.81\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^2
\end{aligned}
$$

Působící sílu můžeme měnit, abychom mohli ověřit chování v různých situacích.

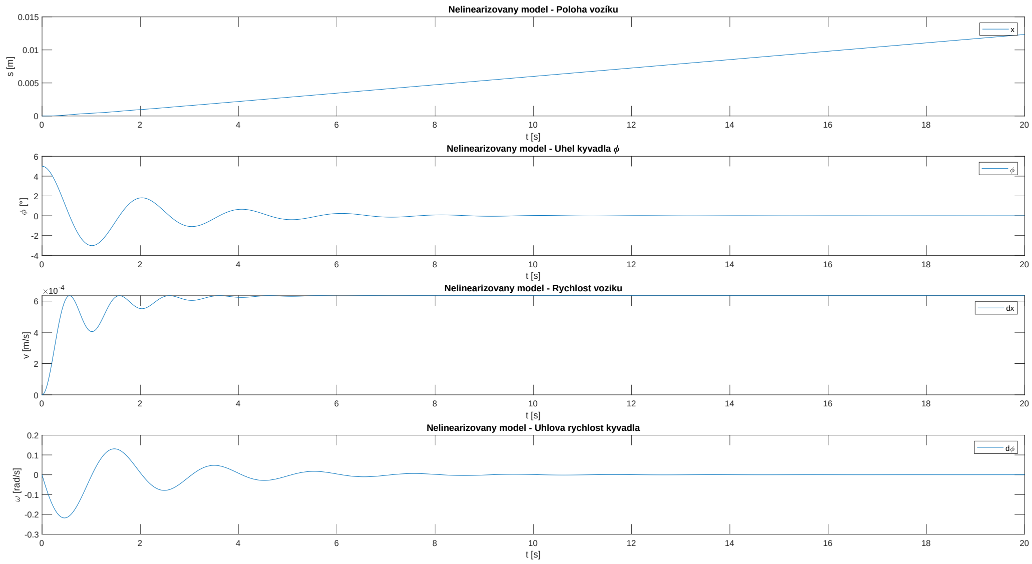
2.4 Grafy



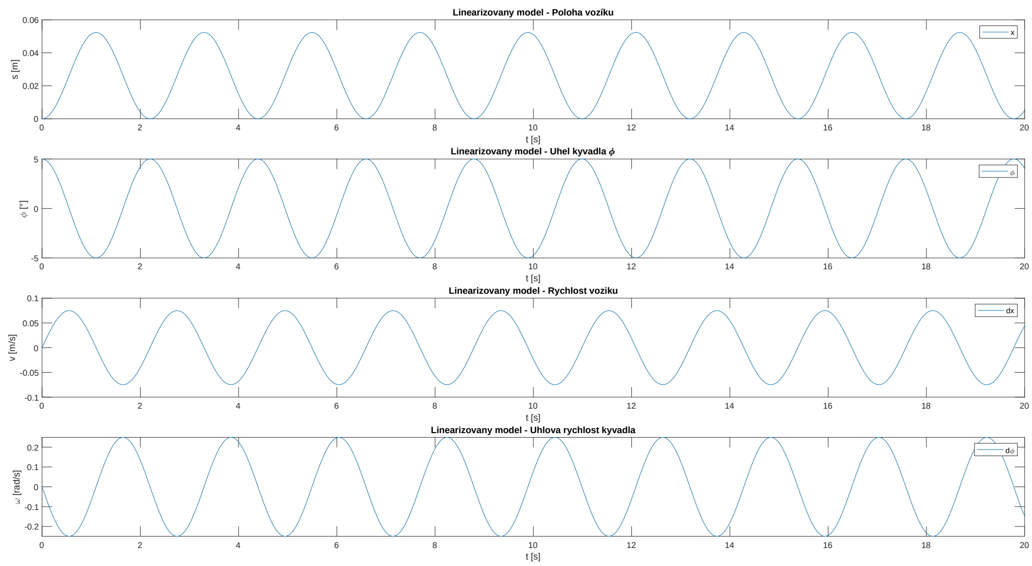
Obrázek 3: Nelineární model při $f = 0\,\mathrm{N}$ a nulových p.p.



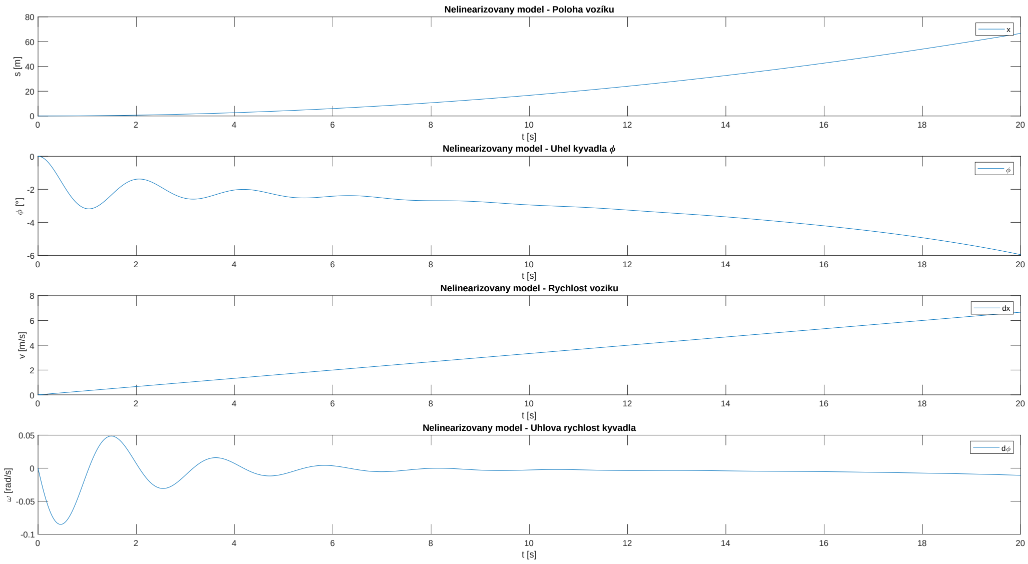
Obrázek 4: Lineární model při $f = 0\,\mathrm{N}$ a nulových p.p.



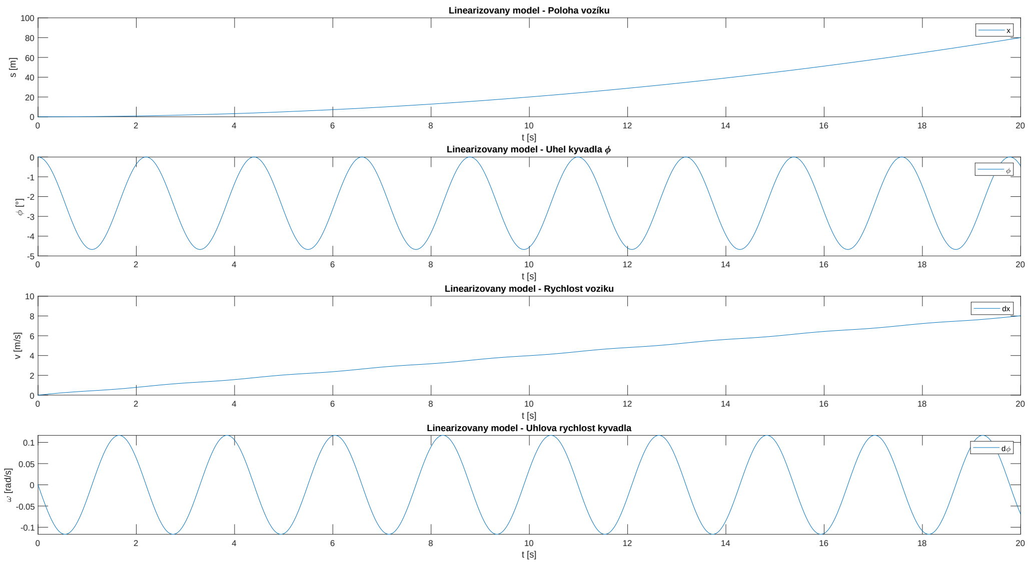
Obrázek 5: Nelineární model při $f = 0\,\mathrm{N}$ a p.p. $\varphi = 5°$



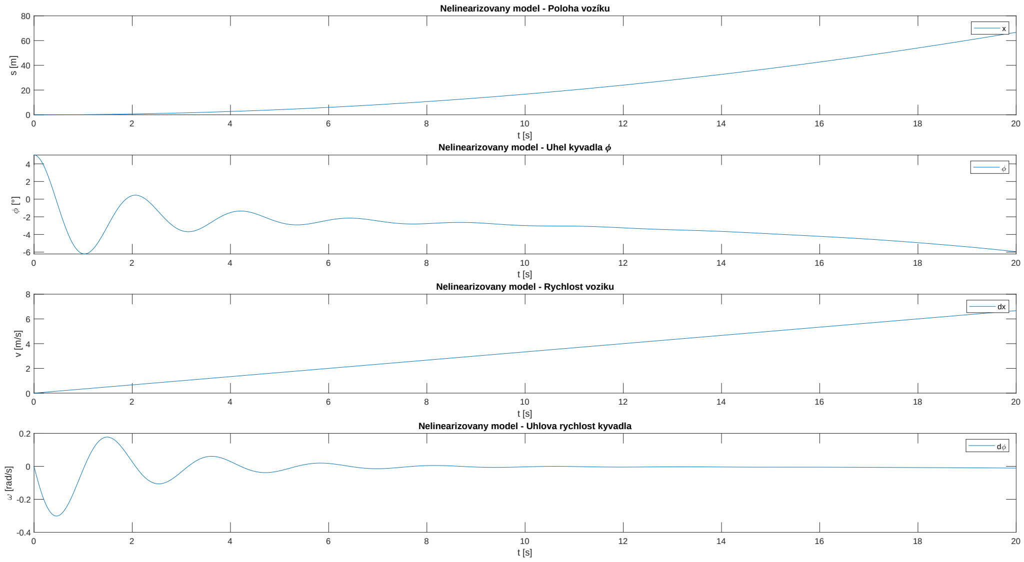
Obrázek 6: Lineární model při $f = 0\,\mathrm{N}$ a p.p. $\varphi = 5°$



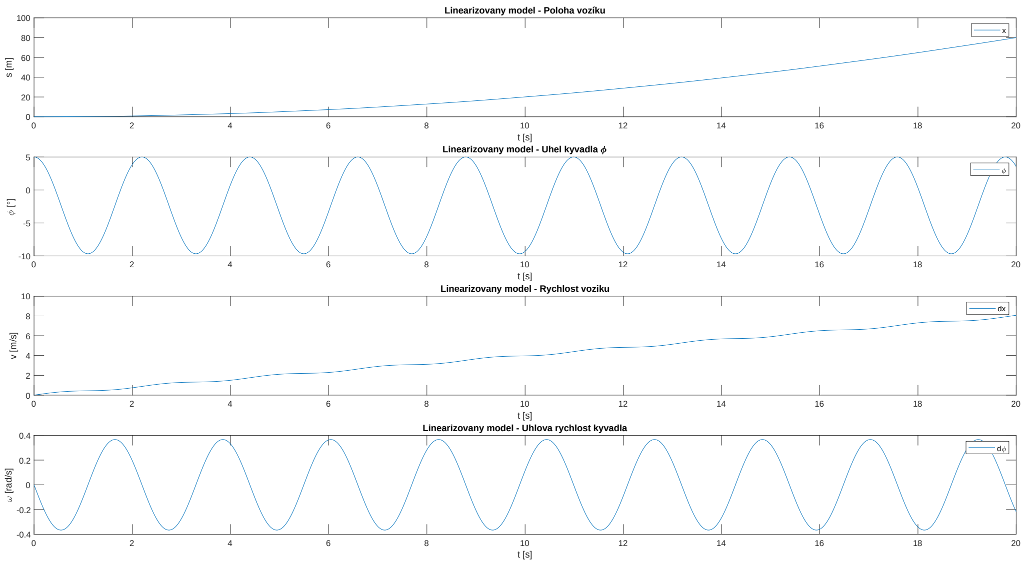
Obrázek 7: Nelineární model při $f = 10\,\mathrm{N}$ a nulových p.p.



Obrázek 8: Lineární model při $f = 10\,\mathrm{N}$ a nulových p.p.



Obrázek 9: Nelineární model při $f = 10\,\mathrm{N}$ a p.p. $\varphi = 5°$



Obrázek 10: Lineární model při $f = 10\,\mathrm{N}$ a p.p. $\varphi = 5°$

3 Návrh regulátoru