

Projekt 5

A18B0474P - Jiří Švamberg

16. října 2020



KATEDRA
KYBERNETIKY



Obsah

1	Zadání	2
2	Zjednodušený model	3
2.1	Návrh zjednodušeného modelu	3
2.2	Linearizace modelu	4
2.3	Stavový popis	5

1 Zadání

1. Navrhňte zjednodušený model soustavy kvadrotorová helikoptéra - břemeno
2. Pro zjednodušený model navrhňte regulátor
3. Implementujte regulátor do zjednodušeného modelu

2 Zjednodušený model

2.1 Návrh zjednodušeného modelu

Zjednodušený model budeme navrhovat ve 2D jako kyvadlo zavěšené na vozíku. Pro potřeby návrhu tohoto modelu budeme uvažovat lano závěsu jako dokonale nepružné, o stálé délce l a nulové hmotnosti $m_l = 0 \text{ kg}$. Úhel vychýlení závěsu od osy vozíku označíme jako φ . Jako těleso si představíme bezrozměrný hmotný bod o hmotnosti m . Pro jednoduché kyvadlo připevněné k nepohybujícímu se tělesu o kinetické energii $T = \frac{1}{2}mv^2$ a potenciální energii $V = -mgl \cos \varphi$ (obr. 1) platí pohybová rovnice:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$$

Po zavěšení jednoduchého kyvadla na vozík (obr. 2) budeme muset ještě do modelu přidat dynamiku vozíku o hmotnosti M . Na ten může působit síla ve směru osy x . Pro hmotný bod, zavěšený na laně budeme muset spočítat souřadnice $[u, v]$, jelikož při pohybu vozíku se nepohybuje po jasné trajektorii (kružnice, přímka):

$$\begin{aligned} u &= x + l \sin \varphi \rightarrow \dot{u} = \dot{x} + l\dot{\varphi} \cos \varphi \\ v &= l \cos \varphi \rightarrow \dot{v} = -l\dot{\varphi} \sin \varphi \end{aligned}$$

K odvození modelu využijeme Lagrangeovu metodu. Potenciální energii V budeme uvažovat stejnou, jako u jednoduchého kyvadla.

$$V = -mgl \cos \varphi$$

Jako základ pro vzorec kinetické energie použijeme vzorec kinetické energie obyčejného matematického kyvadla $T = \frac{1}{2}mv^2$. Musíme ale uvažovat rychlost ve směru všech souřadnic (x, u, v) .

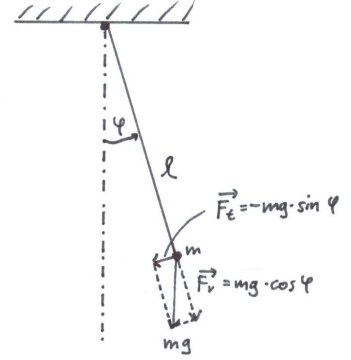
$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{u}^2 + \frac{1}{2}m\dot{v}^2$$

Po dosazení souřadnic pro hmotný bod zavěšený na laně dostaneme kinetickou energii ve tvaru:

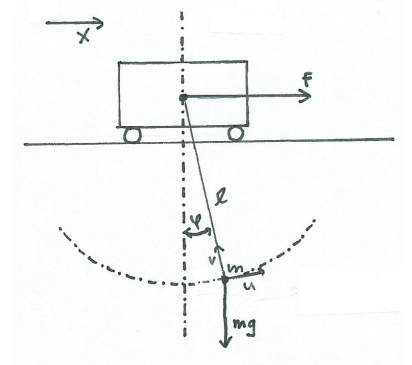
$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x} + l\dot{\varphi} \cos \varphi)^2 + \frac{1}{2}m(-l\dot{\varphi} \sin \varphi)^2$$

Zjistíme si Lagrangián $L = T - V$:

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x} + l\dot{\varphi} \cos \varphi)^2 + \frac{1}{2}m(l\dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + mgl \cos \varphi$$



Obrázek 1: Schéma jednoduchého kyvadla



Obrázek 2: Schéma soustavy vozík-kyvadlo

, který nyní budeme parciálně derivovat.

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= M\dot{x} + m\dot{x} + ml\dot{\varphi} \cos \varphi \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= m\dot{x}l \cos \varphi - ml^2\dot{\varphi} \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= -m\dot{x}l\dot{\varphi} \sin \varphi - l^2\dot{\varphi}^2 \cos \varphi \sin \varphi + ml^2\dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi - mgl \sin \varphi\end{aligned}$$

Vztahy pro hledané dvě rovnice vypadají následovně:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} &= f \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= 0\end{aligned}$$

, kde f je síla působící na vozík. Nyní můžeme dopočítat dvě rovnice modelu vozík-kyvadlo.

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\varphi} \cos \varphi - ml\dot{\varphi}^2 \sin \varphi = f \quad (1)$$

$$\ddot{x} \cos \varphi + g \sin \varphi - l\ddot{\varphi} = 0 \quad (2)$$

2.2 Linearizace modelu

Aby bylo s modelem snazší pracovat, linearizujeme ho v okolí pracovního bodu, tzn. $\varphi = 0$. Díky tomu můžeme uvažovat:

$$\begin{aligned}\sin \varphi &= \varphi \\ \cos \varphi &= 1\end{aligned}$$

Po dosazení do rovnic 1 a 2 dostaneme nové jednodušší rovnice 3 a 4.

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\varphi} - ml\dot{\varphi}^2 \varphi = f \quad (3)$$

$$\ddot{x} + g\varphi - l\ddot{\varphi} = 0 \quad (4)$$

Dále můžeme vyjádřit nejvyšší derivace:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{-ml\ddot{\varphi} + ml\dot{\varphi}^2 \varphi + f}{m + M} \\ \ddot{\varphi} &= \frac{\ddot{x} + g\varphi}{l}\end{aligned}$$

Vidíme, že rovnice na sobě závisí. Můžeme tedy do každé rovnice dosadit tu druhou.

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{-mg\varphi + ml\dot{\varphi}^2 \varphi + f}{2m + M} \\ \ddot{\varphi} &= \frac{ml\dot{\varphi}^2 \varphi + f + mg\varphi + Mg\varphi}{l(2m + M)}\end{aligned}$$