Projekt 5

A18B0474P - Jiří Švamberg

2. listopadu 2020

FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD ZÁPADOČESKÉ UNIVERZITY V PLZNI

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

KATEDRA KYBERNETIKY

Obsah

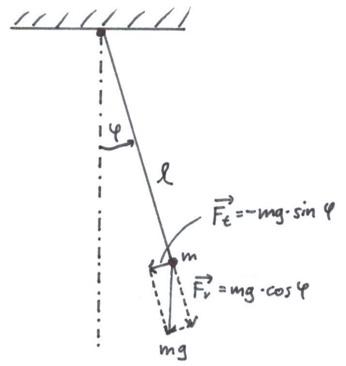
1 Zadání

1. Navrhněte zjednodušený model soustavy kvadrotorová helikoptéra - břemeno
2. Pro zjednodušený model navrhněte regulátor
3. Implementujte regulátor do zjednodušeného modelu

2 Zjednodušený model

2.1 Návrh zjednodušeného modelu

Zjednodušený model budeme navrhovat ve 2D jako kyvadlo zavěšené na vozíku. Pro potřeby návrhu tohoto modelu budeme uvažovat lano závěsu jako dokonale nepružné, o stálé délce l a nulové hmotnosti $m_l = 0\,\text{kg}$. Úhel vychýlení závěsu od osy vozíku označíme jako φ. Jako těleso si představíme bezrozměrný hmotný bod o hmotnosti m.
Pro jednoduché kyvadlo připevněné k nepohybujícímu se tělesu o kinetické energii $T = \frac{1}{2}mv^2$ a potenciální energii $V = -mgl\cos\varphi$ (obr. 1) platí pohybová rovnice:

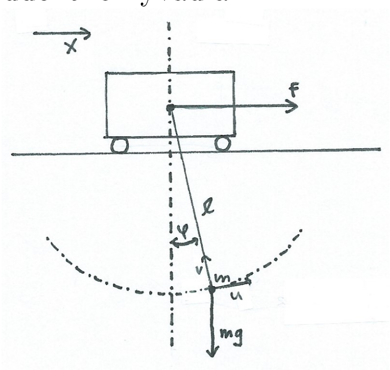


Obrázek 1: Schéma jednoduchého kyvadla

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$$

Po zavěšení jednoduchého kyvadla na vozík(obr. 2) budeme muset ještě do modelu přidat dynamiku vozíku o hmotnosti M. Na ten může působit síla ve směru osy x. Pro hmotný bod, zavěšený na laně budeme muset spočítat souřadnice $[u, v]$, jelikož při pohybu vozíku se nepohybuje po jasné trajektorii (kružnice, přímka):

$$u = x + l\sin\varphi \rightarrow \dot{u} = \dot{x} + l\dot{\varphi}\cos\varphi$$
$$v = l\cos\varphi \rightarrow \dot{v} = -l\dot{\varphi}\sin\varphi$$



Obrázek 2: Schéma soustavy vozík-kyvadlo

K odvození modelu využijeme Lagrangeovu metodu.
Potenciální energii V budeme uvažovat stejnou, jako u jednoduchého kyvadla.

$$V = -mgl\cos\varphi$$

Jako základ pro vzorec kinetické energie použijeme vzorec kinetické energie obyčejného matematického kyvadla $T = \frac{1}{2}mv^2$. Musíme ale uvažovat rychlost ve směru všech souřadnic (x, u, v).

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{u}^2 + \frac{1}{2}m\dot{v}^2$$

Po dosazení souřadnic pro hmotný bod zavěšený na laně dostaneme kinetickou energii ve tvaru:

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x} + l\dot{\varphi}\cos\varphi\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(-l\dot{\varphi}\sin\varphi\right)^2$$

Zjistíme si Lagrangián $L = T - V$:

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x} + \frac{1}{2}m\left(\dot{x} + l\dot{\varphi}\cos\varphi\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(l\dot{\varphi}\sin\varphi\right)^2 + mgl\cos\varphi$$

, který nyní budeme parciálně derivovat.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= M\dot{x} + m\dot{x} + ml\dot{\varphi}\cos\varphi \\
\frac{\partial L}{\partial x} &= 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= m\dot{x}l\cos\varphi - ml^2\dot{\varphi} \\
\frac{\partial L}{\partial \varphi} &= -m\dot{x}l\dot{\varphi}\sin\varphi - l^2\dot{\varphi}^2\cos\varphi\sin\varphi + ml^2\dot{\varphi}^2\sin\varphi\cos\varphi - mgl\sin\varphi
\end{aligned}$$

Vztahy pro hledané dvě rovnice vypadají následovně:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} &= f \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= 0
\end{aligned}$$

, kde f je síla působící na vozík. Nyní můžeme dopočítat dvě rovnice modelu vozík-kyvadlo.

$$(M+m)\,\ddot{x} + ml\ddot{\varphi}\cos\varphi - ml\dot{\varphi}^2\sin\varphi = f \tag{1}$$

$$\ddot{x}\cos\varphi + g\sin\varphi - l\ddot{\varphi} = 0 \tag{2}$$

2.2 Linearizace modelu

Aby bylo s modelem snazší pracovat, linearizujeme ho v okolí pracovního bodu, tzn. $\varphi = 0$. Díky tomu můžeme uvažovat:

$$\begin{aligned}
\sin\varphi &\approx \varphi \\
\cos\varphi &\approx 1
\end{aligned}$$

Po dosazení do rovnic 1 a 2 dostaneme nové jednodušší rovnice 3 a 4.

$$(M+m)\,\ddot{x} + ml\ddot{\varphi} - ml\dot{\varphi}^2\varphi = f \tag{3}$$

$$\ddot{x} + g\varphi - l\ddot{\varphi} = 0 \tag{4}$$

Dále můžeme vyjádřit nejvyšší derivace:

$$\begin{aligned}
f_1 : \ddot{x} &= \frac{-ml\ddot{\varphi} + ml\dot{\varphi}^2\varphi + f}{m+M} \\
f_2 : \ddot{\varphi} &= \frac{\ddot{x} + g\varphi}{l}
\end{aligned}$$

Vidíme, že rovnice na sobě závisí. Můžeme tedy jednu dosadit do druhé a opačně.

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= \frac{-mg\varphi + ml\dot{\varphi}^2\varphi + f}{2m+M} \\
\ddot{\varphi} &= \frac{ml\dot{\varphi}^2\varphi + f + mg\varphi + Mg\varphi}{l\,(2m+M)}
\end{aligned}$$

2.3 Stavový popis systému

Stavový popis systému uvažujeme ve tvaru:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \mathbf{A}\vec{x} + \mathbf{B}\vec{u} \\
y &= \mathbf{C}\vec{x}
\end{aligned}$$

, kde

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial f_1}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial f_1}{\partial \dot{\varphi}} & \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial f_2}{\partial \dot{\varphi}} & \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} \end{bmatrix} \\
\mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial f} \\ \frac{\partial f_2}{\partial f} \end{bmatrix} \\
\mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Zavedeme si stavové proměnné

$$\begin{aligned}
x_1 &= \dot{x} \\
x_2 &= \dot{\varphi} \\
x_3 &= x \\
x_4 &= \varphi \\
u &= f
\end{aligned}$$

Dosadíme do rovnic a budeme moct derivovat.

$$\begin{aligned}
f_1 : \ddot{x} &= \frac{lmx_4x_2^2 + u - gmx_4}{M + 2m} \\
f_2 : \ddot{\varphi} &= \frac{lmx_4x_2^2 + u + Mgx_4 + mgx_4}{l\,(M + 2m)}
\end{aligned}$$

Po zderivování dostaneme matice:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{2lmx_4x_2}{M+2m} & 0 & \frac{lmx_2^2-gm}{M+2m} \\ 0 & \frac{2lmx_4x_2}{l(M+2m)} & 0 & \frac{lmx_2^2+Mg+mg}{l(M+2m)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M+2m} \\ \frac{1}{l(M+2m)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

, celý popis bude tedy ve tvaru

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{2lmx_4x_2}{M+2m} & 0 & \frac{lmx_2^2-gm}{M+2m} \\ 0 & \frac{2lmx_4x_2}{l(M+2m)} & 0 & \frac{lmx_2^2+Mg+mg}{l(M+2m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M+2m} \\ \frac{1}{l(M+2m)} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$