

# Projekt 5

A18B0474P - Jiří Švamberg

1. února 2021



KATEDRA  
KYBERNETIKY



# Obsah

<b>1</b>	<b>Zadání</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Zjednodušený model</b>	<b>3</b>
2.1	Návrh zjednodušeného modelu . . . . .	3
2.2	Stavový popis zjednodušeného modelu . . . . .	4
2.3	Dosazení konkrétních hodnot . . . . .	6
2.4	Grafy . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Návrh regulátoru</b>	<b>11</b>
<b>4</b>	<b>Implementace regulátoru</b>	<b>11</b>
<b>5</b>	<b>Závěr</b>	<b>11</b>

# 1 Zadání

1. Navrhňte zjednodušený model soustavy kvadrotorová helikoptéra - břemeno
2. Pro zjednodušený model navrhňte regulátor
3. Implementujte regulátor do zjednodušeného modelu

## 2 Zjednodušený model

### 2.1 Návrh zjednodušeného modelu

Zjednodušený model budeme navrhovat ve 2D jako kyvadlo zavěšené na vozíku. Pro potřeby návrhu tohoto modelu budeme uvažovat lano závěsu jako dokonale nepružné, o stálé délce  $l$  a nulové hmotnosti  $m_l = 0$  kg. Úhel vychýlení závěsu od osy vozíku označíme jako  $\varphi$ . Jako těleso si představíme bezrozměrný hmotný bod o hmotnosti  $m$ . Pro jednoduché kyvadlo připevněné k nepohybujícímu se tělesu o kinetické energii  $T = \frac{1}{2}mv^2$  a potenciální energii  $V = -mgl \cos \varphi$  (obr. 1) platí pohybová rovnice:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$$

Po zavěšení jednoduchého kyvadla na vozík (obr. 2) budeme muset ještě do modelu přidat dynamiku vozíku o hmotnosti  $M$ . Na ten může působit síla ve směru osy  $x$ . Pro hmotný bod, zavěšený na laně budeme muset spočítat souřadnice  $[u, v]$ , jelikož při pohybu vozíku se nepohybuje po jasné trajektorii (kružnice, přímka):

$$\begin{aligned} u &= x + l \sin \varphi \rightarrow \dot{u} = \dot{x} + l\dot{\varphi} \cos \varphi \\ v &= -l \cos \varphi \rightarrow \dot{v} = l\dot{\varphi} \sin \varphi \end{aligned}$$

K odvození modelu využijeme Lagrangeovu metodu. Potenciální energii  $V$  budeme uvažovat stejnou, jako u jednoduchého kyvadla.

$$V = -mgl \cos \varphi$$

Jako základ pro vzorec kinetické energie použijeme vzorec kinetické energie obyčejného matematického kyvadla  $T = \frac{1}{2}mv^2$ . Musíme ale uvažovat rychlost ve směru všech souřadnic  $(x, u, v)$ .

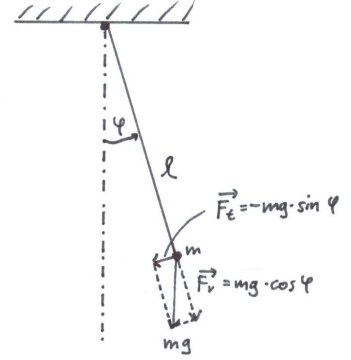
$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{u}^2 + \frac{1}{2}m\dot{v}^2$$

Po dosazení souřadnic pro hmotný bod zavěšený na laně dostaneme kinetickou energii ve tvaru:

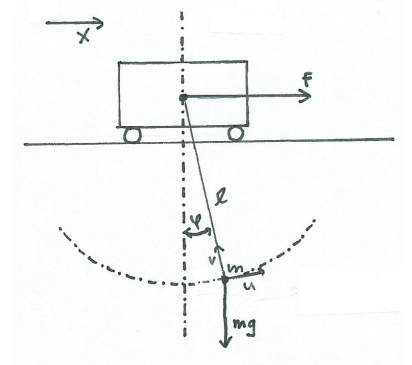
$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(l\dot{\varphi} \cos \varphi + \dot{x})^2 + \frac{1}{2}m(l\dot{\varphi} \sin \varphi)^2$$

Zjistíme si Lagrangián  $L = T - V$ :

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi + m\dot{x}l\dot{\varphi} \cos \varphi + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi + mgl \cos \varphi$$



Obrázek 1: Schéma jednoduchého kyvadla



Obrázek 2: Schéma soustavy vozík-kyvadlo

, který nyní budeme parciálně derivovat.

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= M\dot{x} + ml\dot{\varphi} \cos \varphi + m\dot{x} \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= ml^2\dot{\varphi} + m\dot{x}l \cos \varphi \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= -m\dot{x}l\dot{\varphi} \sin \varphi - mgl \sin \varphi\end{aligned}$$

Vztahy pro hledané dvě rovnice vypadají následovně:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} &= f \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= 0\end{aligned}$$

, kde  $f$  je síla působící na vozík. Nyní můžeme dopočítat dvě rovnice modelu vozík-kyvadlo.

$$\begin{aligned}M\ddot{x} + ml\ddot{\varphi} \cos \varphi - ml\dot{\varphi}^2 \sin \varphi + m\ddot{x} &= f \\ ml(l\ddot{\varphi} + \ddot{x} \cos \varphi - \dot{x} \sin \varphi + \dot{x}\dot{\varphi} \sin \varphi + g \sin \varphi) &= 0\end{aligned}$$

thr Dále můžeme vyjádřit nejvyšší derivace:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{-ml\ddot{\varphi} \cos \varphi + ml\dot{\varphi}^2 \sin \varphi + f}{M + m} \\ \ddot{\varphi} &= \frac{\sin \varphi (\dot{x}\dot{\varphi} - \dot{\varphi} + g) + \ddot{x} \cos \varphi}{l}\end{aligned}$$

Vidíme, že rovnice na sobě závisí. Můžeme je tedy navzájem dosadit.

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{lm \sin \varphi \dot{\varphi}^2 - \dot{x}m \cos \varphi \sin \varphi \dot{\varphi} + f + \dot{x}m \cos \varphi \sin \varphi - gm \cos \varphi \sin \varphi}{m \cos^2 \varphi + M + m} \\ \ddot{\varphi} &= \frac{f \cos \varphi - \dot{x}m \sin \varphi + gm \sin \varphi - M\dot{x} \sin \varphi + Mg \sin \varphi + M\dot{\varphi}\dot{x} \sin \varphi + \dot{\varphi}\dot{x}m \sin \varphi}{l(m \cos^2 \varphi + M + m)} \\ &+ \frac{\dot{\varphi}^2 lm \cos \varphi \sin \varphi}{l(m \cos^2 \varphi + M + m)}\end{aligned}$$

## 2.2 Stavový popis zjednodušeného modelu

Zavedeme si stavové proměnné

$$\begin{aligned}x &= y_1 \\ \varphi &= y_2 \\ \dot{y}_1 = \dot{x} &= y_3 \\ \dot{y}_2 = \dot{\varphi} &= y_4 \\ f &= u\end{aligned}$$

Stavový popis systému uvažujeme ve tvaru:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mathbf{A}\vec{x} + \mathbf{B}\vec{u} \\ y &= \mathbf{C}\vec{x}\end{aligned}$$

, kde

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \frac{\partial f_1}{\partial y_3} & \frac{\partial f_1}{\partial y_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \frac{\partial f_2}{\partial y_3} & \frac{\partial f_2}{\partial y_4} \\ \frac{\partial f_3}{\partial y_1} & \frac{\partial f_3}{\partial y_2} & \frac{\partial f_3}{\partial y_3} & \frac{\partial f_3}{\partial y_4} \\ \frac{\partial f_4}{\partial y_1} & \frac{\partial f_4}{\partial y_2} & \frac{\partial f_4}{\partial y_3} & \frac{\partial f_4}{\partial y_4} \end{bmatrix} \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} \\ \frac{\partial f_4}{\partial u} \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Dosadíme do rovnic a budeme moct derivovat.

$$\begin{aligned}f_1 : \dot{y}_1 &= y_3 \\ f_2 : \dot{y}_2 &= y_4 \\ f_3 : \dot{y}_3 &= \frac{lm \sin(y_2)y_4^2 - y_3m \cos(y_2) \sin(y_2)y_4 + u + y_3m \cos(y_2) \sin(y_2) - gm \cos(y_2) \sin(y_2)}{m \cos^2(y_2) + M + m} \\ f_4 : \dot{y}_4 &= \frac{u \cos(y_2) - y_3m \sin(y_2) + gm \sin(y_2) - My_3 \sin(y_2) + Mg \sin(y_2) + My_4y_3 \sin(y_2)}{l(m \cos^2(y_2) + M + m)} \\ &\quad + \frac{y_4y_3m \sin(y_2) + y_4^2lm \cos(y_2) \sin(y_2)}{l(m \cos^2(y_2) + M + m)}\end{aligned}$$

Po zderivování můžeme linearizovat. To chceme udělat okolo rovnovážného bodu, tj.  $x = y_1 = 0$ ,  $\varphi = y_2 = \pi$ ,  $\dot{x} = y_3 = 0$  a  $\dot{\varphi} = y_4 = 0$ , takže tyto hodnoty do vypočítaných hodnot dosadíme a dostaneme tak matice:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{gm}{M+2m} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{mg+Mg}{l(M+2m)} & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M+2m} \\ -\frac{1}{l(M+2m)} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Výsledný stavový popis v okolí pracovního bodu  $[\dot{x}, \dot{\varphi}, x, \varphi] = [0, 0, 0, 0]$  bude tedy vypadat:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{gm}{M+2m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mg+Mg}{l(M+2m)} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M+2m} \\ -\frac{1}{l(M+2m)} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

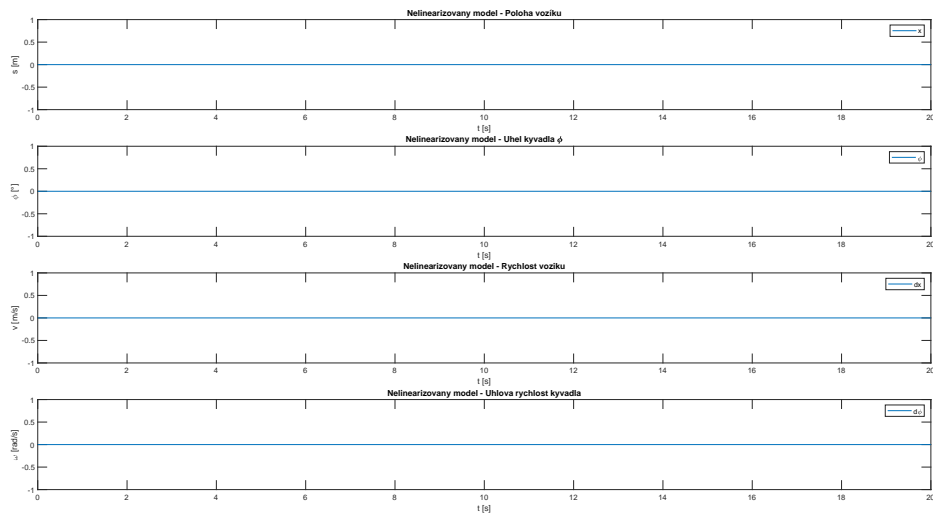
## 2.3 Dosazení konkrétních hodnot

Nyní si můžeme zvolit konkrétní hodnoty našeho modelu.

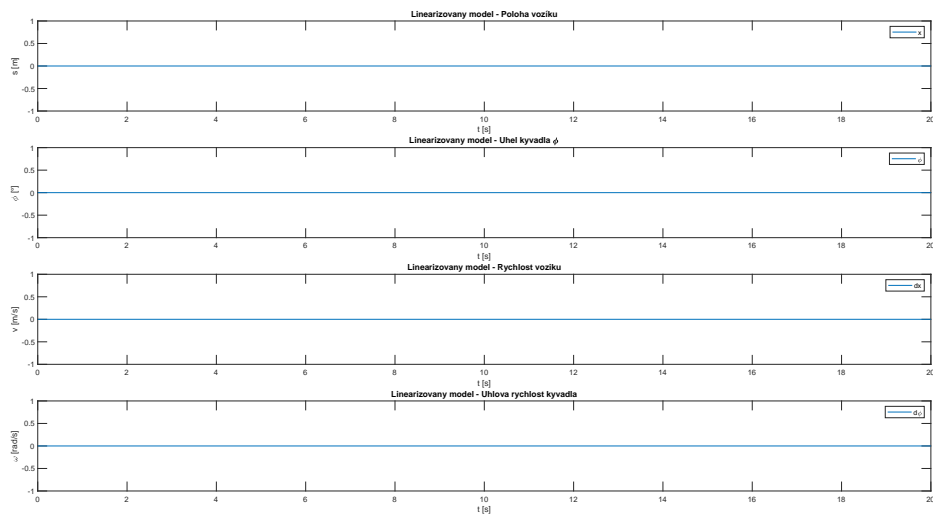
$$\begin{aligned} M &= 15 \text{ kg} \\ m &= 5 \text{ kg} \\ l &= 1 \text{ m} \\ g &= 9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \end{aligned}$$

Působící sílu můžeme měnit, abychom mohli ověřit chování v různých situacích.

## 2.4 Grafy

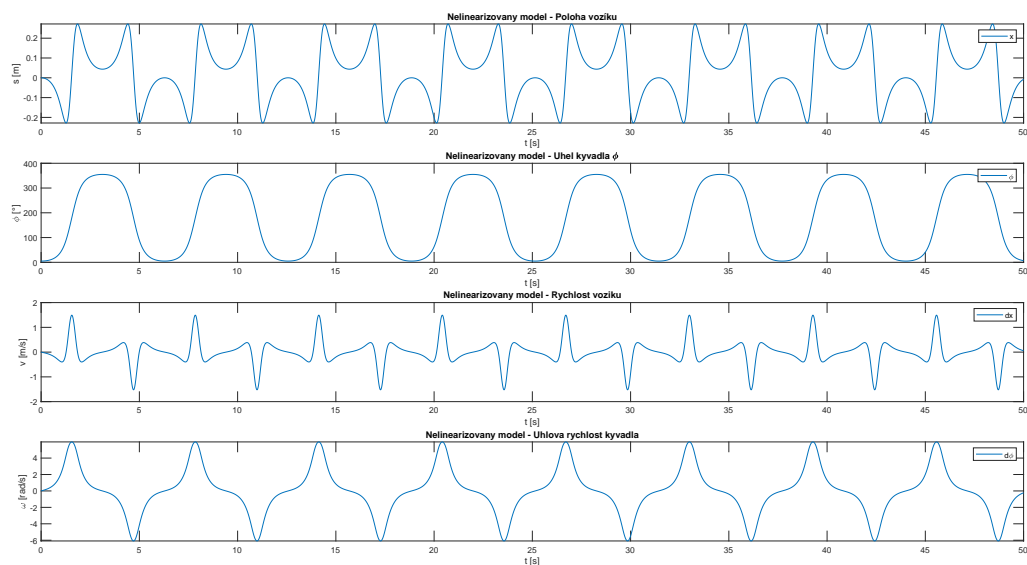


Obrázek 3: Nelineární model při  $f = 0 \text{ N}$  a nulových p.p.

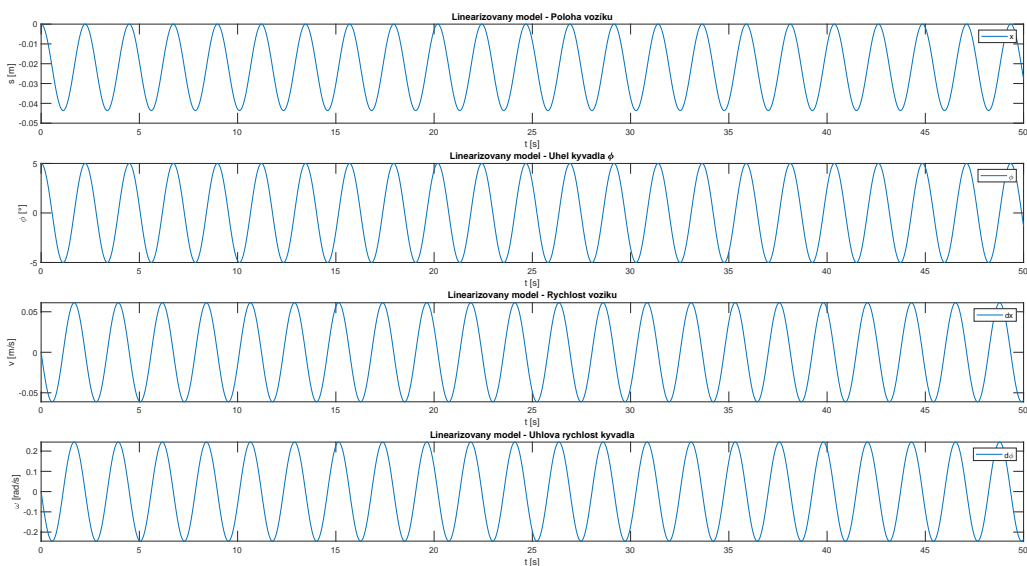


Obrázek 4: Lineární model při  $f = 0 \text{ N}$  a nulových p.p.

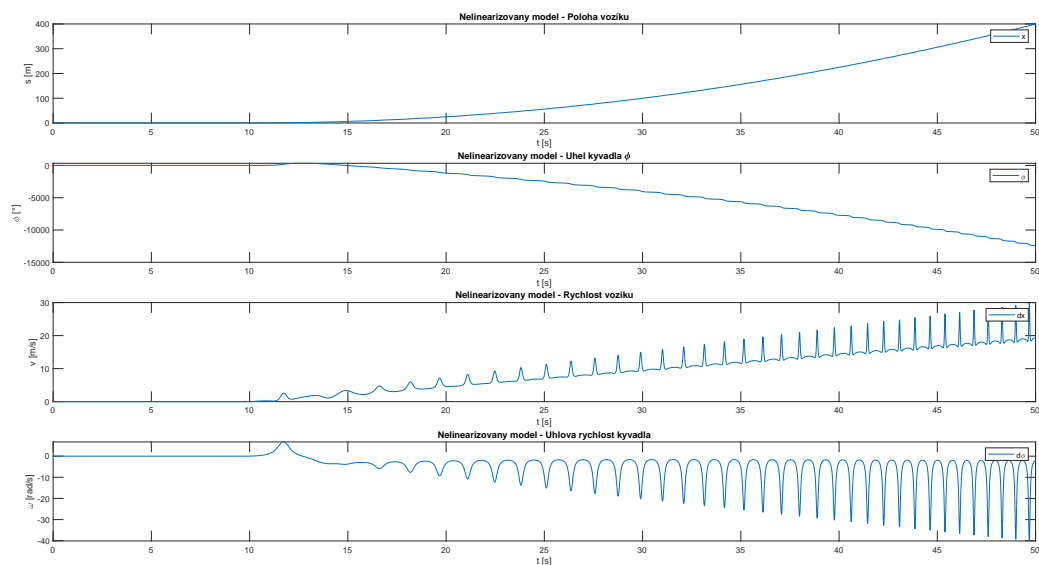




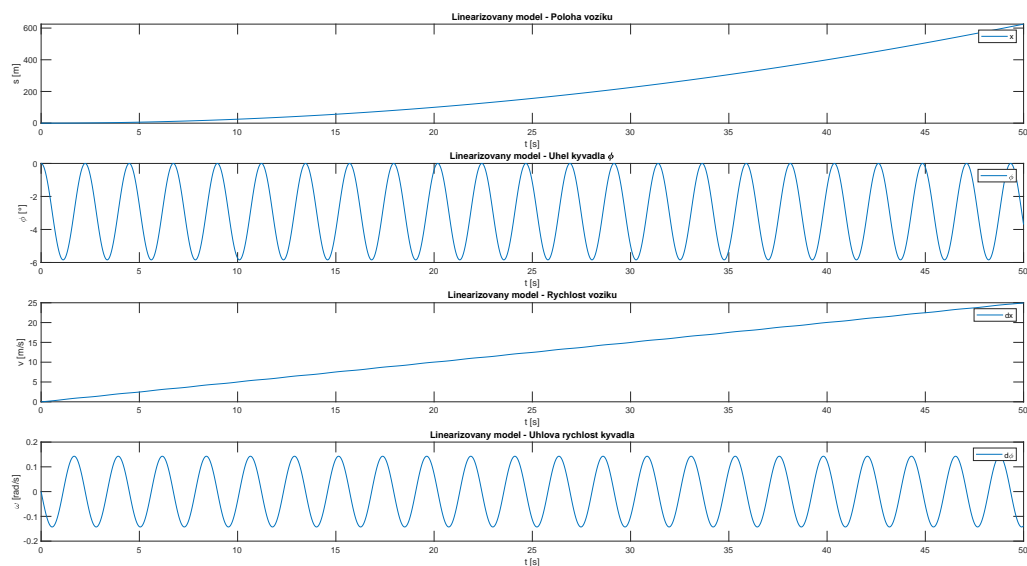
Obrázek 5: Nelineární model při  $f = 0$  N a p.p.  $\varphi = 5^\circ$



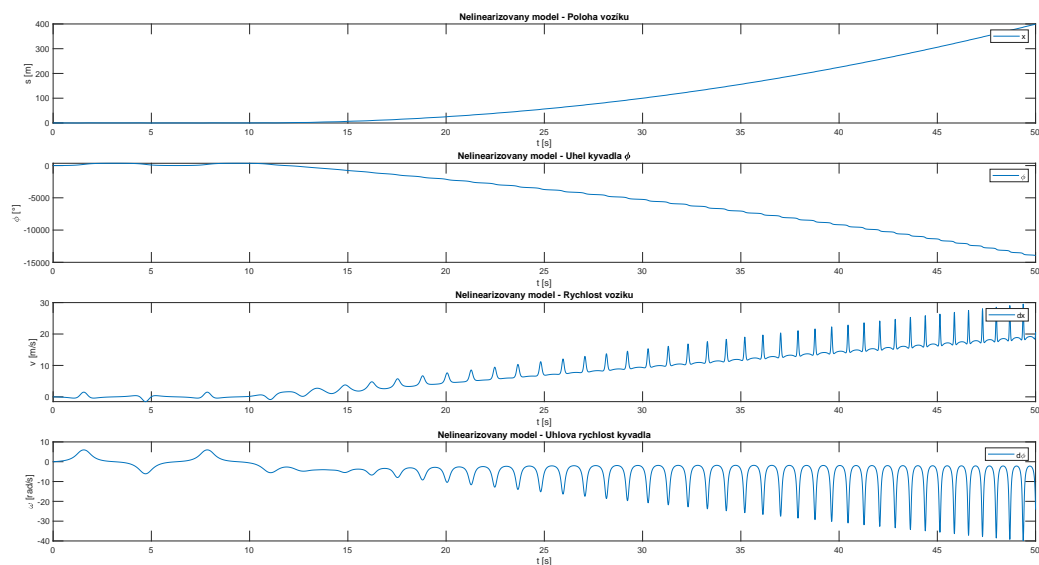
Obrázek 6: Lineární model při  $f = 0$  N a p.p.  $\varphi = 5^\circ$



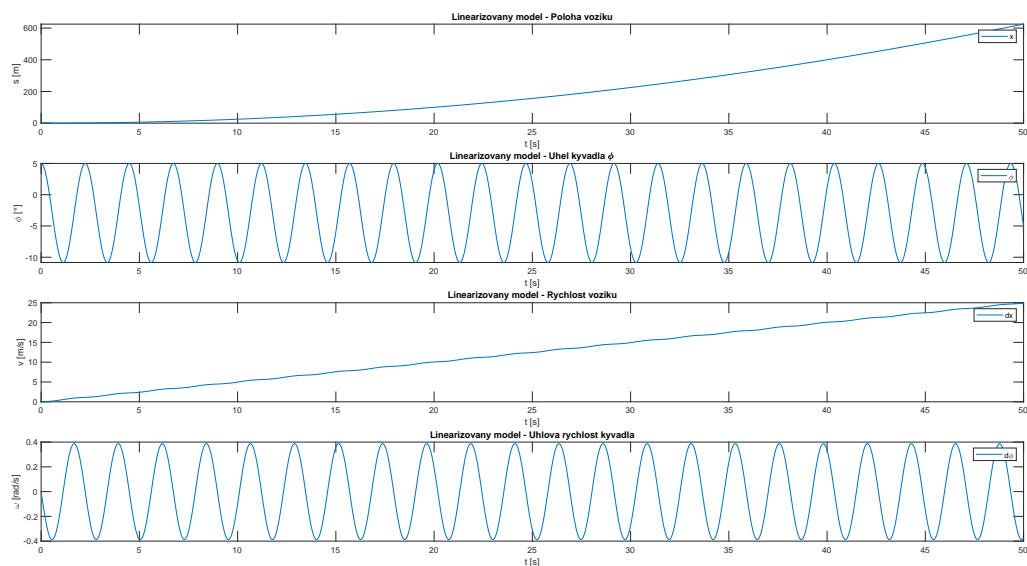
Obrázek 7: Nelineární model při  $f = 10$  N a nulových p.p.



Obrázek 8: Lineární model při  $f = 10$  N a nulových p.p.



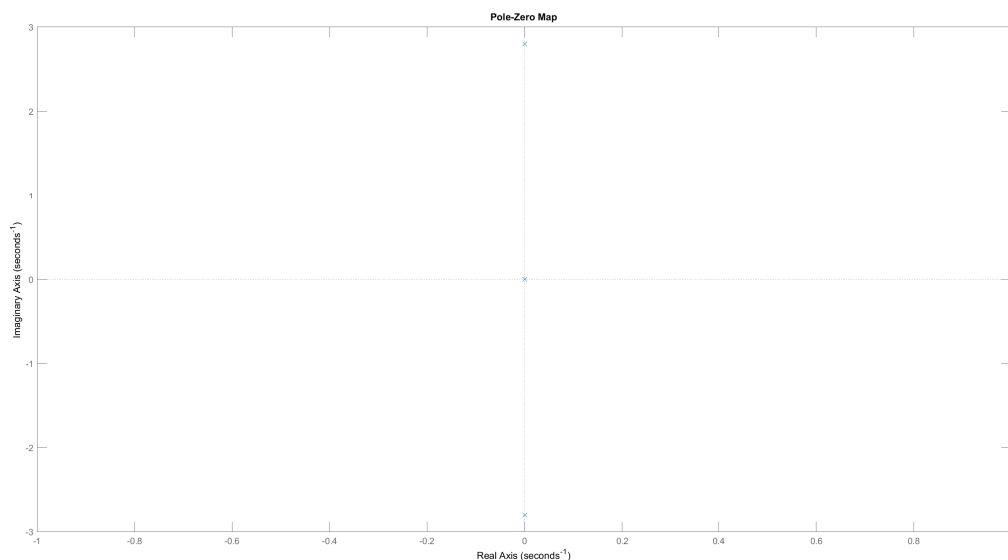
Obrázek 9: Nelineární model při  $f = 10$  N a p.p.  $\varphi = 5^\circ$



Obrázek 10: Lineární model při  $f = 10$  N a p.p.  $\varphi = 5^\circ$

### 3 Návrh regulátoru

Jako nejideálnější regulátor jsme zvolili regulátor stavový. Cílem bylo ustabilizovat systém, tzn. dostat póly systému na mezi stability (obr. 3) do záporné poloroviny a tím systém učinit stabilním.



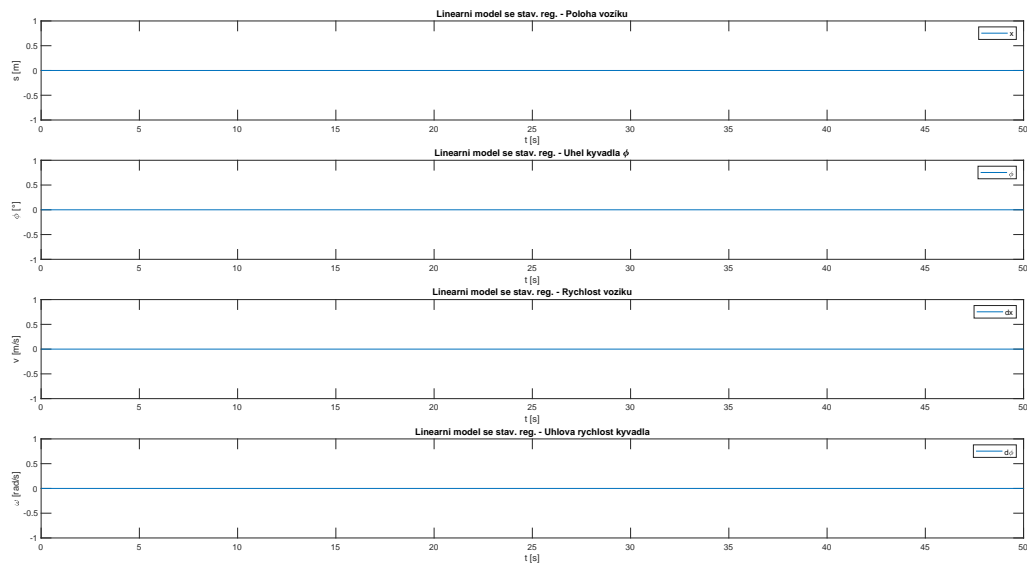
Obrázek 11: GMK systému na mezi stability

Nejprve je potřeba si zvolit požadované póly. V našem případě máme čtyři póly s nulovou reálnou částí (to způsobuje kmitání systému, který je díky tomu na mezi stability). Musíme tak zvolit póly, které mají zápornou reálnou část. Nyní můžeme vypočítat vektor zesílení  $K$ . Toho dosáhneme např. v Matlabu pomocí funkce  $K = \text{acker}(A, B, p)$ , kde  $A$  je matice systému,  $B$  je matice řízení a  $p$  je vektor požadovaných pólů.

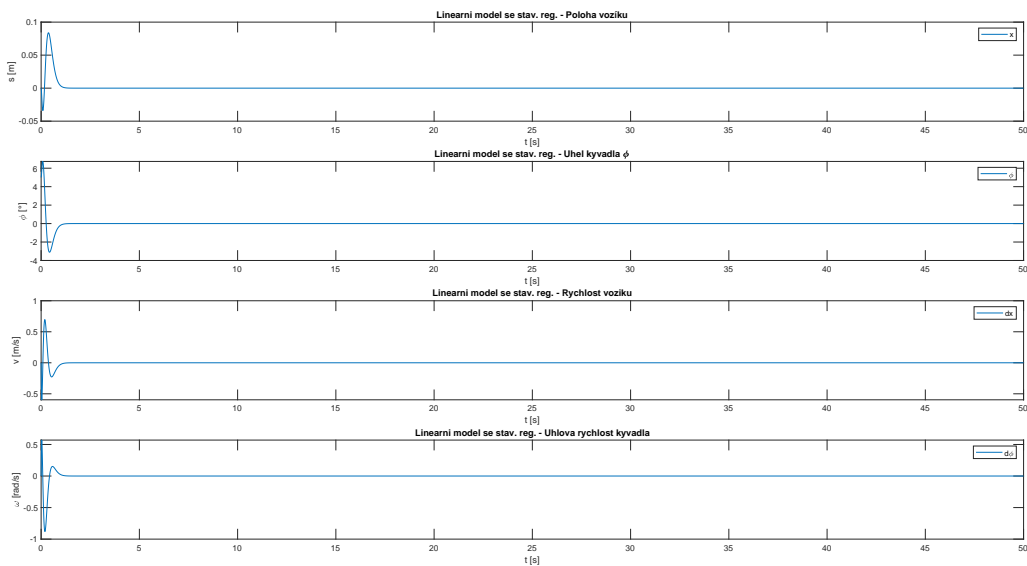
### 4 Implementace regulátoru

Po získání vektoru zesílení je možno vytvořit uzavřenou zpětnou vazbu. Můžeme tedy vyzkoušet, jak se bude nově vzniklý systém chovat při nulových počátečních podmínkách (obr. 4) a nenulových počátečních podmínkách (obr. 4).

Z obou obrázků je vidět, že systém je stabilní.



Obrázek 12: Lineární model se stav. reg. při p.p.  $\varphi = 0^\circ$



Obrázek 13: Lineární model se stav. reg. při p.p.  $\varphi = 5^\circ$

## 5 Závěr

Cílem práce bylo navrhnout zjednodušený model kyvadla zavěšeném na vozíku a pro ten následně navrhnout regulátor, pomocí kterého celý systém ustabilizujeme. Vhodným regulátorem byl zvolen stavový regulátor.

Z grafu číslo 4 lze odvodit, že se pomocí stavového regulátoru povedlo ustabilizovat systém z obr. č. 2.4.