# Projekt 5

A18B0474P - Jiří Švamberg

28. ledna 2021

FAKULTA
APLIKOVANÝCH VĚD
ZÁPADOČESKÉ
UNIVERZITY
V PLZNI

ZÁPADOČESKÁ
UNIVERZITA
V PLZNI

KATEDRA
KYBERNETIKY

# Obsah

# 1 Zadání

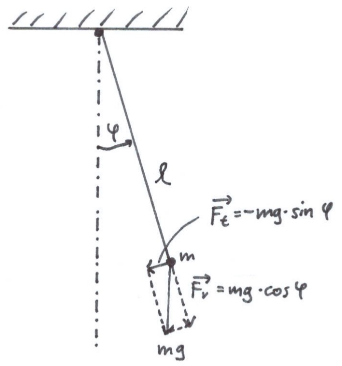
1. Navrhněte zjednodušený model soustavy kvadrotorová helikoptéra - břemeno
2. Pro zjednodušený model navrhněte regulátor
3. Implementujte regulátor do zjednodušeného modelu

# 2 Zjednodušený model

## 2.1 Návrh zjednodušeného modelu

Zjednodušený model budeme navrhovat ve 2D jako kyvadlo zavěšené na vozíku. Pro potřeby návrhu tohoto modelu budeme uvažovat lano závěsu jako dokonale nepružné, o stálé délce $l$ a nulové hmotnosti $m_l = 0\,\mathrm{kg}$. Úhel vychýlení závěsu od osy vozíku označíme jako $\varphi$. Jako těleso si představíme bezrozměrný hmotný bod o hmotnosti $m$.
Pro jednoduché kyvadlo připevněné k nepohybujícímu se tělesu o kinetické energii $T = \frac{1}{2}mv^2$ a potenciální energii $V = -mgl\cos\varphi$ (obr. 1) platí pohybová rovnice:

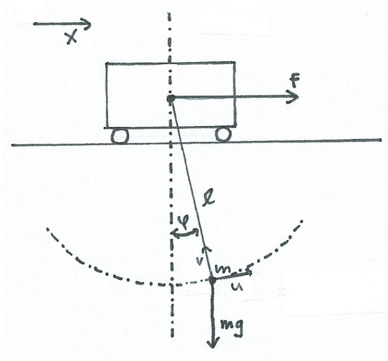
$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$$




Obrázek 1: Schéma jednoduchého kyvadla

Po zavěšení jednoduchého kyvadla na vozík(obr. 2) budeme muset ještě do modelu přidat dynamiku vozíku o hmotnosti $M$. Na ten může působit síla ve směru osy x. Pro hmotný bod, zavěšený na laně budeme muset spočítat souřadnice $[u, v]$, jelikož při pohybu vozíku se nepohybuje po jasné trajektorii (kružnice, přímka):

$$u = x + l\sin\varphi \rightarrow \dot{u} = \dot{x} + l\dot{\varphi}\cos\varphi$$
$$v = -l\cos\varphi \rightarrow \dot{v} = l\dot{\varphi}\sin\varphi$$




Obrázek 2: Schéma soustavy vozík-kyvadlo

K odvození modelu využijeme Lagrangeovu metodu.
Potenciální energii $V$ budeme uvažovat stejnou, jako u jednoduchého kyvadla.

$$V = -mgl\cos\varphi$$

Jako základ pro vzorec kinetické energie použijeme vzorec kinetické energie obyčejného matematického kyvadla $T = \frac{1}{2}mv^2$. Musíme ale uvažovat rychlost ve směru všech souřadnic ($x$, $u$, $v$).

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{u}^2 + \frac{1}{2}m\dot{v}^2$$

Po dosazení souřadnic pro hmotný bod zavěšený na laně dostaneme kinetickou energii ve tvaru:

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(l\dot{\varphi}\cos\varphi + \dot{x})^2 + \frac{1}{2}m(l\dot{\varphi}\sin\varphi)^2$$

Zjistíme si Lagrangián $L = T - V$:

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi + m\dot{x}l\dot{\varphi}\cos\varphi + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi + mgl\cos\varphi$$

, který nyní budeme parciálně derivovat.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= M\dot{x} + ml\dot{\varphi}\cos\varphi + m\dot{x} \\
\frac{\partial L}{\partial x} &= 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= ml^2\dot{\varphi} + m\dot{x}l\cos\varphi \\
\frac{\partial L}{\partial \varphi} &= -m\dot{x}l\dot{\varphi}\sin\varphi - mgl\sin\varphi
\end{aligned}$$

Vztahy pro hledané dvě rovnice vypadají následovně:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} &= f \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= 0
\end{aligned}$$

, kde f je síla působící na vozík. Nyní můžeme dopočítat dvě rovnice modelu vozík-kyvadlo.

$$\begin{aligned}
M\dot{x} + ml\ddot{\varphi}\cos\varphi - ml\dot{\varphi}^2\sin\varphi + m\ddot{x} &= f \\
ml\left(l\ddot{\varphi} + \ddot{x}\cos\varphi - \dot{x}\sin\varphi + \dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi + g\sin\varphi\right) &= 0
\end{aligned}$$

thr Dále můžeme vyjádřit nejvyšší derivace:

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= \frac{-ml\ddot{\varphi}\cos\varphi + ml\dot{\varphi}^2\sin\varphi + f}{M+m} \\
\ddot{\varphi} &= \frac{\sin\varphi\left(\dot{x}\dot{\varphi} - \dot{\varphi} + g\right) + \ddot{x}\cos\varphi}{l}
\end{aligned}$$

Vidíme, že rovnice na sobě závisí. Můžeme je tedy navzájem dosadit.

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= \frac{lm\sin\varphi\dot{\varphi}^2 - \dot{x}m\cos\varphi\sin\varphi\dot{\varphi} + f + \dot{x}m\cos\varphi\sin\varphi - gm\cos\varphi\sin\varphi}{m\cos^2\varphi + M + m} \\
\ddot{\varphi} &= \frac{f\cos\varphi - \dot{x}m\sin\varphi + gm\sin\varphi - M\dot{x}\sin\varphi + Mg\sin\varphi + M\dot{\varphi}\dot{x}\sin\varphi + \dot{\varphi}\dot{x}m\sin\varphi}{l\left(m\cos^2\varphi + M + m\right)} \\
&\quad + \frac{\dot{\varphi}^2 lm\cos\varphi\sin\varphi}{l\left(m\cos^2\varphi + M + m\right)}
\end{aligned}$$

## 2.2 Stavový popis zjednodušeného modelu

Zavedeme si stavové proměnné

$$\begin{aligned}
x &= y_1 \\
\varphi &= y_2 \\
\dot{y}_1 = \dot{x} &= y_3 \\
\dot{y}_2 = \dot{\varphi} &= y_4 \\
f &= u
\end{aligned}$$

Stavový popis systému uvažujeme ve tvaru:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mathbf{A}\vec{x} + \mathbf{B}\vec{u} \\ y &= \mathbf{C}\vec{x}\end{aligned}$$

, kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \frac{\partial f_1}{\partial y_3} & \frac{\partial f_1}{\partial y_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \frac{\partial f_2}{\partial y_3} & \frac{\partial f_2}{\partial y_4} \\ \frac{\partial f_3}{\partial y_1} & \frac{\partial f_3}{\partial y_2} & \frac{\partial f_3}{\partial y_3} & \frac{\partial f_3}{\partial y_4} \\ \frac{\partial f_4}{\partial y_1} & \frac{\partial f_4}{\partial y_2} & \frac{\partial f_4}{\partial y_3} & \frac{\partial f_4}{\partial y_4} \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} \\ \frac{\partial f_4}{\partial u} \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dosadíme do rovnic a budeme moct derivovat.

$$\begin{aligned}
f_1 : \dot{y_1} =& y_3 \\
f_2 : \dot{y_2} =& y_4 \\
f_3 : \dot{y_3} =& \frac{lm\sin(y_2)y_4^2 - y_3 m\cos(y_2)\sin(y_2)y_4 + u + y_3 m\cos(y_2)\sin(y_2) - gm\cos(y_2)\sin(y_2)}{m\cos^2(y_2) + M + m} \\
f_4 : \dot{y_4} =& \frac{u\cos(y_2) - y_3 m\sin(y_2) + gm\sin(y_2) - My_3\sin(y_2) + Mg\sin(y_2) + My_4y_3\sin(y_2)}{l\left(m\cos^2(y_2) + M + m\right)} \\
&+ \frac{y_4y_3m\sin(y_2) + y_4^2 lm\cos(y_2)\sin(y_2)}{l\left(m\cos^2(y_2) + M + m\right)}
\end{aligned}$$

Po zderivování můžeme linearizovat. To chceme udělat okolo rovnovážného bodu, tj. $x = y_1 = 0$, $\varphi = y_2 = \pi$, $\dot{x} = y_3 = 0$ a $\dot{\varphi} = y_4 = 0$, takže tyto hodnoty do vypočítaných hodnot dosadíme a dostaneme tak matice:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{gm}{M+2m} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{mg+Mg}{l(M+2m)} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M+2m} \\ -\frac{1}{l(M+2m)} \end{bmatrix}$$

Výsledný stavový popis v okolí pracovního bodu $[\dot{x}, \dot{\varphi}, x, \varphi] = [0, 0, 0, 0]$ bude tedy vypadat:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{gm}{M+2m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mg+Mg}{l(M+2m)} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M+2m} \\ -\frac{1}{l(M+2m)} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

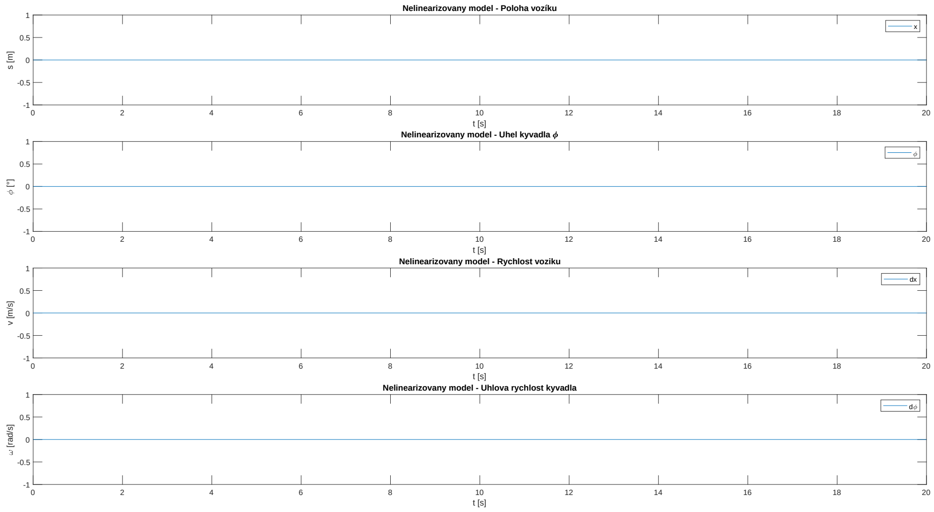
## 2.3 Dosazení konkrétních hodnot

Nyní si můžeme zvolit konkrétní hodnoty našeho modelu.

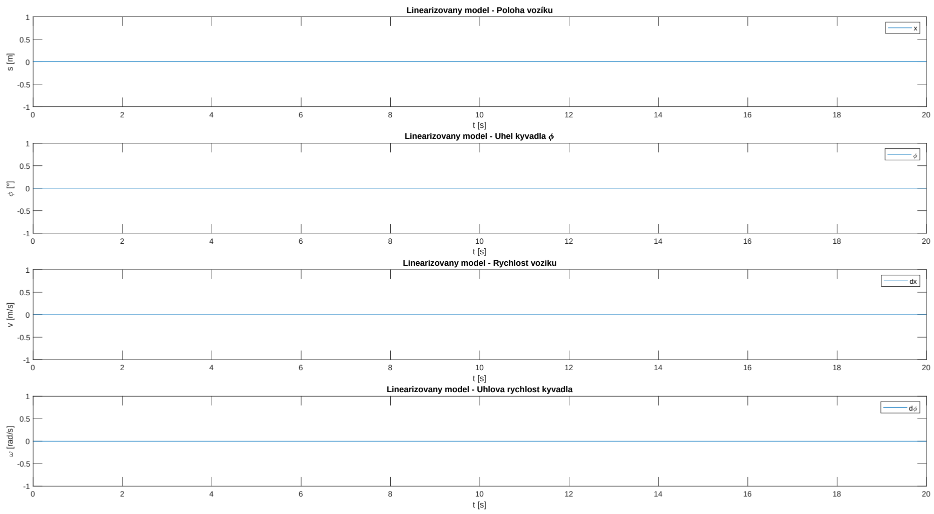
$$\begin{aligned} M &= 15\,\mathrm{kg} \\ m &= 5\,\mathrm{kg} \\ l &= 1\,\mathrm{m} \\ g &= 9.81\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^2 \end{aligned}$$

Působící sílu můžeme měnit, abychom mohli ověřit chování v různých situacích.

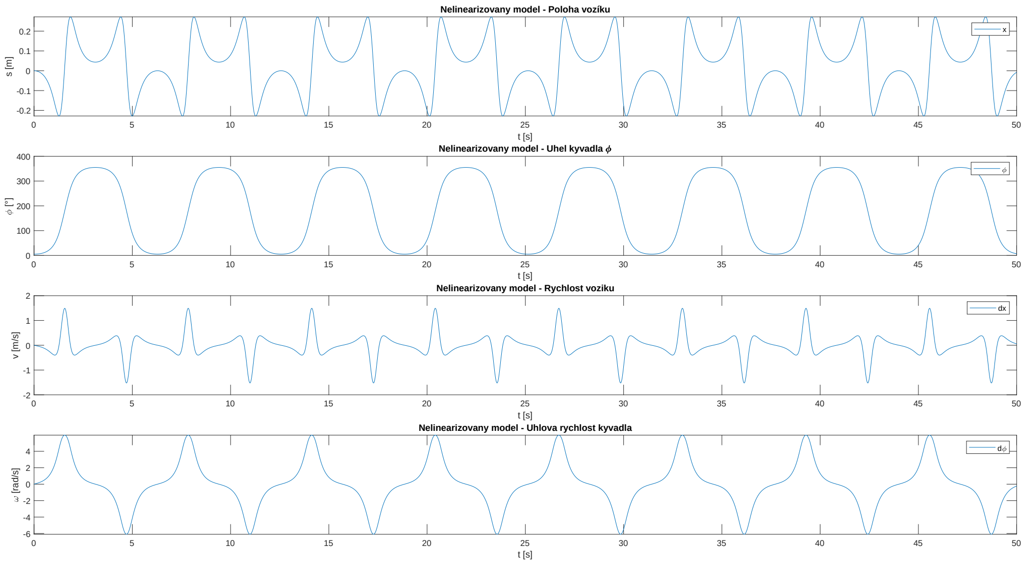
## 2.4 Grafy



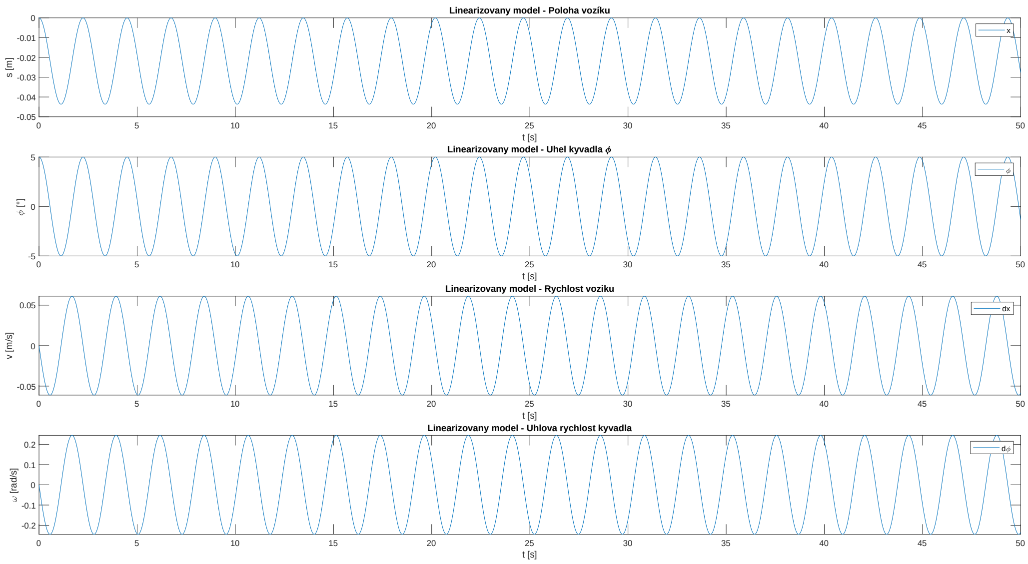

Obrázek 3: Nelineární model při $f = 0\,\mathrm{N}$ a nulových p.p.



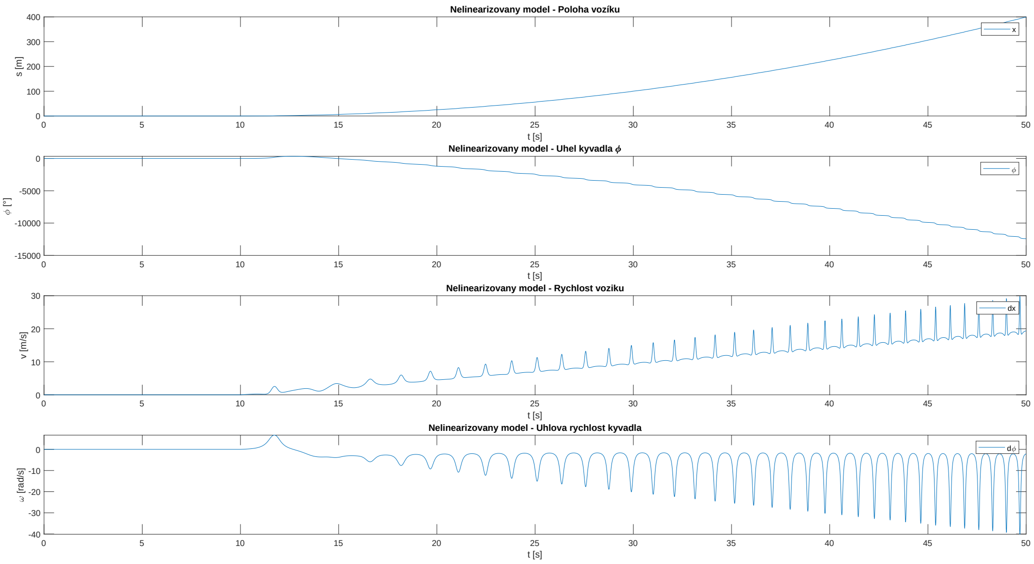

Obrázek 4: Lineární model při $f = 0\,\mathrm{N}$ a nulových p.p.



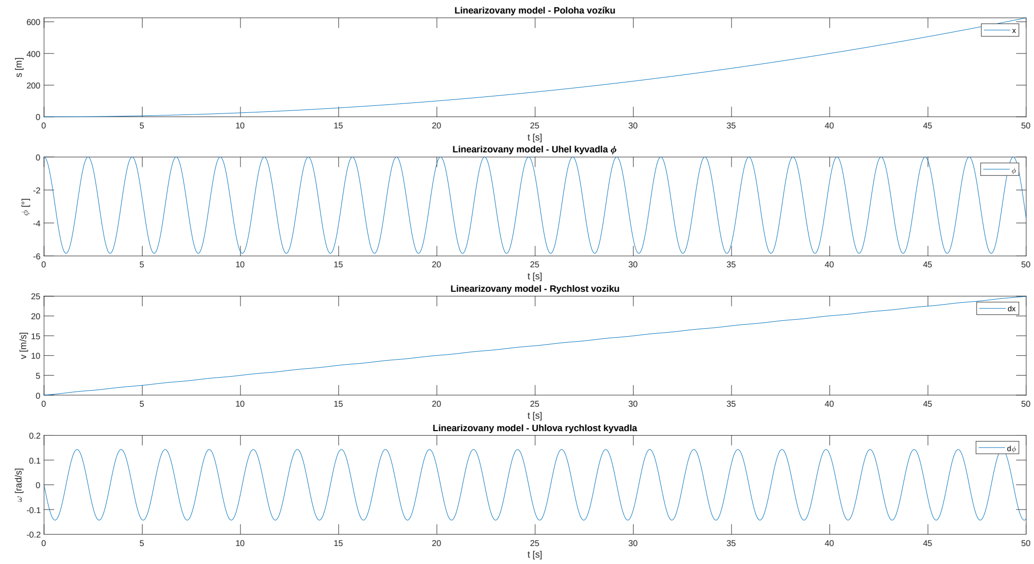

Obrázek 5: Nelineární model při $f = 0\,\mathrm{N}$ a p.p. $\varphi = 5°$



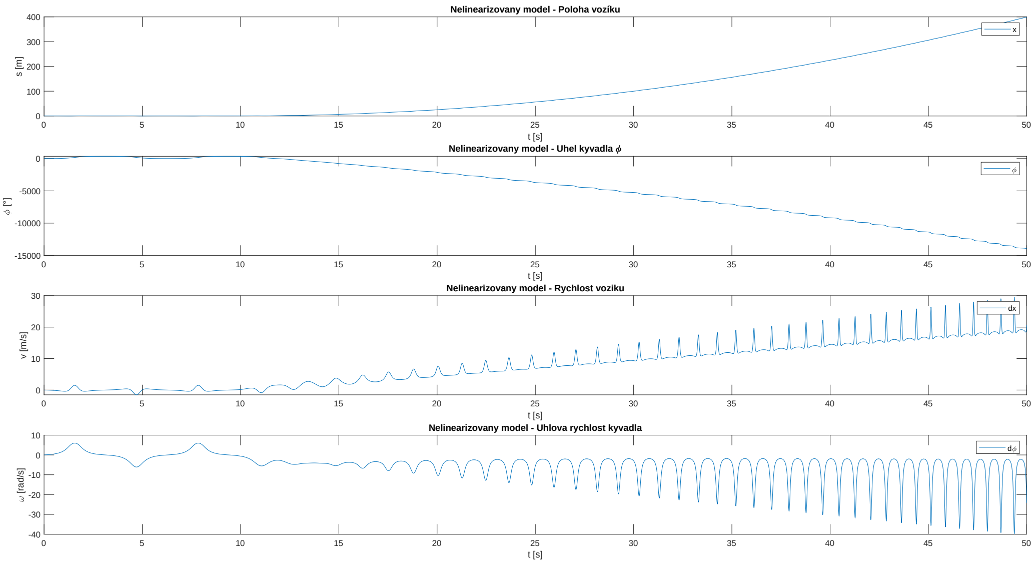

Obrázek 6: Lineární model při $f = 0\,\mathrm{N}$ a p.p. $\varphi = 5°$



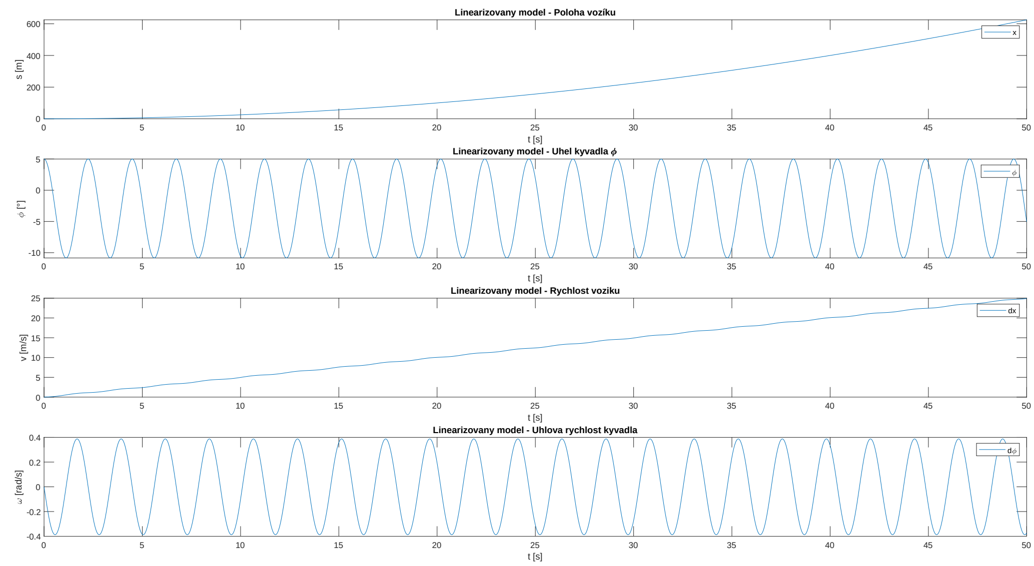

Obrázek 7: Nelineární model při $f = 10\,\mathrm{N}$ a nulových p.p.




Obrázek 8: Lineární model při $f = 10\,\mathrm{N}$ a nulových p.p.



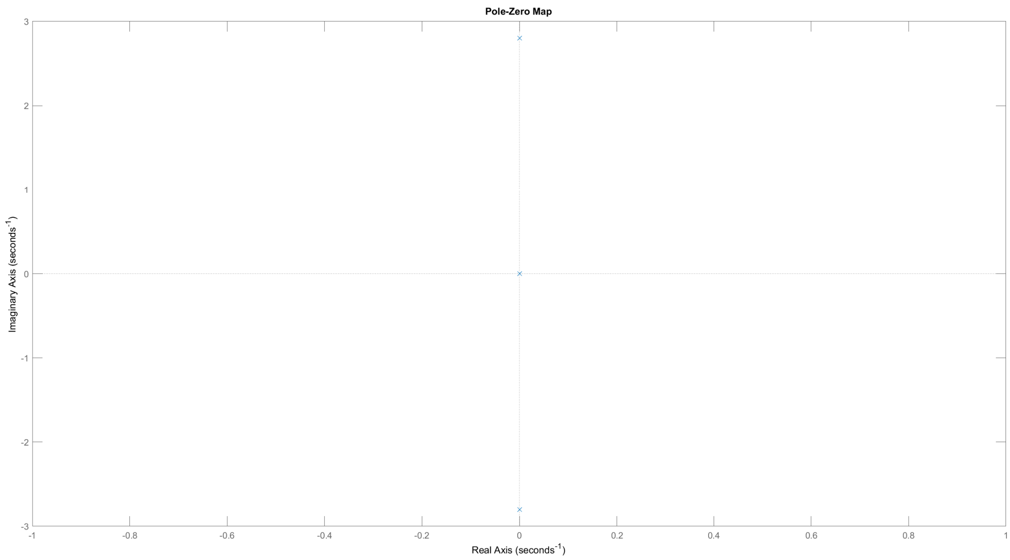

Obrázek 9: Nelineární model při $f = 10\,\mathrm{N}$ a p.p. $\varphi = 5°$




Obrázek 10: Lineární model při $f = 10\,\mathrm{N}$ a p.p. $\varphi = 5°$

# 3 Návrh regulátoru

Jako nejideálnější regulátor jsme zvolili regulátor stavový. Cílem bylo ustabilizovat systém, tzn. dostat póly systému na mezi stability (obr. 3) do záporné poloroviny a tím systém učinit stabilním.

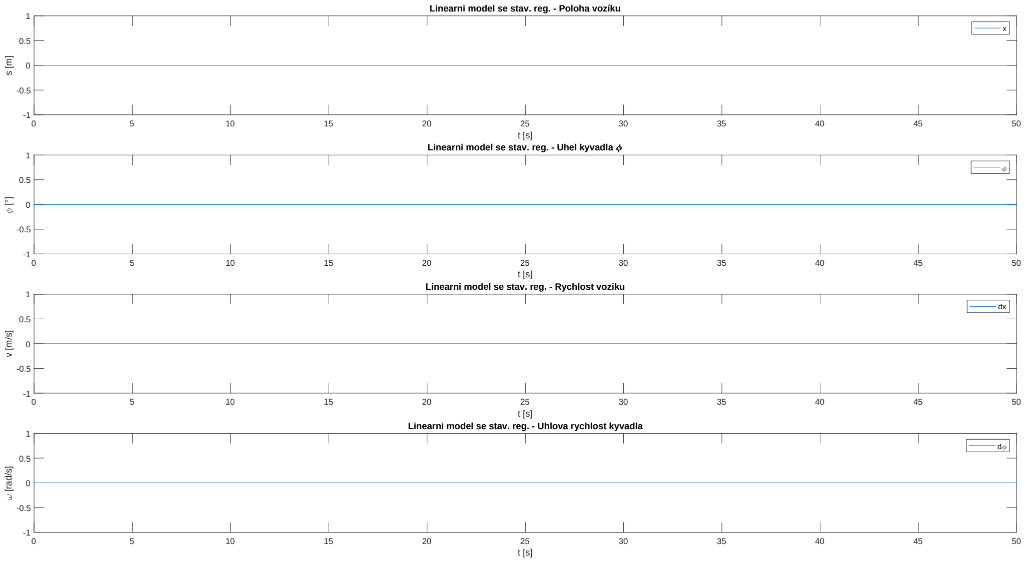



Obrázek 11: GMK systému na mezi stability

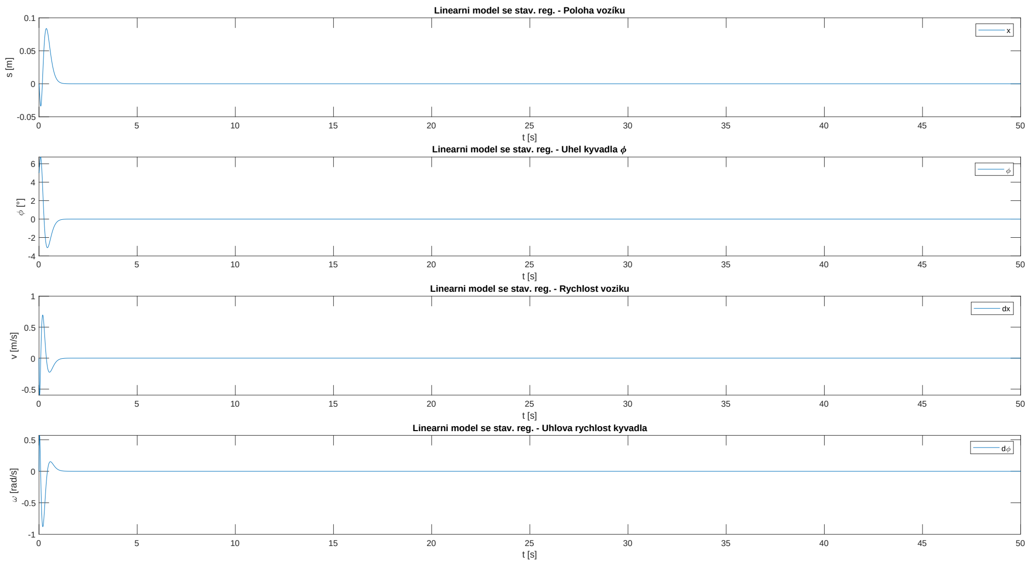
Nejprve je potřeba si zvolit požadované póly. V našem případě máme čtyři póly s nulovou reálnou částí (to způsobuje kmitání systému, který je díky tomu na mezi stability). Musíme tak zvolit póly, které mají zápornou reálnou část. Nyní můžeme vypočítat vektor zesílení $K$. Toho dosáhneme např. v Matlabu pomocí funkce `K = acker(A, B, p)`, kde `A` je matice systému, `B` je matice řízení a `p` je vektor požadovaných pólů. Po získání vektoru zesílení je možno vytvořit uzavřenou zpětnou vazbu systému ve stavovém popisu podle vzorce:

$$A_u = A - B * K$$
$$B_u = B$$
$$C_u = C$$
$$D_u = D$$

Můžeme tedy vyzkoušet, jak se bude nově vzniklý systém chovat při nulových počátečních podmínkách (obr. 3) a nenulových počátečních podmínkách (obr. 3).
Z obou obrázků je vidět, že systém je stabilní.




Obrázek 12: Lineární model se stav. reg. při p.p. $\varphi = 0°$




Obrázek 13: Lineární model se stav. reg. při p.p. $\varphi = 0°$