Projekt 5

A18B0474P - Jiří Švamberg

12. října 2020

FAKULTA
APLIKOVANÝCH VĚD
ZÁPADOČESKÉ
UNIVERZITY
V PLZNI

ZÁPADOČESKÁ
UNIVERZITA
V PLZNI

KATEDRA
KYBERNETIKY

Obsah

1 Zadání

1. Navrhněte zjednodušený model soustavy kvadrotorová helikoptéra - břemeno

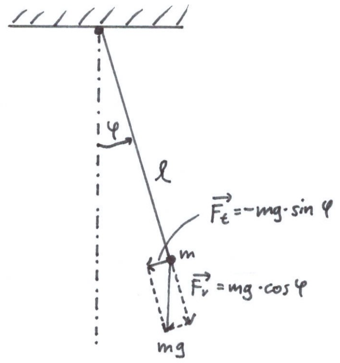
2. Pro zjednodušený model navrhněte regulátor

3. Implementujte regulátor do zjednodušeného modelu

2 Návrh zjednodušeného modelu

Zjednodušený model budeme navrhovat ve 2D jako kyvadlo zavěšené na vozíku. Pro potřeby návrhu tohoto modelu budeme uvažovat lano závěsu jako dokonale nepružné, o stálé délce l a nulové hmotnosti $m_l = 0\,\text{kg}$. Úhel vychýlení závěsu od osy vozíku označíme jako φ. Jako těleso si představíme bezrozměrný hmotný bod o hmotnosti m.
Pro jednoduché kyvadlo připevněné k nepohybujícímu se tělesu o kinetické energii $T = \frac{1}{2}mv^2$ a potenciální energii $V = -mgl\cos\varphi$ (obr. 1) platí pohybová rovnice:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$$



Obrázek 1: Schéma jednoduchého kyvadla

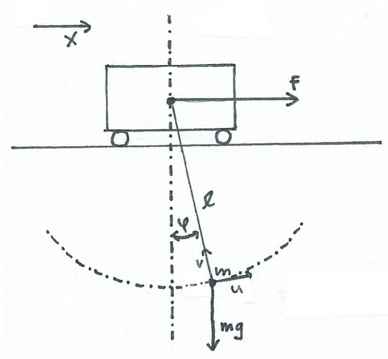
Po zavěšení jednoduchého kyvadla na vozík(obr. 2) budeme muset ještě do modelu přidat dynamiku vozíku o hmotnosti M. Na ten může působit síla ve směru osy x. Pro hmotný bod, zavěšený na laně budeme muset spočítat souřadnice $[u, v]$, jelikož při pohybu vozíku se nepohybuje po jasné trajektorii (kružnice, přímka):

$$u = x + l\sin\varphi \rightarrow \dot{u} = \dot{x} + l\dot{\varphi}\cos\varphi$$
$$v = l\cos\varphi \rightarrow \dot{v} = -l\dot{\varphi}\sin\varphi$$

K odvození modelu využijeme Lagrangeovu metodu.
Potenciální energii V budeme uvažovat stejnou, jako u jednoduchého kyvadla.

$$V = -mgl\cos\varphi$$

Jako základ pro vzorec kinetické energie použijeme vzorec kinetické energie obyčejného matematického kyvadla $T = \frac{1}{2}mv^2$. Musíme ale uvažovat rychlost ve směru všech souřadnic (x, u, v).



Obrázek 2: Schéma soustavy vozík-kyvadlo

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{u}^2 + \frac{1}{2}m\dot{v}^2$$

Po dosazení souřadnic pro hmotný bod zavěšený na laně dostaneme kinetickou energii ve tvaru:

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x} + l\dot{\varphi}\cos\varphi\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(-l\dot{\varphi}\sin\varphi\right)^2$$

Zjistíme si Lagrangián $L = T - V$:

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x} + \frac{1}{2}m\left(\dot{x} + l\dot{\varphi}\cos\varphi\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(l\dot{\varphi}\sin\varphi\right)^2 + mgl\cos\varphi$$

, který nyní budeme parciálně derivovat.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = M\dot{x} + m\dot{x} + ml\dot{\varphi}\cos\varphi$$
$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\dot{x}l\cos\varphi - ml^2\dot{\varphi}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -m\dot{x}l\dot{\varphi}\sin\varphi - l^2\dot{\varphi}^2\cos\varphi\sin\varphi + ml^2\dot{\varphi}^2\sin\varphi\cos\varphi - mgl\sin\varphi$$

Vztahy pro hledané dvě rovnice vypadají následovně:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = f$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

, kde f je síla působící na vozík. Nyní můžeme dopočítat dvě rovnice modelu vozík-kyvadlo.

$$(M+m)\,\ddot{x} + ml\ddot{\varphi}\cos\varphi - ml\dot{\varphi}^2\sin\varphi = f$$
$$\ddot{x}\cos\varphi + g\sin\varphi - l\ddot{\varphi} = 0$$