Projekt 5

A18B0474P - Jiří Švamberg

6. listopadu 2020

FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD ZÁPADOČESKÉ UNIVERZITY V PLZNI

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

KATEDRA KYBERNETIKY

Obsah

1 Zadání

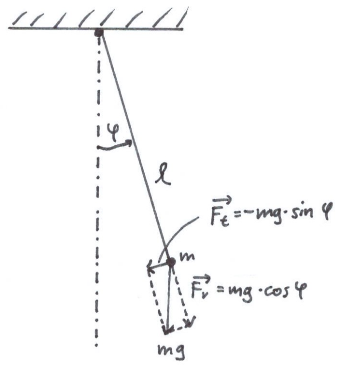
1. Navrhněte zjednodušený model soustavy kvadrotorová helikoptéra - břemeno
2. Pro zjednodušený model navrhněte regulátor
3. Implementujte regulátor do zjednodušeného modelu

2 Zjednodušený model

2.1 Návrh zjednodušeného modelu

Zjednodušený model budeme navrhovat ve 2D jako kyvadlo zavěšené na vozíku. Pro potřeby návrhu tohoto modelu budeme uvažovat lano závěsu jako dokonale nepružné, o stálé délce l a nulové hmotnosti $m_l = 0\,\mathrm{kg}$. Úhel vychýlení závěsu od osy vozíku označíme jako φ. Jako těleso si představíme bezrozměrný hmotný bod o hmotnosti m.
Pro jednoduché kyvadlo připevněné k nepohybujícímu se tělesu o kinetické energii $T = \frac{1}{2}mv^2$ a potenciální energii $V = -mgl\cos\varphi$ (obr. 1) platí pohybová rovnice:

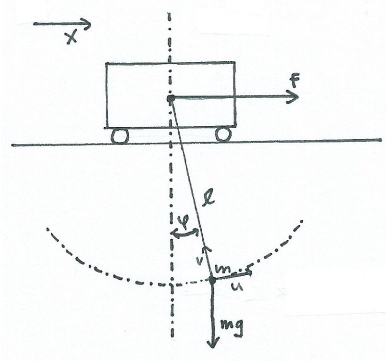
$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$$



Obrázek 1: Schéma jednoduchého kyvadla

Po zavěšení jednoduchého kyvadla na vozík(obr. 2) budeme muset ještě do modelu přidat dynamiku vozíku o hmotnosti M. Na ten může působit síla ve směru osy x. Pro hmotný bod, zavěšený na laně budeme muset spočítat souřadnice $[u, v]$, jelikož při pohybu vozíku se nepohybuje po jasné trajektorii (kružnice, přímka):

$$u = x + l\sin\varphi \to \dot{u} = \dot{x} + l\dot{\varphi}\cos\varphi$$
$$v = l\cos\varphi \to \dot{v} = -l\dot{\varphi}\sin\varphi$$



Obrázek 2: Schéma soustavy vozík-kyvadlo

K odvození modelu využijeme Lagrangeovu metodu.
Potenciální energii V budeme uvažovat stejnou, jako u jednoduchého kyvadla.

$$V = -mgl\cos\varphi$$

Jako základ pro vzorec kinetické energie použijeme vzorec kinetické energie obyčejného matematického kyvadla $T = \frac{1}{2}mv^2$. Musíme ale uvažovat rychlost ve směru všech souřadnic (x, u, v).

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{u}^2 + \frac{1}{2}m\dot{v}^2$$

Po dosazení souřadnic pro hmotný bod zavěšený na laně dostaneme kinetickou energii ve tvaru:

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x} + l\dot{\varphi}\cos\varphi\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(-l\dot{\varphi}\sin\varphi\right)^2$$

Zjistíme si Lagrangián $L = T - V$:

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x} + \frac{1}{2}m\left(\dot{x} + l\dot{\varphi}\cos\varphi\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(l\dot{\varphi}\sin\varphi\right)^2 + mgl\cos\varphi$$

, který nyní budeme parciálně derivovat.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= M\dot{x} + m\dot{x} + ml\dot{\varphi}\cos\varphi \\
\frac{\partial L}{\partial x} &= 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= m\dot{x}l\cos\varphi - ml^2\dot{\varphi} \\
\frac{\partial L}{\partial \varphi} &= -m\dot{x}l\dot{\varphi}\sin\varphi - l^2\dot{\varphi}^2\cos\varphi\sin\varphi + ml^2\dot{\varphi}^2\sin\varphi\cos\varphi - mgl\sin\varphi
\end{aligned}
$$

Vztahy pro hledané dvě rovnice vypadají následovně:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} &= f \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= 0
\end{aligned}
$$

, kde f je síla působící na vozík. Nyní můžeme dopočítat dvě rovnice modelu vozík-kyvadlo.

$$(M+m)\,\ddot{x} + ml\ddot{\varphi}\cos(\varphi) - ml\dot{\varphi}^2\sin(\varphi) = f \tag{1}$$

$$\ddot{x}\cos(\varphi) + g\sin(\varphi) - l\ddot{\varphi} = 0 \tag{2}$$

Dále můžeme vyjádřit nejvyšší derivace:

$$
\begin{aligned}
\ddot{x} &= \frac{-ml\ddot{\varphi}\cos(\varphi) + ml\dot{\varphi}^2\sin(\varphi) + f}{M+m} \\
\ddot{\varphi} &= \frac{\ddot{x}\cos(\varphi) + g\sin(\varphi)}{l}
\end{aligned}
$$

Vidíme, že rovnice na sobě závisí. Můžeme tedy jednu dosadit do druhé a opačně.

$$
\begin{aligned}
\ddot{x} &= \frac{-mg\sin(\varphi)\cos(\varphi) + m\dot{\varphi}^2\sin(\varphi) + u}{M + m + m\cos^2(\varphi)} \\
\ddot{\varphi} &= \frac{ml\dot{\varphi}^2\sin(\varphi)\cos(\varphi) + u\cos(\varphi) + mg\sin(\varphi)}{l\,(M + m + m\cos^2(\varphi))}
\end{aligned}
$$

2.2 Stavový popis systému

Zavedeme si stavové proměnné

$$
\begin{aligned}
x &= y_1 \\
\varphi &= y_2 \\
\dot{y_1} = \dot{x} &= y_3 \\
\dot{y_2} = \dot{\varphi} &= y_4 \\
f &= u
\end{aligned}
$$

Stavový popis systému uvažujeme ve tvaru:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \mathbf{A}\vec{x} + \mathbf{B}\vec{u} \\
y &= \mathbf{C}\vec{x}
\end{aligned}
$$

, kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \frac{\partial f_1}{\partial y_3} & \frac{\partial f_1}{\partial y_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \frac{\partial f_2}{\partial y_3} & \frac{\partial f_2}{\partial y_4} \\ \frac{\partial f_3}{\partial y_1} & \frac{\partial f_3}{\partial y_2} & \frac{\partial f_3}{\partial y_3} & \frac{\partial f_3}{\partial y_4} \\ \frac{\partial f_4}{\partial y_1} & \frac{\partial f_4}{\partial y_2} & \frac{\partial f_4}{\partial y_3} & \frac{\partial f_4}{\partial y_4} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} \\ \frac{\partial f_4}{\partial u} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dosadíme do rovnic a budeme moct derivovat.

$$f_1 : \dot{y_1} = y_3$$
$$f_2 : \dot{y_2} = y_4$$
$$f_3 : \dot{y_3} = \frac{-mg\sin(y_2)\cos(y_2) + my_4^2\sin(y_2) + u}{M + m + m\cos^2(y_2)}$$
$$f_4 : \dot{y_4} = \frac{mly_4^2\sin(y_2)\cos(y_2) + u\cos(y_2) + mg\sin(y_2) + Mg\sin(y_2)}{l\,(M + m + m\cos^2(y_2))}$$

Po zderivování dostaneme hodnoty:

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_1} = 0$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial y_2} = 0$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial y_3} = 1$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial y_4} = 0$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial y_1} = 0$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial y_2} = 0$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial y_3} = 0$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial y_4} = 1$$
$$\frac{\partial f_3}{\partial y_1} = 0$$
$$\frac{\partial f_3}{\partial y_2} = \frac{m\left(g - 2g\cos^2(y_2) + y_4^2\cos(y_2)\right)}{M + m + m\cos^2(y_2)} + \frac{2m\cos(y_2)\sin(y_2)\left(m\sin(y_2)y_4^2 + u - gm\cos(y_2)\sin(y_2)\right)}{\left(M + m + m\cos^2(y_2)\right)^2}$$
$$\frac{\partial f_3}{\partial y_3} = 0$$
$$\frac{\partial f_3}{\partial y_4} = \frac{2my_4\sin(y_2)}{M + m + m\cos^2(y_2)}$$
$$\frac{\partial f_4}{\partial y_1} = 0$$
$$\frac{\partial f_4}{\partial y_2} = \frac{2\left(lm\left(2\cos^2(y_2) - 1\right)y_4^2 - u\sin(y_2) + gm\cos(y_2) + gM\cos(y_2)\right)}{l\left(2M + 3m + m\left(2\cos^2(y_2) - 1\right)\right)} +$$
$$+ \frac{2m\cos(y_2)\sin(y_2)\left(lm\cos(y_2)\sin(y_2)y_4^2 + u\cos(y_2) + gm\sin(y_2) + gM\sin(y_2)\right)}{l\left(M + m + m\cos^2(y_2)\right)}$$
$$\frac{\partial f_4}{\partial y_3} = 0$$
$$\frac{\partial f_3}{\partial y_4} = \frac{2my_4\cos(y_2)\sin(y_2)}{M + m + m\cos^2(y_2)}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial u} = 0$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial u} = 0$$
$$\frac{\partial f_3}{\partial u} = \frac{1}{M + m + m\cos^2(y_2)}$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial u} = \frac{\cos(y_2)}{l\left(M + m + m\cos^2(y_2)\right)}$$

Linearizovat chceme okolo rovnovážného bodu, tj. $x = y_1 = 0$, $\varphi = y_2 = 0$, $\dot{x} = y_3 = 0$ a $\dot{\varphi} = y_4 = 0$, tak tyto hodnoty do vypočítaných hodnot dosadíme a dostaneme tak matice:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-gm}{M+2m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mg+Mg}{l(M+2m)} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M+2m} \\ \frac{1}{l(M+2m)} \end{bmatrix}$$

Výsledný stavový popis v okolí pracovního bodu $[\dot{x}, \dot{\varphi}, x, \varphi] = [0, 0, 0, 0]$ bude tedy vypadat:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-gm}{M+2m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mg+Mg}{l(M+2m)} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M+2m} \\ \frac{1}{l(M+2m)} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$