MATEMATIKA I - zimski izpitni rok, 19. februar 2015 Ime in Priimek: Vpisna številka:

1. Naj bo $g(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$.

   (a) Poišči definicijsko območje funkcije g. **(2t)**

   (b) Preveri sodost oz. lihost funkcije g. **(1t)**

   (c) Poišči predpis inverzne funkcije k funkciji g. **(2t)**

Rešitev:

(a) Upoštevamo pogoj, ki velja pri logaritmih:

$$\begin{aligned} \frac{1-x}{1+x} &> 0 \qquad \backslash \cdot (1+x)^2 \\ (1-x)(1+x) &> 0 \end{aligned}$$

Kvadratno neenačbo rešimo grafično, od koder preberemo definicijsko območje: $x \in (-1, 1)$

(b) Funkcija g je liha, saj je

$$g(-x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1} = -\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -g(x)$$

(c) Vpeljemo y in zamenjamo vlogo x in y, nato pa eksplicitno izrazimo y.

$$\begin{aligned} x &= \ln\left(\tfrac{1-y}{1+y}\right) \\ e^x &= \tfrac{1-y}{1+y} \\ e^x + ye^x &= 1-y \\ ye^x + y &= 1-e^x \\ y\left(e^x+1\right) &= 1-e^x \end{aligned}$$

Dobimo, da je $g^{-1}(x) = \dfrac{1-e^x}{1+e^x}$

2. (a) Poišči enačbo normale na graf funkcije $y = \dfrac{\sin(2x+\pi)}{\cos(3x-\pi)}$ v točki $T(\pi, y)$. **(2t)**

Rešitev: Točka, v kateri iščemo normalo je $T(\pi, 0)$. Smerni koeficient normale bomo izračunali iz odvoda, ki je

$$y' = \frac{2\cos(2x+\pi)\cos(3x-\pi) + 3\sin(2x+\pi)\sin(3x-\pi)}{\cos^2(3x-\pi)}$$

Potem je

$$k_t = y'(\pi) = \frac{2\cdot(-1)\cdot 1 + 0}{1^2} = -2 \quad \text{in zato} \quad k_n = -\frac{1}{k_t} = \frac{1}{2}$$

Enačba premice ima predpis $y = kx + n$. Iz točke T izračunamo $n = -\frac{\pi}{2}$, zato se enačba normale glasi

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2}.$$

(b) Izračunaj $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{x}}$ **(2t)**

Rešitev: Imamo nedoločnost oblike ∞^0, zato uporabimo različico L'Hospitalovega izreka:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln(x^2-1)}$$

Izračunajmo limito nastalo limito:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x^2-1)}{x} &=^{\frac{\infty}{\infty}} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2-1}\cdot 2x}{1} \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x^2-1} \\ &=^{\frac{\infty}{\infty}} \lim_{x\to\infty}\frac{2}{2x} = 0 \end{aligned}$$

Potem pa je

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln(x^2-1)} = e^0 = 1$$

3. (a) Določi definicijsko območje in ničle, preuči dogajanje na robu definicijskega območja, poišči ekstreme in prevoje, nato pa skiciraj graf funkcije $f(x) = x^2e^{1-x}$. **(4t)**

Rešitev:

- $D_f : x \in R$
- ničle: $x = 0$
- rob definicijskega območja:

$$\lim_{x\to\infty} x^2e^{1-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{x-1}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^{x-1}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^{x-1}} = +0$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^2e^{1-x} \stackrel{\infty\cdot\infty}{=} \infty$$

- Iz odvoda $f'(x) = e^{1-x}(2x-x^2)$ dobimo dve stacionarni točki $T_1(0,0)$ in $T_2(2,4e^{-1})$. Iz drugega odvoda

$$f''(x) = e^{1-x}(2-4x+x^2)$$

dobimo, da je $f''(0) = 2e > 0$ in $f''(2) = -2e^{-1} < 0$, zato je v T_1 lokalni minimum in v T_2 lokalni maksimum.

(b) Izračunaj $\int f(x)\ dx$. **(2t)**

Rešitev: Integral najdemo v priročniku, če pišemo $e^{1-x} = e\cdot e^{-x}$. Potem pa je

$$\begin{aligned}
\int x^2e^{1-x}\ dx &= \int x^2\cdot e\cdot e^{-x}\ dx \\
&= e\int x^2e^{-x}\ dx \\
&= e\cdot e^{-x}\left(\tfrac{x^2}{-1} - \tfrac{2x}{1} + \tfrac{2}{-1}\right) + C \\
&= e^{1-x}(-x^2-2x-2) + C
\end{aligned}$$

Če se tega ne spomnimo, lahko zadevo razrešimo tudi z zaporedno uporabo metode per-partes.

4. (a) Izračunaj ploščino lika, ki ga oklepata parabola $y = 2x - x^2$ in premica $x + y = 2$ z abscisno osjo. **(3t)**

Rešitev: Narišemo skico in vidimo, da je potrebno izračunati ploščino „trikotnika", ki nastane med parabolo, premico in x osjo. Računanje ploščine bomo razdelili na dva dela, zato najprej potrebujemo presečišče parabole in premice:

$$2x - x^2 = 2 - x \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = 2 \text{ in } x_2 = 1$$

Potem pa je ploščina lika

$$S = S_1 + S_2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$$

Pri tem je

$$S_1 = \int_0^1 (2x - x^2)\ dx = x^2 - \frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$S_2 = \int_1^2 (2 - x)\ dx = 2x - \frac{x^2}{2}\bigg|_1^2 = \frac{1}{2}$$

(b) Izračunaj prostornino vrtenine, ki nastane, ko zavrtimo za 360° okoli osi x lik, omejen z osjo x in krivuljo $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ med ničlo in maksimumom v točki $T(e^2, 2e^{-1})$. **(2t)**

Rešitev: Ničlo izračunamo iz $\ln x = 0$ in dobimo za spodnjo mejo $x = 1$. Potem pa je

$$V = \pi\int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^2}{x}\ dx = \pi\int_0^2 t^2\ dt = \pi\ \frac{t^3}{3}\bigg|_0^2 = \frac{8\pi}{3}$$

Pri tem smo vpeljali novo spremenljivko

$$\begin{aligned}
t &= \ln x \\
dt &= \tfrac{1}{x}\ dx
\end{aligned}$$