

PONOVITEV: Reševanje enačb in neenačb

1. Poišči rešitve kvadratnih enačb.

(a) $(x - 5)^2 = 1$

(b) $4x(x + 5) - (3x - 5)(3x + 5) = 54 - (2x - 7)^2$

2. Izberi koeficient k oz n tako, da bo podana premica tangenta parabole. Poišči to dotikališče.

(a) $y = kx + 12, y = -2x^2 - x + 10$

(b) $y = x + n, y = -x^2 + 5x - 6$

3. Stranice trikotnika merijo 3 cm, 5 cm in 7 cm. Če vsako od stranic povečamo za isto vrednost, dobimo pravokotni trikotnik. Izračunaj stranice tega pravokotnika.

4. Delavci so za opravljeno delo zaslužili skupaj 4000 EUR. Zaslužek so si hoteli razdeliti tako, da bi vsak od njih dobil enako. Vendar se je eden od delavcev odpovedal zaslužku, zato je vsak od ostalih delavcev zaslužil 200 EUR več kot bi sicer. Koliko je bilo vseh delavcev, in koliko je vsak zaslužil?

5. Poišči rešitve kvadratnih neenačb.

(a) $(3x - 1)^2 - (x^2 + 2) \leq 2x - 3$

(b) $2x^2 - x - 2 > 3x^2 + 1$

6. Poišči rešitve sistemov neenačb.

(a) $x^2 - 11x + 24 < 0$ in $-x^2 + 5x + 14 > 0$

(b) $x(x - 4) \leq 5$ in $4 - 2x > 0$ in $x \geq 0$

7. Poišči rešitve racionalnih enačb.

(a) $x - \frac{x+10}{x+3} = 2$

(b) $\frac{x+4}{x-4} + \frac{x-4}{x+4} = \frac{64}{x^2-16}$

8. Poišči rešitve racionalnih neenačb.

(a) $\frac{x-3}{x^2+x-2} \leq 0$

(b) $\frac{x^2-6x-7}{x^2+2x-8} > 0$

9. Poišči rešitve eksponentnih enačb.

(a) $9^x = \frac{\sqrt{3}}{27}$

(b) $9^{-3x} = \left(\frac{1}{27}\right)^{x+3}$

(c) $3 \cdot 36^{x-3} = 3$

(d) $2^{x^2-7x+12} = 1$

(e) $4^{x+1} + 4^x = 320$

(f) $2 \cdot 3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-2} = 450$

10. Poišči rešitve logaritmskih enačb.

(a) $\log_3(2x + 5) = 1$

(b) $\ln(x + 1) = 0$

(c) $\log_x 64 = 3$

(d) $\log(x - \frac{8}{9}) = 2 \log \frac{1}{6}$

(e) $\log x + \log(x + 3) = \log(x - 1) + \log(x + 2)$

(f) $\ln 2 + 2 \ln(x + 1) = \ln(2x^2 + 4x + 2)$

1. sklop nalog: IZJAVE IN MNOŽICE

1. Ob pomoči pravilnostnih tabel ugotovi, kdaj so sestavljene izjave pravilne in kdaj nepravilne.

- (a) $A \wedge \neg B$
- (b) $\neg(\neg A \vee B)$
- (c) $A \Rightarrow (A \wedge B)$
- (d) $(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A$
- (e) $(A \wedge B) \Rightarrow (B \wedge C)$

2. Dane so množice

$$\begin{aligned} A &= \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge 2 \leq n < 10\} \\ B &= \{2n - 1 \mid n \in \mathbb{N} \wedge 3 \leq n \leq 8\} \\ C &= \{3n \mid n \in \mathbb{N} \wedge 5n - 1 \leq 34\} \end{aligned}$$

- (a) Zapiši elemente množic A , B in C .
- (b) Zapiši še elemente množic $B \cap C$, $C \setminus A$ in $(A \cup C) \setminus B$.

3. Določi množice $(A \cup B) \cap (A \cup C)$, $(A \cap B) \cap C$ in $(A \cup C) \setminus B$, če so

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\} \\ B &= \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 5\} \\ C &= \{x \in \mathbb{R} \mid 4 \leq x \leq 10\} \end{aligned}$$

4. Naj bo univerzalna množica $U = \mathbb{R}$ in naj bosta

$$\begin{aligned} A &= \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x+1}{x-5} < 3\right\} \\ B &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 5x^2 > 0 \vee x - 1 \leq 0\} \end{aligned}$$

Določi A^C , B^C , $(A \cap B)^C$ in $(A \setminus B)^C$.

2. sklop nalog: MATEMATIČNA INDUKCIJA

1. S pomočjo matematične indukcije dokaži, da za vsako naravno število n veljajo naslednje trditve.
 - (a) $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
 - (b) $1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + n \cdot 2^n = (2n - 2) \cdot 2^n + 2$
 - (c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n}$
 - (d) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$
 - (e) $2 \mid 3^{n+1} - 1$
 - (f) $4 \mid 3^{n+1} - 2n^2 + 13$
 - (g) $8 \mid 3^{2n+2} - 8n - 9$
2. S pomočjo matematične indukcije dokaži, da je vsota kubov treh zaporednih naravnih števil deljiva z 9.
3. Dokaži, da je produkt poljubnih treh zaporednih naravnih števil deljiv s 6.
4. Ali velja, da je število $(3^n + 2 \cdot 5^{n+1} + 1)$ deljivo s 6 za vsako naravno število n .

3. sklop nalog: ABSOLUTNA VREDNOST

1. Izračunaj absolutne vrednosti števil

$$|(-2) \cdot 3| \quad , \quad \left| -\frac{3}{4} \right| \quad , \quad \left| 1 - \frac{8}{5} \right| \quad , \quad \left| \frac{1}{2} - \frac{5}{3} \right| \quad , \quad |3 - \pi|$$

2. Obravnavaj funkcije in nariši njihove grafe

(a) $f(x) = 2x - 1 + |x - 2|$

(b) $f(x) = \frac{|x|+1}{x+1} + |x|$

3. Reši enačbe.

(a) $|-x + 3| = 7$

(b) $|2 - x| = |x + 5|$

(c) $||x| - 2| = \frac{1}{2}x + 1$

(d) $x^2 + |x| - 1 = |2x - 3|$

(e) $|x^2 - 4| = 3x$

4. Reši neenačbe.

(a) $|2x + 3| < 4$

(b) $1 \leq |x + 3| \leq 2$

(c) $|2 - x| \leq 2 + |2x + 1|$

(d) $|x + 2| - |2x - 6| - 3 < 1 - |x|$

(e) $|x^2 + 2x - 3| > 3$

4. sklop nalog: KOMPLEKSNA ŠTEVILA

1. Dana so kompleksna števila $z_1 = 1 + 2i$ in $z_2 = -2 + 5i$. Izračunaj in v kompleksni ravnini nariši kompleksna števila

- (a) $z_1 - z_2$
- (b) $z_1 z_2 + z_2$

2. Izračunaj.

- (a) $i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5$
- (b) $2i \cdot 5i + 3i \cdot 2i^2 + 7i \cdot 8i^3 + 3i^2 \cdot 2i^3 + 2i^3 \cdot 4i^3$
- (c) $(\sqrt{3} + i\sqrt{2})(\sqrt{3} - i\sqrt{2}) + (1 - 3i)^2$

3. V kompleksni ravnini nariši množico kompleksnih števil z , ki ustrezajo pogoju

- (a) $Re(z) = 3$
- (e) $|z| \leq 2 \wedge Im(z) > -1$
- (i) $|z + 2i| \geq 2$
- (b) $Re(z) \geq 4 \wedge Im(z) \leq 1$
- (f) $2 \leq |z| < 4 \wedge Im(z) \leq 1$
- (j) $z\bar{z} = 4$
- (c) $-1 \leq Re(z) < 2$
- (g) $|z - 2| < 4$
- (k) $|z - i| \leq 1 \wedge |z - 1| \leq 1$
- (d) $Re(z) + Im(z) = 0$
- (h) $|z + 2 - 3i| > 2$

4. Določi realni in imaginarni del kompleksnega števila.

- (a) $\frac{5}{2i} + \frac{10i}{1 + 3i}$
- (b) $\frac{2}{1 - i} - \frac{3 + i}{(2 - i)^2}$

5. Določi kompleksno število z , za katerega je

- (a) $\bar{z} + 3z - 5 = 3i(4 - i)$
- (b) $\bar{z} + \overline{(3 - i)}(1 + i^{147}) = 2(1 - z) + |3 - 4i|$
- (c) $\frac{z + \bar{z}}{2} + \frac{z - \bar{z}}{2} \cdot i = i^4 + 8i - (z + \bar{z}) \cdot (z - \bar{z})$

6. Kompleksna števila izrazi v polarni obliki in izračunaj njun produkt.

- (a) $z = 1 + i\sqrt{3}$
- (b) $w = 4 - 4i$

7. Izračunaj.

- (a) $(\sqrt{3} - i)^{12}$
- (b) $(-1 + i)^{100}$
- (c) $(-3 - i\sqrt{3})^{2020}$

8. Reši kompleksne enačbe.

- (a) $z^2 = 1 + \sqrt{3}i$
- (b) $z^3 = i\sqrt{27}$
- (c) $z^3 + 1 - i = 0$

9. Kompleksna števila, ki zadoščajo enačbi $z^3 = -3i + i^{2020} + \sqrt{3} + (2i + i^{2020})\overline{(1 - 2i)}$, zapiši v polarni obliki.

5. sklop nalog: OSNOVNE LASTNOSTI FUNKCIJ

1. Izračunaj vrednost funkcije za dano neodvisno spremenljivko x .
 - (a) $f(x) = 5x - 1$ za $x = -2$
 - (b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$ za $x = 4$
2. Za katere vrednosti neodvisne spremenljivke x imajo funkcije podano vrednost?
 - (a) $f(x) = -3x + 4$ vrednost -2
 - (b) $f(x) = x^2 - 3$ vrednost 1
3. Dana je funkcija $f(x) = \sqrt{2-x} + x^2$.
 - (a) Izračunaj vrednosti $f(0), f(1), f(-2)$ in $f(3)$.
 - (b) Določi $f(-x)$ in $f(x+2)$.
4. Preveri ali so naslednje realne funkcije bijektivne. Če niso, jim spremeni domeno, kodomeno ali oboje hkrati, da bodo postale bijektivne.
 - (a) $f(x) = x^3$
 - (b) $f(x) = |x|$
 - (c) $f(x) = e^x$
 - (d) $f(x) = x^3 - x$
 - (e) $f(x) = \cos x$
5. Določi definicijsko območje naslednjim funkcijam.
 - (a) $f(x) = \sqrt{x+4}$
 - (b) $f(x) = \frac{2x}{x^2-4}$
 - (c) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x-2}}$
 - (d) $f(x) = \sqrt{16-x^2}$
 - (e) $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{3-x} + e^{\frac{1}{x}}$
 - (f) $f(x) = \ln \frac{2+x}{2-x}$
 - (g) $f(x) = \sqrt{\ln \frac{5x-x^2}{4}}$
6. Določi kompozitum realnih funkcij f in g , s predpisom
 - (a) $f(x) = x^2$ in $g(x) = x + 1$
 - (b) $f(x) = \sqrt{x} + 7$ in $g(x) = x + x^2$
 - (c) $f(x) = e^x$ in $g(x) = -\frac{1}{x^2}$
 - (d) $f(x) = \cos x + 1$ in $g(x) = x^2 + 5x + 2$
7. K danim funkcijam poišči njihove inverze.
 - (a) $f(x) = \frac{x-1}{3-x}$
 - (b) $f(x) = 1 + 2 \ln(3x - 6)$
 - (c) $f(x) = e^{3x} - 7$
 - (d) $f(x) = x^2 - 2x + 5$ na intervalu $(-\infty, 1]$
8. Ugotovi sodost oziroma lihost danih funkcij.
 - (a) $f(x) = 3x - x^3$
 - (b) $f(x) = (1-x)^{\frac{2}{3}} + (1+x)^{\frac{2}{3}}$
 - (c) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$
 - (d) $f(x) = -x^2 - 2|x| + 1$
 - (e) $f(x) = \ln(2-x)$
 - (f) $f(x) = \log \frac{1-x}{1+x}$

6. sklop nalog: PREGLED ELEMENTARNIH FUNKCIJ

1. Eno od ničel polinoma $p(x) = x^3 + 9x^2 + 15x - 25$ uganite, nato pa poiščite še preostale.
2. Določi vrednost parametra m tako, da bo $p(x) = x^3 - mx^2 + 3x + 7m$ deljiv s $q(x) = x + 2$.
3. Skiciraj grafe polinomov.
 - (a) $p(x) = -2(x - 1)^2(x + 1)$
 - (b) $p(x) = x^5 - 4x^3 + 4x$
4. Določi presečišča grafa polinoma $p(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ in premice $y = x - 4$. V ravnini označi množico točk, ki ustreza pogoju $p(x) > y > x - 4$.
5. Skiciraj grafe racionalnih funkcij.
 - (a) $f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 3}{x^2 - 4}$
 - (b) $f(x) = \frac{x(x - 2)^2}{x^2 + 1}$
6. Poišči vsa realna števila x , za katera velja $\sqrt{4x + 10} < 2x + 1$.
7. Reši enačbo.
 - (a) $a^{1-x} \cdot \sqrt[3]{a^{x+1}} \cdot \sqrt[5]{a^{1-3x}} = 1$
8. Poišči vsa realna števila x , za katera velja
 - (a) $\frac{1}{25^{3-x}} - 625^{1-2x} < 0$
 - (b) $(0, 1)^{2x-3} \leq (0, 1)^{4x^2-2x-3}$
9. Reši enačbo.
 - (a) $\frac{1}{5-\log_2 x} + \frac{2}{1+\log_2 x} = 1$
 - (b) $\log_{\frac{1}{2}} \left(\log_8 \frac{x^2-2x}{x-3} \right) = 0$
 - (c) $\log_2 (9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2 (3^{x-1} + 1)$
10. Reši neenačbo.
 - (a) $\log_8 (x^2 - 4x + 3) < 1$
 - (b) $\log(x + 1) - \log(x - 2) > 1$
11. Dana je realna funkcija s predpisom $f(x) = \log_3(x + 1) - 1$.
 - (a) Koliko je vrednost te funkcije za $x = 80$ in koliko za $x = \sqrt[4]{27} - 1$?
 - (b) Za katero število x ima ta funkcija vrednost 2?
 - (c) Za katera števila x ima ta funkcija vrednost manjše ali enako 1?
12. Poenostavi izraze.
 - (a) $\frac{\cos x - \cos^3 x}{\sin 2x}$
 - (b) $\frac{2 \sin^2 x + \sin 2x}{2 \cos^2 x + \sin 2x}$
 - (c) $\tan x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\tan x}{1 + \cot^2 x}$
13. Reši trigonometrične enačbe.
 - (a) $\cos \frac{3x}{5} = 0$

(b) $\sin \frac{x}{4} = 1$

(c) $\tan \frac{x-2}{5} = 1$

(d) $\sin \left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{9} \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

14. Reši trigonometrične neenačbe.

(a) $\sin 4x > 0$

(b) $\cos(2x + \frac{\pi}{3}) < 0$

7. sklop nalog: LIMITA IN ZVEZNOST REALNE FUNKCIJE

1. Izračunaj.

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 3x + 5)$

(b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

2. Najprej izraz razstavi, nato izračunaj.

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4x}{x^3 - 5x^2 + 2x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{-4x^2 + 5x - 1}$

3. Izračunaj, pomagaj si z razliko kvadratov.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1 + 2x} - 1}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{3x + 1} - 4}{\sqrt{x - 1} - 2}$

4. Izračunaj.

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 1}$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 4}{x^2 + 2}$

(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x}$

5. S pomočjo znanih formul izračunaj naslednje limite.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{3x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 3}{x + 2}\right)^{3x}$

(d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x + 3}{2x + 2}\right)^{x+1}$

6. Preuči zveznost naslednjih funkcij.

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; \quad x < -1 \\ 2^x & ; \quad x \geq -1 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} -x & ; \quad x < 0 \\ x^2 - 1 & ; \quad x \geq 0 \end{cases}$

7. Dokaži zveznost funkcije

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ; \quad x \leq 0 \\ e^x - 1 & ; \quad x > 0 \end{cases}$$

8. Določi točke nezveznosti

$$f(x) = \begin{cases} e^x & ; \quad x \leq 0 \\ x - 1 & ; \quad 0 < x \leq 1 \\ \ln x & ; \quad x > 1 \end{cases}$$

8. sklop nalog: TEHNIKA ODVAJANJA

1. Odvajaj funkcije.

(a) $y = 5x$

(b) $y = \sqrt{3}x + \sqrt{5}$

(c) $y = -2x^5 + 2x^4 + x^3 + x$

(d) $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$

(e) $y = \frac{x+1}{x}$

(f) $y = \frac{x^2-x}{3x-1}$

(g) $y = x\sqrt{x}$

(h) $y = \frac{1}{x^3-\sqrt{2}x}$

(i) $y = (1+2x)^4$

(j) $y = (x + \frac{1}{x})^5$

(k) $y = (3x^4 - 2)(2x + x^3)^2$

(l) $y = \frac{x+2}{(1-x)^3}$

2. Odvajaj trigonometrične funkcije.

(a) $y = 3 \sin x + 2 \cos x - 2$

(b) $y = x \sin x$

(c) $y = 2 \sin(6x)$

(d) $y = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x$

(e) $y = (3x^2 + 2) \cos x$

(f) $y = 5 \cos^2(7x)$

(g) $y = \sin x \cos^3 x - \sin^3 x \cos x$

(h) $y = \sqrt[4]{1 + \cos^2 x}$

(i) $y = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$

(j) $y = \frac{\tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 x}$

3. Odvod logaritemske funkcije.

(a) $y = \frac{\ln x}{x-1}$

(b) $y = \ln(\tan \frac{2}{x})$

(c) $y = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9}$

(d) $y = \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln(\cos x)$

(e) $y = \ln(\tan \frac{x}{2}) + \frac{\cos x}{\sin^2 x}$

(f) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

(g) $y = \ln(\cos(x^2 + 4x))$

4. Odvod eksponentne funkcije.

(a) $y = e^{4x}$

(b) $y = e^{-3x}$

(c) $y = e^x \sin x$

(d) $y = \frac{1+e^x}{1-e^x}$

(e) $y = e^{\sin^2 x}$

(f) $y = \tan^2 x + 2^{3x}$

5. Implicitno odvajaj funkcije.

(a) $x^2 + y^2 - 25 = 0$

(b) $\sin x - \sin(2y - x) = 0$

(c) $y \sin x + x^2 y^2 + a \cos y + b = 0$

6. Izračunaj odvod v točki $T(x > 0, -3)$ za funkcijo $3x^2 + 4y^2 = 48$.

7. Izračunaj odvod v točki $T(3, y > 0)$ za funkcijo $x^2 y - xy^2 + 12 = 0$.

8. Izračunaj odvod v točki $T(x, \frac{\pi}{2})$ krivulje $x^2 \sin y - \cos y + \cos 2y = 0$.

9. Izračunaj $y'(1)$ za funkcijo $x \ln y - y \ln x = 1$.

10. Izračunaj drugi odvod funkcij.

(a) $y = \ln \sqrt{\frac{x-1}{x}}$

(b) $y = x\sqrt{x^2 - 1}$

11. Izračunaj tretji odvod funkcij.

(a) $y = \cos^2 x$

(b) $y = x^2 \ln x$

12. Izračunaj vse odvode funkcije $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + x - 1$.

9. sklop nalog: UPORABA ODVODA

Geometrijski pomen odvoda

1. Določi enačbi tangent na graf funkcije $y = -x^2 + 4x - 3$ v točkah $T_1(0, -3)$ in $T_2(3, 0)$.
2. Določi enačbi tangent na parabolo $y = 4 - x^2$ v presečiščih z osjo x .
3. Poišči enačbo tangente in normale na krivuljo $y = \frac{1+3x^2}{3+x^2}$ v točki $T(1, y)$.
4. Poišči enačbo normale na graf funkcije $y = x^2 - 4x + 4$ v presečiščih s simetralo lihih kvadrantov.
5. Zapiši enačbi tangente in normale na graf funkcije $f(x) = \ln(4 - \sqrt{x^2 + 5})$ v točki z absciso $x = 2$.
6. Zapiši enačbo tangente na graf funkcije $y = 1 - e^{\frac{x}{2}}$ v njenem presečišču z osjo y .
7. V katerih točkah je tangenta na krivuljo $y = x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ vzporedna premici $y = -x + 1$? Določi enačbe tangent.
8. V katerih točkah je tangenta na parabolo $y = x^2 + 2x + 7$ vzporedna premici $y - 4x + 5 = 0$? Kakšna je v tej točki enačba normale?

Taylorjev polinom

1. Zapiši polinom, ki ima v točki $x = 1$ vrednost 2, prvi odvod enak 3, drugi odvod enak 4, ostale odvode v točki $x = 1$ pa 0.
2. Izrazi $y = 8 - 4x - 2x^2 + x^3$ kot polinom izraza $x + 2$.
3. Izrazi $y = -2 + x - x^2 + 3x^3$ kot polinom izraza $x - 2$.
4. Razvij $f(x) = (2x^2 + 3x)e^{-x}$ v Taylorjev polinom reda tri v okolici točke $x = 0$.
5. Razvij $f(x) = x^3 \ln x$ v Taylorjev polinom reda tri v okolici točke $x = 1$.
6. Razvij funkcijo $f(x) = \sin x$ v Taylorjev polinom stopnje 8 okoli $x = 0$.

L'Hospitalovo pravilo

1. S pomočjo L'Hospitalovega pravila izračunaj limite.

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 2x^4 + 1}{x^4 - 2x^3 + 1}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(1-x) - \ln(1+x)}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$

(e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x e^{\frac{1}{x}} - x \right)$

(f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\sin x}$

(g) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

(h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$

Uporaba prvega in drugega odvoda

1. Poišči lokalne ekstreme funkcij.

(a) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

(b) $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$

(c) $f(x) = \ln \sqrt{1 + x^2} - \arctan x$

2. Določi najmanjšo in največjo vrednost funkcije na zaprtem na intervalu.

(a) $f(x) = 2x^3 + 3x^2$, na $[-2, 1]$

(b) $f(x) = \sin(2x) + x$, na $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

(c) $f(x) = e^{x^2}$, na $[-2, 1]$

3. Določi intervale, kjer funkcija narašča oz. pada.

(a) $f(x) = \frac{x^2+x-1}{x^2-x+1}$

(b) $f(x) = x \ln x$

4. Določi intervale konveksnosti in konkavnosti funkcij

(a) $f(x) = x \ln x$

(b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 7$

(c) $f(x) = xe^{-x}$

5. Čimbolj natančno nariši grafe funkcij.

(a) $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$

(d) $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{1+x^2}}$

(b) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

(e) $f(x) = (x^2 - 1)e^{-x^2}$

(c) $f(x) = x^4 e^{-x}$

(f) $f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$

Tekstne naloge

1. Izračunaj razsežnost odkritega bazena s kvadratnim dnom in prostornino 256 m^3 tako, bo za betoniranje sten in dna treba najmanj materiala.

[**rešitev:** Bazen je dolg in širok 8 m ter visok 4 m.]

2. Trije kraji A, B in C ležijo tako, da je $\angle ABC = 60^\circ$. Iz A odpelje avto proti B z enakomerno hitrostjo 50 km/h, istočasno pa iz B proti C drug avto z enakomerno hitrostjo 60 km/h. Čez koliko časa bo razdalja med avtomobiloma najmanjša, če je razdalja med A in B 100 km?

[**rešitev:** Razdalja bo najkrajša čez 52 minut in 45 sekund.]

3. Iz ladje, 9 km oddaljene od najbližje točke A ravnega obrežja, so poslali kirurja v taborišče, ki je vzdolž brega 15 km oddaljen od A. Kurir napravi s čolnom 4 km v eni uri, peš pa 5 km v eni uri. V kateri točki obrežja mora pristati s čolnom, da bo prišel v najkrajšem času do taborišča?

[**rešitev:** Kurir mora pristati 12 km od točke A proti taborišču.]

4. Dva hodnika širine 2,4 m in 1,6 m se stikata v pravem kotu. Kolikšno najdaljšo letvico lahko prenesemo v horizontalni legi iz enega hodnika v drugega?

[**rešitev:** Čez hodnik lahko prenesemo vse letvice do dolžine 5,61 m.]

10. sklop nalog: NEDOLOČENI INTEGRAL

1. Integriraj naslednje funkcije.

(a) $\int (x^3 + x^2) dx$

(d) $\int \sqrt{x} dx$

(g) $\int \frac{\sin(2x)}{2 \sin x} dx$

(b) $\int 4 \sin x dx$

(e) $\int (x^2 - \frac{1}{x^2}) dx$

(h) $\int e^x (1 - e^{-x} x^{-2}) dx$

(c) $\int (x^2 - 3x + 4) dx$

(f) $\int \frac{x\sqrt{x-x^2}-5}{x^2\sqrt{x}} dx$

(i) $\int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x} dx$

2. Z vpeljavo nove spremenljivke izračunaj nedoločene integrale.

(a) $\int (x^2 + 1)^7 2x dx$

(e) $\int \frac{dx}{x+2}$

(i) $\int (2 + 3 \ln x) \frac{dx}{x}$

(b) $\int \sin(5x - 2) dx$

(f) $\int \frac{5}{\cos^2(3x)} dx$

(j) $\int (x^2 + 5x - 7)^{10} (2x + 5) dx$

(c) $\int \sin^3 x \cos x dx$

(g) $\int \frac{x^2}{8-x^3} dx$

(k) $\int \frac{\sin(\ln x)}{2x} dx$

(d) $\int x e^{-x^2} dx$

(h) $\int \frac{e^x}{3e^x + 2} dx$

(l) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{2x} dx$

3. S pomočjo delnega integriranja (per-partes) izračunaj integrale.

(a) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$

(c) $\int \ln x dx$

(b) $\int x^2 e^{3x} dx$

(d) $\int x \ln x dx$

4. Integriraj racionalne funkcije.

(a) $\int \frac{2x-3}{x^2-3x-4} dx$

(b) $\int \frac{2x+3}{x^3+x^2-2x} dx$

(c) $\int \frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x} dx$

5. S pomočjo matematičnega priročnika izračunaj naslednje integrale.

(a) $\int \frac{x^2}{(3x+2)^8} dx$

(c) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+5x-7}} dx$

(e) $\int \frac{dx}{e^x+1} dx$

(b) $\int x \sqrt{x^2 + 25} dx$

(d) $\int \sin^2 x \cos^5 x dx$

(f) $\int \cos(\ln x) dx$

11. sklop nalog: DOLOČENI INTEGRAL

1. Izračunaj integrale.

(a) $\int_0^\pi \sin x \, dx$

(d) $\int_1^4 2\sqrt{x} \, dx$

(b) $\int_0^1 x^4 \, dx$

(e) $\int_1^4 \frac{x+\sqrt{x}+1}{x} \, dx$

(c) $\int_1^4 (x+1)x^{-1} \, dx$

2. S pomočjo uvedbe nove spremenljivke v določeni integral ali delnega integriranja izračunaj integrale.

(a) $\int_0^1 \sqrt{1+x} \, dx$

(e) $\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2} \, dx$

(b) $\int_2^{-13} \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}$

(f) $\int_2^e \frac{dx}{x \ln x}$

(c) $\int_0^\pi x^2 \sin x \, dx$

(g) $\int_1^2 x^2 \ln(x^2) \, dx$

(d) $\int_0^1 x e^x \, dx$

3. Določi ploščino odseka, ki ga omejujeta os x in parabola $y = x^2 - 5x + 4$.

4. Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujeta krivulja $xy = 6$ in premica $x + y = 7$.

5. Izračunaj ploščino lika med krivuljama $y = x^2$ in $y = 2 - x^2$.

6. Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujejo krivulje $y = \frac{\ln x}{x}$, os x , $x = 1$ in $x = e$.

7. Izračunaj ploščino lika, ki ga funkciji $f(x) = -2x + 7$ in $g(x) = \sqrt{2x-1}$ oklepata z osjo x .

8. Izračunaj dolžino loka na krivulji $y = \sqrt{x^3}$ na intervalu $[0, 2]$.

9. Izračunaj prostornino vrtenine, ki nastane, ko za 360° okoli osi x zavrtimo lik omejen z osjo x in krivuljo $y = 2x - x^2$ med presečiščema z osjo x .

10. Izračunaj prostornino vrtenine, ki nastane, ko za 360° okoli osi x zavrtimo lik omejen z: osjo x , krivuljo $xy = 1$ ter pravokotnicama na os x v točkah $x_1 = 1$ in $x_2 = 10$.

11. Izračunaj prostornino vrtenine, ki nastane, ko za 360° okoli osi x zavrtimo lik omejen s krivuljama $y = \frac{1}{4}x^2$ in $y = \frac{1}{8}x^3$.

12. Izračunaj koliko litrov vina lahko natočimo v parabolični sod višine 1,5 metra, največjim premerom 1,5 metra in najmanjšim premerom 1 metra.