

Ćwiczenie III: Modelowanie trajektorii cząstek naładowanych w polu magnetycznym

Jakub Sawicki

21 grudnia 2015

1 Ruch cząstki naładowanej w polu magnetycznym

Cząstka znajdująca się w polu magnetycznym opisana jest poniższą funkcją Lagrange'a:

$$L = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{e}{2} \mathbf{r} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) \quad (1)$$

W cylindrycznym układzie współrzędnych z osią z skierowaną równoległe do pola, funkcja Hamiltona jest równa:

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_z^2 + p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\varphi^2 \right) - \frac{eB}{2m} p_\varphi + \frac{e^2 B^2}{8m} r^2 \quad (2)$$

Korzystając z równań Hamiltona otrzymuje się:

$$\dot{z} = \frac{p_z}{m} \quad \dot{p}_z = 0 \quad (3a)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2} - \frac{eB}{2m} \quad \dot{p}_\varphi = 0 \quad (3b)$$

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m} \quad \dot{p}_r = \frac{p_\varphi^2}{mr^3} - \frac{e^2 r B^2}{4m} \quad (3c)$$

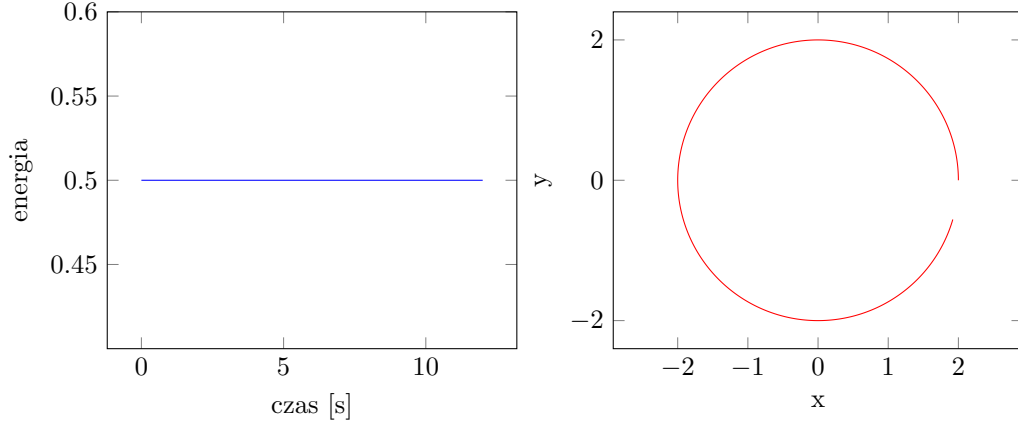
Ruch w kierunku równoległym do pola jest jednostajny i zostaje zignorowany (pozostałe współrzędne i ich pędy też od niego nie zależą). $p_\varphi = \text{const}$, zostają więc tylko trzy równania do rozwiązania. Zapisując je w iteracyjnie:

$$\varphi(t + \Delta t) = \varphi(t) + \left(\frac{p_\varphi(0)}{mr^2(t)} - \frac{eB}{2m} \right) \Delta t \quad (4a)$$

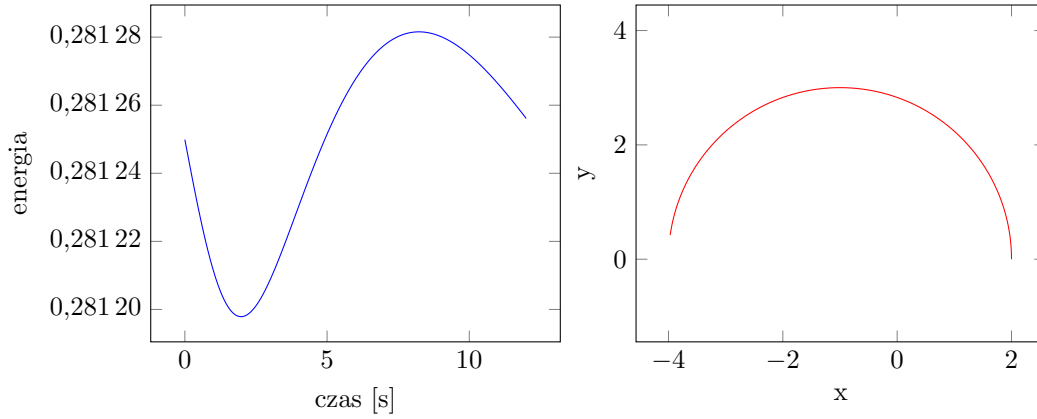
$$r(t + \Delta t) = r(t) + \frac{p_r(t)}{m} \Delta t \quad (4b)$$

$$p_r(t + \Delta t) = p_r(t) + \left(\frac{p_\varphi^2(0)}{mr^3(t)} - \frac{e^2 r B^2}{4m} \right) \Delta t \quad (4c)$$

Dla uproszczenia rachunków reszta parametrów układu m , e i B jest równa 1.



Rys. 1: Rozwiązania dla $\Delta t = 0,01$, $B = -0,5$, $p_\varphi = 1$, $\varphi(0) = 0$, $p_r(0) = 0$ i $r(0) = 2$.



Rys. 2: Rozwiązania dla $\Delta t = 0,01$, $B = -0,25$, $p_\varphi = 1$, $\varphi(0) = 0$, $p_r(0) = 0$ i $r(0) = 2$.

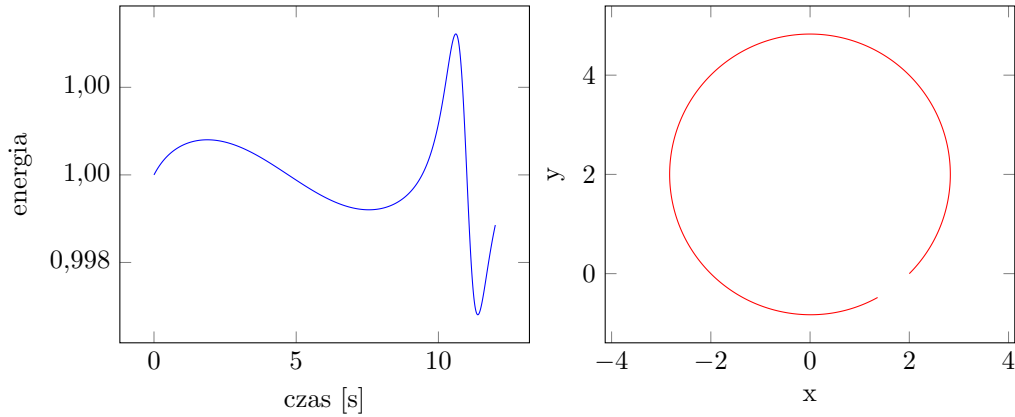
2 Wyniki

Na wykresach ruch zaczyna się zawsze od punktu $(2, 0)$.

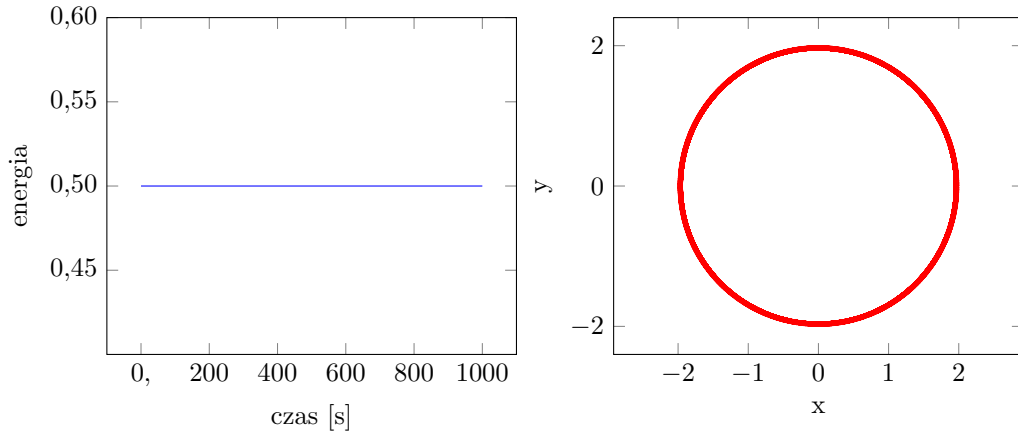
Uruchomienie przedstawione na Rys. 1 pokazuje poprawne zachowanie się algorytmu dla zadanych danych. Ruch odbywa się dokładnie wokół zera układu współrzędnych i energia jest stała w czasie.

Dla o połowę mniejszej wartości natężenia pola magnetycznego punkt zatacza okrąg o dwa razy większej średnicy, patrz Rys. 2. Jako, że okres symulacji jest taki sam jak w poprzednim przypadku, to punkt zatacza tylko niecałą połowę okręgu, którego obwód jest dwa razy większy — a prędkość punktu niezmienną. Tutaj występują wahania energii, jednak dla przyjętego kroku czasowego są one mniejsze niż 0,1 promila.

Dodanie obiektowi dodatkowego pędu skierowanego radialnie prowadzi do odpowiedniej zmiany położenia toru, Rys. 3. Tutaj błąd energii nie jest większy niż procent. Można też zaobserwować,



Rys. 3: Rozwiązania dla $\Delta t = 0,01$, $B = -0,5$, $p_\varphi = 1$, $\varphi(0) = 0$, $p_r(0) = 1$ i $r(0) = 2$.

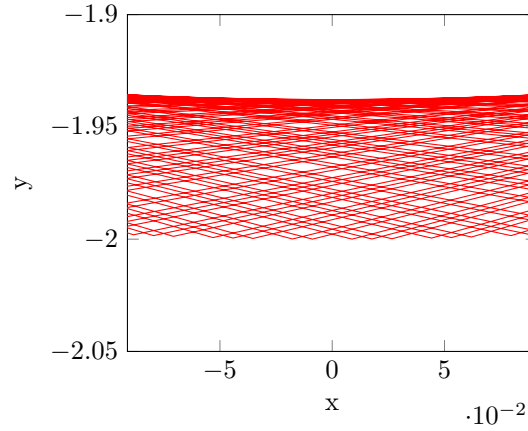


Rys. 4: Rozwiązania dla $\Delta t = 1$, $B = -0,5$, $p_\varphi = 1$, $\varphi(0) = 0$, $p_r(0) = 0$ i $r(0) = 2$.

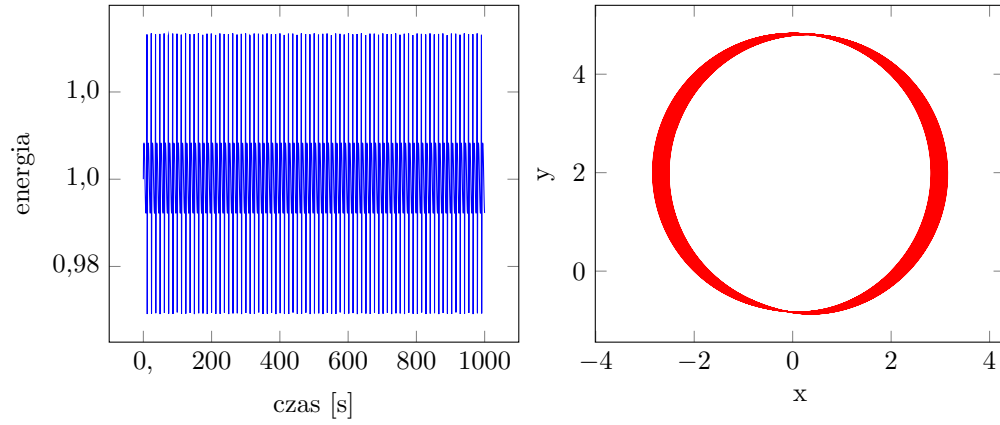
że błąd wzrasta w pobliżu punktu $(0, 0)$.

Przedłużenie symulacji, tak aby punkt zatoczył więcej niż jeden okrąg pozwala zbadać, czy rozwiązanie wykazuje dryf ze względu na niedokładność obliczeń. Dla toru położonego symetrycznie wokół punktu $(0, 0)$ dryf nie występuje, tak jak i wahania energii były równe zero. Rozmycie okręgu widoczne na Rys. 4 ukazującym ten przypadek wynika z tego, że punkty choć układają się na okręgu, to tworzą cięciwy, które mają znaczną wielkość, patrz Rys. 5.

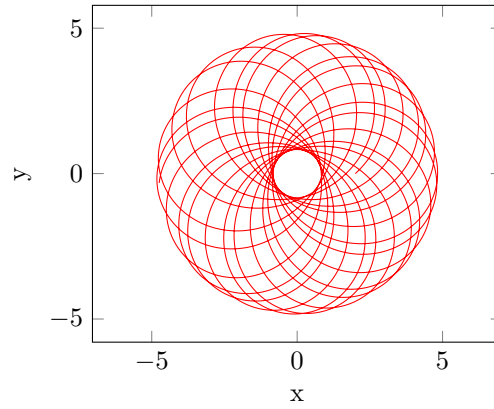
Sprawienie, że ruch nie jest symetryczny wokół punktu $(0, 0)$ powoduje powstanie precesji. Dla kroku czasowego 1 rozwiązanie nie jest stabilne, dlatego na Rys. 6 pokazany jest przypadek kroku czasowego 0,1. Widać tam precesję rozwiązania wokół punktu $(0, 0)$, co lepiej widać na Rys. 7, gdzie linią połączone są co 126 punkty rozwiązania — jako że jedno okrążenie ma w przybliżeniu okres 12,6. Tor cząstki wykonywać będzie więc dodatkową precesję wokół punktu zero jeżeli występować będzie ruch w kierunku radialnym oprócz transwersalnego.



Rys. 5: Zbliżenie na rozwiązanie dla $\Delta t = 1$, $B = -0,5$, $p_\varphi = 1$, $\varphi(0) = 0$, $p_r(0) = 0$ i $r(0) = 2$.



Rys. 6: Rozwiązania dla $\Delta t = 0,1$, $B = -0,5$, $p_\varphi = 1$, $\varphi(0) = 0$, $p_r(0) = 1$ i $r(0) = 2$.



Rys. 7: Precesja rozwiązania dla $\Delta t = 0,1$, $B = -0,5$, $p_\varphi = 1$, $\varphi(0) = 0$, $p_r(0) = 1$ i $r(0) = 2$.

3 Podsumowanie

Analiza rozwiązań wykazała, że rozwiązanie jest dokładne jeśli ruch wykonywany jest symetrycznie wokół punktu $(0, 0)$. Wtedy nie występują wahania energii i można dość dowolnie manipulować krokiem czasowym.

Jeżeli ruch nie jest symetryczny (wokół punktu $(0, 0)$) to występują wahania energii. Dla badanych warunków początkowych jednak dobranie kroku czasowego rzędu 0,01 pozwalało zredukować go do skali promila. Dla takich niesymetrycznych rozwiązań występuje precesja wokół punktu symetrii $(0, 0)$. Jej intensywność wzrasta wraz ze zwiększaniem kroku czasowego. Dla kroku 0,01 jest bardzo powolna, jednak zastosowanie kroku 0,1 powoduje, że jej szybkość wzrasta.