

Ćwiczenie II: Symulacja komputerowa ruchu ciała w układzie z więzami

Jakub Sawicki

13 grudnia 2015

1 Stożek

W tym ćwiczeniu rozpatrujemy ruch po powierzchni stożka o kącie rozwarcia 2α położonego jedną krawędzią na płaskim podłożu. Dwoma współrzędnymi uogólnionymi będą z — położenie na osi symetrii stożka oraz φ — kąt względem pionu. Stożek znajduje się w pionowo skierowanym polu grawitacyjnym o przyspieszeniu g .

Ruch punktu materialnego w tak zdefiniowanych więzach opisany jest równaniami:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}(t) = \frac{g \cos^2 \alpha \sin \varphi}{\sin \alpha} \frac{1}{z} - \frac{2\dot{z}\dot{\varphi}}{z} \\ \ddot{z}(t) = \sin^2 \alpha z \dot{\varphi}^2 - g \sin \alpha \cos^2 \alpha (1 - \cos \varphi) \end{cases} \quad (1)$$

Układ taki rozbijany jest na układ czterech równań pierwszego stopnia, które następnie przekształcane są zgodnie z metodą Eulera.

Implementacja algorytmu znajduje się w <https://github.com/jswk/pft/blob/master/lab2/lab2.c>.

1.1 Wyniki

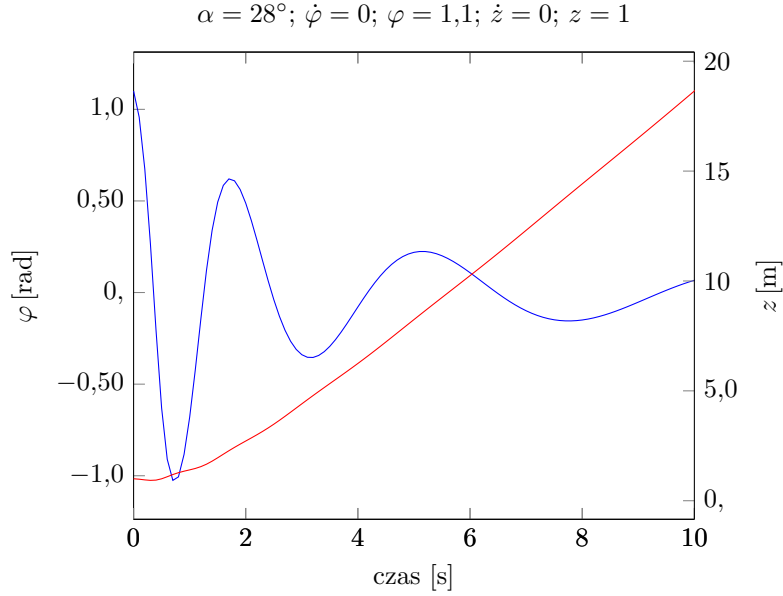
W pierwszej kolejności przeprowadzono obliczenia dla przykładu zadanego w treści zadania. Wykres φ oraz z dla tego przypadku przedstawiony jest na Rys. 1. Rozwiązanie pokrywa się z rozwiązaniem przedstawionym w treści zadania. Można na tej podstawie wnioskować, że implementacja daje poprawne wyniki (przynajmniej dla zadanych warunków początkowych).

Najciekawsze rozwiązania powstają dla położenia blisko ostrza stożka. Poniższe przypadki eksplorują te sytuacje.

Poprawność rozwiązania można dodatkowo sprawdzić jak zachowywać się będzie punkt materialny jeżeli wpuszczony zostanie do stożka o mniejszym kącie rozwarcia z takimi samymi warunkami początkowymi jak dla stożka z treści zadania. Ze względu na mniejszą rozwartość drgania powinny być o większej częstotliwości, co rzeczywiście jest obserwowane dla takiego rozwiązania, patrz Rys. 2.

1.2 Ruch w stronę ostrza

Następnie przeliczone zostały przykłady, w których punkt porusza się w stronę ostrza stożka. Nie może on poruszać się dokładnie w kierunku ostrza — przebieje się wtedy na stronę ujemnych



Rys. 1: Rozwiązanie dla warunków początkowych z opisu zadania. $\alpha = 28^\circ; \dot{\varphi} = 0; \varphi = 1,1; \dot{z} = 0; z = 1$

wartości z co znajduje się poza obszarem rozwiązań naszego modelu (rozwiązania takie zachowują się tak, jak gdyby stożek był położony pod powierzchnią, jeśli dla dodatnich z znajduje się nad nią).

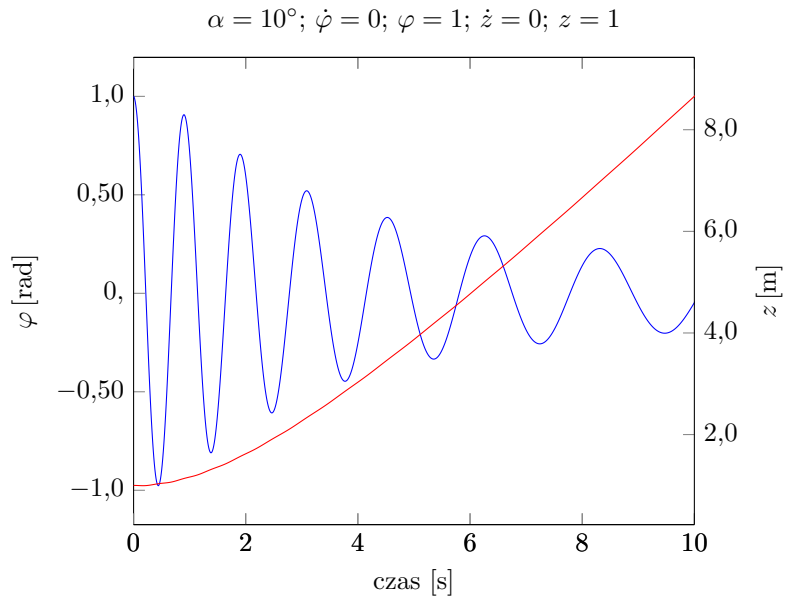
Przeliczone zostały więc dwa przykłady, w których oprócz prędkości w kierunku ostrza punkt ma nadaną niewielką prędkość transwersalną. Przedstawione zostały na Rys. 3. Na wykresach widać, że punkt zbliża się do ostrza na niewielką odległość gdzie za względu na niezerowy moment pędu osiąga dużą prędkość transwersalną. Dokonuje kilku obrotów wokół ostrza i odbija się od niego.

1.3 Bardzo rozwarty stożek

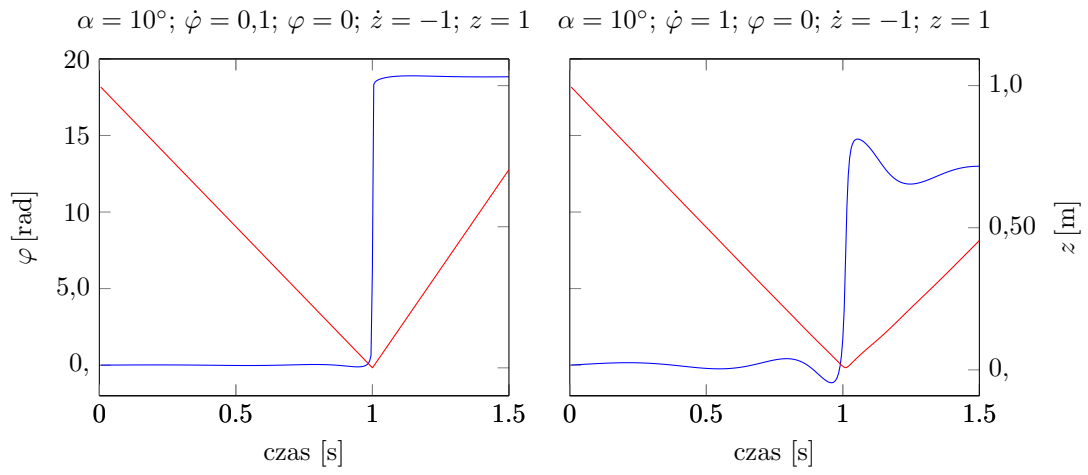
Obliczone zostały również rozwiązania dla stożka o kątach rozwarcia $2\alpha = 90^\circ$ oraz $2\alpha = 170^\circ$. Rozwiązania są pokazane na Rys. 4.

Dla kąta rozwarcia 90° punkt omija ostrze wykonując pełny obrót wokół niego.

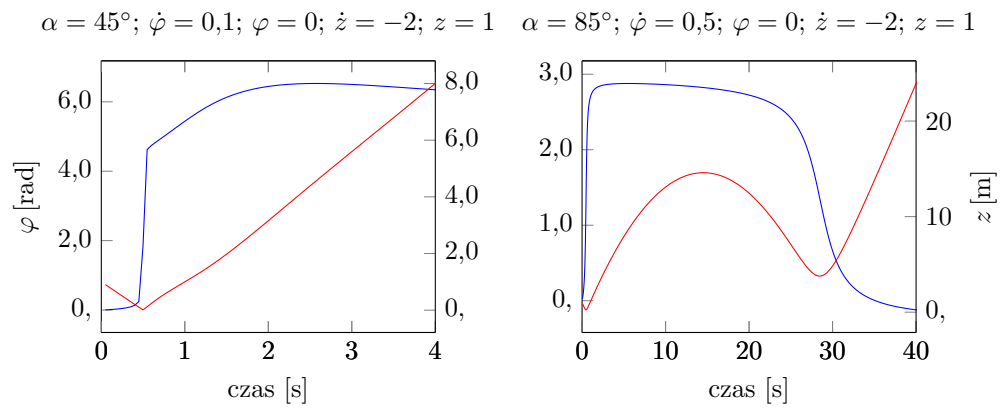
Dla kąta rozwarcia 170° punkt wchodzi daleko na lekko nachyloną część stożka i powoli hamuje. Następnie wraca na dół mijając ostrze w większej odległości.



Rys. 2: Rozwiązanie dla $\alpha = 10^\circ; \dot{\varphi} = 0; \varphi = 1; \dot{z} = 0; z = 1$



Rys. 3: Rozwiązania dla punktu poruszającego się w stronę ostrza stożka z różnymi prędkościami transwersalnymi.



Rys. 4: Rozwiązania dla punktu poruszającego się w stronę ostrza stożków o kątach rozwarcia 90° i 170° .