Ćwiczenie IB: Wahadło matematyczne

Jakub Sawicki

6 grudnia 2015

1 Wahadło matematyczne

Wahadło matematyczne to punkt materialny zawieszony na nieważkiej i nierozciągliwej nici o długości R w jednorodnym polu grawitacyjnym o przyspieszeniu g i skierowanym w dół. Układ taki ma tylko jeden stopień swobody a mianowicie kąt φ określający położenie punktu. $\varphi = 0$ dla dolnego punktu równowagi wahadła.

Równanie ruchu dla takiego układu ma postać

$$R\ddot{\varphi} + g \sin\varphi = 0 \ . \tag{1}$$

Można je rozwiązać analitycznie dla niewielkich φ, wtedy rozwiązanie ma postać

$$\varphi(t) = A \sin(\beta t + \alpha) \ , \tag{2}$$

nie jest to jednak rozwiązanie poprawne dla większych φ.

2 Rozwiązanie numeryczne

W celu rozwiązania równania różniczkowego wyższego rzędu niż pierwszego należy je sprowadzić do układu równań pierwszego stopnia.

$$\begin{cases} \dot{\omega}(t) = -\beta^2 \sin\varphi(t) \\ \dot{\varphi}(t) = \omega(t) \end{cases} \tag{3}$$

Rozwiązanie tego układu równań będziemy prowadzić na pewnej zdyskretyzowanej siatce co wymusza wprowadzenie pewnego kroku czasowego (w tym przypadku stałego) oraz zastosowanie różnic skończonych do wyrażenia przybliżeń różniczek.

$$\begin{cases} d\omega(t) = -\beta^2 \sin\varphi(t) dt \\ d\varphi(t) = \omega(t) dt \end{cases} \tag{4}$$

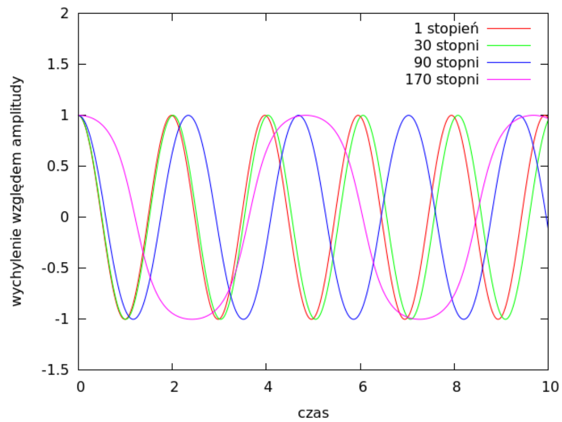
$$\begin{cases} \Delta\omega(t) = -\beta^2 \sin\varphi(t) \Delta t \\ \Delta\varphi(t) = \omega(t) \Delta t \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} \omega(t_{i+1}) = \omega(t_i) - \beta^2 \sin\varphi(t_i) \Delta t \\ \varphi(t_{i+1}) = \varphi(t_i) + \omega(t_{i+1}) \Delta t \end{cases} \tag{6}$$

Obliczenia dla kolejnych momentów prowadzić najwygodniej jest sekwencyjnie.

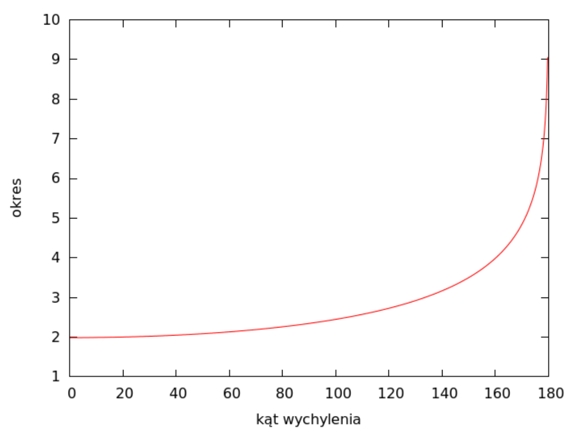
2.1 Wyniki

Przeprowadzone zostały obliczenia dla różnych początkowych wychyleń. Przykładowe wyniki pokazane są na Rys. 1. Widać, że wraz ze zwiększaniem amplitudy drgań wydłuża się też okres.



Rys. 1: Wykres pokazuje przykładowe rozwiązania dla różnych początkowych kątów wychyleń. Zaobserwować można zwiększanie się okresu ze zwiększaniem amplitudy drgań.

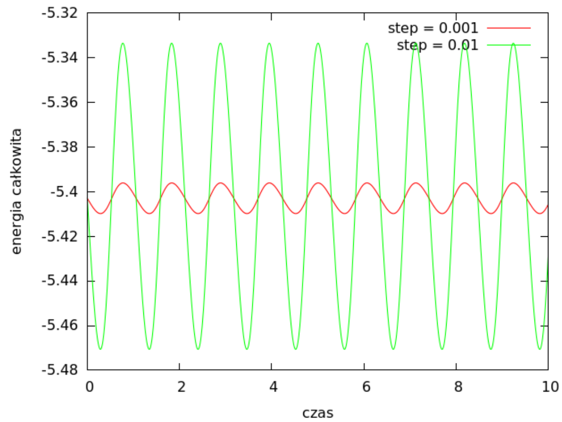
Zależność ta została dokładniej zbadana. Na Rys. 2 pokazana jest zależność okresu od amplitudy początkowej. Rośnie ona wraz ze wzrostem początkowego wychylenia.



Rys. 2: Na wykresie pokazana została zależność okresu drgań od amplitudy początkowej.

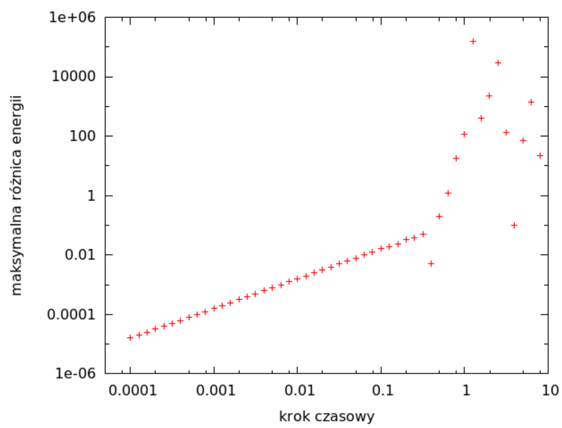
Wykres Rys. 3 pokazuje zmianę energii całkowitej w funkcji czasu. Mimo że powinna ona być stała w trakcie ruchu, to w symulacji numerycznej można zaobserwować jej odstępstwa od stałej wartości. Wraz ze zmniejszaniem kroku czasowego odchylenia te zmniejszają się.

Miara błędu metody dla danego kroku czasowego została przybliżona poprzez amplitudę wahania się wartości energii całkowitej. Wynik takiej analizy pokazany jest na Rys. 4. Wartość energii



Rys. 3: Wykres pokazuje wartości energii całkowitej układu dla różnych kroków czasowych.

całkowitej oscyluje z częstotliwością dwa razy większą niż ruch wahadła. Z tego względu do analizy wzięty został jedynie półokres wahadła, z tego wynika chaos dla wartości kroku czasowego powyżej 0,15 gdzie metoda przestaje być stabilna. W zakresie długości kroków czasowych, kiedy metoda jest stabilna zależność pomiędzy krokiem czasowym i miarą błędu jest liniowa.



Rys. 4: Zależność miary błędu (amplitudy wahań energii całkowitej) od długości kroku czasowego. Dla dużych wartości kroku czasowego metoda traci stabilność co widać po chaotycznym wykresie.