《Matlab与物流管理实验》作业-DELS

问题背景

考虑总计划期为N的动态经济订货批量(DELS)问题，其中第n期期初的固定生产成本和边际生产成本分别为k_n和c_n，期间需求为确定值d_n，期末持有库存的边际成本为h_n。此问题由$\boldsymbol{d} = [d_1, d_2, \cdots, d_n], \boldsymbol{k} = [k_1, \cdots, k_N], \boldsymbol{c} = [c_1, \cdots, c_N]$和$\boldsymbol{h} = [h_1, \cdots, h_N]$完全确定。因此，我们称这四个向量为<u>系统输入</u>或<u>基本参数</u>。注意，总期数N本身也是基本参数之一。

此问题等价于一个最短路径问题，其动态规划形式如下：

$$g(m) = \min_n \{\ell(m,n) + g(n) : 1 \le m < n \le N+1\},\ m = N, N-1, \cdots, 1. \tag{1}$$

其中$g(N+1) = 0$, $\ell(m,n)$ 表示第m期期初批量生产$d_{m,n} \triangleq d_m + d_{m+1} + \cdots + d_{n-1}$件产品，然后依次满足第$m, m+1, \cdots, n-1$期需求所产生的成本，即

$$\ell(m,n) = (k_m + c_m d_{m,n}) + h_m d_{m+1,n} + \cdots + h_{n-3} d_{n-2,n} + h_{n-2} d_{n-1,n}.$$

例如，$d_{2,5} = d_2 + d_3 + d_4$ 表示从第2期开始累积至第5期<u>之前</u>的总需求，$d_{4,5} = d_4$，以及

$$\ell(1,5) = k_1 + c_1 d_{1,5} + h_1 d_{2,5} + h_2 d_{3,5} + h_3 d_{4,5}.$$

在最短路径问题框架中，$\ell(m,n)$表示<u>有向边</u>$m \to n$的边长，可从<u>系统输入</u>得到。各决策期编号$\{1, 2, \cdots, N, N+1\}$视作顶点序列，其中$N+1$为便于分析引入的虚拟决策期，使得$\ell(m, N+1)$表示从第m期期初批量生产后，依次满足全部后续的$m, \cdots, (N+1)-1 = N$期需求所产生的成本。

式(1)以反向归纳的形式从$g(N+1) = 0$迭代生成了序列$\{g(N), g(N-1), \cdots, g(1)\}$：

$$\begin{aligned}
g(N) &= \min_n \{\ell(N,n) + g(n) : 1 \le N < n \le N+1\} = \ell(N, N+1) + g(N+1) = \ell(N, N+1), \\
g(N-1) &= \min\{\ell(N-1, N) + g(N),\ \ell(N-1, N+1) + g(N+1)\} \\
&= \min\{\ell(N-1, N) + \ell(N, N+1),\ \ell(N-1, N+1)\}, \\
g(N-2) &= \min\{\ell(N-2, N-1) + g(N-1),\ \ell(N-2, N) + g(N),\ \ell(N-2, N+1)\}, \\
\cdots\cdots &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots .
\end{aligned}$$

对于不同的参数及相应的$\ell(m,n)$，最后得到的$g(1)$将具有如下形式：

$$g(1) = \ell(1, s_1) + \ell(s_1, s_2) + \cdots + \cdots + \ell(s_{t-1}, s_t) + \ell(s_t, N+1).$$

它表明了从起点1到终点$N+1$的最短路径应当依次经过$s_1 < s_2 < \cdots < s_t$这t个顶点，即最优生产计划为依次在第$1 < s_1 < \cdots < s_t$期生产。

任务1

实现上述算法，编写名为DELS的函数，对任意参数$\boldsymbol{d}, \boldsymbol{k}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{h}$都能输出最优的生产计划$\boldsymbol{p}$, 其中$\boldsymbol{p}$是$N$维的$0-1$向量，第$n$个分量为1表示在第$n$期生产，为0表示不生产。要求：

- 结构化：用function或脚本片段(scripts)实现各模块（如$\ell(m,n)$的计算），再通过主程序/入口脚本文件调用，可以实时按要求调整代码或输出结果。结果呈现系统化（如代码正确性测试，代码容错性测试，各参数对最优决策的影响，算法效率分析等）。
- 简练、易懂: 核心代码(即得到最优解的关键代码)少；代码中有详细注释, 图示有标注。

提示：可尝试Matlab自带函数cumsum、cummin；测试可用random、randn等随机数生成函数；算法效率分析可使用tic、toc等计时函数；逻辑判断时可用all、any等命令。另外，请结合应用背景提出你自己的测试方式。例如，从直觉判断当$\boldsymbol{c}$或$\boldsymbol{k}$的每一项上都增加一个常数$\delta > 0$后，最优生产计划是否会改变；然后用通过数值方式去验证你的直觉。注意，此问题并非一般的最短路径问题，它的边长函数具有一些特别的结构，会导更高效的算法。因此避免通用的最短路径算法，而应直接实现(1)的迭代形式。后续我们将进一步讨论如何利用特定的结构性质改进算法。

任务2

阅读如下材料并思考：

(a) 如果没有固定生产成本，即$k_n = 0, \forall n$ 或all(k(:))==0，那么最优生产计划与需求序列无关。请以数值或分析方式说明此结论。

(b) 前文给出边长$\ell(m,n)$公式，其思路为先分别计算从m到$n-1$间各期成本，然后再求和：

$$\ell(m,n) = k_m + c_m d_{m,n} + h_m d_{m+1,n} + \cdots + h_{n-3} d_{n-2,n} + h_{n-2} d_{n-1,n}.$$

另一思路是除固定成本k_m外，先分别计算满足各批次需求的成本，然后再求和：

$$\ell(m,n) = k_m + c_{m,m} d_m + c_{m,m+1} d_{m+1} + \cdots + c_{m,n-1} d_{n-1} = k_m + \sum_{t=m}^{n-1} c_{m,t} d_t.$$

例如，满足需求d_m只花费了$c_m d_m$的生产成本；而满足d_{m+1}的成本是$c_m d_{m+1} + h_m d_{m+1}$，包括生产的变动成本$c_m d_{m+1}$和存储到使用时期时产生了库存成本$h_m d_{m+1}$。一般而言，用第$m$期的生产来满足第$t \geq m$期需求的总成本可记为$c_{m,t} d_t$。请给出一般形式的$c_{m,t}$表达式，然后在Matlab中实现，并用原来的代码测试。

(c) 如果把$\ell(m,n)$的定义改成$\ell(m,n) = k_m + c_{m,N+1} d_{1,n+1}$, 是否会改变原问题的最优生产计划?

任务3（选作）

在应用(1)式依次从后往前确定最优生产计划时，有种猜测是，很可能每次不会更新太多原来已经确定的计划期。例如，如果已经得到了第n期之后的最优生产期分别为$n = s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_m \leq N$, 那么在计算第$n-1$期之后的最优生产计划时，$s_0, s_1$有可能会更新，但$s_2$及之后的计划期不会改变；因此，$n-1$期之后的最优生产期可能为为$n-1 = s_0' < s_1' < s_2 < \cdots < s_m$.这个猜测正确吗？请用Matlab代码记录迭代过程中最优生产期是如何从后往前更新的，然后再作判断。