带噪声矩阵填充

Emmanuel J. Cande`s and Yaniv Plan

**摘要：**紧随着压缩感知，最近出现了一个新的领域。这一领域解决了一系列具有重大实际意义的问题，即从不完整、甚至是可能已损坏的信息中恢复出数据矩阵。在其最简单的形式中，问题可转化为从它的一个小样本项中恢复一个矩阵。这种问题出现在许多科学和工程领域，包括协同过滤、机器学习、控制、遥感和计算机视觉等。摘要对矩阵填充的相关文献进行了综述，发现在一定条件下，通过求解一个简单的凸优化问题，即受数据约束的核范数最小化问题，可以将一个未知的低秩矩阵从一个很小的集合中恢复出来。此外，本文还介绍了一些新的结果，这些结果表明，即使在观测到的少量条目被少量噪声破坏，矩阵填充仍然是准确的。一个典型的结果是，我们可以从大约的噪声样本中恢复一个秩为r的未知矩阵，其误差与噪声水平成正比。我们提出的数值结果补充了我们的定量分析。这表明，在实践中，核范数最小化仅仅从几个有噪声的样本就可以精确地填补许多大的低秩矩阵的缺失项。最后我们对矩阵填充和压缩感知之间的一些类比也进行了讨论研究。

**关键字：**压缩感知 优化二元性 低秩矩阵 矩阵填充 nuclear-norm最小化 oracle不平等 半定规划

**I.引言**

假设我们只观察到一个信号的几个样本。我们有可能准确或者说至少准确地重建这个信号吗? 例如，假设我们观察一个向量的几个元素，我们可以把它看作数字信号或图像。如果你愿意，我们能恢复我们没有见过的大部分像素中心吗? 一般来说，每个人都会认为这是不可能的。但是，如果已知信号在傅里叶域中是稀疏的，并且在非相干域中也是稀疏的，那么通过 最小化，可以实现精确恢复[11]。其他算法见[22]，其他类型的测量见[17]和[18]，不同思想见[34]。这一发现是快速发展的压缩感知领域的根源，并且已经改变了工程师们对数据采集的看法。具体地说，如果一个信号有一个稀疏的频谱，而我们只有几个时间或空间样本的信息，那么我们可以调用线性规划来精确地插值信号。当然，我们还可以交换时间(或空间)和频率，并从几个傅里叶系数中恢复稀疏信号。假设现在我们只观察到一个数据矩阵的几个元素。那么，有没有可能准确地猜测出我们没有看到的条目呢? 例如,假设我们从一个大型的矩阵中观察几个电影评级,其中行表示用户，列表示电影 (我们只能观察到一些评级,因为每个用户通常是评级几个电影而不是成千上万的电影)。我们能预测用户对他/她没有看过的电影的评分吗?一般来说，每个人都认为从其条目的子集中恢复数据矩阵是不可能的。然而，如果已知未知矩阵的秩较低或近似秩较低，则可以通过核范数最小化[10]、[14]实现精确的恢复。这一启示在一定程度上受到了压缩感知领域大量工作的启发，这也是本文的主题。从现在开始，我们将把推断许多缺失项的问题称为矩阵填充问题。通过推广，从几个线性泛函推断一个矩阵的问题将被称为低秩矩阵恢复问题。现在，正如稀疏信号恢复在当今被认为是至关重要的一样，我们也相信矩阵补全和一般的低秩矩阵恢复同样重要，并且在未来几年将会越来越多地被研究。现在，我们给出了一些应用程序的例子，其中确实出现了这些问题。

**·协同过滤。**

简而言之，协同过滤就是通过收集许多用户的偏好信息，自动预测用户的兴趣[23]。也许最著名的协同过滤的实现是Netflix推荐系统，它试图对未上映的电影做出评级预测。这是一个矩阵补全问题，其中未知的完整矩阵的秩很低，因为通常只有少数因素影响个人的品味或偏好。在新经济时代，公司有兴趣预测音乐偏好(苹果公司)、文学偏好(亚马逊、巴诺书店)以及许多其他类似的东西。

**·系统识别。**

在控制中，需要拟合离散时间线性定常状态空间模型



对于一个输入序列以及一个输出序列，向量是系统在t时刻的状态，n是系统模型的阶。从输入/输出对中，我们想要恢复状态向量n(模型阶)的维数和系统的状态，即矩阵A, B, C, D和初始状态。该问题可以转化为低秩矩阵填充问题，具体见[26]及其参考文献。

**·全球定位。**

从局部或部分两两距离集求欧几里德空间中点的全局定位是传感器网络[7]、[31]、[32]中出现的一个几何问题。例如，由于功率限制，传感器可能只能从其邻近构建可靠的距离估计。从这些估计中，我们可以形成一个部分观测距离矩阵，问题是要从几个观测到的距离中推断出所有成对的距离，这样才能可靠地估计传感器的位置。这就归结为一个矩阵填充问题，如果传感器位于平面，则未知矩阵的秩为2，如果传感器位于空间，则为未知矩阵的秩为3。

**·遥感。**

在相干射频环境中，通常使用MUSIC算法[30]来确定入射信号的到达方向。在一个典型的应用中，接收到的信号被记录在不同的传感器位置，该算法通过计算所有传感器对接收到的信号之间的相关性，从协方差矩阵中提取波到达的方向来进行操作。在遥感应用中，由于功率限制[35]，可能无法估计或传输所有的相关性。在这种情况下，我们想从几个观察到的部分的相关性中推断出一个完整的协方差矩阵。这是一个矩阵填充问题，其中未知信号协方差矩阵的秩较低，因为它等于入射波的个数，而入射波的个数通常比传感器的个数小得多。

当然还有很多其他的例子，包括从结构到运动的问题[15]，计算机视觉中的问题[33]，数据分析中的多类学习[3][4]等等。本文研究了从较少的元素中恢复低秩矩阵的能力，即如何恢复以及恢复的效果如何。在第二节中，我们将研究无噪声问题，其中观测到的项恰好是未知矩阵的项。第三节研究了更常见的情况，即少数可用条目被噪声破坏。我们在第四节中进行了一些数值实验，证明了我们的方法的性能，并以简短的讨论(第五节)结束了我们的研究。

在开始之前，最好对本文中使用的符号做一个简要的总结。我们将使用具有奇异值的矩阵的三个范数。谱范数用表示，为最大奇异值。两个矩阵之间的欧氏内积由公式定义;相应的欧几里得范数叫做F范数且用表示(注意,这是奇异值向量的范数)。核范数用来表示，它奇异值的总和(向量的范数)。按照标准，表示是正半定的。

此外,我们还操纵作用于空间的线性变换，我们将用来表示这些变换。特别是，这个空间上的标识符将用来表示。我们使用与上面相同的约定，意味着 (被看作一个大矩阵)是半正定的。

我们使用一般的渐近符号,例如表示界为CM其中C为大于0的常数。

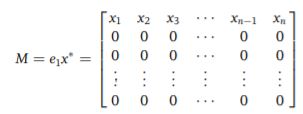
**II. 精确矩阵填充**

接下来，是一个我们想要尽可能精确知道的矩阵。然而, 关于M唯一可用的信息是一组采样的条目,其中是的补集。(此处[n]代表{1,…,n})。它将通过方便得总结信息,其中采样算子定义为：



因此,问题是,是否有可能只从的信息中恢复矩阵。我们将假设这些条目是随机选择的，没有替换，以避免行或列未抽样的琐碎情况，因为在这种情况下，矩阵补全显然是不可能的。(如果我们没有特定用户的数据，我们如何猜测他/她的偏好?如果我们对一个特定的传感器没有距离估计，我们怎么能猜到它到所有传感器的距离呢?)

即使已知未知矩阵M的秩较低，该问题也可能严重不适用于求解。下面的例子说明了为什么:假设x是中的一个向量，考虑的秩为1的矩阵



其中是正则基中的第一个向量。显然，这个矩阵不能从它的一个子集中恢复出来。即使95%的项是随机抽样的，我们也会丢失第一行的元素，而且概率非常高，这使得向量x和M的恢复是不可能实现的。压缩感知的类似之处在于，通过在时域内进行子采样，但是其显然无法恢复出时域内稀疏的信号。

这个例子表明，如果矩阵的某些奇异向量非常稀疏，则不能期望恢复矩阵，如果不采样第一行的所有项，就不能恢复M;其他相关例子见[10]。更一般地说，如果一个行(或列)与其他行(或列)之间没有关系，即它近似正交，那么基本上就需要查看该行中的所有项来恢复矩阵M。这种非正式的考虑导致[10]的作者引入了一个几何上的不一致性假设，但目前，我们将讨论一个更简单的概念，它迫使M的奇异向量分布在所有坐标上。为了表示这个条件，回忆一下秩为r的矩阵的奇异值分解(SVD)



其中是奇异值，是奇异值向量，我们的假设如下所示：



对某些，其中范数是由定义的。我们认为 很小,例如,，因此奇异向量是不太像前面解释的那样的。

如果M的奇异向量足够稀疏，我们希望存在一个与观测到的项一致的唯一低秩矩阵。如果是这种情况,原则上,恢复未知矩阵可以通过求解



其中。不幸的是，这个问题不仅是np-hard问题，而且所有已知的精确求解它的算法在理论上和实践中都是指数级别的[16]。这类似于从稀疏信号中进行“-最小化”恢复的难度。一个比较普遍的选择是凸松弛[10],[14],[19],[21],[29]



(见[6]和[28]的相关跟踪启发式算法)。正如“-最小化”是组合的“0-最小化”问题的最紧凸松弛，在这个意义上，Rn的“球”是单位赋范的1-稀疏向量(即核范数极小化是NP-hard秩极小化问题的最紧凸松弛。可以肯定的是，核球 是一组秩1矩阵的凸包，其谱范数以1为界。此外在压缩感知领域，线性等式约束的-最小化可以被转化为一个线性问题（LP），因为范数有一个线性问题性质，确实，对于每个,是最优值



其中 ，同样的的核范数具有SDP特征，其中决策变量。

同样，的核范数具有SDP特征



其中决策变量。这表示谱范数与核范数是对偶的。对于W的谱范数的约束是一个SDP约束，因为它等价于



其中是是单位矩阵。因此，(II.4)是一个SDP，可以将表示为SDP对偶于(II.5)的最优值。我们注意到，利用问题结构的特殊算法已经被证明比内部点方法好几个数量级(见[8]和[27])。

**定理1**[14]:让是秩的固定矩阵，其服从（II.2）令n=max(n1,n2).假设我们观察m个点的m个元素它们的位置都是随机均匀采样的。然后有一个正的数值常数C，使得如果



那么M是(II.4)的唯一解，概率至少为。换句话说，核范数最小化具有很高的概率可以恢复M的所有项且无误差。

作为附带说明，对于给定的，我们可以通过将C带入(II.6)形式的(对于某个通用常数)来获得至少的成功概率。这一结果的概率性来自于假设M的显示项是从均匀分布中抽样的。另一种解释是，矩阵补全对于最大抽样集[服从(II.6)]是精确的。

一个秩为r的矩阵取决于自由度。当r很小的时候，自由度的数目远远小于，这就是为什么可以进行子抽样的原因。(在压缩感知中，自由度的数目对应于信号的稀疏性，即非零项的数目)这里值得注意的是，一旦样本量超过几个对数因子的自由度，就会出现核范数最小化的精确恢复。进一步观察,如果完全失去一行(例如,一个没有评级一个用户)或一列(例如,一个没有评级某个电影),人们甚至不能指望从中恢复出一个秩为1的矩阵。因此，需要对矩阵的每一行(以及每一列)进行采样。若是随机抽样,那么至少建立阶为的模型，这就是著名的优惠券收集器问题。因此，(II.6)最多漏掉了一个对数因子的信息理论极限。

为了得到所有秩值的相似结果，[14]引入了强不相干性，参数如下所示。

A) 设 (分别为)为奇异向量上的正交投影。对所有的和



B) 设E为符号矩阵，其定义为



这些条件对奇异值没有任何假设。我们将看到，具有小值的强非相干参数的非相干矩阵可以从最小的一组条目中恢复。在说明这一结果之前，需要注意的是，许多模型矩阵服从强非相干性，且值很小。

·假设奇异向量服从(II. 2) 。然后除了极少数特殊矩阵,M服从强不相关性即。

·假定列矩阵 和是独立的随机正交矩阵。然后很可能M会服从强相关性即，r >= (log n)，以减小样本的影响。

下面的抽样结果是一般的，非渐近的，最优的几个对数因子。

定理2[14]:令是固定的秩为r的矩阵，其具有较强的不相关参数u,并设置。假设我们观察M的m个元素,它们的位置都是随机均匀采样的。然后有一个数值常数C，如果



那么M是(II.4)的唯一解，概率至少为.

换句话说，如果一个矩阵是强非相干的，并且采样集的基数是关于自由度的个数乘以几个对数因子，那么核范数最小化是精确的。这比Cande和Recht[10]的早期结果有所改进，他们在略有不同的假设svedv下证明，阶样本是足够的，至少对于 的秩是足够的。

我们想指出一个大致相似的性质，但恢复算法完全不同，适用范围略有不同的结果，这是Keshavan等人最近建立的[24]。它们的条件与[10]中引入的非相干性有关，并且满足一些合理的随机矩阵模型。然而，还有另一个条件，它规定未知矩阵的奇异值不能太大或太小(最大值和最小值的比值必须有界)。该算法1)用过多的条目对每一行和每一列进行修剪;即将这些行和列中的项替换为零;2)计算被裁剪矩阵的SVD，将其截断，只保留最上面的r个奇异值(注意这里需要r的值)，并重新排序。上面讨论的结果是在一些合适的条件下,这种恢复好的近似矩阵M提供样品的数量的nr。恢复并不完美,但为本地最小化实现准确的恢复提供了更多的样品,在，假设噪声很小[25]，这种恢复是稳定的。这项工作建立在较早的光谱技术的基础上，即使在更强的条件下，这也证明了其稳定性。

A几何和双证书

由于篇幅的限制，本文无法对[14,定理2]的证明进行重排，甚至无法解释主要的技术步骤。然而，我们将详细说明使低秩矩阵M成为SDP (II.4)的唯一解的充分和几乎必要条件，这将有助于建立稳定性结果。

如果可行集相切的核球在M(见图1)，那么恢复就是准确的

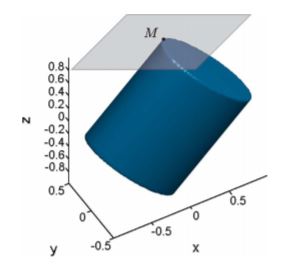


图1

其代表的集合点的2 X2对称矩阵规范有界。为了表达这个数学，标准对偶理论断言,M是(II.4)的一个解决方案当且仅当存在一个双重的次梯度矩阵,这样是一个核范数。可写作



重新考虑M的SVD（II.1）和符号矩阵E (II.7)。众所周知 当且仅当

其中



在英语中，Z是一个子梯度，如果它可以分解为符号矩阵加上另一个谱范数以1为界的矩阵，其列(或者行)空间正交于张成的空间;另一种方法是使用[10]中引入的符号。令T为元素 和 张成的线性空间。让 是T的正交补吗。注意是矩阵的集合服从和。然后 当且仅当



这就促使了以下定义的产生，

**定义3:**我们说 是一个双证如果满足。在继续之前，我们想停下来观察一下与“最小化”的关系。点是解决



我们可以认为上面定义的T在稀疏恢复问题中扮演支持集的角色。有了这些，我们将使用来自[10]的下面引理。

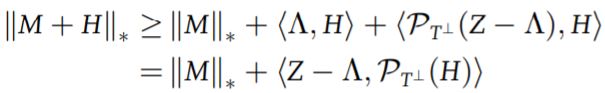
**引理4[10]:** 假设存在一个双证书，考虑任何H都服从，然后



证明：对任意的，我们有



其中



因为，现在我们利用核规范和光谱规范相互对偶的事实。特别的，因为存在 ，因此 ，现在选择Z，因此 ，所以



这个引理的一个推论是下面的充分条件。

**引理5[10]:**假设存在一个遵从的双重证书 且限制操作符是单射。那么M是凸规划(II.4)的唯一解。

**证明:**考虑任何可行的扰动M+H服从。然后假设,引理4给出了



除非。假设；也就是说。结论是M是唯一的最小值，因为任何非平凡扰动都会增加核范数。核范数最小化矩阵补全的精确证明方法在于构造一个双证书。

**定理6[14]:**在定理1或定理2的假设下，存在一个服从。此外,如果 是观察到的部分条目,操作符是一对一的，服从



其中 是恒等算子。

第二部分，即(II.13)，表示映射是单射。从而验证了引理5的充分条件，得到了准确的结果。有趣的是，由于双证书的存在再加上近等距(II.13)-事实上，下界足以建立矩阵补全vis-a -vis噪声的鲁棒性。

**III稳定的矩阵填充**

在任何实际的应用程序中，我们只会看到一些条目至少被少量的噪声损坏。在Netflix的问题上，用户的评分是不确定的。在系统辨识的问题,一个不能确定的位置与无限精度。在全球定位问题中，局部距离是不完美的。最后，在遥感问题中，信号协方差矩阵总是被噪声信号的协方差所破坏。因此，为了广泛应用，我们需要开发的结果，以确保合理准确的矩阵补全是可能的从噪声采样项。本节提出了新的结果，表明确实如此。

噪声模型假定我们观察



其中是一个可以随机或者确定的噪声项。另一种方式来表示这个模型是



其中Z是一个矩阵的条目的值(注意,之外的Z的值是无关的)。我们假设。例如,如果是标准差为的标准差白噪声序列,然后很可能有。为了恢复未知的矩阵,我们提出解决如下优化问题



在所有矩阵与数据一致的情况下,找到最小核规范数。这也是一个SDP问题，让 是这个问题的解。我们的主要结果是这个重建是准确的。

**定理7:**用定理6的符号，假设存在一个遵从的双重证书 (在定理1和定理2的条件下这两个条件有很大可能是正确的)。然后遵循



其中。

对于p较小的情况 (记得这是观察到的条目的一部分),错误最多只是 。从证明中我们可以看到，在条件下，没有什么特别的1/2。我们所需要的只是有一个遵守的双重证书。进一步,当Z是随机的,事件为(III.3)所持有。

粗略地说，我们的定理表述如下:当完全无噪声恢复发生时，矩阵补全相对于扰动是稳定的。可以肯定的是，误差与噪声水平成正比;当噪声水平较小时，误差较小。此外，改善无噪声恢复发生的条件，对更实际地从有噪声的样本中恢复具有自动的影响。

这里一个重要的新奇之处是，在压缩感知或统计文献中没有与此结果等价的结果，因为我们的矩阵补全问题不服从限制等距性质(RIP)[12]。对于某些矩阵, 对于所有矩阵X和足够小等级和足够小的[29]，我们会假设抽样遵循



然而，RIP在这里不成立。为了探究为什么，让样本集被任意选择和修复。然后秩为1的矩阵就不存在了，很显然这违反了(III.4)。

然而，如果RIP (III.4)为真，那么将(III.3)与所得到的界进行比较是很有意义的。在这种情况下,[20]将



其中数值常数Co与估计系数成正比。

我们稍后将回到这种比较。最后，我们强调我们的方法也适用于RIP不存在的稀疏信号的恢复问题(作者目前正在撰写一篇描述这些结果的论文)。

**A 定理7的证明**

我们使用上一节的符号，并通过观察两个基本性质开始证明。第一个是，由于M对于(III.2)是可行的，我们有圆锥约束



第二个是三角形不等式隐含约束



其中M是可行解。

我们会发现在我们的假设,(III.5)和(III.6)暗示接近M。令



我们需要绑定,因为(III.6)给定了,它可以绑定。注意,通过勾股定理,我们有



我们从第二项开始看，令为双证，它遵从，我们有



第二个不等式遵从这引理4，因此由于，锥约束给定为：

或者同样地



因为核范数优于F范数，我们有



其中第二个不等式遵循柯西施瓦兹不等式，以及III.6。

为了求的边界，观察假设以及，可得



但是由于，我们有



因此，最后的两个不等式给定为：



因此，结合(III.7)我们有



这个定理服从此不等式以及(III.8)。

**B.与oracle的比较**

我们想回到讨论一个人所能期望的最好的可能的准确性。为简单起见,假设假设我们有一个oracle通知我们关于T的各种信息。在许多方面,回到第二节A的讨论部分，这就可以类比在压缩感知[13]方向上提供信号支撑。用这些宝贵的信息,我们会知道M存在于一个维度为的性空间的并且可以通过最小二乘法最小化来解决这个问题



我们会在最小二乘意义下最佳适配数据的矩阵T。令 (我们滥用符号并令 的范围为)定义为。然后假设操作符 映射到T是可逆的(这是在定理7的假设下的情况)，由此给出了最小二乘解



因此



令为的最小(归一化)的特征向量,并令 (注意,根据定义因为Z的范围在A中)。通过构造，且



因为通过假设,所有的特征值都在间隔。在所有以为界的矩阵中，矩阵Z也可以最大化,所以oracle就能达到



勤奋的读者可能会争辩说，上面的最小二乘解可能不属于秩r(它最多是秩2r)，因此可能会争辩说，这不是最可能的oracle。然而，正如下面所解释的，如果oracle给出了T和r，那么最适合T的秩r不会比(III.12)好多少。事实上，有一种优雅的方式来理解这个oracle的意义，就是我们现在所呈现的。考虑一个更强的oracle，它显示未知矩阵M的行空间(从而显示矩阵的秩)。然后我们将知道这个未知矩阵是下面的形式



其中是一个矩阵，R是一个矩阵，它的列构成行空间的正交。我们将通过最小二乘法来拟合nr个未知项，并找到 来使得下面的式子达到最小化



使用前面的符号,oracle规定 其中T0是元素 张成的子空间。如果被定义为，那么最小二乘解就是



因为所有的特征值属于 ,应用前面的分析，这强大的oracle同样可以达到大约为的误差。最后,假设我们知道时，我们就不能期望均方根误差小于。

注意当噪声时随机的时候，例如，当是标准差为的白噪声时，oracle给出了误差边界是自适应的，并且随着秩的减小而减小。事实上，等价于



这是因为的所有个特征值都大约等于。当时，这比(III.12)效果好。

**IV. 数值实验**

我们已经看到矩阵补全在噪声中是稳定的。为了强调这一结果的实用性，对含噪数据进行了一系列数值矩阵补全实验。更精确地说，对于维度为n，秩为r（我们第一个实验关注矩阵），并且所观测到的项的分数，下面的数值模拟将重复进行20次，并且误差会取平均值。秩为r的矩阵M定义为，其中是独立同分布的。在有m个元素的集合中，随机均匀地选取采样集。正如（III.1）所示，观察到的被噪声损坏，其中是独立同分布的。这里，我们取，最后是（IV.1）的解。

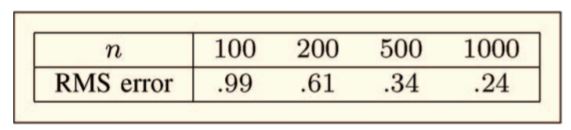


表1 当对秩为2的n n矩阵进行20%的子采样时，RMS误差是n的函数。每个RMS误差平均超过20次实验

要查看结果，请考虑表1。定义为 的rms错误可以衡量每个条目的rms错误。从表中可以看出，即使每个条目都被方差为1的噪声所破坏，当M是一个1000×1000矩阵时，每个条目的rms误差为0.24。为了明白其中的意义,假设一个有机会看到所有噪声矩阵的条目,自然将Y作为M的估计将导致一个预期之内的MS错误，而当解决SDP问题时，MS错误仅来自于观测到的20%的条目。我们不仅准确地猜测了我们没有见过的条目，而且我们还把(我们见过的)条目进行了标记。

为了从一小部分噪声项中稳定地恢复M，利用[27]中的FPC算法求解正则化核范数最小化问题:



它是一个标准的二元性结果(IV.1)相当于(III.2)的某些的值，因此可以在给定时，通过搜索的值来解决（III.2）。我们使用(IV.1)是因为它在实际中工作得很好，而且FPC算法能够很好、准确地求解(IV.1)。我们还注意到，当使用SDP (IV.1)时，稳定性证明也可以给出一个稳定的误差边界。

至关重要的是选择一个合适的值,我们做以下启发式参数:首先,将情况简化为是所有矩阵元素的集合 ,注意（IV.1）的解等价于Y，但是奇异值通过（软阈值）向零移动，正如我们在第二节通过次梯度的最优性条件或者[9]所看到的那样。当不是整个集合时，解不再完全是Y的软阈值形式，但从实验上看，它通常很接近。因此，我们希望选择足够大的阈值来去除噪声(保持方差低)，并选择足够小的阈值来避免原始矩阵过度收缩(保持偏差低)。

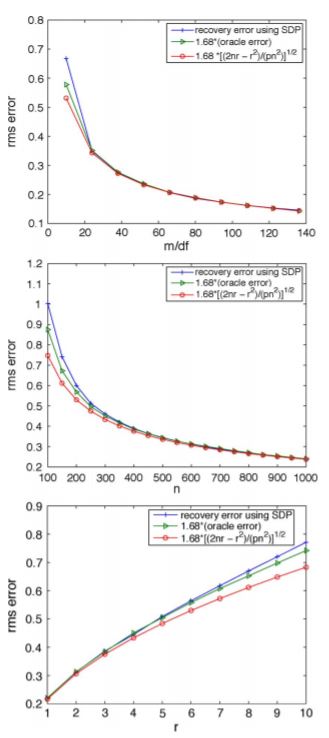


图2 比较恢复误差、oracle误差乘以1.68和oracle估计误差乘以1.68。图上的每一点平均对应超过20个试验。(上)在这个实验中,n=600 r=2, p各不相同。x轴是每自由度(df)的测量值。中间:n各不相同，且r=2, p=0:2。(底部)n=600 r各不相同,和p=0:2。

最后，当M=0,Y=Z时，设为最小的可能值。那么当时，很可能（IV.1）的解就是。那么问题就是：什么是？如果我们对采样的方式做一个非本质的改变，那么答案就遵循随机矩阵理论。不是均匀随机地选择，而是通过选择每个概率为p的项，独立于其他项来选择。通过选择，每个的项都是独立同分布的，其方差为。如果，那么显然当时， 。因此我们选择。事实上，的值对于方阵效果较好。对于矩阵，基于同样的条件可能的。

为了解释我们的数值结果，将它们与oracle的结果进行了比较;看到III-B节。为此,图2图3曲线为不同值的n, p, r: 1)上面介绍的均方根误差,2) 当用最小二乘方法解出T时，可以得到rms误差 3)估计的oracle根希望MS误差起源于III-B节。在我们的实验中,随着n和m = df的增加,r=2，核范数的均方根误差似乎逼近于。因此，为了将oracle错误与实际恢复的错误进行比较，我们绘制了oracle错误乘以1.68的图像。我们还注意到，在我们的实验中，rms误差从不大于。

没有人能预测天气。我们用一个实际的例子来结束数值部分。我们从网站[1]检索到一个366X1472矩阵，其条目是2008年全球1472个不同气象站的日平均气温。检验其SVD后发现，这是一个近似低秩矩阵。事实上,令M为温度矩阵，称为通过SVD分解得到的矩阵，其中。

我们首先测试了上述不一致假设是否得到了满足。由于M2包含几乎所有的能量,我们测量B的M2的奇异向量,发现我们认为这已经是小的了。

为了测试我们的矩阵补全算法的性能，我们对M的30%进行子采样，然后使用(IV.1)恢复估计的。注意，这与本节前面提出的问题有很大不同。在这里，我们试图恢复一个矩阵，它不是低秩的，但只是近似的。解决方案的相对误差为。这里有一个很好的交叉验证错误，大约是535。

**V.讨论**

本文综述和发展了有关矩阵补全的一些新成果。总的来说，低秩矩阵恢复是一个完全处于起步阶段的领域，充满了有趣和开放的问题。这一领域很可能在未来几年经历巨大的增长。

在信息论的层次上，我们想知道是否可以从一些一般的线性泛函中恢复低秩矩阵。例如，从，其中A是一个线性映射。在这个方向上，我们想挑出Recht等人[29]的原始结果，他们利用压缩感知文献中的技术和证明：如果每个测量都是的形式;在习中，其中是一个独立同分布的高斯变量数组(压缩感知)，那么通过启发式核范数就能从阶为这样的随机测量中恢复秩为r的矩阵。

在计算级别，我们希望有一套有效的算法，用于在凸约束下最小化核范数，并且通常用于寻找服从凸约束的低秩矩阵。在某些情况下具有令人印象深刻的性能的算法已经被提出了[9]、[27]，但是用数百万甚至数十亿未知数解决问题的计算挑战显然仍然需要大量的研究。

**参考文献**

[1] National Climatic Data Center. [Online]. Available: http://www.ncdc.noaa.gov/oa/ ncdc.html

[2] IEEE Signal Processing Mag. (Special Issue on Sensing, Sampling, and Compression), vol. 25, Mar. 2008.

[3] Y. Amit, M. Fink, N. Srebro, and S. Ullman, BUncovering shared structures in multiclass classification,[ in Proc. 24th Int. Conf. Machine Learn., 2007.

[4] A. Argyriou, T. Evgeniou, and M. Pontil, BMulti-task feature learning,[ Neural Inf. Process. Syst., 2007.

[5] Y. Azar, A. Fiat, A. Karlin, F. McSherry, and J. Saia, BSpectral analysis of data,[ in Proc. 33rd Annu. ACM Symp. Theory Comput., New York, 2001, pp. 619–626.

[6] C. Beck and R. D’Andrea, BComputational study and comparisons of LFT reducibility methods,[ in Proc. Amer. Contr. Conf., 1998.

[7] P. Biswas, T.-C. Lian, T.-C. Wang, and Y. Ye, BSemidefinite programming based algorithms for sensor network localization,[ ACM Trans. Sens. Netw., vol. 2, no. 2, pp. 188–220, 2006.

[8] J.-F. Cai, E. J. Cande`s, and Z. Shen, BA singular value thresholding algorithm for matrix completion,’’ submitted for publication.

[9] J.-F. Cai, E. J. Cande`s, and Z. Shen. (2008). A singular value thresholding algorithm for matrix completion, Tech. Rep. [Online]. Available: http://arxiv.org/abs/0810.3286

[10] E. J. Cande`s and B. Recht, BExact matrix completion via convex optimization,[ Found. Comput. Math., to be published.

[11] E. J. Cande`s, J. Romberg, and T. Tao, BRobust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information,[ IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 52, no. 2, pp. 489–509, 2006.

[12] E. J. Cande`s and T. Tao, BDecoding by linear programming,[ IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 51, no. 12, pp. 4203–4215, 2005.

[13] E. J. Cande`s and T. Tao, BThe Dantzig selector: Statistical estimation when p is much larger than n,[ Ann. Statist., vol. 35, 2007.

[14] E. J. Cande`s and T. Tao. (2009). The power of convex relaxation: Near-optimal matrix completion, Tech. Rep., submitted for publication. [Online]. Available: http://arxiv. org/abs/0903.1476

[15] P. Chen and D. Suter, BRecovering the missing components in a large noisy low-rank matrix: Application to SFM source,[ IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell., vol. 26, no. 8, pp. 1051–1063, 2004.

[16] A. L. Chistov and D. Y. Grigoriev, BComplexity of quantifier elimination in the theory of algebraically closed fields,[ in Proc. 11th Symp. Math. Found. Comput. Sci., vol. 176, Lecture Notes in Computer Science, 1984, pp. 17–31.

[17] D. Donoho, BFor most large underdetermined systems of linear equations, the minimal L1-norm solution is also the sparsest solution,[ Commun. Pure Appl. Math., vol. 59, no. 6, Jun. 2006.

[18] D. L. Donoho and J. Tanner, BCounting faces of randomly-projected polytopes when the projection radically lowers dimension,[ J. Amer. Math. Soc., to be published. [19] M. Fazel, BMatrix rank minimization with applications,[ Ph.D. dissertation, Stanford Univ., Stanford, CA, 2002.

[20] M. Fazel, E. Cande`s, B. Recht, and P. Parrilo, BCompressed sensing and robust recovery of low rank matrices,’’ in Proc. 2008 42nd Asilomar Conf. Signals, Syst. Comput., Pacific Grove, CA, Oct. 2008.

[21] M. Fazel, H. Hindi, and S. Boyd, BLog-det heuristic for matrix rank minimization with applications to Hankel and Euclidean distance matrices,[ in Proc. Amer. Contr. Conf., Jun. 2003.

[22] A. Gilbert, S. Muthukrishnan, and M. Strauss, BImproved time bounds for near-optimal sparse Fourier representation,[ in Proc. Wavelets XI SPIE Opt. Photon., San Diego, CA, 2005.

[23] D. Goldberg, D. Nichols, B. M. Oki, and D. Terry, BUsing collaborative filtering to weave an information tapestry,[ Commun. ACM, vol. 35, pp. 61–70, 1992.

[24] R. Keshavan, S. Oh, and A. Montanari, BMatrix completion from a few entries,[ in Proc. ISIT’09, 2009, submitted for publication.

[25] R. H. Keshavan, A. Montanari, and S. Oh. (2009). Matrix completion from noisy entries. [Online]. Available: http://arxiv.org/ abs/0906.2027

[26] Z. Liu and L. Vandenberghe, BInterior-point method for nuclear norm approximation with application to system identification,’’ submitted for publication. [27] S. Ma, D. Goldfarb, and L. Chen, BFixed point and Bregman iterative methods for matrix rank minimization,’’ Tech. Rep., 2008.

[28] M. Mesbahi and G. P. Papavassilopoulos, BOn the rank minimization problem over a positive semidefinite linear matrix inequality,[ IEEE Trans. Autom. Control, vol. 42, no. 2, pp. 239–243, 1997.

[29] B. Recht, M. Fazel, and P. Parrilo, BGuaranteed minimum rank solutions of matrix equations via nuclear norm minimization,’’ submitted for publication.

[30] R. O. Schmidt, BMultiple emitter location and signal parameter estimation,[ IEEE Trans. Antennas Propag., vol. 34, no. 3, pp. 276–280, 1986.

[31] A. Singer, BA remark on global positioning from local distances,[ Proc. Nat. Acad. Sci. USA, vol. 105, no. 28, pp. 9507–9511, 2008.

[32] A. Singer and M. Cucuringu, BUniqueness of low-rank matrix completion by rigidity theory,’’ submitted for publication.

[33] C. Tomasi and T. Kanade, BShape and motion from image streams under orthography: A factorization method,[ Int. J. Computer. Vision, vol. 9, no. 2, pp. 137–154, 1992.

[34] M. Vetterli, P. Marziliano, and T. Blu, BSampling signals with finite rate of innovation,[ IEEE Trans. Signal Process., vol. 50, no. 6, pp. 1417–1428, 2002.

[35] C. C. Weng and P. P. Vaidyanathan, BMatrix completion for DOA estimation,[ Unpublished.