Obliczenia naukowe
Lista 3

Joanna Szołomicka

2019-11-23

1 Zadania 1 - 3

1.1 Opis problemu

Znalezienie miejsca zerowego zadanej funkcji $f(x)$ z określoną dokładnością obliczeń. Wszystkie poniższe algorytmy znajdują jedno miejsce zerowe funkcji.

1.1.1 Metoda Bisekcji

Dane:

`f`	–	funkcja $f(x)$ zadana jako anonimowa funkcja (ang. anonymous function),
`a, b`	–	końce przedziału początkowego,
`delta, epsilon`	–	dokładności obliczeń,

Wyniki:

`(r,v,it,err)`	–	czwórka, gdzie
`r`	–	przybliżenie pierwiastka równania $f(x) = 0$,
`v`	–	wartość $f(r)$,
`it`	–	liczba wykonanych iteracji,
`err`	–	sygnalizacja błędu 0 - brak błędu 1 - funkcja nie zmienia znaku w przedziale [a,b]

Metoda bisekcji (połowienia przedziału) wykorzystuje twierdzenie Bolzana-Cauchy'ego, które mówi, że:
jeżeli funkcja ciągła $f(x)$ ma na końcach przedziału domkniętego $[a, b]$ wartości różnych znaków $f(a) * f(b) < 0$, to wewnątrz tego przedziału, istnieje co najmniej jeden pierwiastek równania $f(x) = 0$.
Algorytm działa w następujący sposób. Jeśli $f(a)f(b) < 0$, to obliczany jest środek przedziału $r = \frac{1}{2}(a + b)$. Jeżeli $f(a)f(r) < 0$ to f ma miejsce zerowe w przedziale $[a, r]$, wtedy pod b zostaje podstawione r. W przeciwnym wypadku miejsce zerowe znajduje się w przedziale $[r, b]$ i pod a zostaje podstawione r. W ten sposób powstaje nowy przedział $[a, b]$, który jest dwa razy krótszy i w którym znajduje się miejsce zerowe funkcji f. Algorytm jest powtarzany dla nowego przedziału, kończy działanie gdy błąd jest dostatecznie mały lub $f(r)$ jest dostatecznie bliskie 0 (w granicy zadanej dokładności obliczeń).
Zmiana znaku funkcji jest sprawdzana za pomocą nierówności $sign(w) \neq sign(u)$, aby uniemożliwić wystąpienie błędu spowodowanego niedomiarem lub nadmiarem wyniku mnożenia. Środek przedziału r jest obliczany ze wzoru $r = a + (b - a)/2$, zamiast ze wzoru $r = \frac{1}{2}(a + b)$, który mógłby spowodować, że r znalazłby się poza przedziałem $[a, b]$.

1.1.2 Metoda Newtona

Dane:

`f, pf`	–	funkcja $f(x)$ oraz pochodna $f'(x)$ zadane jako anonimowe funkcja
`x0`	–	przybliżenie początkowe,
`delta, epsilon`	–	dokładności obliczeń,
`maxit`	–	maksymalna dopuszczalna liczba iteracji,

Wyniki:

`(r,v,it,err)`	–	czwórka, gdzie
`r`	–	przybliżenie pierwiastka równania $f(x) = 0$,
`v`	–	wartość $f(r)$,
`it`	–	liczba wykonanych iteracji,
`err`	–	sygnalizacja błędu 0 - brak błędu 1 - nie osiągnięto wymaganej dokładności w maxit iteracji 2 - pochodna bliska zeru

Metoda Newtona (stycznych) zakłada, że funcja f spełnia następujące założenia:

1. w przedziale $[a, b]$ znajduje się jeden pierwiastek
2. funkcja ma różne znaki na krańcach przedziału $[a, b]$
3. $f'(x)$ i $f''(x)$ mają stały znak w przedziale $[a, b]$

Przebieg algorytmu jest następujący. Wybierany jest punkt x_0, z którego wyprowadzana jest styczna w punkcie $f(x_0)$. Odcięta punktu przecięcia z osią OX x_1 jest przybliżeniem miejsca zerowego funkcji f. Jeżeli odległość $|x_0 - x_1|$ lub wartość funkcji $f(x_1)$ są większe niż dokładność obliczeń operacja jest powtarzana dla nowego punktu startowego x_1. Każdy kolejny punkt jest wyliczany wg wzoru $x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Jeżeli nie otrzymamy wyniku po zadanej maksymalnej liczbie iteracji lub pochodna $f'(x)$ jest bliska 0 zwracany jest błąd.

1.1.3 Metoda siecznych

Dane:

`f`	–	funkcja $f(x)$ zadana jako anonimowa funkcja
`x0, x1`	–	przybliżenia początkowe,
`delta, epsilon`	–	dokładności obliczeń,
`maxit`	–	maksymalna dopuszczalna liczba iteracji,

Wyniki:

`(r,v,it,err)`	–	czwórka, gdzie
`r`	–	przybliżenie pierwiastka równania $f(x) = 0$,
`v`	–	wartość $f(r)$,
`it`	–	liczba wykonanych iteracji,
`err`	–	sygnalizacja błędu
		0 - brak błędu
		1 - nie osiągnięto wymaganej dokładności w maxit iteracji

Metoda siecznych jest metodą interpolacji liniowej,która polega na zastąpieniu f funkcją liniową - sieczną (jest to możliwe na dostatecznie małym odcinku). Za przybliżoną wartość pierwiastka przyjmujemy punkt przecięcia siecznej z osią OX. Pierwiastki są wyliczane z następującego wzoru: $x_{n+1} := x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$. Metoda siecznych wynika bezpośrednio z metody Newtona, gdzie zamiast wyliczania pochodnej $f'(x)$ liczone jest jej przybliżenie $f'(x) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$. Metoda jest wolniej zbieżna od metody Newtona, jednak wymaga obliczenia jednej wartości ($f(x)$) zamiast dwóch, jak w metodzie Newtona ($f(x)$ i $f'(x)$). Algorytm kończy działanie gdy odległość $|x_0 - x_1|$ lub wartość funkcji $f(x_1)$ są mniejsze niż dokładność obliczeń operacja. Jeżeli nie otrzymamy wyniku po zadanej maksymalnej liczbie iteracji zwracany jest błąd.

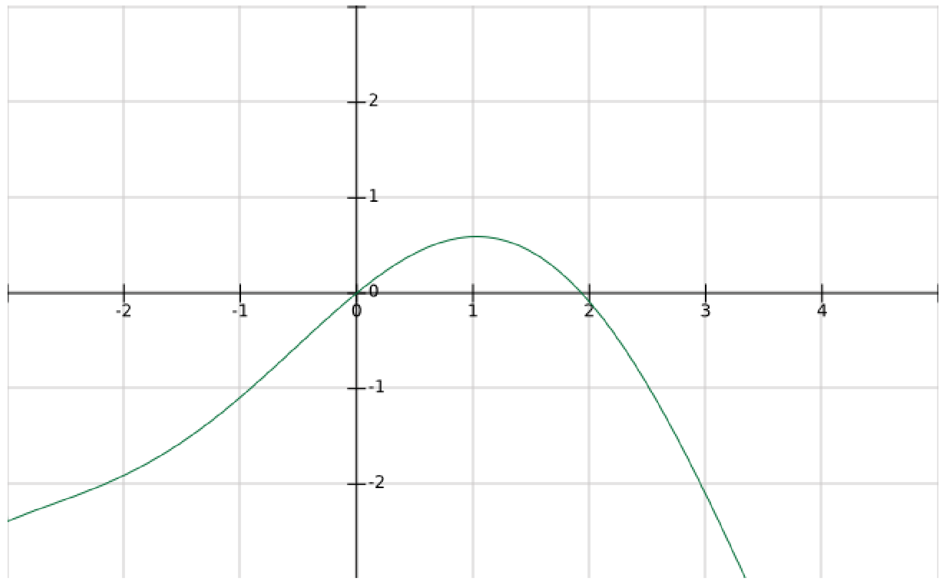
2 Zadanie 4

2.1 Opis problemu

Zadanie polega na wyznaczaniu pierwiastka równania $\sin x - (\frac{1}{2}x)^2 = 0$ z użyciem metod:

1. bisekcji w przedziale początkowym $[1.5, 2.0]$,
2. Newtona z przybliżeniem początkowym $x_0 = 1.5$,
3. siecznych z przybliżeniami początkowymi $x_0 = 1.0, x_1 = 2.0$.

Dokładości obliczeń dla wszystkich metod: $\delta = \frac{1}{2}10^{-5}$ oraz $\epsilon = \frac{1}{2}10^{-5}$.



Rysunek 1: $\sin x - (\frac{1}{2}x)^2 = 0$

2.2 Wyniki

Metoda	**Miejsce zerowe** x_r	**Wartość funkcji** $f(x_r)$	**Liczba iteracji**
Bisekcji	1.9337539672851562	$-2.702\,768\,013\,840\,284\,3 \times 10^{-7}$	16
Newtona	1.933753779789742	$-2.242\,331\,631\,485\,683\,4 \times 10^{-8}$	4
Siecznych	1.933753644474301	$1.564\,525\,129\,449\,379 \times 10^{-7}$	4

Tabela 4: Miejsca zerowe funkcji $\sin x - (\frac{1}{2}x)^2 = 0$.

2.3 Wnioski

Wyniki pokazują zbieżność poszczególnych metod. Metodą bisekcji wynik został otrzymany po 16 iteracjach, zaś metodami Newtona i siecznych już po 4. Metoda bisekcji ma zbieżność liniową, zaś metoda Newtona kwadratową. Metoda Newtona daje najdokładniejszy wynik, jednak koszt obliczeń jest większy niż przy metodzie siecznych (wyliczane są dwie wartości zamiast jednej). Metoda siecznych jest jednak wolniej zbieżna niż metoda Newtona.

3 Zadanie 5

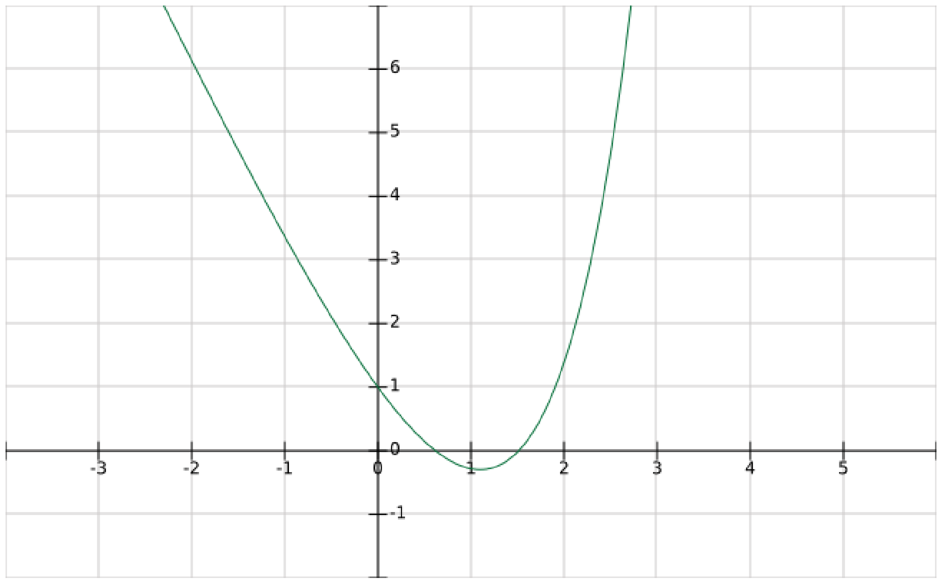
3.1 Opis problemu

Zadanie polega na znalezieniu, przy użyciu metody bisekcji, wartości zmiennej x, dla której przecinają się wykresy funkcji $y = 3x$ oraz $y = e^x$. Dokładość obliczeń: $\delta = 10^{-4}$ oraz $\epsilon = 10^{-4}$.

3.2 Rozwiązanie

Wykresy funkcji $y = 3x$ oraz $y = e^x$ przecinają się w miejscach zerowych funkcji $f(x) = e^x - 3x$. Przedziały funkcji zostały znalezione w sposób eksperymentalny i są to: $[0, 1]$ oraz $[1, 2]$.

3.3 Wyniki



Rysunek 2: $\sin x - (\frac{1}{2}x)^2 = 0$

Przedział	Miejsce przecięcia funkcji x_r	Wartość funkcji $f(x_r)$	Liczba iteracji
$[0, 1]$	0.619140625	$-9.066\,320\,343\,276\,146 \times 10^{-5}$	9
$[1, 2]$	1.5120849609375	$-7.618\,578\,602\,741\,621 \times 10^{-5}$	13

Tabela 5: Miejsca przecięcia funkcji $y = 3x$ oraz $y = e^x$.

3.4 Wnioski

Metodę bisekcji można stosować tylko dla przedziału, gdzie znajduje się jedno miejsce zerowe. Błędnie dobrane przedziały powodują zwrócenie błędu. Analiza wykresu funkcji pozwala na odpowiednie dobranie przedziału. W tym przypadku miejsca zerowe są położone blisko siebie, wybranie przedziału $[0, 2]$ wygenerowałoby błąd.

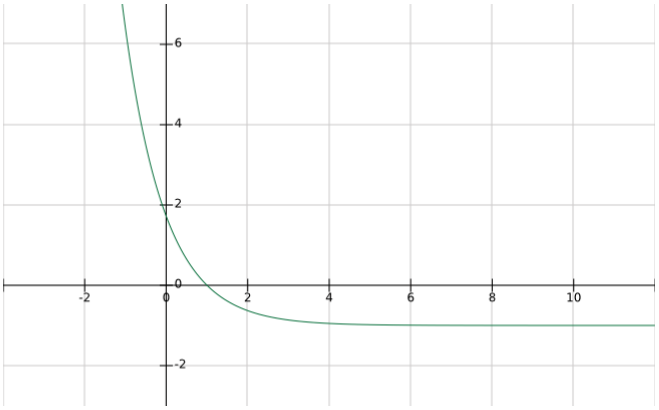
4 Zadanie 6

4.1 Opis problemu

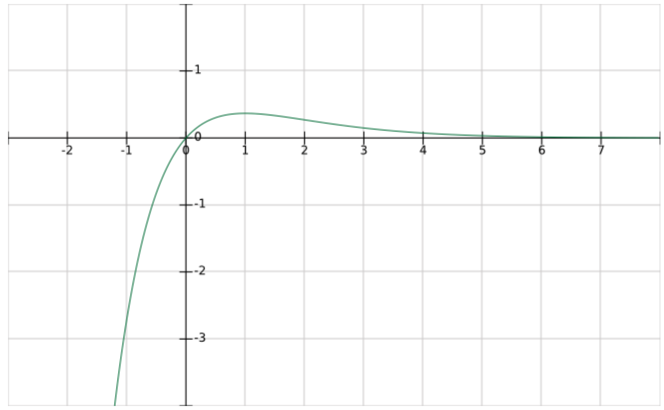
Zadanie polega na znalezieniu pierwiastków funkcji $f_1(x) = e^{1-x} - 1$ oraz $f_2(x) = xe^{-x}$ przy pomocy metod bisekcji, stycznych oraz siecznych z dokładnością obliczeń $\delta = 10^{-5}$ oraz $\epsilon = 10^{-5}$.

4.2 Rozwiązanie

W rozwiązaniu zostały obliczone pochodne podanych funkcji $f_1'(x) = -e^{1-x}$ oraz $f_2'(x) = e^{-x} - x * e^{-x}$. Przedziały i przybliżenia początkowe zostały dobrane na podstawie analizy wykresów funkcji.



Rysunek 3: $f_1(x) = e^{1-x} - 1$.



Rysunek 4: $f_2(x) = xe^{-x}$.

4.3 Wyniki

Przedział	r	$f(r)$	Liczba iteracji
		f_1	
$[0.15, 1.5]$	1.0	0.0	1
$[0.5, 3.0]$	$0.999\,992\,370\,605\,468\,8$	$7.629\,423\,635\,080\,457 \times 10^{-6}$	16
$[-2.0, 4.0]$	1.0	0.0	1
$[-2.0, 50.0]$	$0.999\,999\,046\,325\,683\,6$	$9.536\,747\,711\,536\,009 \times 10^{-7}$	22
$[-100.0, 1000.0]$	$1.000\,002\,026\,557\,922\,4$	$-2.026\,555\,868\,894\,775 \times 10^{-6}$	25
		f_2	
$[-1.0, 1.0]$	0.0	0.0	1
$[-0.3, 2.0]$	$-6.103\,515\,625\,012\,067 \times 10^{-6}$	$-6.103\,552\,878\,028\,74 \times 10^{-6}$	14
$[-2.0, 8.0]$	$7.629\,394\,531\,25 \times 10^{-6}$	$7.629\,336\,323\,811\,13 \times 10^{-6}$	18
$[-2.0, 50.0]$	24.0	$9.060\,322\,906\,269\,835 \times 10^{-10}$	1
$[-100.0, 1000.0]$	450.0	$1.662\,247\,380\,819\,265\,2 \times 10^{-193}$	1

Tabela 6: Miejsca zerowe f_1 i f_2 obliczone za pomocą metody bisekcji.

4.4 Wnioski

Analizując wyniki dla metody bisekcji przedstawionych w tabeli 6 można stwierdzić, że dla funkcji f_1 metoda pozwala uzyskać prawidłowe wyniki (miejsce zerowe funkcji równe 0) nawet dla bardzo dużych przedziałów. Przy dużych przedziałach wykonuje większą liczbę iteracji.Przy obliczaniu zer funkcji f_2 można zauważyć, że dla niektórych przedziałów metoda daje błędne wyniki. Miejsce zerowe funkcji jest równe 1. Funkcja f_2 dążąc do nieskończoności osiąga wartość 0. Z tego powodu przy dużym przedziale obliczenia kończą się po jednej iteracji, gdyż wartość będzie wystarczająco bliska zera, ale będzie daleko od miejsca zerowego funkcji.

Wyniki uzyskane za pomocą metody Newtona przedstawione w tabeli 7 pokazują, że dla f_1 przy wartościach bardziej oddalonych od zera ($x_0 = 5.0$)liczba iteracji znacznie rośnie.Dla $x_0 = 8.0$ metoda staje się rozbieżna (po 100000 iteracji pierwiastek nie został znaleziony). Funkcja f_1 od pewnego momentu jest prawie stała, więc jej pochodna osiąga wartość w przybliżeniu równą zeru przez co nie można zastosować metody Newtona. W przypadku funkcji f_2 pochodna jest równa zero, gdy $x_0 = 1$, a dla każdego $x_0 > 1.0$ metoda znajduje wartość dostatecznie bliską zeru odległą od miejsca zerowego, czego przyczyną jest granica f_2 równa 0 w nieskończoności.

Wyniki dla metody siecznych znajdujące się w tabeli 8 pozwalają zauważyć, że dla funkcji f_1 dla dużych różnic między x_0 i x_1 występuje rozbieżność podobna jak w metodzie Newtona, po dużej liczbie iteracji pierwiastek nie został odnaleziony. Dla funkcji f_2 podobnie jak dla metody Newtona, przy odpowiednio odległych od miejsca zerowego przybliżeń początkowych metoda znajduje punkty dostatecznie bliskie zera, ale oddalone od faktycznego miejsca zerowego przez granicę funkcji w nieskończoności równą 0.

x_0	r	$f(r)$	Liczba iteracji	Błąd
		f_1		
-1.5	0.999 999 933 060 043 6	$6.693\,995\,868\,722\,88 \times 10^{-8}$	6	0
0.0	0.999 998 435 889 210 1	$1.564\,112\,013\,019\,425\,3 \times 10^{-6}$	4	0
1.0	1.0	0.0	0	0
1.5	0.999 999 998 473 621 5	$1.526\,378\,579\,086\,440\,4 \times 10^{-9}$	4	0
3.0	0.999 999 971 078 324 1	$2.892\,167\,638\,712\,806 \times 10^{-8}$	9	0
5.0	0.999 999 642 709 568 2	$3.572\,904\,956\,339\,329 \times 10^{-7}$	54	0
8.0	—	—	—	1
14.0	—	—	—	2
		f_2		
-2.5	$-3.308\,419\,759\,333\,021\,8 \times 10^{-6}$	$-3.308\,430\,704\,992\,432\,5 \times 10^{-6}$	7	0
-1.5	$-4.179\,471\,505\,824\,173 \times 10^{-8}$	$-4.179\,471\,680\,503\,997 \times 10^{-8}$	6	0
0.0	0.0	0.0	0	0
0.4	$-8.878\,980\,981\,560\,664 \times 10^{-6}$	$-8.879\,059\,818\,213\,929 \times 10^{-6}$	4	0
1.0	—	—	—	2
1.5	14.787 436 802 837 927	$5.594\,878\,975\,694\,858 \times 10^{-6}$	10	0
4.0	14.398 662 765 680 003	$8.036\,415\,344\,217\,211 \times 10^{-6}$	9	0
10.0	14.380 524 159 896 261	$8.173\,205\,649\,825\,554 \times 10^{-6}$	4	0
20.0	—	—	—	2

Tabela 7: Miejsca zerowe f_1 i f_2 obliczone za pomocą metody stycznych.

x_0	x_1	r	$f(r)$	Liczba iteracji	Błąd
			f_1		
-1.0	1.5	0.999 990 864 280 124 5	$9.135\,761\,606\,327\,009 \times 10^{-6}$	5	0
0.0	0.5	0.999 999 813 332 765 7	$1.866\,672\,516\,559\,475\,5 \times 10^{-7}$	5	0
-4.0	6.0	5.933 071 490 757 151	−0.992 795 658 803 915 5	3	0
-10.0	20.0	19.999 498 948 979 1	−0.999 999 994 394 395 6	3	0
-10.0	100.0	—	—	—	1
			f_2		
-1.0	2.0	14.310 428 368 676 307	$8.723\,937\,789\,263\,39 \times 10^{-6}$	15	0
-0.8	6.0	$1.391\,275\,809\,356\,907\,9 \times 10^{-8}$	$1.391\,275\,790\,000\,424\,3 \times 10^{-8}$	8	0
-4.0	6.0	14.814 772 287 332 264	$5.454\,075\,247\,737\,648 \times 10^{-6}$	12	0
-10.0	100.0	100.0	$3.720\,075\,976\,020\,836\,3 \times 10^{-42}$	1	0

Tabela 8: Miejsca zerowe f_1 i f_2 obliczone za pomocą metody siecznych.