# The 2nd Guangxi Collegiate Programming Contest Editorial

2019 年 5 月 19 日

# Overview

| | Easiest | | | | | | | | | | | Hardest |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Idea | L | A | E | C | I | F | K | G | J | B | D | H |
| Coding | L | A | I | F | C | K | G | E | B | D | J | H |
| Summary | L | A | E | C | I | F | K | G | B | J | D | H |

# L. Map Tiles

Shortest Judge Solution: 370 Bytes

# Description

给定一个 $w \times h$ 的字符矩阵，找到可以拼出它的最小方阵。

- $w \le 200$。
- $h \le 200$。

# Solution

- 枚举方阵的边长，暴力 $O(wh)$ 判断。
- 时间复杂度 $O((w+h)wh)$。

# A. Scoring Board

Shortest Judge Solution: 372 Bytes

# Description

给定 $n$ 条评测结果，打印榜单上应该显示的样子。

- $n \leq 50$。

# Solution

- 按照题意模拟。

# E. Toy Cars

Shortest Judge Solution: 845 Bytes

# Description

给定数轴上 $n$ 条线段，$m$ 次移动某条线段，或者查询某条线段的位置。

移动线段的时候会推动其它线段。

- $n, m \leq 2000$。

# Solution

- 对于往左推动的操作，从右往左依次更新每条线段的位置。
- 对于往右推动的操作，从左往右依次更新每条线段的位置。
- 时间复杂度 $O(nm)$。

# C. Catering

Shortest Judge Solution: 531 Bytes

# Description

给定 $n$ 对正数 $(a_i, b_i)$，选择最多对数，使得 $\sum a_i \geq \max(b_i)$。

- $n \leq 100000$。

# Solution

- 考虑全选的情况。
- $b$ 最大的最不容易满足。
- 不断扔掉 $b$ 最大的且不满足的数对。
- 时间复杂度 $O(n \log n)$。

# I. Permutation

Shortest Judge Solution: 386 Bytes

# Description

给定 $n$ 和 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，统计有多少 $n$ 的排列 $p$ 满足 $p_i \leq a_i$。

- $n \leq 100000$。

## Solution

- 将 $a$ 从小到大排序。
- $ans = \prod_{i=1}^{n}(a_i - i + 1)$。
- 时间复杂度 $O(n \log n)$。

# F. Factorization

Shortest Judge Solution: 495 Bytes

## Description

给定 $T$ 个 $n$，对于每个 $n$ 求出 $n$ 的所有质因子的指数的最大公约数。

- $T \leq 10000$。
- $n \leq 10^{18}$。

# Solution

- 答案显然是 $O(\log n)$ 级别。
- 枚举最大公约数 $d$，若 $n$ 开 $d$ 次根是整数，则合法。
- 用实数找到 $d$ 次根，判断附近的整数的 $d$ 次方是否等于 $n$。
- 时间复杂度 $O(T\log^2 n)$。

# K. Math Expression

Shortest Judge Solution: 582 Bytes

# Description

给定 $n$ 个数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 和 $k$。

在 $n-1$ 对相邻的 $a_i$ 和 $a_{i+1}$ 之间填上加号或者乘号，求有多少种填法使得这个算式的值是 $k$ 的倍数。

- $n, k \le 300$。

## Solution

- 值是 $k$ 的倍数等价于值 $\bmod k = 0$。
- 设 $w_{i,j}$ 表示 $[i, j]$ 的乘积 $\bmod k$ 的结果。
- 设 $f_{i,j}$ 表示考虑了前 $i$ 个数，算式的值 $\bmod k = j$ 的方案数。
- 枚举 $i$ 所在那段连续的乘法区间的左端点 $x$，有 $f_{i,j} = \sum f_{x-1,(j-w_{x,i}) \bmod k}$。
- 时间复杂度 $O(n^2 k)$。

# G. Guess the Number

Shortest Judge Solution: 765 Bytes

# Description

你需要猜 $n$ 个数 $f_1, f_2, \ldots, f_n$。
你可以花 $c_x$ 元钱去购买 $f_x$ 的值。
你也可以花 $w$ 元钱去购买 $f_u - f_v$ 的值。
求最少花费。

- $n \leq 100000$。
- $m \leq 200000$。

## Solution

- 引入 $f_0 = 0$，则花 $c_x$ 元钱去购买 $f_x$ 的值可以看作购买 $f_x - f_0$ 的值。
- 建立一张 $n+1$ 个点 $0, 1, 2, \ldots, n$ 的无向图。
- 对于一条信息 $(u, v, w)$，连边 $(u, v)$，权值为 $w$。
- 成环的信息无用，且要让所有点和 $0$ 连通。
- 求最小生成树即可。
- 时间复杂度 $O((n+m)\log(n+m))$。

# B. Boxes

Shortest Judge Solution: 1367 Bytes

# Description

给定空间中 $n$ 个边平行坐标轴的长方体，判断是否存在两个长方体有公共部分。

保证所有长方体的长都是 $dx$，宽都是 $dy$，高都是 $dz$。

- $n \leq 100000$。

# Solution

- 将左下角为 $(x, y, z)$ 的长方体放入格子 $(\lfloor \frac{x}{dx} \rfloor, \lfloor \frac{y}{dy} \rfloor, \lfloor \frac{z}{dz} \rfloor)$ 中。
- 一个格子若有多个长方体，那么它们必然存在公共部分。
- 否则每个长方体只会和附近 26 个格子中的长方体相交，暴力判断即可。
- 利用 Hash 表可以做到 $O(n)$。

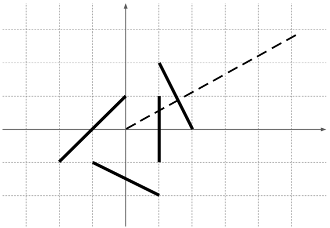
# J. Shooting Game

Shortest Judge Solution: 2165 Bytes

# Description

给定平面上 $n$ 条带价值的线段。

找到最小的 $k$ 使得仅保留前 $k$ 条线段后，存在一个最佳射击角度，从 $(0,0)$ 沿着该角度往无穷远处射击所碰到的所有线段的价值和不少于 $m$。



- $n \le 100000$。

# Solution

- 将每条线段的两端点作为事件点 (加入线段或者删除线段)，对所有事件点进行极角排序。
- 二分答案，按极角序依次考虑每个事件，判断是否合法。
- 需要小心处理极角相同的情况。
- 时间复杂度 $O(n \log n)$。

# D. Distance

Shortest Judge Solution: 1433 Bytes

## Description

给定一棵 $n$ 个点的完全二叉树，每条边长度都是 $1$。

$m$ 次操作，每次要么删掉一条边，要么询问有多少点对仍然连通且最短路不超过 $k$。

- $n \leq 100000$。
- $m \leq 100000$。

# Solution

- 记录每条边被删除的时间。
- 设 $cnt_{i,j}$ 表示有多少边数恰好为 $j$ 的路径的删除时间的最小值恰好为 $i$。
- 则对于第 $i$ 个询问，$ans = \sum cnt_{\geq i, \leq k}$，对 $cnt$ 求出前缀和即可。

## Solution

- 考虑如何求出 $cnt_{i,j}$。
- 枚举路径的最近公共祖先 $x$，求出 $x$ 的所有子节点 $u$ 到 $x$ 路径上的删除时间最小值 $a_u$ 以及经过的边数 $b_u$。
- 将所有点 $u$ 按照 $a_u$ 从大到小排序。
- 依次考虑每个 $u$ 的 $a_u$ 作为路径最小值的情况。
- 设 $s_j$ 表示在 $u$ 之前有多少点 $v$ 满足 $b_v = j$，枚举所有 $j$，对 $cnt_{a_u, j+b_u}$ 的贡献为 $s_j$。
- 完全二叉树的情况下总时间复杂度为 $O(n \log^2 n + m \log n)$。

# H. Treasure Hunting

Shortest Judge Solution: 2292 Bytes

# Description

给定 $n$ 个数对 $(p_i, v_i)$ 和一个整数 $k$。

对于每个长度为 $k$ 的区间 $[l, l+k-1]$，计算不考虑该区间内的数对时，剩下数对里 $p$ 值不下降的子序列的 $v$ 总和的最大值。

- $n \leq 100000$。

## Solution

- 设 $f_i$ 表示考虑 $[1, i]$ 这些数对且选了 $i$ 的情况下 $v$ 总和的最大值；$g_i$ 表示考虑 $[i, n]$ 这些数对且选了 $i$ 的情况下 $v$ 总和的最大值。
- 可以通过树状数组优化 DP 在 $O(n \log n)$ 时间内求出。

# Solution

- 首先计算 $[1, k]$ 的答案，即为 $\max(g_i)$，其中 $i > l$，并删除 $g_1, g_2, \ldots, g_{k-1}$。
- 考虑从 $[l, l+k-1]$ 推到 $[l+1, l+k]$。
- $ans = \max(f_1, f_2, \ldots, f_l)$ 或者 $\max(f_i + g_j)$，其中 $i \le l, j > l + k$ 且 $p_i \le p_j$。
- 当 $l$ 增加 1 时需要删除 $g_{l+k-1}$，并且需要加入 $f_l$ 的影响。
- 考虑 $f_l$ 的影响，即为 $p$ 值位于 $[p_l, n]$ 的所有仍然存在的 $g_j$ 都可以与 $f_l$ 配对。

# Solution

- 将所有 $j$ 按照 $p_j$ 排序，设 $val_i$ 表示排序后第 $i$ 个点能配对的 $f$ 的最大值，则 $ans = \max(val + g)$。
- 建立一棵线段树，加入 $f_l$ 的影响即为将一个后缀的所有 $val$ 都对 $f_l$ 取较大值，线段树上打标记即可。
- 删除一个 $g_j$ 只需要从线段树中单点修改，将对应的点的 $val$ 改成 $-\infty$。
- 线段树维护区间 $g$ 的最大值、区间 $val + g$ 的最大值，以及 $val$ 的懒惰标记。
- 时间复杂度 $O(n \log n)$。

# Thank you!