Nom :	Prénom :	Groupe :	Question :

Durée : 15' — Documents, calculettes, téléphones et ordinateurs interdits

Auto-évaluation											
M Méthode(s)				V Vérification(s)				R Résultat(s)			
3	2	1	0	3	2	1	0	3	2	1	0

Développements limités

Question : Ecrire un algorithme qui calcule $y = f(x)$ en fonction du développement en série entière de la fonction f : $f(x) = \sum u_k$, en respectant les contraintes suivantes :

- les calculs seront arrêtés lorsque la valeur absolue du terme u_k ($|u_k|$) sera inférieure à un certain seuil s (avec $0 < s < 1$) ;
- on n'utilisera ni la fonction *puissance* (x^n) ni la fonction *factorielle* ($n!$) pour effectuer le calcul du développement.

1. $$\arcsin(x) \approx x + \sum_{k=1}^{n} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2k-1)}{2 \times 4 \cdots \times 2k} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} =$$
$$x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \cdots \times 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad \forall x \in]-1;1[$$

2. $$\arccos(x) \approx \frac{\pi}{2} - x - \sum_{k=1}^{n} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1) x^{2k+1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k) \cdot (2k+1)} =$$
$$\frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{2 \cdot 3} - \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} - \cdots - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) x^{2n+1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n) \cdot (2n+1)} \qquad \forall x \in]-1;1[$$

3. $$\arctan(x) \approx \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

4. $$\frac{1}{1+x} \approx \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n \qquad \forall x \in]-1;1[$$

5. $$\frac{1}{1-x} \approx \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n \qquad \forall x \in]-1;1[$$

6. $$\frac{1}{1+x^2} \approx \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} \qquad \forall x \in]-1;1[$$

7. $$\frac{1}{1-x^2} \approx \sum_{k=0}^{n} x^{2k} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} \qquad \forall x \in]-1;1[$$

8. $$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2k-3)}{2^k} \frac{x^k}{k!} =$$
$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-3)}{2^n} \frac{x^n}{n!} \qquad \forall x \in]-1;1[$$

9. $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \dfrac{1 \times 3 \times \cdots \times (2k-1)}{2 \times 4 \cdots \times 2k} x^k =$
$1 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}\dfrac{3}{4}x^2 - \dfrac{1}{2}\dfrac{3}{4}\dfrac{5}{6}x^3 + \cdots + (-1)^n \dfrac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \cdots \times 2n} x^n \qquad \forall x \in]-1;1[$

10. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \approx \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} x^{2k} = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{3x^4}{8} + \cdots + \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} \qquad \forall x \in]-1;1[$

11. $\dfrac{1}{(a-x)^2} \approx \sum_{k=0}^{n} \dfrac{k+1}{a^{k+2}} x^k = \dfrac{1}{a^2}\left(1 + \dfrac{2x}{a} + \dfrac{3x^2}{a^2} + \cdots + \dfrac{(n+1)x^n}{a^n}\right) \qquad \forall x \in]-|a|;|a|[$

12. $\dfrac{1}{(a-x)^3} \approx \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(k+1)(k+2)}{2a^{k+3}} x^k =$
$\dfrac{1}{a^3}\left(1 + \dfrac{3x}{a} + \dfrac{6x^2}{a^2} + \cdots + \dfrac{(n+1)(n+2)}{2a^n} x^n\right) \qquad \forall x \in]-|a|;|a|[$

13. $\dfrac{1}{(a-x)^5} \approx \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{24a^{k+5}} x^k =$
$\dfrac{1}{a^5}\left(1 + \dfrac{5x}{a} + \dfrac{15x^2}{a^2} + \cdots + \dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{24a^n} x^n\right) \qquad \forall x \in]-|a|;|a|[$

14. $\exp(x) \approx \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

15. $\exp(-x) \approx \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{x^k}{k!} = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^n}{n!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

16. $\log(1+x) \approx \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \dfrac{x^k}{k} = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1} \dfrac{x^n}{n} \qquad \forall x \in]-1;1]$

17. $\log(1-x) \approx \sum_{k=1}^{n} -\dfrac{x^k}{k} = -x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} - \cdots - \dfrac{x^n}{n} \qquad \forall x \in [-1;1[$

18. $\log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = 2\sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^{2k+1}}{2k+1} = 2\left(x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \cdots + \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}\right) \qquad \forall x \in [-1;1[$

19. $\sinh(x) \approx \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + \cdots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

20. $\cosh(x) \approx \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + \cdots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

21. $\arg\sinh(x) \approx x + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \dfrac{1 \times 3 \times \cdots \times (2k-1)}{2 \times 4 \cdots \times 2k} \dfrac{x^{2k+1}}{2k+1} =$
$x - \dfrac{1}{2}\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1}{2}\dfrac{3}{4}\dfrac{x^5}{5} - \dfrac{1}{2}\dfrac{3}{4}\dfrac{5}{6}\dfrac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \dfrac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \cdots \times 2n} \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad \forall x \in]-1;1[$

22. $\arg\tanh(x) \approx \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{2k+1} x^{2k+1} = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} \cdots + \dfrac{1}{2n+1} x^{2n+1} \qquad \forall x \in]-1;1[$

23. $\sin(x) \approx \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

24. $\cos(x) \approx \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

Réponse :