Développements limités

Questions : Ecrire un algorithme qui calcule $y = f(x)$ en fonction du développement en série entière de la fonction f : $f(x) = \sum u_k$, en respectant les contraintes suivantes :

- les calculs seront arrêtés lorsque la valeur absolue du terme u_k ($|u_k|$) sera inférieure à un certain seuil s (avec $0 < s < 1$) ;
- on n'utilisera ni la fonction *puissance* (x^n) ni la fonction *factorielle* ($n!$) pour effectuer le calcul du développement.

D'une manière générale, le code aura l'allure ci-contre. On peut vérifier en comparant la valeur obtenue pour y au calcul direct de la fonction f : $|y - f(x)|$, et ce pour différentes valeurs de x et de s.

```
x, s = 0.25, 1.0e-9
# calcul de f(x)
k, u = k0, u0          # initialisation
y = u
while fabs(u) > s :
    u = g(u,k,x)       # relation de récurrence
    y = y + u
    k = k + 1
# vérification
print(fabs(y - f(x)) < s)
```

1. $\arcsin(x)$

```
k, u = 0, x
y = u
u = u*x*x*(2*k+1)*(2*k+1)/((2*k+2)*(2*k+3))
```

2. $\arccos(x)$

```
k, u = 0, -x
y = pi/2 + u
u = u*x*x*(2*k+1)*(2*k+1)/((2*k+2)*(2*k+3))
```

3. $\arctan(x)$

```
k, u = 0, x
y = u
u = -u*x*x*(2*k+1)/(2*k+3)
```

4. $\dfrac{1}{1+x}$

```
k, u = 0, 1
y = u
u = -u*x
```

5. $\dfrac{1}{1-x}$

```
k, u = 0, 1
y = u
u = u*x
```

6. $\dfrac{1}{1+x^2}$

```
k, u = 0, 1
y = u
u = -u*x*x
```

7. $\dfrac{1}{1-x^2}$

```
k, u = 0, 1
y = u
u = u*x*x
```

8. $\sqrt{1+x}$

```
k, u = 0, 1
y = u
u = -u*x*(2*k-1)/(2*(k+1))
```

9. $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$

```
k, u = 0, 1
y = u
u = -u*x*(2*k+1)/(2*k+2)
```

10. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

```
k, u = 0, 1
y = u
u = u*x*x*(2*k+1)*(2*k+2)/(4*(k+1)*(k+1))
```

11. $\dfrac{1}{(a-x)^2}$

```
k, u = 0, 1/(a*a)
y = u
u = u*x*(k+2)/(a*(k+1))
```

12. $\dfrac{1}{(a-x)^3}$

```
k, u = 0, 1/(a*a*a)
y = u
u = u*x*(k+3)/(a*(k+1))
```

13. $\dfrac{1}{(a-x)^5}$

```
k, u = 0, 1/(a*a*a*a*a)
y = u
u = u*x*(k+5)/(a*(k+1))
```

14. $\exp(x)$

```
k, u = 0, 1
y = u
u = u*x/(k+1)
```

15. $\exp(-x)$

```
k, u = 0, 1
y = u
u = -u*x/(k+1)
```

16. $\log(1+x)$

```
k, u = 1, x
y = u
u = -u*x*k/(k+1)
```

17. $\log(1-x)$

```
k, u = 1, -x
y = u
u = u*x*k/(k+1)
```

18. $\log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

```
k, u = 0, 2*x
y = u
u = u*x*x*(2*k+1)/(2*k+3)
```

19. $\sinh(x)$

```
k, u = 0, x
y = u
u = u*x*x/((2*k+2)*(2*k+3))
```

20. $\cosh(x)$

```
k, u = 0, 1
y = u
u = u*x*x/((2*k+1)*(2*k+2))
```

21. $\arg\sinh(x)$

```
k, u = 0, x
y = u
u = -u*x*x*(2*k+1)*(2*k+1)/((2*k+2)*(2*k+3))
```

22. $\arg\tanh(x)$

```
k, u = 0, x
y = u
u = u*x*x*(2*k+1)/(2*k+3)
```

23. $\sin(x)$

```
k, u = 0, x
y = u
u = -u*x*x/((2*k+2)*(2*k+3))
```

24. $\cos(x)$

```
k, u = 0, 1
y = u
u = -u*x*x/((2*k+1)*(2*k+2))
```