CET006 Álgebra Linear e Geometria Analítica T1

Segunda Avaliação (16/12/2019)

Nome:					
Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	**Nota**

Questão 1. (2,0 pontos) Encontre o conjunto solução da inequação modular

$$|4x-3| > |-5|.$$

Questão 2. (2,0 pontos) Seu projeto pesquisa investiga a população de um inseto em uma região que obedece a seguinte lei de crescimento

$$P(x) = A\,3^{B\,x}$$

onde A e B são constantes que dependem da espécie. Determine o valor das constantes A e B, sabendo que

a população inicial é $P(0) = 9$ e
a população no tempo $x = 2$ meses é de 81.

Questão 3. (2,0 pontos) Resolva a inequação logarítmica

$$\log_2{(x^2)} \leq (\log_2{(x)})^2.$$

Questão 4. (2,0 pontos) Considere os seguintes pontos no plano $\mathbb{R}^2$

$$P = (0, -2), \qquad Q = (1, 7) \qquad \text{e} \qquad R = (-3, 1).$$

(i) (1,0 ponto) Apresente a equação reduzida da reta r que passa pelos pontos P e Q;

(ii) (1,0 ponto) Exiba a equação geral da reta s que passa pelos pontos Q e R.

Questão 5. (2,0 pontos) A partir das retas no plano $\mathbb{R}^2$

$$r\,:\,-6x + 4y - 22 = 0 \qquad \text{e} \qquad s\,:\,y = \frac{3x}{2} + \frac{1}{2},$$

justifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas.

(i) (1,0 ponto) As retas r e s são concorrentes;

(ii) (1,0 ponto) A distância entre as retas r e s é 2.

Prof. João Gomes

• CET006 – Segunda Avaliação – Resolução

Questão 01

Primeiramente, observe que $|-5| = 5$ (0,3 ponto). Basta resolver a inequação modular

$$|4x-3| > 5 \quad (0{,}2 \text{ ponto})$$

que se traduz em duas inequações de primeiro grau

$$\bullet\ 4x-3 > 5 \iff 4x > 5+3 = 8 \qquad (0{,}6 \text{ ponto})$$
$$\iff x > \frac{8}{4} = 2$$

$$\bullet\ 4x-3 < -5 \iff 4x < -5+3 = -2 \qquad (0{,}6 \text{ ponto})$$
$$\iff x < -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

donde temos o conjunto solução

$$S = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (2, +\infty). \quad (0{,}3 \text{ ponto})$$

Questão 02

A partir da primeira informação, temos que

$$9 = P(0) = A.3^{B.0} = A.3^{0} = A.1 = A \qquad (0{,}7 \text{ ponto})$$

logo a lei de crescimento é dada por $P(x) = 9.3^{Bx}$. Já a segunda informação apresentada se escreve como

$$P(2) = 81 \qquad (0{,}3 \text{ ponto})$$

que consiste em uma equação exponencial

$$9.3^{B.2} = P(2) = 81$$

$$\iff 3^{2}3^{2B} = 3^{4} \iff 3^{2B+2} = 3^{4} \qquad (1{,}0 \text{ ponto})$$

$$\iff 2B+2 = 4 \iff 2B = 4-2 = 2$$

$$\iff B = \frac{2}{2} = 1.$$

Por fim, temos a lei do crescimento

$$P(x) = 9.3^{x}.$$

Questão 03

Inicialmente, utilizamos as propriedades de logaritmo para simplificar a expressão

$$\log_2(x^2) \le (\log_2(x))^2 \iff$$

$$\iff 2\log_2(x) \le (\log_2(x))^2$$ (0,2 ponto)

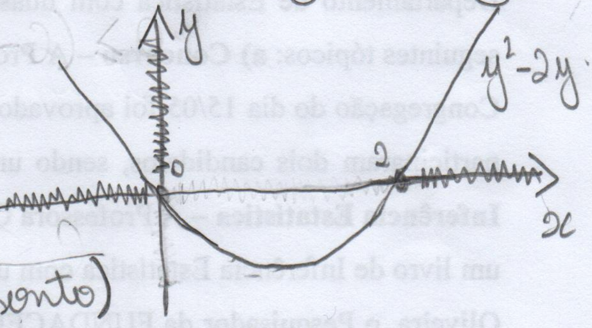
$$\iff (\log_2(x))^2 - 2\log_2(x) \ge 0$$

Por meio de substituição, reduzimos a inequação logarítmica a uma inequação de segundo grau

$$\begin{cases} y^2 - 2y \ge 0 \\ y = \log_2 x \end{cases}$$ (0,3 ponto)

O conjunto solução da inequação de segundo grau é

$$y^2 - 2y \ge 0 \iff$$



$$\iff y(y-2) \ge 0$$

$$\iff y \le 0 \text{ e } y \ge 2$$ (1,0 ponto)

Por fim, podemos retornar à variável original

$$y \le 0 \wedge y \ge 2 \iff \log_2 x \le 0 \text{ e } \log_2 x \ge 2$$

$$\iff 2^{\log_2 x} \le 2^0 \text{ e } 2^{\log_2 x} \ge 2^2$$ (0,5 ponto)

$$\iff x \le 1 \text{ e } x \ge 4$$

Questão 04

i) Note que o ponto $P = (0, -2)$ pertence ao eixo y, logo determina o coeficiente linear da reta r

$$B = -2 \quad (0,4 \text{ ponto})$$

Temos então a equação reduzida $y = Ax - 2$. Para encontrar o coeficiente angular, basta substituir as coordenadas do ponto Q (0,4 ponto)

$$Q = (\underset{x}{1}, \underset{y}{7}) \in r \Longrightarrow 7 = A.1 - 2 \Longrightarrow A = 7 + 2 = 9$$

Segue desta argumentação a equação

$$r: \; y = 9x - 2. \quad (0,2 \text{ ponto})$$

ii) Obteremos a equação geral a partir da equação reduzida. Podemos obter o coeficiente angular do seguinte quociente

$$\begin{matrix} Q = (\overset{x_1}{1}, \overset{y_1}{7}) \\ R = (\underset{x_2}{-3}, \underset{y_2}{1}) \end{matrix} \Longrightarrow A = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 7}{-3 - 1} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2} \quad (0,4 \text{ ponto})$$

donde temos a equação $y = \frac{3}{2}x + B$. Utilizando o ponto R temos que (0,4 ponto)

$$R = (\underset{x}{-3}, \underset{y}{1}) \in s \Longrightarrow 1 = \frac{3}{2}(-3) + B \Longrightarrow B = 1 + \frac{9}{2} = \frac{2 + 9}{2} = \frac{11}{2}$$

Deste modo, obtemos a equação

$$s: y = \frac{3}{2}x + \frac{11}{2} \Longleftrightarrow -3x + 2y - 11 = 0 \quad (0,2 \text{ ponto})$$

Questão 05

i) (Falso)

Precisamos comparar os coeficientes (angular e linear) das equações reduzidas das retas

$r: -6x + 4y - 22 = 0$ (0,2 ponto)

$\iff 4y = 6x + 22$

$\iff y = \frac{6}{4}x + \frac{22}{4} \implies \begin{cases} A = \frac{3}{2} \\ B = \frac{11}{2} \end{cases}$ (0,3 ponto)

$= \frac{3}{2}x + \frac{11}{2}$

$s: y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \implies \begin{cases} C = \frac{3}{2} \\ D = \frac{1}{2} \end{cases}$ (0,2 ponto)

Como $A = \frac{3}{2} = C$ e $B = \frac{11}{2} \neq \frac{1}{2} = D$, concluimos que as retas são paralelas distintas. (0,2 ponto)

ii) (Falso)

Para calcular a distância entre as retas r e s podemos calcular a distância entre r e o ponto que s intersecta o eixo y dado por

$(0, D) = (0, 1/2) = P$ (0,3 ponto) $\implies$

$r: -6x + 4y - 22 = 0$

(0,3 ponto)

$$\implies d(r, P) = \frac{|-6.0 + 4.\frac{1}{2} - 22|}{\sqrt{(-6)^2 + (4)^2}} = \frac{|2 - 22|}{\sqrt{36 + 16}}$$

$$= \frac{|-20|}{\sqrt{52}} = \frac{20}{\sqrt{52}}$$ (0,4 ponto)