CET007 Cálculo Diferencial e Integral T1

Segunda Avaliação (17/12/2019)

Nome:					
Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	**Nota**

Questão 1. (2,0 pontos) Determine a equação da reta tangente à função

$$h(x) = 3x^2 - \sqrt{x^3} + \frac{1}{4}\cos(x) + e^x$$

no ponto de coordenada $x = 0$.

Questão 2. (2,0 pontos) Encontre a função derivada associada a cada uma das funções:

(i) (1,0 ponto) $f(x) = 3x^7 e^x$;

(ii) (1,0 ponto) $g(x) = \dfrac{2e^x}{\text{sen}\,(x)}$.

Questão 3. (2,0 pontos) Forneça a taxa de variação (de y em relação à x):

(i) (1,0 ponto) da função $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ em $x = 2$;

(ii) (1,0 ponto) da equação (implícita) $x^3 - y^2 + 5xy = 7$ no ponto $(1, 3)$.

Questão 4. (2,0 pontos) Determine os intervalos de crescimento / decrescimento e de concavidade para cima / baixo da função

$$f(x) = x^3 - 3x + 2.$$

Questão 5. (2,0 pontos) Calcule a área abaixo do gráfico da função

$$g(x) = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} \quad \text{no intervalo} \quad [1, 2].$$

• GCET007 - Segunda Avaliação - Resolução

Questão 01

A equação da reta tangente a uma função h em um ponto $x=0$ é dada por

$$y - h(0) = h'(0)(x-0) \qquad (0{,}2 \text{ ponto})$$

Precisamos determinar o valor da função e de sua derivada em $x=0$:

• $h(0) = 3.0^2 - \sqrt{0^3} + \frac{1}{4}\cos(0) + e^0$

$= 0 - 0 + \frac{1}{4}.1 + 1 = \frac{1}{4} + \frac{4}{4} = \frac{5}{4}$ (0,3 ponto)

• $h'(x) = \left(3x^2 - \sqrt{x^3} + \frac{1}{4}\cos(x) + e^x\right)'$

$= 3(x^2)' - (x^{3/2})' + \frac{1}{4}(\cos(x))' + (e^x)'$

$= 3.2x - \frac{3}{2}x^{3/2-1} + \frac{1}{4}(-\operatorname{sen}(x)) + e^x$ (1,0 ponto)

$= 6x - \frac{3}{2}x^{1/2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(x) + e^x$

$h'(0) = 6.0 - \frac{3}{2}0^{1/2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(0) + e^0$

$= 0 - 0 - \frac{1}{4}.0 + 1 = 1$ (0,2 ponto)

Por fim, temos a seguinte equação da reta tangente

$$y - \frac{5}{4} = 1(x-0) \iff y = x + \frac{5}{4}. \qquad (0{,}3 \text{ ponto})$$

Questão 02

i) Utilizando a regra do produto temos

$$f'(x) = (3x^7 e^x)' = 3(x^7 e^x)'$$

$$= 3[(x^7)' e^x + x^7 (e^x)']$$

$$= 3[7x^6 e^x + x^7 e^x]$$ (1,0 ponto)

$$= 3x^6 e^x (7 + x)$$

ii) Aplicamos a regra do quociente

$$g'(x) = \left(\frac{2e^x}{\text{sen}(x)}\right)' = 2\left(\frac{e^x}{\text{sen}(x)}\right)'$$

$$= 2\left[\frac{(e^x)' . \text{sen}(x) - e^x . (\text{sen}(x))'}{(\text{sen}(x))^2}\right]$$ (1,0 ponto)

$$= 2\left[\frac{e^x . \text{sen}(x) - e^x \cos x}{(\text{sen}(x))^2}\right]$$

$$= 2e^x \frac{\text{sen}(x) - \cos(x)}{(\text{sen}(x))^2}$$

Questão 03

A taxa de variação consiste no valor da derivada avaliada no respectivo ponto.

i) $h(x) = \sqrt{x^2+1} = (x^2+1)^{1/2} = f(g(x))$ onde

$f(y) = y^{1/2}$ e $y = g(x) = x^2+1$ (0,4 ponto)

$f'(y) = \frac{1}{2} y^{-1/2}$ e $g'(x) = 2x$

$\Rightarrow h'(x) = f'(g(x)).g'(x)$

$= \frac{1}{2}.(x^2+1)^{-1/2}.2.x = x(x^2+1)^{-1/2}$ (0,4 ponto)

$\Rightarrow h'(2) = 2(2^2+1)^{-1/2} = 2\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ (0,2 ponto)

ii) $x^3 - y^2 + 5x.y = 7$

$\Rightarrow (x^3 - y^2 + 5xy)' = (7)'$

$\Rightarrow (x^3)' - (y^2)' + 5[(x)'.y + x(y)'] = 0$

$\Rightarrow 3x^2 - 2y\frac{dy}{dx} + 5\left(1.y + x\frac{dy}{dx}\right) = 0$ (0,5 ponto)

$\Rightarrow 3x^2 - 2y\frac{dy}{dx} + 5y + 5x\frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(5x-2y) = -3x^2 - 5y$

(0,3 ponto)

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-3x^2-5y}{5x-2y}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(1,3) = \frac{-3.1^2-5.3}{5.1-2.3} = \frac{-3-15}{5-6} = \frac{-18}{-1} = 18.$

(0,2 ponto)

Questão 04

Para analisar crescimento/decrescimento e concavidade para cima/baixo da função

$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$

precisamos estudar o sinal da primeira e segunda derivada.

- Crescimento/decrescimento:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2-1)$$

$$= 3(x-1)(x+1)$$

(0,2 ponto)

	$x-1$	$x+1$	f'	
$(-\infty,-1)$	$-$	$-$	$+$	Crescente
$(-1,1)$	$-$	$+$	$-$	Decrescente
$(1,+\infty)$	$+$	$+$	$+$	Crescente

(0,8 ponto)

- Concavidade para cima/baixo:

$$f''(x) = 3.2.x = 6x$$

(0,2 ponto)

	x	f''	
$(-\infty,0)$	$-$	$-$	Conc. para baixo
$(0,+\infty$	$+$	$+$	Conc. para cima

(0,8 ponto)

Questão 05

Podemos aplicar o Teorema Fundamental do Calculo que garante que

$$A = \int_1^2 \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2}\, dx = G(2) - G(1) \quad (0{,}2 \text{ ponto})$$

onde G é qualquer antiderivada de $G(x) = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2}$.
Sendo assim, primeiramente calculamos a integral indefinida

$$\int \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2}\, dx = \int \frac{1}{x^3}\, dx + \int \frac{1}{x^2}\, dx \quad (1{,}0 \text{ ponto})$$

$$= \int x^{-3} dx + \int x^{-2} dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C$$

$$= -\frac{x^{-2}}{2} - \frac{x^{-1}}{1} + C = -\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + C$$

Em particular, podemos considerar $G(x) = -\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x}$, donde temos a seguinte área

$$A = \int_1^2 \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2}\, dx = \left(-\frac{1}{2.2^2} - \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2.1^2} - \frac{1}{1}\right)$$

$$= -\frac{1}{8} - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} + 1 \quad (0{,}8 \text{ ponto})$$

$$= -\frac{1}{8} + \frac{8}{8} = \frac{7}{8}$$