CET206 CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL T1

SEGUNDA AVALIAÇÃO (20/12/2019)

Nome:					
Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	**Nota**

Questão 1. (2,0 pontos) Determine a equação da reta tangente à função

$$h(x) = x + \frac{1}{4}x^3 - \cos(x)$$

no ponto de coordenada $x = 0$.

Questão 2. (2,0 pontos) A temperatura T de um corpo após x doses de um medicamento é modelada pela equação

$$T(x) = \frac{Cx^2}{2} - \frac{x^3}{3}$$

onde C uma constante que depende da espécie animal. Além disso, a sensibilidade a tal medicamento é calculada pela função derivada $T'(x)$. Determine a constante C para espécie humana, sabendo que sensibilidade $T'(2) = 10$.

Questão 3. (2,0 pontos) Encontre a função derivada associada a cada uma das funções:

(i) (1,0 ponto) $f(x) = 3x^7e^x$;

(ii) (1,0 ponto) $g(x) = \dfrac{4x}{2x+1}$.

Questão 4. (2,0 pontos) Encontre a inclinação da reta tangente da função

$$h(x) = e^{x^2+\cos(x)} \quad \text{no ponto} \quad x = 0.$$

Questão 5. (2,0 pontos) Considere a função

$$f(x) = x^3 - 3x + 2.$$

(i) (1,0 ponto) Estude os intervalos de crescimento / decrescimento;

(ii) (1,0 ponto) Analise os intervalos de concavidade para cima / baixo.

·GCET206 - Segunda Avaliação - Resolução

Questão 01

A equação da reta tangente a uma função h em um ponto $x=0$ é dado por

$$y - h(0) = h'(0)(x-0) \qquad (0{,}2 \text{ ponto})$$

Precisamos determinar o valor da função e de sua derivada em $x=0$:

- $h(0) = 0 + \frac{1}{4}\cdot 0^3 - \cos 0 \qquad (0{,}3 \text{ pontos})$

  $0 + \frac{1}{4}\cdot 0 - 1 = -1$

- $h'(x) = \left(x + \frac{1}{4}x^3 - \cos(x)\right)'$

  $= (x)' + \frac{1}{4}(x^3)' - (\cos(x))'$

  $= 1 + \frac{1}{4}\cdot 3x^2 - (-\operatorname{sen}(x)) \qquad (1{,}0 \text{ pontos})$

  $= 1 + \frac{3}{4}x^2 + \operatorname{sen}(x)$

- $h'(0) = 1 + \frac{3}{4}0^2 + \operatorname{sen} 0 \qquad (0{,}2 \text{ ponto})$

  $= 1 + 0 + 0 = 1$

Por fim temos a seguinte equação da reta tangente

$$y-(-1) = 1(x-0) \iff y = x - 1 \qquad (0{,}3 \text{ ponto})$$

Questão 02

Primeramente, encontramos o função sensibilidade (derivado do temperaturo)

$$T'(x) = \left(\frac{Cx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)'$$

$$= \left(\frac{Cx^2}{2}\right)' - \left(\frac{x^3}{3}\right)'$$

$$= \frac{C}{2}(x^2)' - \frac{1}{3}(x^3)' \qquad (1,2 \text{ pontos})$$

$$= \frac{C}{2}\cdot 2x - \frac{1}{3}3x^2$$

$$= Cx - x^2$$

Sabendo os valores de $T'(2) = 10$, obtemos uma equação onde o valor de C pode ser calculado

$$10 = T'(2) = C \cdot 2 - 2^2$$

$$\Longrightarrow 2C = 10 + 4 = 14 \qquad (0,8 \text{ pontos})$$

$$\Longrightarrow C = \frac{14}{2} = 7$$

Questão 03

i) Utilizando a regra do produto temos

$$f'(x) = (3x^7 e^x)' = 3(x^7 e^x)'$$

$$= 3\left[(x^7)' e^x + x^7 (e^x)'\right]$$

$$= 3\left[7x^6 e^x + x^7 e^x\right] \qquad \text{(1,0 ponto)}$$

$$= 3x^6 e^x (7 + x)$$

ii) Aplicamos a regra do quociente

$$g'(x) = \left(\frac{4x}{2x+1}\right)' = 4\left(\frac{x}{2x+1}\right)'$$

$$= 4\left[\frac{(x)'.(2x+1) - x(2x+1)'}{(2x+1)^2}\right]$$

$$= 4\left[\frac{1.(2x+1) - x(2)}{(2x+1)^2}\right] \qquad \text{(1,0 ponto)}$$

$$= 4\,\frac{\cancel{2x}+1-\cancel{2x}}{(2x^2+1)^2}$$

$$= \frac{4}{(2x+1)^2}.$$

Questão 04

Queremos calcular $h'(0)$. Note que a função h consiste em uma composição de funções

$$h(x) = e^{x^2+\cos(x)} = f(g(x))$$

(0,6 ponto)

onde $f(y) = e^y$ e $y = g(x) = x^2 + \cos(x)$

Em particular,

$$f'(y) = e^y \quad \text{e} \quad g'(x) = 2x - \operatorname{sen}(x).$$ (0,4 ponto)

Por se tratar de uma função composta podemos aplicar a regra da cadeia

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$
$$= e^{x^2+\cos(x)} \cdot (2x - \operatorname{sen}(x))$$

(0,6 ponto)

Por fim, basta aplicar em $x = 0$

$$h'(0) = e^{0^2+\cos(0)} \cdot (2.0 - \operatorname{sen}(0))$$
$$= e^1 \cdot (0+0) = 0.$$

(0,4 ponto)

Questão 05

Para analisar crescimento/decrescimento e concavidade para cima/baixo da função

$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$

precisamos estudar o sinal da primeira e segunda derivada.

I) Crescimento/decrescimento:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2-1)$$ (0,2 ponto)

$$= 3(x-1)(x+1)$$

	$x-1$	$x+1$	f'	
$(-\infty, -1)$	$-$	$-$	$+$	Crescente
$(-1, 1)$	$-$	$+$	$-$	Decrescente
$(1, +\infty)$	$+$	$+$	$+$	Crescente

(0,8 ponto)

II) Concavidade para cima/baixo:

$$f''(x) = 3.2.x = 6x$$ (0,2 ponto)

	x	f''	
$(-\infty, 0)$	$-$	$-$	Conc. para baixo
$(0, +\infty$	$+$	$+$	Conc. para cima

(0,8 ponto)