13 Gegeben ist die Grammatik $G = (\{S,T\}, \{a,b\}, \{S \to aSb|aTb|\varepsilon, T \to aSb|aTb|\varepsilon\}, S)$. Bestimmen Sie die kleinste Lösung des dieser Grammatik entsprechenden $\mathbb{N}^\infty\langle\{a,b\}\rangle$-algebraischen Systems. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Koeffizienten (r,w) der ersten Komponente der Lösung und der Anzahl der Linksableitungen (Ableitungsbäume) von w?

14 Finden Sie ein $\mathbb{N}^\infty\langle\{a,b,c\}\rangle$-algebraisches System, bei dem die Potenzreihe $\sum_{n,m\geq 0} |n-m| a^n b^m$ als erste Komponente der kleinsten Lösung auftritt.

15 Es sei $G = (\{S,T,U\}, \{a,b\}, \{S \to TS|\varepsilon, T \to aTU|\varepsilon, U \to b|\varepsilon\}, S)$. Konstruieren Sie eine Grammatik ohne ε-Regeln und Kettenregeln, die $L(G) - \{\varepsilon\}$ erzeugt.

16 Es sei $G = (\{S,T,U\}, \{a,b\}, \{S \to aT, T \to TU|b, U \to UUa|b\}, S)$. Konstruieren Sie eine zu G äquivalente Grammatik in Operator Normalform.

17 Es sei $G = (\{S,T,U\}, \{a,b\}, \{S \to SaS|Tb|a, T \to Tb|SaT|\varepsilon\}, S)$. Konstruieren Sie eine zu G äquivalente Grammatik in Greibach Normalform.

18 Stellen Sie die folgenden Kellerautomaten graphisch dar und bestimmen Sie deren Verhalten bezüglich $\mathbb{B}$ und $\mathbb{N}^\infty$ (es sind jeweils nur die von 0 verschiedenen Blöcke der Übergangsmatrizen angegeben):

(a) $\mathfrak{P} = (\{q_0,q_1,q_2\}, \{p\}, M, \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \end{pmatrix}, p, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix})$, mit

$$M_{p,\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \quad M_{p,p} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{p,pp} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

(b) $\mathfrak{P} = (\{q_0,q_1\}, \{p\}, M, \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \end{pmatrix}, p, \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix})$, mit

$$M_{p,\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad M_{p,pp} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{p,ppp} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) $\mathfrak{P} = (\{q_0\}, \{p,A,B\}, M, \varepsilon, p, \varepsilon)$, mit

$$M_{p,\varepsilon} = \varepsilon + a + b, \quad M_{A,\varepsilon} = M_{p,pA} = a, \quad M_{B,\varepsilon} = M_{p,pB} = b.$$

19 Konstruieren Sie kontextfreie Grammatiken, die die von den Kellerautomaten aus Beispiel 18 akzeptierten Sprachen erzeugen.

20 Konstruieren sie Kellerautomaten, die die in Beispiel 3 angegebenen Sprachen akzeptieren.

21 Konstruieren Sie rationale Übersetzer, die folgende Abbildungen realisieren:

(a) $\tau: \{a,b\}^* \to \{a,b\}^*$, $\tau(x)$ geht aus x dadurch hervor, daß jedes Vorkommnis des Teilwortes $ababb$ durch abb ersetzt wird,

(b) $\tau: \{a,b\}^* \to \{a,b\}^*$, $\tau(x) = \begin{cases} a^{|x|} & \text{falls } n_a(x) \text{ gerade,} \\ b^{|x|} & \text{falls } n_a(x) \text{ ungerade.} \end{cases}$

(c) $\tau: \{1\}\{0,1\}^* \to \{1\}\{0,1\}^*$, $\tau(b(n)) = b(n+1)$, $n \geq 1$,

(d) $\tau: \{1\}\{0,1\}^* \to \{1\}\{0,1\}^*$, $\tau(b(n)) = b(3n)$, $n \geq 1$,

($b(n) \in \{0,1\}^*$ bezeichnet die Binärdarstellung der (natürlichen) Zahl $n \geq 1$.)

22 Konstruieren sie rationale Übersetzer $\mathfrak{T}$ mit

(a) $\|\mathfrak{T}\|(\{a^nb^n \mid n \geq 0\}) = \{a^ib^jc^{i+j} \mid i,j \geq 0\}$,

(b) $\|\mathfrak{T}\|(\{a^n \mid n \text{ Zweierpotenz}\}) = \{a^n \mid n \text{ keine Zweierpotenz}\}$,

(c) $\|\mathfrak{T}\|(\{w \mid w \in \{a,b\}^*, w = w^{\mathrm{R}}\}) = \{w \mid w \in \{a,b,c\}^*, w = w^{\mathrm{R}}\}$.