Contrats d'assurance et rente sur deux têtes

Modèle multi-états pour évaluer les produits sur deux têtes

Hiver 2023

UNIVERSITÉ LAVAL
Faculté des sciences et de génie
École d'actuariat

Objectifs d'apprentissage

Objectif général

- Comprendre l'évaluation des coûts pour des contrats d'assurance ou de rente émis à plusieurs assurés.

Objectifs d'apprentissage

Objectif général

- Comprendre l'évaluation des coûts pour des contrats d'assurance ou de rente émis à plusieurs assurés.

Vous serez en mesure de

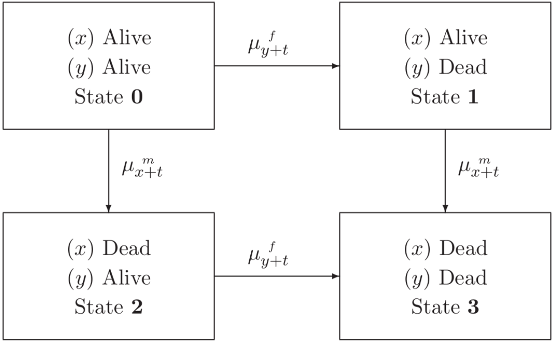
- Illustrer les composantes du modèle multi-états pour les vies dépendantes et indépendantes.
- Adapter les formules d'évaluation de produits pour y inclure les syndromes du coeur brisé et du choc commun

Ressources

Ressources officielles

- **AMLCR** : Chapitre 10 (10.5, 10.6, 10.7)

Soit (x) est un homme et (y) est une femme



Source : Figure 10.1 AMLCR (p.400)

Modèle multi-états pour vies indépendantes

Faits saillants

- État 0 : (x) et (y) sont vivants
- État 3 : (x) et (y) sont morts
- Transitions horizontales : $0 \to 1$ et $2 \to 3 = (y)$ décède.
- Transitions verticales : $0 \to 2$ et $1 \to 3 = (x)$ décède.
- États non réentrant (i.e. aucun retour à la vie)

Modèle multi-états pour vies indépendantes

Ajustement à la nomenclature

- Utilisation d'exposant pour désambigüiser les probabilités
- ${}_tp_{xy}^{ij}$ = Pr[être dans l'état j dans t années | est dans l'état i au temps 0]
- ${}_tp_{xy}^{00}$ = Pr[(x) et (y) vivant au temps $t|(x)$ et (y) vivant au temps 0]
- ${}_tp_{xy}^{01}$ = Pr[(x) vivant et (y) mort au temps $t|(x)$ et (y) vivant au temps 0]
- ${}_tp_{y+s}^{22}$ = Pr[(y) vivant au temps $t|(y)$ vivant et (x) mort au temps s], $0 < s < t$

Hypothèse d'indépendance #2

- Les transitions entre $0 \rightarrow 1$ et $2 \rightarrow 3$ dépendent uniquement de l'âge de (y).
- Les transitions entre $0 \rightarrow 2$ et $1 \rightarrow 3$ dépendent uniquement de l'âge de (x).
- La force de mortalité pour (x) au temps t est μ_{x+t}^{m}, si (y) est vivant ou non.
- La distribution de T_x est déterminée par $\{\mu_{x+t}^{m}\}_{t\geq 0}$.
- De façon similaire, la distribution de T_y est déterminée par $\{\mu_{y+t}^{m}\}_{t\geq 0}$.

Modèle multi-états pour vies indépendantes

Quelques définitions importantes

$$\Pr[T_y > t] = {}_tp_{xy}^{00} + {}_tp_{xy}^{02}$$

(1)

(2)

(3)

Quelques définitions importantes

$$\Pr[T_y > t] = {}_tp_{xy}^{00} + {}_tp_{xy}^{02}$$

$${}_tp_{xy}^{00} \tag{1}$$

(2)

(3)

Quelques définitions importantes

$$\Pr[T_y > t] = {}_tp_{xy}^{00} + {}_tp_{xy}^{02}$$

$${}_tp_{xy}^{00} = \int_0^t e^{-(\mu_{x+s}^m + \mu_{y+s}^f)} ds \qquad (1)$$

$$(2)$$

$$(3)$$

Quelques définitions importantes

$$\Pr[T_y > t] = {}_tp_{xy}^{00} + {}_tp_{xy}^{02}$$

$${}_tp_{xy}^{00} = \int_0^t e^{-(\mu_{x+s}^m + \mu_{y+s}^f)} ds = {}_tp_x \; {}_tp_y \qquad (1)$$

$$(2)$$

$$(3)$$

Quelques définitions importantes

$$\Pr[T_y > t] = {}_tp_{xy}^{00} + {}_tp_{xy}^{02}$$

$${}_tp_{xy}^{00} = \int_0^t e^{-(\mu_{x+s}^m + \mu_{y+s}^f)} ds = {}_tp_x \, {}_tp_y \qquad (1)$$

$${}_tp_{xy}^{02} \qquad (2)$$

$$(3)$$

Modèle multi-états pour vies indépendantes

Quelques définitions importantes

$$\Pr[T_y > t] = {}_tp_{xy}^{00} + {}_tp_{xy}^{02}$$

$$ {}_tp_{xy}^{00} = \int_0^t e^{-(\mu_{x+s}^m + \mu_{y+s}^f)} ds = {}_tp_x \; {}_tp_y \quad (1)$$

$$ {}_tp_{xy}^{02} = \int_0^t {}_rp_{xy}^{00} \qquad\qquad dr \quad (2)$$

$$(3)$$

Quelques définitions importantes

$$\text{Pr}[T_y > t] = {}_tp_{xy}^{00} + {}_tp_{xy}^{02}$$

$${}_tp_{xy}^{00} = \int_0^t e^{-(\mu_{x+s}^m + \mu_{y+s}^f)} ds = {}_tp_x \; {}_tp_y \tag{1}$$

$${}_tp_{xy}^{02} = \int_0^t {}_rp_{xy}^{00} \; \mu^m{}_{x+r} \qquad\qquad dr$$

$$\tag{2}$$

$$\tag{3}$$

Modèle multi-états pour vies indépendantes

Quelques définitions importantes

$$\Pr[T_y > t] = {}_tp_{xy}^{00} + {}_tp_{xy}^{02} \tag{1}$$

$${}_tp_{xy}^{00} = \int_0^t e^{-(\mu^m_{x+s} + \mu^f_{y+s})} ds = {}_tp_x \; {}_tp_y \tag{2}$$

$${}_tp_{xy}^{02} = \int_0^t {}_rp_{xy}^{00} \; \mu^m{}_{x+r} \; {}_{t-r}p_{y+r}^{11} \; dr \tag{3}$$

Quelques définitions importantes

$$\mathsf{Pr}[T_y > t] = {}_tp_{xy}^{00} + {}_tp_{xy}^{02} \tag{1}$$

$${}_tp_{xy}^{00} = \int_0^t e^{-(\mu_{x+s}^m + \mu_{y+s}^f)} ds = {}_tp_x \; {}_tp_y \tag{2}$$

$$\begin{aligned} {}_tp_{xy}^{02} &= \int_0^t {}_rp_{xy}^{00} \; \mu m_{x+r} \; {}_{t-r}p_{y+r}^{11} \; dr \\ &= \int_0^t {}_rp_x \; {}_rp_y \; \mu m_{x+r} \; {}_{t-r}p_{y+r} \; dr \end{aligned} \tag{3}$$

Quelques définitions importantes

$$\Pr[T_y > t] = {}_tp_{xy}^{00} + {}_tp_{xy}^{02} \tag{1}$$

$$ {}_tp_{xy}^{00} = \int_0^t e^{-(\mu^m_{x+s} + \mu^f_{y+s})} ds = {}_tp_x \; {}_tp_y \tag{2}$$

$$\begin{aligned} {}_tp_{xy}^{02} &= \int_0^t {}_rp_{xy}^{00} \; \mu m_{x+r} \; {}_{t-r}p_{y+r}^{11} \; dr \\ &= \int_0^t {}_rp_x \; {}_rp_y \; \mu m_{x+r} \; {}_{t-r}p_{y+r} \; dr \end{aligned} \tag{3}$$

Modèle multi-états pour vies indépendantes

Quelques définitions importantes

$$
\begin{aligned}
\Pr[T_y > t] &= {}_tp_{xy}^{00} + {}_tp_{xy}^{02} \\
{}_tp_{xy}^{00} &= \int_0^t e^{-(\mu_{x+s}^m + \mu_{y+s}^f)} ds = {}_tp_x \; {}_tp_y && (1) \\
{}_tp_{xy}^{02} &= \int_0^t {}_rp_{xy}^{00} \; \mu m_{x+r} \; {}_{t-r}p_{y+r}^{11} \; dr \\
&= \int_0^t {}_rp_x \; {}_rp_y \; \mu m_{x+r} \; {}_{t-r}p_{y+r} \; dr \\
&= {\color{blue}{}_tp_y} \int_0^t {}_rp_x \; \mu_{x+r}^m \; dr && (2) \\
& && (3)
\end{aligned}
$$

Modèle multi-états pour vies indépendantes

Quelques définitions importantes

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Pr}[T_y > t] &= {}_tp_{xy}^{00} + {}_tp_{xy}^{02} \\
{}_tp_{xy}^{00} &= \int_0^t e^{-(\mu_{x+s}^m + \mu_{y+s}^f)} ds = {}_tp_x \; {}_tp_y && (1) \\
{}_tp_{xy}^{02} &= \int_0^t {}_rp_{xy}^{00} \; \mu m_{x+r} \; {}_{t-r}p_{y+r}^{11} \; dr \\
&= \int_0^t {}_rp_x \; {}_rp_y \; \mu m_{x+r} \; {}_{t-r}p_{y+r} \; dr \\
&= {}_tp_y \int_0^t {}_rp_x \; \mu_{x+r}^m \; dr = {}_tp_y (1 - {}_tp_x) && (2)
\end{aligned}
$$

(3)

Quelques définitions importantes

$$\Pr[T_y > t] = {}_tp_{xy}^{00} + {}_tp_{xy}^{02}$$

$${}_tp_{xy}^{00} = \int_0^t e^{-(\mu_{x+s}^m + \mu_{y+s}^f)} ds = {}_tp_x \; {}_tp_y \tag{1}$$

$${}_tp_{xy}^{02} = \int_0^t {}_rp_{xy}^{00} \; \mu m_{x+r} \; {}_{t-r}p_{y+r}^{11} \; dr$$

$$= \int_0^t {}_rp_x \; {}_rp_y \; \mu m_{x+r} \; {}_{t-r}p_{y+r} \; dr$$

$$= {}_tp_y \int_0^t {}_rp_x \; \mu_{x+r}^m \; dr = {}_tp_y(1 - {}_tp_x) \tag{2}$$

$$\Pr[T_y > t] = {}_tp_{xy}^{00} + {}_tp_{xy}^{02}$$

(3)

Quelques définitions importantes

$$
\begin{aligned}
\Pr[T_y > t] &= {}_tp_{xy}^{00} + {}_tp_{xy}^{02} \\
{}_tp_{xy}^{00} &= \int_0^t e^{-(\mu_{x+s}^m + \mu_{y+s}^f)} ds = {}_tp_x \; {}_tp_y && (1) \\
{}_tp_{xy}^{02} &= \int_0^t {}_rp_{xy}^{00} \; \mu m_{x+r} \; {}_{t-r}p_{y+r}^{11} \; dr \\
&= \int_0^t {}_rp_x \; {}_rp_y \; \mu m_{x+r} \; {}_{t-r}p_{y+r} \; dr \\
&= {}_tp_y \int_0^t {}_rp_x \; \mu_{x+r}^m \; dr = {}_tp_y(1 - {}_tp_x) && (2) \\
\Pr[T_y > t] &= {}_tp_{xy}^{00} + {}_tp_{xy}^{02} = {}_tp_x \; {}_tp_y + {}_tp_y(1 - {}_tp_x)
\end{aligned}
$$

(3)

Quelques définitions importantes

$$
\begin{aligned}
\Pr[T_y > t] &= {}_tp_{xy}^{00} + {}_tp_{xy}^{02} \\
{}_tp_{xy}^{00} &= \int_0^t e^{-(\mu_{x+s}^m + \mu_{y+s}^f)} ds = {}_tp_x \; {}_tp_y && (1) \\
{}_tp_{xy}^{02} &= \int_0^t {}_rp_{xy}^{00} \; \mu m_{x+r} \; {}_{t-r}p_{y+r}^{11} \; dr \\
&= \int_0^t {}_rp_x \; {}_rp_y \; \mu m_{x+r} \; {}_{t-r}p_{y+r} \; dr \\
&= {}_tp_y \int_0^t {}_rp_x \; \mu_{x+r}^m \; dr = {}_tp_y(1 - {}_tp_x) && (2) \\
\Pr[T_y > t] &= {}_tp_{xy}^{00} + {}_tp_{xy}^{02} = {}_tp_x \; {}_tp_y + {}_tp_y(1 - {}_tp_x) \\
\Pr[T_y > t] &= {}_tp_y && (3)
\end{aligned}
$$

Modèle multi-états pour vies indépendantes

Quelques valeurs de produits simples sur deux têtes

Quelques valeurs de produits simples sur deux têtes

$$\bar{A}_{xy} =$$

Modèle multi-états pour vies indépendantes

Quelques valeurs de produits simples sur deux têtes

$$\bar{A}_{xy} = \int_0^\infty -e^{\delta t} \qquad\qquad dt$$

Quelques valeurs de produits simples sur deux têtes

$$\bar{A}_{xy} = \int_0^\infty -e^{\delta t} {}_t p_{xy}^{00} \qquad\qquad dt$$

Quelques valeurs de produits simples sur deux têtes

$$\bar{A}_{xy} = \int_0^{\infty} -e^{\delta t} {}_t p_{xy}^{00} \left(\mu_{x+t}^{m} + \mu_{y+t}^{f}\right) dt$$

Modèle multi-états pour vies indépendantes

Quelques valeurs de produits simples sur deux têtes

$$\bar{A}_{xy} = \int_0^\infty -e^{\delta t} {}_tp_{xy}^{00} \left(\mu_{x+t}^{m} + \mu_{y+t}^{f}\right) dt$$

Quelques valeurs de produits simples sur deux têtes

$$\bar{A}_{xy} = \int_0^\infty -e^{\delta t} {}_tp_{xy}^{00} \left(\mu_{x+t}^{m} + \mu_{y+t}^{f}\right) dt$$

Modèle multi-états pour vies indépendantes

Quelques valeurs de produits simples sur deux têtes

$$\bar{A}_{xy} = \int_0^\infty -e^{\delta t} {}_tp_{xy}^{00} \left(\mu_{x+t}^{m} + \mu_{y+t}^{f}\right) dt$$

$$\bar{A}_{\overline{xy}} =$$

Quelques valeurs de produits simples sur deux têtes

$$\bar{A}_{xy} = \int_0^\infty -e^{\delta t} {}_tp_{xy}^{00} \left(\mu_{x+t}^m + \mu_{y+t}^f\right) dt$$

$$\bar{A}_{\overline{xy}} = \int_0^\infty -e^{\delta t} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad dt$$

Quelques valeurs de produits simples sur deux têtes

$$\bar{A}_{xy} = \int_0^\infty -e^{\delta t} {}_tp_{xy}^{00} \left(\mu_{x+t}^m + \mu_{y+t}^f\right) dt$$

$$\bar{A}_{\overline{xy}} = \int_0^\infty -e^{\delta t} \left({}_tp_{xy}^{01}\, \mu_{x+t}^f + {}_tp_{xy}^{02}\, \mu_{y+t}^m\right) dt$$

Quelques valeurs de produits simples sur deux têtes

$$
\begin{aligned}
\bar{A}_{xy} &= \int_0^{\infty} -e^{\delta t}\, {}_tp_{xy}^{00}\, (\mu_{x+t}^{m} + \mu_{y+t}^{f})\, dt \\
\bar{A}_{\overline{xy}} &= \int_0^{\infty} -e^{\delta t} ({}_tp_{xy}^{01}\, \mu_{x+t}^{f} + {}_tp_{xy}^{02}\, \mu_{y+t}^{m})\, dt
\end{aligned}
$$

Quelques valeurs de produits simples sur deux têtes

$$\bar{A}_{xy} = \int_0^\infty -e^{\delta t} {}_tp_{xy}^{00} \left(\mu_{x+t}^m + \mu_{y+t}^f\right) dt$$

$$\bar{A}_{\overline{xy}} = \int_0^\infty -e^{\delta t} \left({}_tp_{xy}^{01}\ \mu_{x+t}^f + {}_tp_{xy}^{02}\ \mu_{y+t}^m\right) dt$$

Quelques valeurs de produits simples sur deux têtes

$$\bar{A}_{xy} = \int_0^{\infty} -e^{\delta t} {}_tp_{xy}^{00} \left(\mu_{x+t}^{m} + \mu_{y+t}^{f}\right) dt$$

$$\bar{A}_{\overline{xy}} = \int_0^{\infty} -e^{\delta t} \left({}_tp_{xy}^{01}\, \mu_{x+t}^{f} + {}_tp_{xy}^{02}\, \mu_{y+t}^{m}\right) dt$$

$$\bar{a}_{xy} =$$

$$\bar{a}_{\overline{xy}} =$$

Quelques valeurs de produits simples sur deux têtes

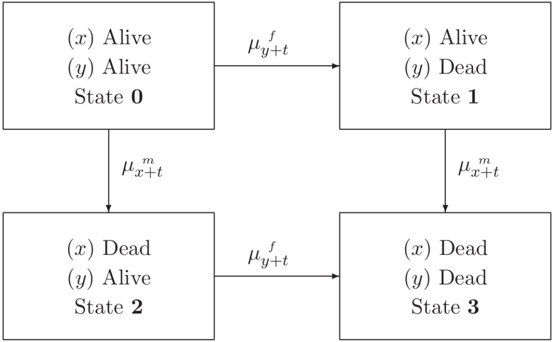
$$\bar{A}_{xy} = \int_0^\infty -e^{\delta t} {}_tp_{xy}^{00} \, (\mu_{x+t}^m + \mu_{y+t}^f) \, dt$$

$$\bar{A}_{\overline{xy}} = \int_0^\infty -e^{\delta t} ({}_tp_{xy}^{01} \, \mu_{x+t}^f + {}_tp_{xy}^{02} \, \mu_{y+t}^m) \, dt$$

$$\bar{a}_{xy} = \int_0^\infty -e^{\delta t} \, {}_tp_{xy}^{00} \, dt$$

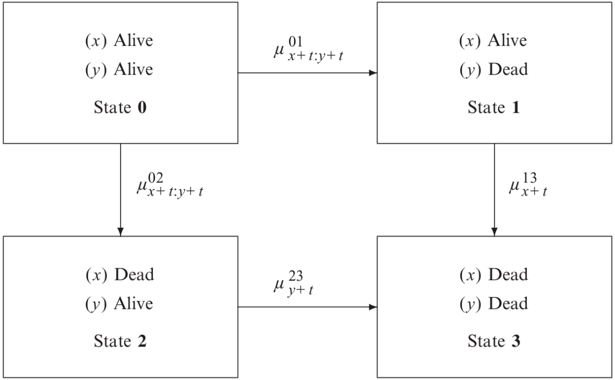
$$\bar{a}_{\overline{xy}} = \int_0^\infty -e^{\delta t} ({}_tp_{xy}^{00} + {}_tp_{xy}^{01} + {}_tp_{xy}^{02}) \, dt$$

Syndrome du coeur brisé : Soit (x) est un homme et (y) est une femme



Source : Figure 10.2 AMLCR (p.405)

Syndrome du coeur brisé : Soit (x) est un homme et (y) est une femme



Source : Figure 10.2 AMLCR (p.405)

Modèle multi-états pour vies dépendantes

Hypothèse de dépendance reliée à l'état

- Les intensités de transition associées aux premiers décès (i.e. $\mu^{01}_{x+t:y+t}$ et $\mu^{02}_{x+t:y+t}$) dépendent de l'âge (donc de la survie) du partenaire qui ne décède pas.
- Les intensités de transition associées aux deuxièmes décès (i.e. μ^{13}_{x+t} et μ^{23}_{y+t}) sont distinctes et peuvent incorporer l'effet du décès de l'autre partenaire via l'état de la vie considérée.
- Le temps depuis le décès n'est pas considéré dans ce modèle.
- Ces deux paires d'intensités se comparent respectivement à μ_{x+t}, μ_{y+t} et μ_{x+t}, μ_{y+t} dans le modèle indépendant.

Modèle multi-états pour vies dépendantes

Principal impact sur les probabilités

$$ {}_tp_{xy}^{00} = \int_0^t e^{-(\mu_{x+t} \qquad +\mu_{x+t} \qquad)} dt $$

Modèle multi-états pour vies dépendantes

Principal impact sur les probabilités

$$ {}_tp_{xy}^{00} = \int_0^t e^{-(\mu_{x+t} \quad + \mu_{x+t} \quad)} dt $$

Principal impact sur les probabilités

$$ {}_tp_{xy}^{00} = \int_0^t e^{-(\mu_{x+t:y+t} + \mu_{x+t:y+t})} dt $$

Modèle multi-états pour vies dépendantes

Principal impact sur les probabilités

$$_tp_{xy}^{00} = \int_0^t e^{-(\mu_{x+t:y+t}^{01} + \mu_{x+t:y+t}^{02})} dt$$

Principal impact sur les probabilités

$$ {}_tp_{xy}^{00} = \int_0^t e^{-(\mu_{x+t:y+t}^{01} + \mu_{x+t:y+t}^{02})} dt $$

Cette probabilité est utilisée dans le calcul de ${}_tp_{xy}^{01}$, ${}_tp_{xy}^{02}$

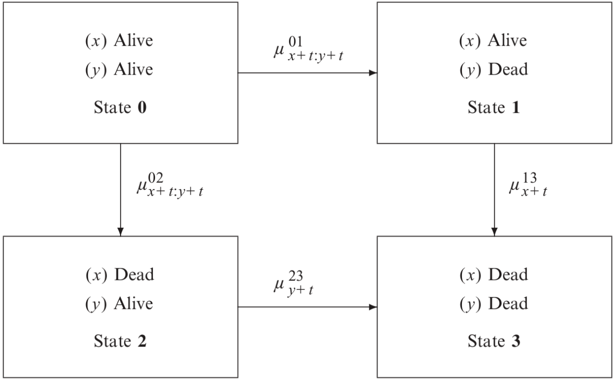
Principal impact sur les probabilités

$$
{}_tp_{xy}^{00} = \int_0^t e^{-(\mu_{x+t:y+t}^{01} + \mu_{x+t:y+t}^{02})} dt
$$

Cette probabilité est utilisée dans le calcul de ${}_tp_{xy}^{01}, {}_tp_{xy}^{02}$ Ajustements des μ dans le calcul de tous les ${}_tp_{xy}^{ij}$ et les valeurs des produits

Modèle multi-états pour vies dépendantes

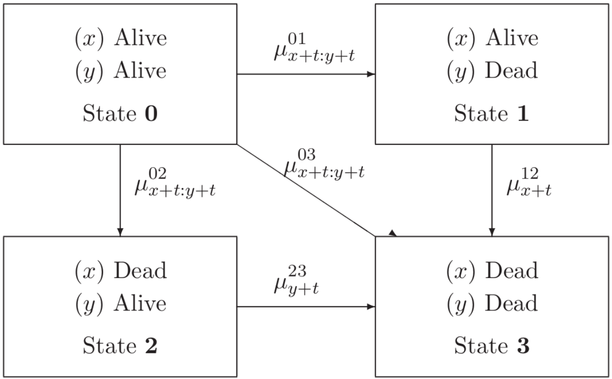
Choc commun : Soit (x) est un homme et (y) est une femme



Source : Figure 10.3 AMLCR (p.411)

Modèle multi-états pour vies dépendantes

Choc commun : Soit (x) est un homme et (y) est une femme



Source : Figure 10.3 AMLCR (p.411)

Modèle multi-états pour vies dépendantes

Faits Saillants

- Une transition entre $0 \rightarrow 3$ est ajoutée avec une intensité spécifique
- Cet ajout permet de considérer que les deux assurés meurent simultanément

Principal impact sur les probabilités

Modèle multi-états pour vies dépendantes

Principal impact sur les probabilités

$$ {}_tp_{xy}^{00} = $$

Modèle multi-états pour vies dépendantes

Principal impact sur les probabilités

$$ {}_tp_{xy}^{00} = \int_0^t e^{-(\mu_{x+r:y+r}^{01} + \mu_{x+r:y+r}^{02} + \qquad\qquad)} dr $$

Principal impact sur les probabilités

$$ {}_tp_{xy}^{00} = \int_0^t e^{-(\mu_{x+r:y+r}^{01} + \mu_{x+r:y+r}^{02} + \mu_{x+r:y+r}^{03})} dr $$

Modèle multi-états pour vies dépendantes

Principal impact sur les probabilités

$$ {}_tp_{xy}^{00} = \int_0^t e^{-(\mu_{x+r:y+r}^{01}+\mu_{x+r:y+r}^{02}+\mu_{x+r:y+r}^{03})} dr $$

Cette probabilité est utilisée dans le calcul de ${}_tp_{xy}^{01}$, ${}_tp_{xy}^{02}$ et ${}_tp_{xy}^{03}$

Objectifs d'apprentissage

Vous serez en mesure de

- Illustrer le modèle multi-états pour les vies indépendantes et dépendantes.
- Adapter les formules du modèle multi-états aux syndromes du coeur brisé et du choc commun dans l'évaluation des produits d'assurance.

Objectifs d'apprentissage

Vous serez en mesure de

- Illustrer le modèle multi-états pour les vies indépendantes et dépendantes.
- Adapter les formules du modèle multi-états aux syndromes du coeur brisé et du choc commun dans l'évaluation des produits d'assurance.

Contrats d'assurance et rente sur deux têtes

Modèle multi-états pour évaluer les produits sur deux têtes

Hiver 2023

Université Laval
Faculté des sciences et de génie
École d'actuariat

Conclusion

Révision des connaissances acquises

Conclusion

Révision des connaissances acquises

- Illustrer les composantes du modèle multi-états pour les vies dépendantes et indépendantes.

Conclusion

Révision des connaissances acquises

- Illustrer les composantes du modèle multi-états pour les vies dépendantes et indépendantes.
- Adapter les formules d'évaluation de produits pour y inclure les syndromes du coeur brisé et du choc commun