$C=\frac{Q}{V}$ $W_C=\frac{1}{2}CV^2$ $I=C\cdot\frac{dV}{dt}$ 串并联同电阻 $Z_C=-j\frac{1}{\omega C}$

$L=\frac{\varphi}{i}$ $W_L=\frac{1}{2}Li^2$ $V=L\cdot\frac{di}{dt}$ 相反 $Z_L=j\omega L$

交流电：$V(t)=V_m\cos(\omega t+\varphi)=\mathrm{Re}(V_m e^{j(\omega t+\varphi)})=V_m\angle\varphi=V_m\cos\varphi+jV_m\sin\varphi$

纯复数：$a\cdot e^{j\varphi}=a\angle\varphi=a\cos\varphi+ja\sin\varphi$ 利用复平面思考

Energy：$E_{[T_1,T_2]}=\int_{T_1}^{T_2}|f(t)|^2dt$ $E_{total}=\lim_{T\to\infty}E_{[-\frac{1}{2}T,\frac{1}{2}T]}$

$P_{avg}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T}|f(t)|^2dt$

Energy signal: E_{Total} finite ($P_{avg}=0$), Power signal: P_{avg} is finite.

对称：关于 $x=a$，$x(t)$ 和 $x(2a-t)$

移动：$x(t)$ 向左为 $x(t+a)$，向右为 $x(t-a)$

左右压缩(scale)：压缩 a 倍为 $x(t)\to x(at)$，拉伸为 $x(t)\to x(\frac{1}{a}t)$

可组合，但注意是对 t 操作，不是对括号中内容操作

$u(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}$ $\mathrm{rect}(\frac{t}{T})=\begin{cases}1, & |t|<\frac{1}{2}T\\ 0, & |t|>\frac{1}{2}T\end{cases}$ (宽度为 t，$x=0$ 为中心，高度为1)

$r(t)=t\,u(t)=\begin{cases}t, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}$

$\mathrm{sgn}(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ -1, & t<0\end{cases}$ $\delta=\lim_{n\to\infty}n\cdot\mathrm{rect}(nt)$，面积为1，但无限窄无限高

$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1$，$\int_{t_1}^{t_2}f(t)\delta(t-t_0)dt=\begin{cases}f(t_0), & t_1<t_0<t_2\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$

$f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0)$ $\delta(at+b)=\frac{1}{|a|}\delta(t+\frac{b}{a})$

$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=u(t)$ $\frac{d}{dt}u(t)=\delta(t)$

$u_n(t)$: $(-\frac{1}{2n},0)\to(\frac{1}{2n},1)$，$\frac{d}{dt}u_n(t)=p_n(t)$ $\lim_{n\to\infty}u_n(t)=u(t)$

EEC S 216
Tiancheng Jiao
tcjiao

Static、memoryless：只取决于当前时间的输入，不取决于任何其它时间

相反为 dynamic、with memory

Causal：只取决于现在和过去，不取决于将来

Time-invariant (TI)：Y 表达式不取决于时间（非正式），时间平移后结果完全相同

$Y_1(t)=f(S_1(t_0);\ x_1(\tau),\tau\geq t_0),\ t\geq t_0$

$Y_2(t)=f(S_2(t_0+t_d);\ x_2(\tau),\tau\geq t_0+t_d),\ t\geq t_0+t_d$

要求若 $S_2(t_0+t_d)=S_1(t_0)$、$x_2(t)=x_1(t-t_d)$，$t\geq t_0+t_d$，

则 $Y_2(t)=Y_1(t-t_d)$，$t\geq t_0+t_d$

Linear: 可以直接相加(非正式)

$y_1(t)=f(s_1(t_0);x_1(\tau),\tau\ge t_0),\ t\ge t_0$

$y_2(t)=f(s_2(t_0);x_2(\tau),\tau\ge t_0),\ t\ge t_0$

则 $f(\alpha_1 s_1(t_0)+\alpha_2 s_2(t_0);\alpha_1 x_1(\tau)+\alpha_2 x_2(\tau),\tau\ge t_0)=\alpha_1 y_1(t)+\alpha_2 y_2(t)$ $(t\ge t_0)$

BIBO stability: 若X不到无限, 则Y不到无限

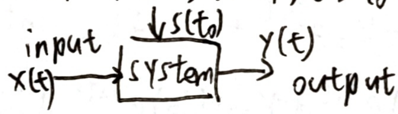
若 $|x(t)|\le M_x$ for all $t\ge t_0$

则存在 $M_y<\infty$, 使 $|y(t)|\le M_y$ for all $t\ge t_0$

ZIR (Zero-Input Response): $ZIR(t)=f(s(t_0);0)$

ZSR (Zero-State Response): $ZSR(t)=f(0;x(\tau),\tau\ge t_0)$

$(y(t)=f(s(t_0);x(\tau),\tau\ge t_0))$



LTI System

无特别说明,默认 $s(t_0)=0$, $f(t)=ZIR(t)+ZSR(t)$ (for LTI)

Impulse response: $h(t)=f(0,\delta(t))$, 即在0时输入 $\delta(t)$ 时系统的反应

Convolution integral: $ZSR(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t-\tau)x(\tau)d\tau=\int_{0}^{t}h(t-\tau)x(\tau)d\tau$

$\triangleq h(t)*x(t)$ (因为其它时间总有1项为0)

怎样理解: 沿0到t无限切割, 利用linear性质把每个时刻的输入对系统的影响加起来, 比如 τ 时刻, 输入为 $x(\tau)$, 但距t只有 $t-\tau$ 时间, 影响就是 $h(t-\tau)$ (利用TI时间平移)

有交换率、结合率、分配率

Identity element: $h(t)=\delta(t)$

$x(t-t_a)*\delta(t-t_b)=x(t-t_a-t_b)$

LTI static $\Longleftrightarrow$ $h(t)=k\delta(t)$ (k为常数)

LTI casual $\Longleftrightarrow$ 若 $t<0$, $h(t)=0$

BIBO stability (LTI) $\Longleftrightarrow$ $\int_{-\infty}^{\infty}|h(\tau)|<\infty$ (有上界)

注意: step response: 系统对 $u(t)$ 的反应

Frequency-domain concepts

Eigenfunctions：相当于eigenvector，把自己输入进去，输出是自己乘一个常数

$e^{s_0 t}$ $(s_0=\sigma_0+j\omega_0)$ 为所有LTI的eigenfunction

$x(t)=e^{s_0 t}$，$y(t)=\lambda_0 e^{s_0 t}$　这是 Transfer Function (TF) 关于$h(t)$的

$\lambda_0=\int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-s_0 t}dt=H(s_0)$　$\left(H(s_0)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-s_0 t}dt\right)$

Proof：$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s_0(t-\tau)}d\tau$

$$=e^{s_0 t}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s_0\tau}d\tau}_{\text{与}t\text{无关}}=H(s_0)e^{s_0 t}$$

$x(t)=k_1e^{s_1 t}+k_2e^{s_2 t}+\cdots+k_ne^{s_n t}$

$y(t)=k_1H(s_1)e^{s_1 t}+k_2H(s_2)e^{s_2 t}+\cdots+k_nH(s_n)e^{s_n t}$

Frequency response function (FRF)：$H(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt$

Consider $x(t)=\cos(\omega_0 t)=\frac{1}{2}e^{j\omega_0 t}+\frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}$

$y(t)=\frac{1}{2}H(j\omega_0)e^{j\omega_0 t}+\frac{1}{2}H(-j\omega_0)e^{-j\omega_0 t}$　$\left(H(j\omega_0)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega_0 t}dt\right)$

$H(-j\omega)=H^*(j\omega)$（*的意思是复数共轭(conjugate)）（前提是$h(t)$ real）

$H(j\omega_0)=|H(j\omega_0)|e^{j\arg[H(j\omega_0)]}$（arg是复数角度）

$H(-j\omega_0)=H^*(j\omega_0)=|H(j\omega_0)|=e^{-j\arg[H(j\omega_0)]}$

$y(t)=\frac{1}{2}|H(j\omega_0)|\left[e^{j\omega_0 t}e^{j\arg[H(j\omega_0)]}+e^{-j\omega_0 t}e^{-j\arg[H(j\omega_0)]}\right.$

$=|H(j\omega_0)|\cos(\omega_0 t+\arg[H(j\omega_0)])$（就是$x(t)=\cos(\omega_0 t)$得到的）

若$x(t)=\cos(\omega_0 t+\theta)$，则$y(t)=|H(j\omega_0)|\cos(\omega_0 t+\theta+\arg[H(j\omega_0)]]$

考虑微分方程：$a_n\frac{d^n y(t)}{dt^n}+\cdots+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_0y(t)=b_m\frac{d^m x(t)}{dt^m}+\cdots+b_1\frac{dx(t)}{dt}+b_0x(t)$

TF：$H(s)=\dfrac{b_ms^m+\cdots+b_1s+b_0}{a_ns^n+\cdots+a_1s+a_0}$　不用通过$h(t)$计算，也不用计算$h(t)$

FRF：$H(j\omega)=\dfrac{b_m(j\omega)^m+\cdots+b_1(j\omega)+b_0}{a_n(j\omega)^n+\cdots+a_1(j\omega)+a_0}$

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\quad$ $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\quad$ $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$ $\quad$ $\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$

$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$ $\quad$ $\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ $\quad$ $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ $\quad$ $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ $\quad$ $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha$ $\quad$ $\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

$\tan(2\alpha)=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ $\quad$ $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$ $\quad$ $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$

$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)\left(\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

---

① $u(t)*u(t)=tu(t)$

② $e^{at}u(t)*u(t)=\left(\frac{e^{at}-1}{a}\right)u(t)$

③ $e^{at}u(t)*e^{bt}u(t)=\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}u(t)$

④ $e^{at}u(t)*e^{at}u(t)=te^{at}u(t)$

⑤ $te^{at}u(t)*e^{bt}u(t)=\frac{e^{bt}-e^{at}+(a-b)te^{at}}{(a-b)^2}u(t)$

⑥ $te^{at}u(t)*e^{at}u(t)=\frac{1}{2}t^2e^{at}u(t)\ (a\neq b)$

⑦ $\delta(t-T_1)*\delta(t-T_2)=\delta(t-T_1-T_2)$

① $\frac{dx}{dt}+mx=0,\ x=Ae^{Bt}$

② $\frac{dx}{dt}+mx=n,\ x=Ae^{Bt}+C$

③ $\frac{d^2x}{dt^2}+m\frac{dx}{dt}+nx=0$

设 $x=Ae^{Bt}$，代入

i) $\Delta>0$，解出 B_1, B_2

$x=A_1e^{B_1t}+A_2e^{B_2t}$，凑初始条件

ii) $\Delta=0$，解出 B

$x=(A_1t+A_2)e^{Bt}$，凑初始条件

iii) $\Delta<0$

$B_1=b+qj$，$B_2=b-qj$（j 为虚数）

$x=e^{bt}[C_1\cos(qt)+C_2\sin(qt)]$