

Licenciatura em Engenharia Informática

# Algoritmos e Estruturas de Dados

## speed\_run



João Catarino  
NMec: 93096  
%

Rúben Garrido  
NMec: 107927  
%

Nuno Vieira  
NMec: 107283  
%

3 de dezembro de 2022

## 1 Introdução

Este trabalho consiste em desenvolver algoritmos capazes de resolver o seguinte problema:

Uma estrada encontra-se dividida em vários segmentos de igual tamanho, cada um com uma velocidade pré-definida. O objetivo deste problema é encontrar o menor número de passos necessários para percorrer a estrada, começando no primeiro segmento e terminando no último, com velocidade 1.

Em cada passo, é possível avançar para os segmentos seguintes, com velocidade igual à velocidade de chegada ao segmento atual ou inferior/superior à velocidade atual em 1 unidade. Contudo, em cada iteração, deve-se verificar se a velocidade de partida é igual ou inferior à velocidade dos segmentos seguintes. Caso a velocidade atual seja 1, não é possível reduzir a velocidade.

## 2 Soluções

A solução original utiliza uma função recursiva para verificar todas as combinações de passos a todas as velocidades possíveis dentro dos limites de cada casa, guardando sempre a melhor solução encontrada até ao momento. Esta possui um tempo de execução com ordem de grandeza  $10^{154}$  (em anos) para a resolução do caso  $n = 800$ . Com vista em obter a solução em tempo aceitável, criámos três soluções capazes de o fazer na ordem dos microsegundos. A primeira altera apenas ligeiramente a solução original, enquanto que a segunda é não recursiva (dinâmica) e utiliza o princípio da solução anterior com algumas optimizações. A terceira combina as duas soluções anteriores.

### 2.1 Original

A solução dada é uma solução recursiva que itera sobre todas as possibilidades de percurso, guardando a melhor solução até ao momento.

Esta parte das soluções de maior número de passos (menor velocidade por passo) para as de menor número de passos (maior velocidade por passo) dentro das regras do problema.

Pelo facto de a solução ser recursiva, à medida que o tamanho do problema aumenta, o número de chamadas recursivas também aumenta, o que leva a um tempo de execução exponencial. Por exemplo, a partir de  $n = 35$ , o tempo de execução é superior a 1 segundo, pelo que esta não é, portanto, uma solução viável para o problema.

### 2.2 Original Improved

Esta solução introduz duas pequenas mudanças no código original, que, no entanto, geram alterações significativas no seu comportamento.

Em primeiro lugar, é introduzido controlo de fluxo através de um valor de retorno *boolean* (implementado como inteiro).

```
        return 1;
    }
    return 0;
```

Se uma sequência de chamadas recursivas chegar a uma solução, a última chamada retorna 1.

```
        if (solution_2_recursion(move_number + 1, position +
            new_speed, new_speed, final_position))
            return 1;
```



Se for este o caso, as chamadas anteriores retornarão também 1. Isto significa que o programa grava apenas a primeira solução que encontrar.

```
// Solution found
if(position == final_position && speed == 1)
{
    solution_2.n_moves = move_number;
    return 1;
}
```

Tendo isto, torna-se imperativo que o programa encontre a melhor solução possível à primeira tentativa. Isto implica que o “carro” se mova o mais rápido possível em qualquer passo para obter o menor número de passos. A segunda alteração garante essa condição ao fazer com que o programa itere desde as maiores velocidades para as menores.

```
for(i = 0; i <= new_speed && new_speed <= max_road_speed[
position + i]; i++)
;
```

### 2.3 Advance and retreat

Este algoritmo foi feito de raiz. Tem como princípio tentar a qualquer passo avançar com a velocidade mais alta. Em cada passo, a escolha de velocidade é representada por um incremento (−1, 0 ou 1). O programa começa sempre por tentar o maior incremento. Para verificar passos possíveis, utilizam-se os seguintes métodos:

Calcular a distância de paragem para cada velocidade possível em cada passo para evitar correr para além do fim do trajeto:

```
// Sum 1 to n: stopping distance going at speed n
static int sum1ton(int n)
{
    return n * (n + 1) / 2;
}

// Checks if it is possible to stop before or at finalpos going at
// speed from pos
static int valstop(int pos, int speed, int finalpos)
{
    return (pos + sum1ton(speed)) <= finalpos;
}
```

Verificar, a partir do incremento mais alto, se uma “passada” não quebra os limites de velocidade das casas pelas quais passaria:

```
// Checks if step from pos at speed breaks any of the intermediary
// speed limits
static int valstep(int pos, int speed)
{
    int end = pos + speed;
    for (; pos <= end && speed <= max_road_speed[pos]; pos++)
    ;
    return (pos > end);
}
```

Feito o passo, a escolha de incremento é guardada num *array* na posição associada ao número do passo. Desta forma, este *array* guarda as escolhas feitas até ao passo atual.



```

// Current move
#define move solution_3.n_moves

// Car position
#define pos solution_3.positions[move]
#define nextpos solution_3.positions[move+1]

// Current speed "choice"
#define incmax incmaxes[move]

// Stores the "choice" taken at every move (slowdown, cruise,
  accel)
int incmaxes[1 + final_position];

// Current speed
int speed = 0;

```

Quando um passo é impossível de executar a qualquer das velocidades possíveis nesse passo, o algoritmo recua um passo e tenta reduzir o incremento de velocidade até que consiga avançar novamente. Não sendo possível avançar com nenhum dos incrementos, o programa recua novamente, e assim sucessivamente.

```

move--;
speed -= incmax;
incmax--;

```

## 2.4 Combined

O algoritmo Combined é, na sua grande parte, idêntico ao algoritmo Original Improved. Contudo, ao invés de, no ciclo `for`, existir uma verificação da posição final através da expressão *boolean* `position + new_speed <= final_position`, utilizou-se a função `valstop(position, new_speed, final_position)`, presente no algoritmo Advance and retreat.

```

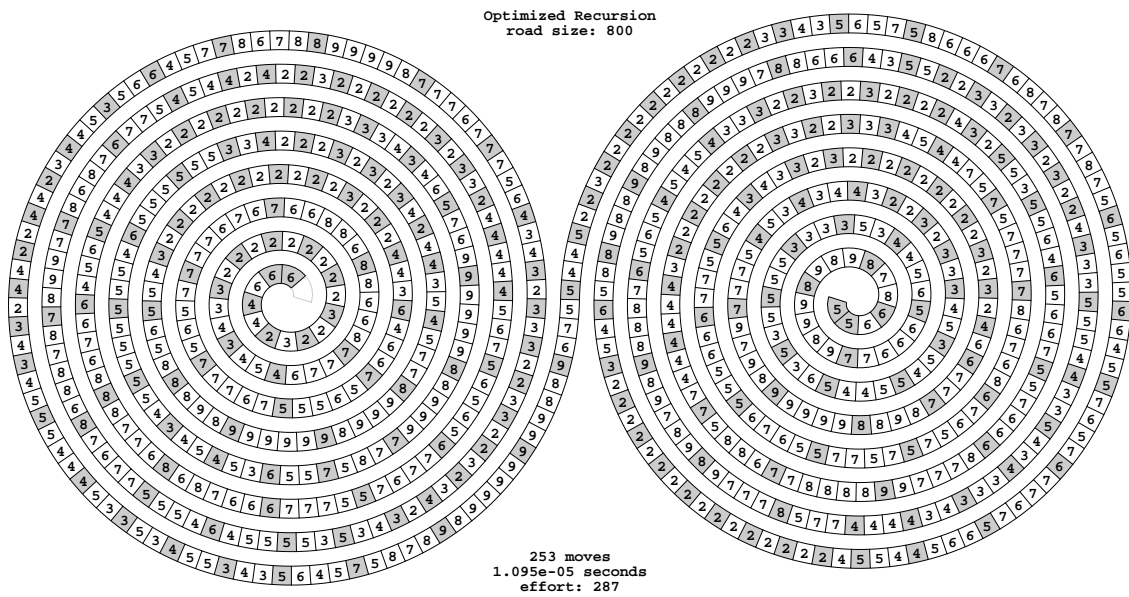
for(new_speed = speed + 1; new_speed >= speed - 1; new_speed--)
  if(new_speed >= 1 && new_speed <= _max_road_speed_ && valstop(
    position, new_speed, final_position))
  {
    for(i = 0; i <= new_speed && new_speed <= max_road_speed[
      position + i]; i++)
    ;
    if(i > new_speed)
      if (solution_4_recursion(move_number + 1, position +
        new_speed, new_speed, final_position))
        return 1;
  }
return 0;

```

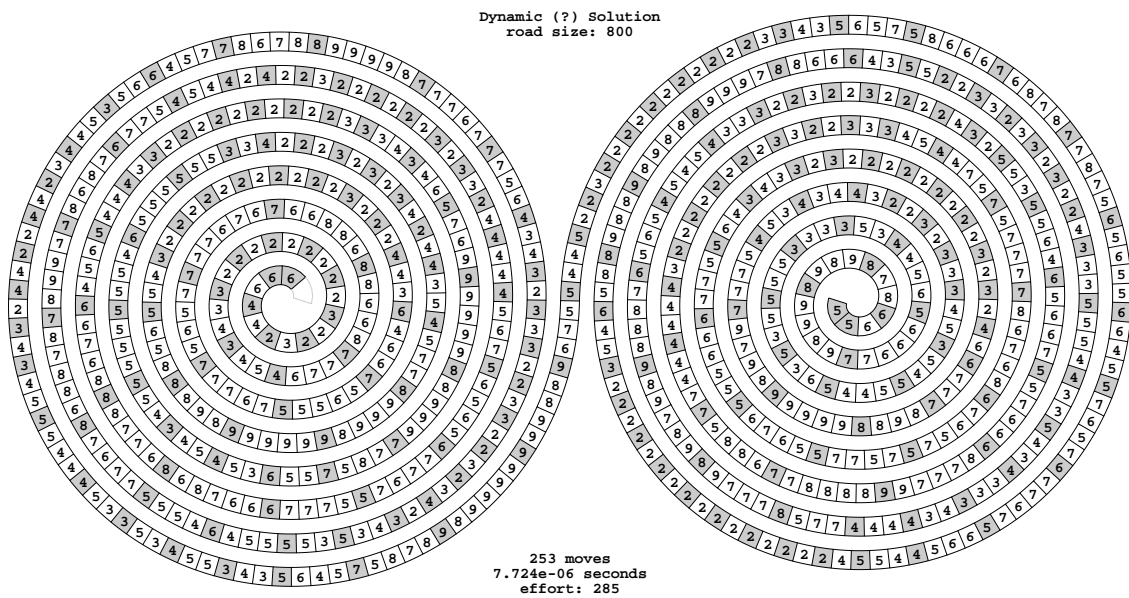


### 3 PDFs de soluções

#### 3.1 Original Improved



#### 3.2 Advance and retreat



### 3.3 Combined



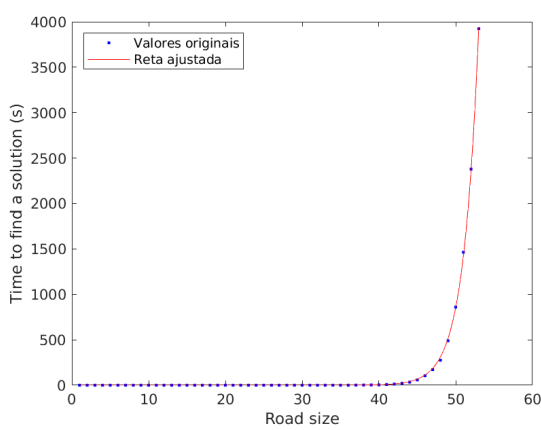
## 4 Tempos de execução e estimativas

### 4.1 Original

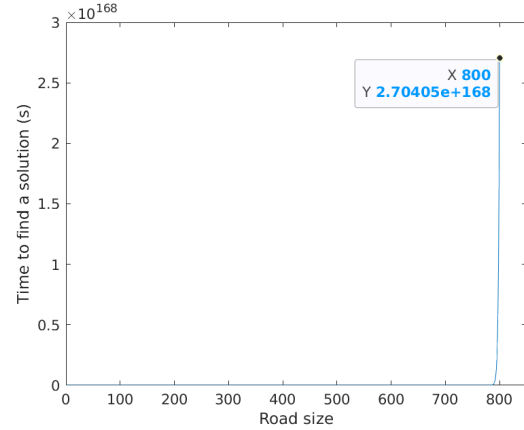
Devido à complexidade do algoritmo, não foi possível obter tempos de execução para  $n = 800$ , pelo que foi necessário recorrer a estimativas, utilizando o MATLAB.

Procedeu-se ao ajuste de uma curva do tipo  $a \times e^{bx}$  aos tempos obtidos até uma hora, utilizando a Curve Fitting Toolbox do MATLAB. De seguida, foi calculado o tempo de execução para  $n = 800$  através da equação exponencial determinada anteriormente.

Para o número mecanográfico 107927, obteve-se a equação  $y = (7.942 \times 10^{-9}) \times e^{0.5081x}$  e uma previsão de  $2.704 \times 10^{168}$  segundos para  $n = 800$ , o que equivale a, aproximadamente,  $8.694 \times 10^{160}$  anos.



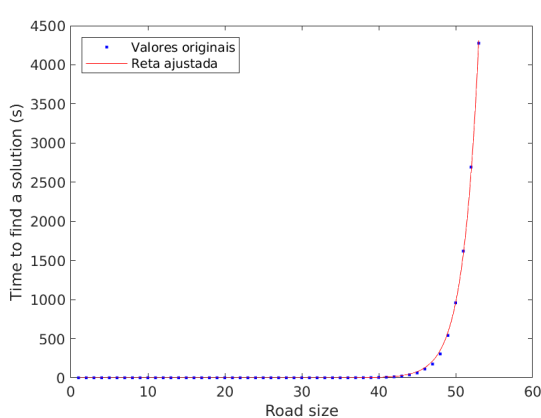
(a) Tempos de execução obtidos e função exponencial ajustada.



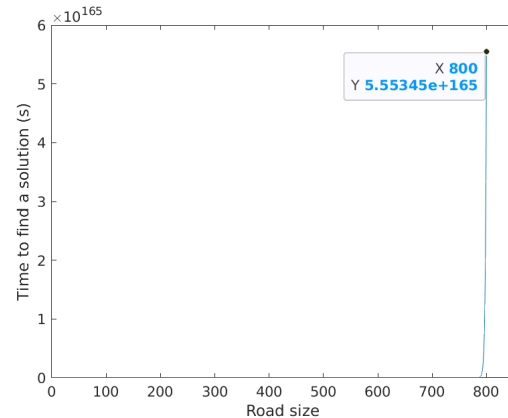
(b) Tempo de execução estimado, recorrendo à função ajudada em (a), para  $n = 800$ .

Figura 1: Dados do algoritmo original, para o número mecanográfico 107927.

Para o número mecanográfico 93096, obteve-se a equação  $y = (1.36 \times 10^{-8}) \times e^{0.4997x}$  e uma previsão de  $5.553 \times 10^{165}$  segundos para  $n = 800$ , o que equivale a, aproximadamente,  $1.785 \times 10^{158}$  anos.



(a) Tempos de execução obtidos e função exponencial ajustada.

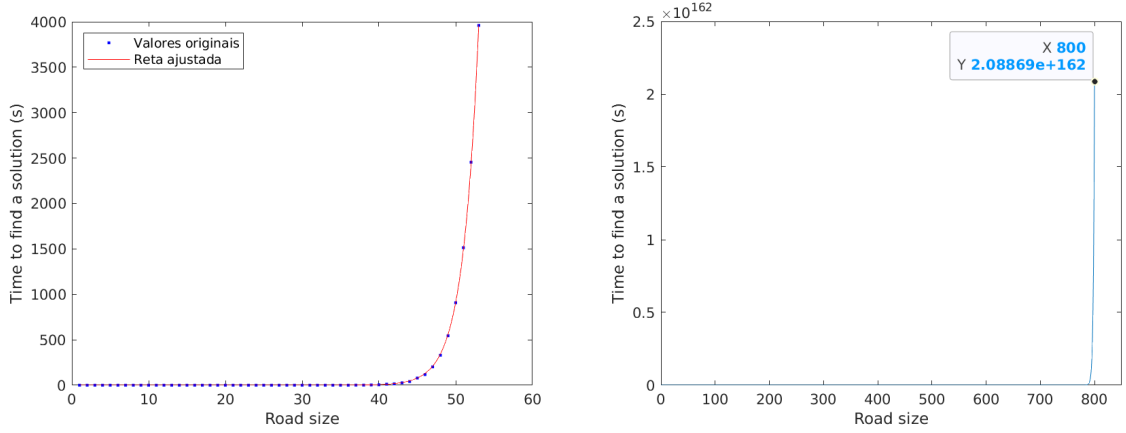


(b) Tempo de execução estimado, recorrendo à função ajudada em (a), para  $n = 800$ .

Figura 2: Dados do algoritmo original, para o número mecanográfico 93096.



Para o número mecanográfico 107283, obteve-se a equação  $y = (2.177 \times 10^{-8}) \times e^{0.4892x}$  e uma previsão de  $2.089 \times 10^{162}$  segundos para  $n = 800$ , o que equivale a, aproximadamente,  $6.715 \times 10^{154}$  anos.



(a) Tempos de execução obtidos e função exponencial ajustada.

(b) Tempo de execução estimado, recorrendo à função ajudada em (a), para  $n = 800$ .

Figura 3: Dados do algoritmo original, para o número mecanográfico 107283.

## 4.2 Original Improved

Pelo facto de o algoritmo Original Improved efetuar cálculos em tempos com ordem de grandeza  $10^{-6}$ , foi possível obter um tempo de execução para  $n = 800$ .

Contudo, os valores até  $n = 60$  não são fiáveis para ajustar uma reta, pois são constituídos, na sua grande parte, por ruído. Este é causado pelo script de medição de tempo que, devido a questões de arquitetura, não consegue reportar valores temporais tão baixos.

A reta de ajuste obtida tem equação  $y = (1.069 \times 10^{-8})x + (9.515 \times 10^{-7})$ .

As alterações indicadas na secção 2.2 são a explicação para uma diferença tão significativa nos resultados, quando comparado com o algoritmo Original.

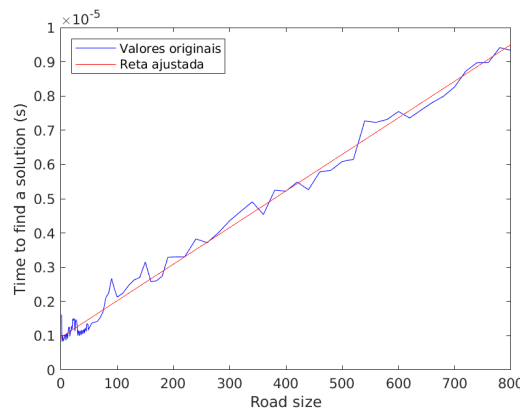


Figura 4: Tempos de execução e função exponencial ajustada.





### 4.3 Advance and retreat

Tal como a solução anterior, o algoritmo Advance and retreat efetua cálculos em tempos bastante baixos (ordem de grandeza  $10^{-6}$ ), até  $n = 800$ . Assim, os valores iniciais de  $n$  constituem igualmente ruído.

A reta de ajuste tem equação  $y = (7.464 \times 10^{-9})x + (7.920 \times 10^{-7})$ .

Este algoritmo é o mais eficiente, já que o declive da reta ajustada é o mais baixo (ordem de grandeza  $10^{-9}$ ), quando comparado com os declives dos outros algoritmos (ordem de grandeza  $10^{-8}$ ). A não recursão do algoritmo é, provavelmente, um fator decisivo que contribui para a sua eficiência.

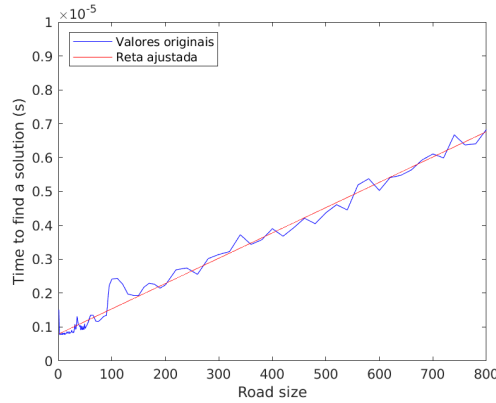


Figura 5: Tempos de execução e função exponencial ajustada.

### 4.4 Combined

Pela mesma razão das soluções anteriores, o algoritmo Combined também efetua cálculos em tempos bastante baixos, pelo que os valores iniciais de  $n$  são considerados, mais uma vez, ruído.

A reta de ajuste tem equação  $y = (1.081 \times 10^{-8})x + (7.594 \times 10^{-7})$ .

Apesar da alteração efetuada neste algoritmo, o declive da reta de ajuste é aproximadamente igual ao da solução Original Improved (excluem-se pequenas diferenças devido à presença de fatores externos). Assim, este algoritmo tem a mesma eficiência do algoritmo que tem por base. Estes resultados podem ser explicados pelo facto de a complexidade da expressão *boolean* e da função *valstop* ser a mesma, o que não produz qualquer diferença.

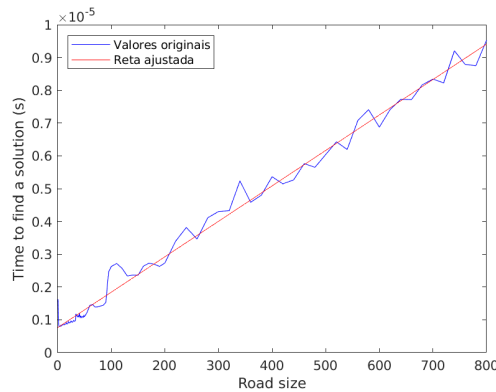


Figura 6: Tempos de execução e função exponencial ajustada.



## 5 Código

### 5.1 Original Improved

```
static solution_t solution_2;
static double solution_2_elapsed_time; // time it took to solve the
    problem
static unsigned long solution_2_count; // effort dispended solving
    the problem

static int solution_2_recursion(int move_number,int position,int
    speed,int final_position)
{
    int i,new_speed;

    // record move
    solution_2_count++;
    solution_2.positions[move_number] = position;
    // Solution found
    if(position == final_position && speed == 1)
    {
        solution_2.n_moves = move_number;
        return 1;
    }
    // Try all legal speeds. Fastest first
    for(new_speed = speed + 1;new_speed >= speed - 1;new_speed--)
        if(new_speed >= 1 && new_speed <= _max_road_speed_ && position
            + new_speed <= final_position)
        {
            for(i = 0;i <= new_speed && new_speed <= max_road_speed[
                position + i];i++)
                ;
            if(i > new_speed)
                if (solution_2_recursion(move_number + 1,position +
                    new_speed,new_speed,final_position))
                    return 1;
        }
    return 0;
}

static void solve_2(int final_position)
{
    if(final_position < 1 || final_position > _max_road_size_)
    {
        fprintf(stderr,"solve_2: bad final_position\n");
        exit(1);
    }
    solution_2_elapsed_time = cpu_time();
    solution_2_count = 0ul;
    solution_2.n_moves = final_position + 100;
    solution_2_recursion(0,0,0,final_position);
    solution_2_elapsed_time = cpu_time() - solution_2_elapsed_time;
}
```



## 5.2 Advance and retreat

```
static solution_t solution_3;
static double solution_3_elapsed_time; // time it took to solve the
    problem
static unsigned long solution_3_count; // effort dispended solving
    the problem

// Checks if step from pos at speed breaks any of the intermediary
    speed limits
static int valstep(int pos, int speed)
{
    int end = pos + speed;
    for (; pos <= end && speed <= max_road_speed[pos]; pos++)
        ;
    return (pos > end);
}

/* The solution works by increasing the speed as much as possible
    without overstepping the finalpos or breaking any speed limits.

    In a move, if any of the those two checks fail, the program
    attempts to maintain or decrease the speed of the car. If the two
    checks don't work for any of the possible speeds, the program
    moves back one step and retries it with the previous speed reduce
    by one.
*/

static void solution_3_dynamic(int final_position)
{
    // Current move
    #define move solution_3.n_moves

    // Car position
    #define pos solution_3.positions[move]
    #define nextpos solution_3.positions[move+1]

    // Current speed "choice"
    #define incmax incmaxes[move]

    // Stores the "choice" taken at every move (slowdown, cruise,
        accel)
    int incmaxes[1 + final_position];

    // Current speed
    int speed = 0;

    pos = 0;
    move = 0;
    incmax = 1;
mainloop:
    while (pos != final_position)
    {
        for (; incmax >= -1; incmax--)
        {
```



```

    if (valstop(pos, speed + incmax, final_position) && valstep(
pos, speed + incmax))
    {
        solution_3_count++;
        // Found valid step, take it
        speed += incmax;
        nextpos = pos + speed;
        move++;
        incmax = 1;
        // Jump to main loop to see if it reaches the
        // end or try the next one, avoiding the fail
        // state after the two fors
        goto mainloop;
    }
}
/*
There are no possible steps in the current move,
so lets try the previous move with it's speed reduced by one

Move the program back one move by reverting
the prev speed change and by decrementing the
move count. Then, choose the next smaller speed.
*/
move--;
speed -= incmax;
incmax--;
}
}

static void solve_3(int final_position)
{
    if(final_position < 1 || final_position > _max_road_size_)
    {
        fprintf(stderr, "solve_3: bad final_position\n");
        exit(1);
    }
    solution_3_elapsed_time = cpu_time();
    solution_3_count = 0ul;
    solution_3_dynamic(final_position);
    solution_3_elapsed_time = cpu_time() - solution_3_elapsed_time;
}

```



### 5.3 Combined

```
static solution_t solution_4;
static double solution_4_elapsed_time; // time it took to solve the
// problem
static unsigned long solution_4_count; // effort dispended solving
// the problem

static int solution_4_recursion(int move_number, int position, int
    speed, int final_position)
{
    int i, new_speed;

    // record move
    solution_4_count++;
    solution_4.positions[move_number] = position;
    // Solution found
    if(position == final_position && speed == 1)
    {
        solution_4.n_moves = move_number;
        return 1;
    }
    // Try all legal speeds. Fastest first
    for(new_speed = speed + 1; new_speed >= speed - 1; new_speed--)
        if(new_speed >= 1 && new_speed <= _max_road_speed_ && valstop(
            position, new_speed, final_position))
        {
            for(i = 0; i <= new_speed && new_speed <= max_road_speed[
                position + i]; i++)
            ;
            if(i > new_speed)
                if (solution_4_recursion(move_number + 1, position +
                    new_speed, new_speed, final_position))
                    return 1;
        }
    return 0;
}

static void solve_4(int final_position)
{
    if(final_position < 1 || final_position > _max_road_size_)
    {
        fprintf(stderr, "solve_4: bad final_position\n");
        exit(1);
    }
    solution_4_elapsed_time = cpu_time();
    solution_4_count = 0ul;
    solution_4.n_moves = final_position + 100;
    solution_4_recursion(0, 0, 0, final_position);
    solution_4_elapsed_time = cpu_time() - solution_4_elapsed_time;
}
```



## 5.4 Ajuste dos dados obtidos utilizando o MATLAB

```

table = load("Path_to_file.txt"); % Change to appropriate file
n = table(:,1); % Road size
t = table(:,2); % Time to find a solution

% Curve fitting
figure(1)
f = fit(n,t,'exp1'); % Alternatively, one can launch the Curve
    Fitting Toolbox
plot(f,n,t,'b.')
xlabel('Road size')
ylabel('Time to find a solution (s)')
legend('Valores originais','Reta ajustada','Location','northwest')

% Extend fitted curve on x-axis to [0,800]
x_fit = 0:800;
coefficients = coeffvalues(f); % Get fitted curve coefficients
y_fit = coefficients(1) * exp(coefficients(2)*x_fit); % Equation of
    fitted curve: a*exp(b*x)
figure(2)
plot(x_fit,y_fit)
xlim([0 850]) % Graph would look empty (due to exponential values)
    if no x-lim was applied
xlabel('Road size')
ylabel('Time to find a solution (s)')

% Print the value
fprintf('Time needed to solve the problem, with size 800: %e
    seconds or %e years\n', y_fit(end), y_fit(end)/(3600*24*30*12))

```

