

Licenciatura em Engenharia Informática

# Algoritmos e Estruturas de Dados

## Word Ladder



João Catarino  
NMec: 93096

Rúben Garrido  
NMec: 107927

Nuno Vieira  
NMec: 107283

14 de janeiro de 2023

# Índice

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Representação do problema</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Implementação</b>	<b>2</b>
3.1	Funções de <i>hash table</i> . . . . .	2
	hash_table_create . . . . .	2
	hash_table_grow . . . . .	3
	hash_table_free . . . . .	3
	create_word_node . . . . .	3
3.2	Funções de manipulação de grafo . . . . .	3
	find_word . . . . .	3
	similar_words . . . . .	3
	find_representative . . . . .	4
	add_edge . . . . .	4
3.3	Funções de estudo de grafo . . . . .	4
	breadth_first_search . . . . .	4
	path_finder . . . . .	5
	component_info . . . . .	5
	graph_info . . . . .	5
	connected_component_diameter . . . . .	5
3.4	Funções de <i>queue</i> . . . . .	5
	allocate_ptr_queue . . . . .	5
	free_ptr_queue . . . . .	6
	queue_put_hi . . . . .	6
	queue_get_lo . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Word ladders interessantes</b>	<b>6</b>
4.1	Maior <i>word ladder</i> encontrada . . . . .	7
<b>5</b>	<b>Verificação de <i>memory leaks</i></b>	<b>8</b>
<b>6</b>	<b>Análise do incremento da <i>hash table</i></b>	<b>9</b>
6.1	Explicação do código . . . . .	9
6.2	Gráficos obtidos . . . . .	10
6.3	Análise dos resultados . . . . .	11
<b>7</b>	<b>Código</b>	<b>12</b>
7.1	solution_word_ladder.c . . . . .	12
7.2	Função hash_table_grow que testa o melhor incremento . . . . .	27
7.3	Script MATLAB que gera os gráficos para análise da hash_table_grow . . . . .	28



# 1 Introdução

Este trabalho centra-se no estudo de dicionários de palavras, interpretando cada um como um grafo não-orientado, onde cada nó representa uma palavra. Palavras que diferem num só carácter são unidas por um arco. Deste modo, é possível determinar *word ladders* entre palavras: os caminhos mais curtos entre elas, compostos por outras palavras. Por exemplo, *tudo*, *todo*, *nodo*, *nado*, *nada* é uma *word ladder* entre as palavras *tudo* e *nada*. Os objetivos deste trabalho incluem implementar uma *hash table*, a representação de um grafo não-orientado e a estrutura de dados *union find*, bem como determinar o componente complexo de uma palavra, o diâmetro de um componente conexo e a maior *word ladder* existente no dicionário fornecido.

## 2 Representação do problema

A implementação do grafo foi feita através de uma *linked hash table*, uma vez que esta possui uma complexidade computacional  $O(1)$  para a inserção e procura de elementos. Esta complexidade computacional é importante, dado que a geração de arcos entre palavras implica verificar se todas as permutações de mudança de um carácter de um nó correspondem a palavras contidas no dicionário. Para além disso, caso a complexidade computacional fosse  $O(n)$  e existisse um número avultado de palavras, a *word ladder* poderia demorar algum tempo a ser gerada.

A *linked hash table* é composta por um array de *buckets*: *linked lists* que contêm nós. Nós aos quais sejam atribuídos o mesmo índice de array pela função de dispersão são colocados no início da lista presente nesse índice. Cada nó contém uma *linked list* onde são guardadas referências aos nós adjacentes. A figura 1 mostra a estrutura da *hash table*.

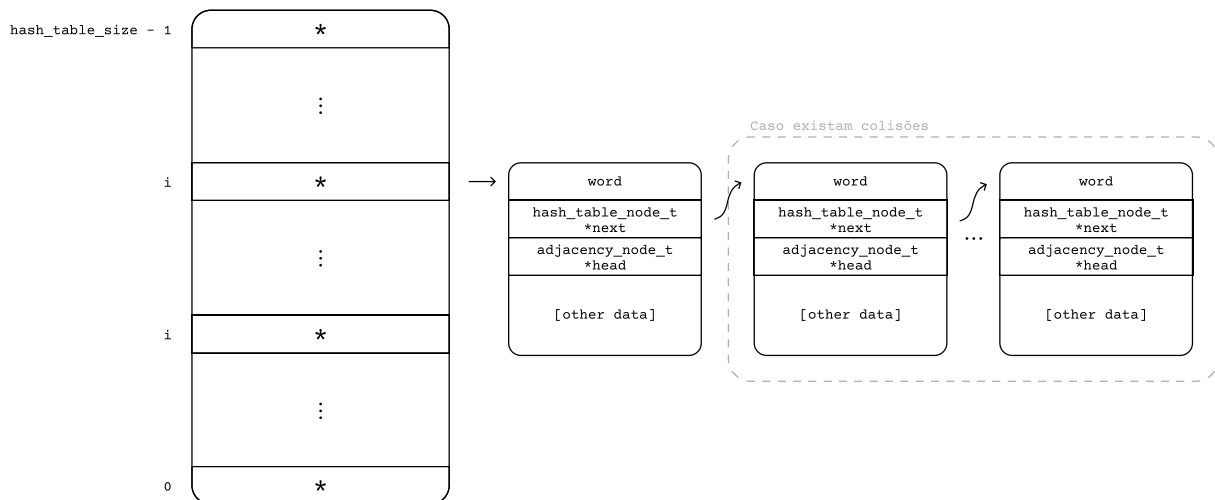


Figura 1: Estrutura da *hash table*

Os índices são calculados através do resto da divisão entre o valor retornado por uma *hash function* e o tamanho da *hash table*. A *hash function* utilizada faz uso do algoritmo CRC32 (acrónimo de *Cyclic Redudancy Check*, 32 bits).

## 3 Implementação

### 3.1 Funções de *hash table*

#### `hash_table_create`

Esta função aloca memória para uma estrutura de dados do tipo definido `hash_table_t`, que representa a *hash table*, e para o seu *array* interno `heads` que irá conter as entradas da tabela.

O tamanho inicial da tabela é definido no macro `_hash_table_init_size_` e as suas entradas são inicializadas a zero de forma implícita pela função `calloc`. No final, é guardado o tamanho inicial da tabela na estrutura de dados. A função termina o programa se uma das alocações não for bem sucedida.

### **hash\_table\_grow**

`hash_table_grow` é a função responsável por aumentar o tamanho da *hash table*. A sua condição de incremento depende do rácio entre o tamanho desta e o número de colisões, onde, caso seja superior a 5, verificar-se-á o incremento. A função inicializa uma nova tabela (com um tamanho igual ao dobro da anterior) usando a função `calloc` e, para cada *node* desta, recalcula o seu índice, através da função `crc32`, e insere-o na nova tabela. Por fim, os endereços para o array `heads` e para o tamanho da tabela (`hash_table_size`) são atualizados.

### **hash\_table\_free**

Esta função desaloca a memória previamente reservada para a *hash table* e outras estruturas de dados nela contidas. Esta começa por iterar sobre todas as posições do *array*, chamando a função `free_hash_llist`, libertando a *linked list* nessa posição. Por sua vez, esta irá iterar sobre todos os nós da lista através do ponteiro `next` e chamar a função `free_hash_table_node` sobre cada nó, que irá primeiro libertar a lista de adjacência com a função `free_adjacency_llist` e depois o próprio nó. A função `free_adjacency_llist` simplesmente itera sobre todos os membros da lista ligada e liberta cada um deles.

### **create\_word\_node**

Cria um novo nó de *hash table* com a palavra fornecida como argumento. Este nó, cuja memória alocada é obtida através da função `allocate_hash_table_node`, é inicializado com a palavra e alguns parâmetros predefinidos. Por fim, a função retorna o endereço do *node* recém-criado.

## **3.2 Funções de manipulação de grafo**

### **find\_word**

Função dedicada à procura e inserção de elementos na *hash table*. É calculado o índice, que resulta do resto da divisão entre o resultado da aplicação da *hash function* à palavra desejada e o tamanho máximo da tabela. Esta operação distribui o índice da palavra entre 0 e o tamanho da tabela. De seguida, a função itera sobre a lista ligada na posição calculada, procurando um nó igual através da função `strcmp`, e retorna-o se for o caso. Caso a palavra não exista e a opção `insert_if_not_found` seja verdadeira, o programa aloca um novo nó para a palavra através da função `create_word_node` e coloca-o na lista ligada, atualizando os valores estatísticos na *hash table*.

### **similar\_words**

É responsável por encontrar palavras semelhantes à palavra fornecida como argumento. A verificação é baseada em caracteres *Unicode*, onde, para cada caracter da palavra, este é substituído pelos vários caracteres aceites. Caso a nova palavra exista na *hash table*, é efetuada uma chamada à função `add_edge` (ver secção 3.2). A função termina quando não existirem mais caracteres para substituir.

**find\_representative**

Função responsável pela determinação do nó representante do componente conexo de um nó requisitado. Antes de devolver o resultado, a função atualiza os representantes dos nós percorridos anteriormente.

O seu funcionamento consiste em iterar sobre o representante do nó dado como argumento recursivamente até que o representante de um nó seja ele próprio. Após determinar o representante, esta parte novamente do nó passado como argumento e altera o representante de forma recursiva para o anteriormente determinado até chegar a este novamente. Desta forma, o caminho para o representante é simplificado e as chamadas posteriores com o mesmo nó como argumento serão mais rápidas.

**add\_edge**

Esta função tenta adicionar um arco entre um nó existente e uma palavra que pode não existir, para além de implementar os aspetos da estrutura de dados *Union-Find*. Esta começa por procurar a *string* dada no grafo, retornando caso não a encontre. Caso contrário, procura o segundo nó na lista de adjacência do primeiro e retorna se for o caso, para garantir que o arco não é duplicado. Ao adicionar o arco, é incrementado o contador de arcos da tabela e são adicionados nós de adjacência às tabelas de adjacência das palavras.

A função **insert\_edge** trata de alocar o nó de adjacência para cada vértice e de os colocar nas listas respetivas. Neste sentido, a função trata de executar a operação *Union* entre os conjuntos (componentes conexos) de cada vértice. Primeiro, são determinados os representantes de cada um através da função **find\_representative** vista anteriormente. Se estes forem diferentes, a operação ocorre. Para minimizar o tamanho do caminho de representantes, o nó com menos vértices na altura da operação é escolhido como o representante do novo componente conexo. Finalmente, são somados os números de vértices e arcos, é decrementado o número de componentes e é atualizado o tamanho do maior componente.

**3.3 Funções de estudo de grafo****breath\_first\_search**

A função **breath\_first\_search**, cujos argumentos são o número máximo de vértices, uma lista de vértices, o array de origem e o ponto de destino, tem como objetivo retornar o número de vértices visitados. Se for especificado o destino, será possível obter o caminho mais curto até este seguindo recursivamente o seu ponteiro **previous**. Para este efeito, é utilizado o algoritmo *Breadth-first search*. Este percorre uma árvore nível a nível, garantindo o menor percurso para cada nó visitado. Foi implementada para este caso uma *queue* circular, que garante que o tamanho máximo desta é constante.

Em primeiro lugar, é efetuada uma chamada à função **allocate\_ptr\_queue** – que devolve uma *queue* –, e uma chamada à função **queue\_put\_hi**, que insere o nó de partida na *queue*. De seguida, dentro de um ciclo **while**, a função visita todos os nós na *queue*, retirando-os do início da *queue*. A sua variável **visited** é incrementada para marcar o nó como visitado e este é colocado na lista de nós visitados. Por cada nó visitado, são adicionados os seus nós adjacentes por visitar ao final da *queue*, guardando neles o valor do nó visitado em **previous**, bem como a profundidade do nível anterior em **visited**. Ao terminar a iteração, a função retorna -1 caso não tenha encontrado o destino (se for fornecido). Caso contrário, devolve o comprimento da lista de nós visitados.

Nota importante: o valor **visited** nesta implementação guarda a distância do nó até à raiz. Isto é útil na determinação do diâmetro na função **connected\_component\_diameter**, por tornar desnecessário percorrer o caminho entre o nó de partida e o nó destino para calcular a distância.

**path\_finder**

Esta função tenta determinar o caminho mais curto entre duas palavras (uma *word ladder*) , imprimindo a sequência. Para tal, em primeiro lugar, é necessário obter os nós associados a cada palavra, utilizando a função `find_word`. Caso um não exista, é impressa uma mensagem de erro. Depois, todos os nós da tabela de *hash* são marcados como não visitados ( variável `visited` de cada nó posta a -1). O grafo está agora pronto para ser estudado. É chamada a função `breath_first_search` com o argumento `list_of_vertices` nulo, visto que o caminho será obtido ao seguir os ponteiros `previous` a partir do destino. Como o caminho obtido desta forma será invertido, ou seja, irá da palavra destino até à de partida, a função anterior é chamada com os argumentos `from_word` e `to_word` alternados. Esta chamada devolve -1 caso as palavras não estiverem ligadas, e é impresso uma mensagem de erro neste caso. Caso contrário, o caminho existe e é impresso seguindo o ponteiro `previous` do nó `from_word` até que seja nulo.

**component\_info**

Função que imprime dados de um componente conexo associado a uma palavra dada como argumento. Primeiro verifica que a palavra existe e depois obtém o nó representante do seu componente conexo. Este contém os dados atualizados do componente. São impressos a palavra representante, o número de vértices, o número de laços e o diâmetro do componente.

**graph\_info**

Imprime a seguinte informação sobre o grafo: o número de nós, o número de laços, o número de nós de adjacência (apenas para verificar que são exatamente o dobro do número de laços), o número de componentes conexos, o tamanho do maior componente, o maior diâmetro do grafo e a maior *word ladder* correspondente.

**connected\_component\_diameter**

Determina o diâmetro do componente conexo ao qual o nó dado pertence. Atualiza o valor máximo global, bem como o caminho respetivo se for o caso. Para tal, a função itera sobre todos os nós do componente conexo, determina as suas excentricidades e guarda a maior encontrada. Em termos práticos, isto significa, em primeiro lugar, obter uma lista de todos os nós através da função `breath_first_search`. Por cada nó, é feita uma procura com a função `breath` partindo deste. Como esta função percorre o grafo nível a nível, o último nó inserido na lista de nós visitados encontra-se no nível mais profundo, e portanto será um dos nós mais distantes do anterior. Se a distância ao último nó da lista, obtido a partir da variável `visited`, for a maior determinada até agora, é guardada. O último valor a ser guardado após todas as pesquisas a partir de todos os vértices, é o diâmetro do componente conexo. Tendo determinado o diâmetro, a função verifica se este é o maior a nível global, guardando o seu valor e o seu caminho associado.

**3.4 Funções de queue****allocate\_ptr\_queue**

Esta função aloca memória para uma *queue* de ponteiros. Esta operação começa por alocar memória para a estrutura de metadados da *queue*, que contém as variáveis necessárias para o manuseamento de uma *queue*. Posteriormente, é alocado o *array* circular de ponteiros. Finalmente, são inicializadas as variáveis de controlo da estrutura de dados e o seu ponteiro é devolvido.

**free\_ptr\_queue**

A função que liberta a memória alocada para a *queue*. Isto implica apenas libertar o seu *array* circular e finalmente a própria estrutura.

**queue\_put\_hi**

Implementação da operação *enqueue*, onde um elemento, neste caso um ponteiro, é adicionado ao final da fila. A função começa por executar um *assert* para assegurar que o tamanho da fila não é ultrapassado. Depois, é inserido o novo elemento na posição *hi*. Este valor não representa na verdade o final da fila, mas sim a posição imediatamente a seguir. O valor é agora incrementado e assume o valor do resto da sua divisão pelo tamanho máximo da *queue*. Isto implica que para valores menores que o maior índice possível, *hi* mantém-se, caso contrário, volta à posição 0, garantindo a circularidade. Finalmente, o tamanho da fila é incrementado.

**queue\_get\_lo**

Implementação da operação *dequeue*, onde o elemento inicial da fila é removido e devolvido. A operação começa por um *assert*, para garantir que o programa não tenta remover um elemento de uma fila vazia. De seguida, o valor na posição *lo* é guardado numa variável temporária. Isto é feito porque o início da fila pode “saltar” para o outro lado após a sua incrementação. Tendo o valor guardado, é atualizada a posição *lo* da mesma forma como na função `queue\_put\_hi`, e é decrementado o tamanho da fila. No final, é devolvido o valor guardado.

## 4 Word ladders interessantes

- De “Terra” a “Marte”:

1. Terra
2. perra
3. parra
4. parta
5. parte
6. Marte

- Do “tudo” ao “nada”:

1. tudo
2. todo
3. nodo
4. nado
5. nada

- De “novo” a “byte”:

1. novo
2. noto
3. boto
4. bote
5. byte

- De “mundo” a “clima”:

1. mundo
2. mondo
3. monto
4. conto
5. coito
6. coita
7. coima
8. clima



#### 4.1 Maior *word ladder* encontrada

1. visse-te	32. bastaria	63. exarares
2. viste-te	33. bostaria	64. exararas
3. veste-te	34. tostaria	65. exaradas
4. deste-te	35. tontaria	66. exarados
5. despe-te	36. contaria	67. exaramos
6. desperte	37. coutaria	68. exaremos
7. desperto	38. chutaria	69. extremos
8. desporto	39. chuparia	70. entremos
9. desponto	40. chaparia	71. enteemos
10. desponte	41. chavaria	72. enfeemos
11. desconte	42. cravaria	73. enfermos
12. descente	43. crivaria	74. enfermas
13. descende	44. privaria	75. enformas
14. descenda	45. provaria	76. enformas
15. despenda	46. proveria	77. encornas
16. despesa	47. preveria	78. encarnas
17. dispensa	48. preteria	79. escarnas
18. dispenso	49. preteris	80. escarpas
19. distenso	50. preteres	81. escalpas
20. distendo	51. premeres	82. escaldas
21. distando	52. tremeres	83. escaldar
22. discando	53. tremares	84. espaldar
23. riscando	54. tramaras	85. espalhar
24. rascando	55. aramares	86. espalhas
25. lascando	56. afamares	87. espelhas
26. lassando	57. afanares	88. espelhos
27. passando	58. afinares	89. espelhou
28. pastando	59. afileares	90. espalhou
29. bastando	60. axilares	91. empalhou
30. bastardo	61. exilares	92. empaleou
31. bastarda	62. exalares	





## 5 Verificação de *memory leaks*

Para verificar se existem *memory leaks* no programa criado, foi utilizado o *Valgrind*, um programa constituído por um conjunto de ferramentas para a deteção de erros de memória e de *threading*. Para o efeito, foi utilizado o *Memcheck*, que é uma ferramenta para deteção de erros de memória.

Obteve-se o seguinte resultado, para o programa `solution_word_ladder.c`, com o ficheiro `wordlist-four-letters.txt` como argumento:

```
==500745== Memcheck, a memory error detector
==500745== Copyright (C) 2002-2022, and GNU GPL'd, by Julian Seward et al.
==500745== Using Valgrind-3.19.0 and LibVEX; rerun with -h for copyright info
==500745== Command: ./solution_word_ladder wordlist-four-letters.txt
==500745==
Your wish is my command:
  1 WORD      (list the connected component WORD belongs to)
  2 FROM TO   (list the shortest path from FROM to TO)
  3 WORD      (list component info)
  4           (list hash table info)
  5           (list graph info)
  0           (terminate)
> 0
==500745==
==500745== HEAP SUMMARY:
==500745==   in use at exit: 0 bytes in 0 blocks
==500745== total heap usage: 27,700 allocs, 27,700 frees, 60,322,800 bytes
        allocated
==500745==
==500745== All heap blocks were freed -- no leaks are possible
==500745==
==500745== ERROR SUMMARY: 0 errors from 0 contexts (suppressed: 0 from 0)
```

Assim, concluímos que não existem *memory leaks* no programa.



## 6 Análise do incremento da *hash table*

Por padrão, o tamanho inicial da *hash table* é 1000. No entanto, quando o número de entradas começa a ser significativo, começam a surgir colisões, o que implica uma perda da complexidade computacional  $O(1)$ . Para evitar este problema, quando o rácio entre o tamanho da *hash table* e o número de colisões é superior a 5, o tamanho da *hash table* é incrementado, através da função `hash_table_grow`, que recebe como argumento a referida *hash table*.

Contudo, a escolha do fator de incremento deve ser ponderada, já que, se for muito pequeno, o número de colisões diminui pouco, e se for muito grande, existe demasiada memória alocada não utilizada, o que leva a um desperdício de recursos. É esta escolha que pretendemos analisar.

### 6.1 Explicação do código

Foi desenvolvida uma nova função `hash_table_grow`, num programa à parte, em que, após ser verificada a condição de incremento (rácio entre o tamanho da *hash table* e o número de colisões), é percorrido um ciclo `for`, onde são testados vários valores de `j` (fator de incremento).

```
if (hash_table->number_of_collisions > 0 && (hash_table->
    hash_table_size / hash_table->number_of_collisions) < 5)
{
    printf("\nFinding best j. Current hash_table_size is %u.\n",
        hash_table->hash_table_size);
    printf("    j    | new size | memory | free m | colnum\n");
    for (j = 1.1; j < 3; j += 0.005)
    {
```

Dentro deste ciclo, e após inicializar algumas variáveis (p.e., a nova *hash table* temporária), surgem dois novos ciclos `for`.

No primeiro `for`, é percorrida a *hash table* inicial, onde, para cada `node`, é calculado o novo índice, através do resto da divisão entre o valor retornado da função `crc32` e o tamanho da *hash table*. Após este cálculo, é verificada a existência de colisões no índice calculado anteriormente, e, caso existam, é incrementado o valor de `colnum`. Por fim, é associado o nó atual à nova *hash table*, na localização definida pelo índice.

```
for (i=0; i < hash_table->hash_table_size; i++)
{
    for (node = hash_table->heads[i]; node; node = next)
    {
        test_new_key = crc32(node->word) % test_new_size;
        next = node->next;
        if (test_new_table[test_new_key])
        {
            colnum++;
        }
        test_new_table[test_new_key] = node;
    }
}
```

No segundo `for`, é percorrida a nova *hash table*, onde é verificado o número de entradas livres desta. Caso `test_new_table[k]` seja nulo, significa que a posição `k` da *hash table* está livre, e, portanto, é incrementado o valor de `free_entries`.

```
for (k=0; k < test_new_size; k++) {
    if (!test_new_table[k]) {
        free_entries++;
    }
}
```

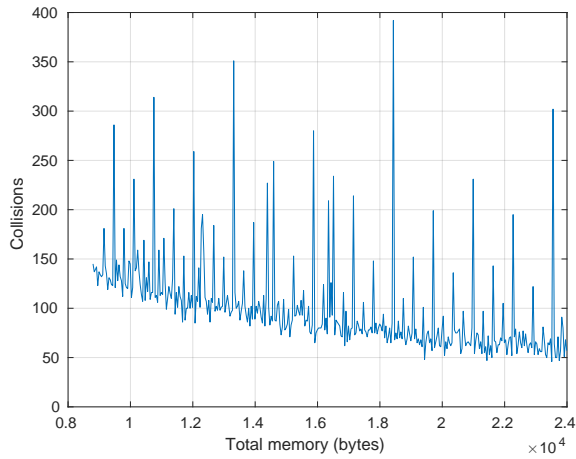
Por último, é impressa uma linha com os dados obtidos, nomeadamente o fator de incremento  $j$ , o novo tamanho da *hash table* `test_new_size`, a memória total ocupada `test_new_size * sizeof(hash_table_node_t *)`, a memória ocupada por entradas livres `free_entries * sizeof(hash_table_node_t *)` e o número de colisões `colnum`.

```
printf("%3.3f | %8u | %6lu | %6lu | %6u\n", j, test_new_size,
test_new_size * sizeof(hash_table_node_t *), free_entries * sizeof(
hash_table_node_t *), colnum);
```

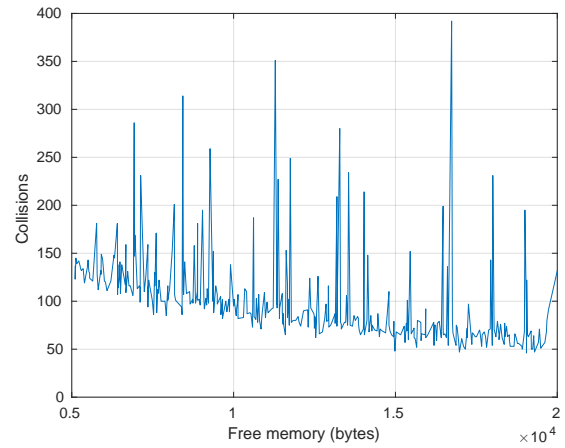
## 6.2 Gráficos obtidos

Através do MATLAB, foi possível obter um conjunto de gráficos, que relacionam colisões com memória livre e memória total. O script, disponível na secção 7.3, obtém os dados através de um ficheiro de texto, que contém a tabela imprimida pelo programa de teste.

Os gráficos em questão incidem sobre o primeiro incremento, onde o tamanho atual da *hash table* é 1000.

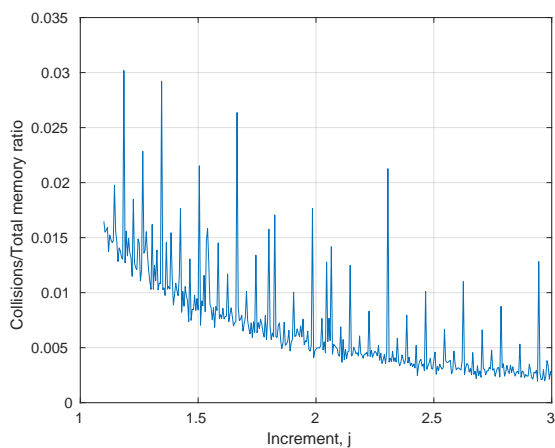


(a) Número de colisões em função da memória total.

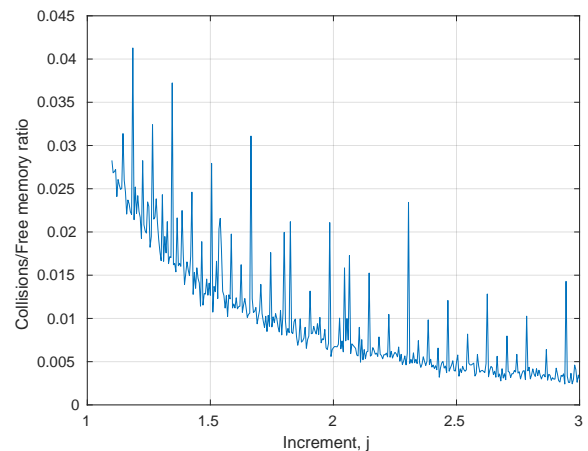


(b) Número de colisões em função da memória livre.

Figura 2: Número de colisões em função da memória.



(a) Rácio colisões/memória total.



(b) Rácio colisões/memória livre.

Figura 3: Rácio colisões/memória em função do incremento.

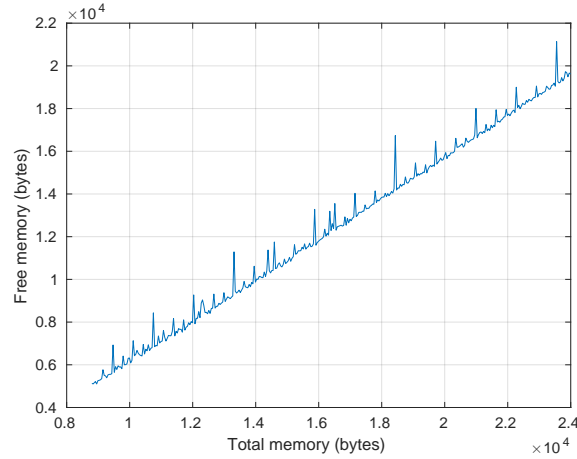


Figura 4: Memória livre em função da memória total.

### 6.3 Análise dos resultados

Em todos os gráficos, é possível observar irregularidades, associadas a uma maior ou menor quantidade de colisões. Isto deve-se ao facto de a *hash function* não ser perfeita e portanto, consoante o valor de  $j$ , o índice associado a cada **node** ser diferente.

No entanto, é possível observar que, em geral, o número de colisões diminui com o aumento de memória (ou seja, com incrementos maiores), tal como seria esperado. A relação entre o número de colisões e a memória livre segue a mesma tendência. Em ambos os gráficos, verifica-se uma tendência aproximadamente linear.

Quanto aos rácios colisões/memória em função do incremento, observa-se em ambos os gráficos uma curva descendente, do tipo  $a \times x^b$ , com  $-2 < b < -1$ . Por este motivo, verifica-se uma diferença mais acentuada no eixo das ordenadas para incrementos menores do que para incrementos maiores. Assim, considera-se que o melhor incremento é o que apresenta um valor de  $b$  mais próximo de 2, já que, a partir desse valor, o rácio tende a ser mais constante. Por outro lado, a similaridade entre rácios explica-se pelo facto de a relação entre a memória livre e a memória total ser aproximadamente linear, com um declive próximo de 1 (ver figura 4).

No que concerne à relação entre a memória livre e a memória total (ambas em *bytes*), apesar das irregularidades, é possível efetuar uma regressão linear, onde se obtém a equação  $y = 0.9583x - 3357$ .

Assim, uma vez que os gráficos não são completamente conclusivos quanto ao melhor fator de incremento, escolhemos utilizar o valor 2, já que este constitui um equilíbrio entre o número de colisões e a memória utilizada.

## 7 Código

### 7.1 solution\_word\_ladder.c

```
#include <stddef.h>
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <string.h>
#include <assert.h>
#include <sys/param.h>

//
// static configuration
//

#define _max_word_size_ 32
#define _hash_table_init_size_ 1000

//
// data structures (SUGGESTION --- you may do it in a different way)
//

typedef struct adjacency_node_s adjacency_node_t;
typedef struct hash_table_node_s hash_table_node_t;
typedef struct hash_table_s hash_table_t;
typedef struct ptr_queue_s ptr_queue_t;

struct ptr_queue_s
{
    void **circular_array;
    unsigned int hi;
    unsigned int lo;
    unsigned int size;
    unsigned int max_size;
    int full;
};

struct adjacency_node_s
{
    adjacency_node_t *next; // link to the next adjacency list
    node
    hash_table_node_t *vertex; // the other vertex
};

struct hash_table_node_s
{
    // the hash table data
    char word[_max_word_size_]; // the word
    hash_table_node_t *next; // next hash table linked list node
    // the vertex data
    adjacency_node_t *head; // head of the linked list of
    adjacency edges
    int visited; // visited status (while not in use
    , keep it at 0)
    hash_table_node_t *previous; // breadth-first search parent
    // the union find data

```



```

hash_table_node_t *representative; // the representative of the
    connected component this vertex belongs to
int number_of_vertices;           // number of vertices of the
    conected component (only correct for the representative of each
    connected component)
int number_of_edges;              // number of edges of the conected
    component (only correct for the representative of each connected
    component)
int component_diameter;           // only valid for the representative
    node
};

struct hash_table_s
{
    unsigned int hash_table_size;           // the size of the hash table
        array
    unsigned int largest_component_size;    //size of the biggest component
        (passed on to breadh_first as max list size)
    unsigned int number_of_entries;         // the number of entries in the
        hash table
    unsigned int number_of_collisions;      // the total of entries inserted on
        an occupied index
    unsigned int number_of_edges;           // number of edges (for information
        purposes only)
    unsigned int number_of_edge_nodes;      // number of edges (for information
        purposes only)
    unsigned int number_of_components;      // number of connected components
    hash_table_node_t **heads;              // the heads of the linked lists
};

//
// allocation and deallocation of queue
//

static ptr_queue_t *allocate_ptr_queue(unsigned int max_size)
{
    ptr_queue_t *queue = (ptr_queue_t *)malloc(sizeof(ptr_queue_t));
    if(queue == NULL)
    {
        fprintf(stderr, "allocate_ptr_queue: out of memory\n");
        exit(1);
    }
    queue->circular_array = (void **)malloc(sizeof(void *) * max_size);
    if(queue->circular_array == NULL)
    {
        fprintf(stderr, "allocate_ptr_queue->circular_array: out of memory\n"
        );
        free(queue);
        exit(1);
    }
    queue->max_size = max_size;
    queue->size = 0;
    queue->full = 0;
    queue->hi = 0;
    queue->lo = 0;
    return queue;
}

```



```

static void free_ptr_queue(ptr_queue_t *queue)
{
    free(queue->circular_array);
    free(queue);
}

//
// queue methods
//

static void queue_put_hi(ptr_queue_t *queue, void *ptr)
{
    assert(queue->size < queue->max_size);
    queue->circular_array[queue->hi] = ptr;
    queue->hi = (queue->hi + 1) % queue->max_size;
    queue->size++;
}

static void *queue_get_lo(ptr_queue_t *queue)
{
    assert(queue->size > 0);
    void *ret = queue->circular_array[queue->lo];
    queue->lo = (queue->lo + 1) % queue->max_size;
    queue->size--;
    return ret;
}

//
// allocation and deallocation of linked list nodes (done)
//

static adjacency_node_t *allocate_adjacency_node(void)
{
    adjacency_node_t *node;

    node = (adjacency_node_t *)malloc(sizeof(adjacency_node_t));
    if(node == NULL)
    {
        fprintf(stderr, "allocate_adjacency_node: out of memory\n");
        exit(1);
    }
    return node;
}

static void free_adjacency_llist(adjacency_node_t *head)
{
    adjacency_node_t *next;
    for (; head; head = next)
    {
        next = head->next;
        free(head);
    }
}

static void free_hash_table_node(hash_table_node_t *node)
{
    free_adjacency_llist(node->head);
    free(node);
}

```



```

}

static hash_table_node_t *allocate_hash_table_node(void)
{
    hash_table_node_t *node;

    node = (hash_table_node_t *)malloc(sizeof(hash_table_node_t));
    if (node == NULL)
    {
        fprintf(stderr, "allocate_hash_table_node: out of memory\n");
        exit(1);
    }
    return node;
}

static void free_hash_llist(hash_table_node_t *head)
{
    hash_table_node_t *next;
    for (; head; head = next)
    {
        next = head->next;
        free_hash_table_node(head);
    }
}

//
// hash table stuff (mostly to be done)
//

unsigned int crc32(const char *str)
{
    static unsigned int table[256];
    unsigned int crc;

    if (table[1] == 0u) // do we need to initialize the table[] array?
    {
        unsigned int i, j;

        for (i = 0u; i < 256u; i++)
            for (table[i] = i, j = 0u; j < 8u; j++)
                if (table[i] & 1u)
                    table[i] = (table[i] >> 1) ^ 0xAED00022u; // "magic" constant
                else
                    table[i] >>= 1;
    }
    crc = 0xAED02022u; // initial value (chosen arbitrarily)
    while (*str != '\0')
        crc = (crc >> 8) ^ table[crc & 0xFFu] ^ ((unsigned int)*str++ << 24);
    return crc;
}

static hash_table_t *hash_table_create(void)
{
    hash_table_t *hash_table;

    hash_table = (hash_table_t *)calloc(1, sizeof(hash_table_t));

```





```

if(hash_table == NULL)
{
    fprintf(stderr, "create_hash_table: out of memory\n");
    exit(1);
}
hash_table->heads = (hash_table_node_t **)calloc(
    _hash_table_init_size_, sizeof(hash_table_node_t *));
if(hash_table->heads == NULL)
{
    fprintf(stderr, "create_hash_table: out of memory for array\n");
    exit(1);
}
hash_table->hash_table_size = _hash_table_init_size_;
return hash_table;
}

static void hash_table_info(hash_table_t *hash_table)
{
    printf("Entries: %u\nCollisions: %u\nSize: %u\n",
        hash_table->number_of_entries,
        hash_table->number_of_collisions,
        hash_table->hash_table_size);
}

static void hash_table_grow(hash_table_t *hash_table)
{
    unsigned int    new_size;
    unsigned int    new_key;
    unsigned int    i;
    hash_table_node_t **new_table;
    hash_table_node_t *next;
    hash_table_node_t *node;
    // Determine size_inc based on collision count
    if (hash_table->number_of_collisions > 0 && (hash_table->
        hash_table_size / hash_table->number_of_collisions) < 5)
    {
        new_size = hash_table->hash_table_size * 2;
        new_table = (hash_table_node_t **)calloc(new_size, sizeof(
            hash_table_node_t *));
        if (!new_table)
        {
            fprintf(stderr, "hash_table_grow: out of memory\n");
            exit(1);
        }
        hash_table->number_of_collisions = 0;
        for (i=0; i < hash_table->hash_table_size; i++)
            for (node = hash_table->heads[i]; node; node = next)
            {
                new_key = crc32(node->word) % new_size;
                next = node->next;
                node->next = new_table[new_key];
                if (node->next)
                    hash_table->number_of_collisions++;
                new_table[new_key] = node;
            }
        free(hash_table->heads);
        hash_table->heads = new_table;
        hash_table->hash_table_size = new_size;
    }
}

```



```

    }
}

static void hash_table_free(hash_table_t *hash_table)
{
    for (unsigned int i = 0; i < hash_table->hash_table_size; i++)
        if (hash_table->heads[i])
            free_hash_llist(hash_table->heads[i]);
    free(hash_table->heads);
    free(hash_table);
}

static hash_table_node_t *create_word_node(const char *word)
{
    hash_table_node_t *node = allocate_hash_table_node();
    node->representative = node;
    node->visited = -1;
    node->number_of_vertices = 1;
    node->number_of_edges = 0;
    node->previous = NULL;
    node->next = NULL;
    node->head = NULL;
    strcpy(node->word, word);
    return node;
}

static hash_table_node_t *find_word(hash_table_t *hash_table, const char
    *word, int insert_if_not_found)
{
    hash_table_node_t *node;
    unsigned int i;

    i = crc32(word) % hash_table->hash_table_size;
    node = hash_table->heads[i];
    while (node)
    {
        if (strcmp(node->word, word) == 0)
            return node;
        node = node->next;
    }
    if (insert_if_not_found)
    {
        node = create_word_node(word);
        if (hash_table->heads[i])
            hash_table->number_of_collisions++;
        node->next = hash_table->heads[i];
        hash_table->heads[i] = node;
        hash_table->number_of_components++;
        hash_table->number_of_entries++;
        hash_table_grow(hash_table);
    }
    return node;
}

//
// add edges to the word ladder graph (mostly do be done)
//

```



```

static hash_table_node_t *find_representative(hash_table_node_t *node)
{
    hash_table_node_t *representative,*next_node;

    for(representative = node; representative != representative->
        representative; representative = representative->representative);

    for(next_node = node; next_node != representative; next_node = node)
    {
        node = next_node->representative;
        next_node->representative = representative;
    }
    return representative;
}

static void insert_edge(hash_table_t *hash_table, hash_table_node_t *
    from, hash_table_node_t *to)
{
    adjacency_node_t *link;

    link = allocate_adjacency_node();
    link->vertex = to;
    link->next = from->head;
    from->head = link;
    hash_table->number_of_edge_nodes++;
}

static void add_edge(hash_table_t *hash_table,hash_table_node_t *from,
    const char *word)
{
    hash_table_node_t *to,*from_representative,*to_representative;
    adjacency_node_t *link;

    to = find_word(hash_table,word,0);
    if (!to)
        return;
    for (link = from->head; link && link->vertex != to; link = link->next)
        ;
    if (link)
        return;
    hash_table->number_of_edges++;
    insert_edge(hash_table, from, to);
    insert_edge(hash_table, to, from);

    from_representative = find_representative(from);
    to_representative = find_representative(to);

    from_representative->number_of_edges++;
    if (from_representative != to_representative)
    {
        unsigned int  vert_sum = from_representative->number_of_vertices +
            to_representative->number_of_vertices;
        unsigned int  edge_sum = from_representative->number_of_edges +
            to_representative->number_of_edges;
        int           cond = to_representative->number_of_vertices >
            from_representative->number_of_vertices;
    }
}

```

```

    hash_table_node_t *new_rep = cond ? from_representative :
to_representative;
    new_rep->number_of_vertices = vert_sum;
    new_rep->number_of_edges = edge_sum;
    (cond ? to_representative : from_representative)->representative =
new_rep;
    hash_table->number_of_components--;
    if (vert_sum > hash_table->largest_component_size)
        hash_table->largest_component_size = vert_sum;
}
}

//
// generates a list of similar words and calls the function add_edge for
// each one (done)
//
// man utf8 for details on the utf8 encoding
//

static void break_utf8_string(const char *word, int *
    individual_characters)
{
    int byte0, byte1;

    while(*word != '\0')
    {
        byte0 = (int)(*(word++)) & 0xFF;
        if(byte0 < 0x80)
            *(individual_characters++) = byte0; // plain ASCII character
        else
        {
            byte1 = (int)(*(word++)) & 0xFF;
            if((byte0 & 0b11100000) != 0b11000000 || (byte1 & 0b11000000) != 0
b10000000)
            {
                fprintf(stderr, "break_utf8_string: unexpected UTF-8 character\n"
);
                exit(1);
            }
            *(individual_characters++) = ((byte0 & 0b00011111) << 6) | (byte1
& 0b00111111); // utf8 -> unicode
        }
    }
    *individual_characters = 0; // mark the end!
}

static void make_utf8_string(const int *individual_characters, char word[
    _max_word_size_])
{
    int code;

    while(*individual_characters != 0)
    {
        code = *(individual_characters++);
        if(code < 0x80)
            *(word++) = (char)code;
        else if(code < (1 << 11))

```



```

{ // unicode -> utf8
  *(word++) = 0b11000000 | (code >> 6);
  *(word++) = 0b10000000 | (code & 0b00111111);
}
else
{
  fprintf(stderr, "make_utf8_string: unexpected UTF-8 character\n");
  exit(1);
}
}
*word = '\0'; // mark the end
}

static void similar_words(hash_table_t *hash_table, hash_table_node_t *
  from)
{
  static const int valid_characters[] =
  { // unicode!
    0x2D,
    // -
    0x41, 0x42, 0x43, 0x44, 0x45, 0x46, 0x47, 0x48, 0x49, 0x4A, 0x4B, 0x4C, 0x4D,
    // A B C D E F G H I J K L M
    0x4E, 0x4F, 0x50, 0x51, 0x52, 0x53, 0x54, 0x55, 0x56, 0x57, 0x58, 0x59, 0x5A,
    // N O P Q R S T U V W X Y Z
    0x61, 0x62, 0x63, 0x64, 0x65, 0x66, 0x67, 0x68, 0x69, 0x6A, 0x6B, 0x6C, 0x6D,
    // a b c d e f g h i j k l m
    0x6E, 0x6F, 0x70, 0x71, 0x72, 0x73, 0x74, 0x75, 0x76, 0x77, 0x78, 0x79, 0x7A,
    // n o p q r s t u v w x y z
    0xC1, 0xC2, 0xC9, 0xCD, 0xD3, 0xDA,
    // Á Â É Í Ñ Ú
    0xE0, 0xE1, 0xE2, 0xE3, 0xE7, 0xE8, 0xE9, 0xEA, 0xED, 0xEE, 0xF3, 0xF4, 0xF5, 0
    xFA, 0xFC, // à á â ã ç è é ê í î ó ô õ ú ü
    0
  };
};
int i, j, k, individual_characters[_max_word_size_];
char new_word[2 * _max_word_size_];

break_utf8_string(from->word, individual_characters);
for(i = 0; individual_characters[i] != 0; i++)
{
  k = individual_characters[i];
  for(j = 0; valid_characters[j] != 0; j++)
  {
    individual_characters[i] = valid_characters[j];
    make_utf8_string(individual_characters, new_word);
    // avoid duplicate cases
    if(strcmp(new_word, from->word) > 0)
      add_edge(hash_table, from, new_word);
  }
  individual_characters[i] = k;
}
}

//
// breadth-first search (to be done)
//

```



```

// returns the number of vertices visited; if the last one is goal,
// following the previous links gives the shortest path between goal and
// origin
//

static int breadth_first_search(unsigned int maximum_number_of_vertices,
    hash_table_node_t **list_of_vertices, hash_table_node_t *origin,
    hash_table_node_t *goal)
{
    unsigned int    list_len;
    hash_table_node_t *node;
    adjacency_node_t *link;
    ptr_queue_t      *queue;

    queue = allocate_ptr_queue(maximum_number_of_vertices);

    list_len = 0;
    queue_put_hi(queue, origin);
    while (queue->size > 0)
    {
        node = queue_get_lo(queue);
        node->visited++;
        if (list_of_vertices)
            list_of_vertices[list_len] = node;
        list_len++;
        if (node == goal)
            break;
        for(link = node->head; link && list_len < maximum_number_of_vertices
; link = link->next)
        {
            if (link->vertex->visited == -1)
            {
                link->vertex->visited = node->visited;
                link->vertex->previous = node;
                queue_put_hi(queue, link->vertex);
            }
        }
    }
    free_ptr_queue(queue);
    if (goal && goal != node)
        return -1;
    return list_len;
}

//
// list all vertices belonging to a connected component (complete this)
//

static void mark_all_vertices(hash_table_t *hash_table)
{
    hash_table_node_t *node;

    for(unsigned int i = 0; i < hash_table->hash_table_size; i++)
        for(node = hash_table->heads[i]; node != NULL; node = node->next)
            node->visited = -1;
}

```



```

static void list_connected_component(hash_table_t *hash_table, const char
    *word)
{
    hash_table_node_t *origin, *rep;
    hash_table_node_t **list;
    unsigned int      list_len;

    origin = find_word(hash_table, word, 0);
    if (!origin)
    {
        printf("\nWord not found: %s\n", word);
        return;
    }

    mark_all_vertices(hash_table);
    rep = find_representative(origin);
    list = malloc(rep->number_of_vertices * sizeof(hash_table_node_t *));
    list_len = breadth_first_search(rep->number_of_vertices, list, origin,
        NULL);
    for (unsigned int i=0; i < list_len; i++)
        printf("%s\n", list[i]->word);
    free(list);
}

//
// compute the diameter of a connected component (optional)
//

static int largest_diameter;
static hash_table_node_t **largest_diameter_example;

static int connected_component_diameter(hash_table_node_t *node)
{
    int      diameter;
    unsigned int      j, i, comp_len, search_len;
    hash_table_node_t **comp_nodes, **node_list, *chain_start, *chain_end;

    diameter = 0;
    chain_start = chain_end = NULL;
    comp_nodes = calloc(node->representative->number_of_vertices, sizeof(
        hash_table_node_t *));
    comp_len = breadth_first_search(node->representative->
        number_of_vertices, comp_nodes, node, NULL);
    for (i = 0; i < comp_len; i++)
    {
        for (j = 0; j < comp_len; j++)
            comp_nodes[j]->visited = -1;
        node_list = calloc(node->representative->number_of_vertices, sizeof(
            hash_table_node_t *));
        search_len = breadth_first_search(node->representative->
            number_of_vertices, node_list, comp_nodes[i], NULL);
        if (node_list[search_len - 1]->visited >= diameter)
        {
            diameter = node_list[search_len - 1]->visited;
            chain_start = comp_nodes[i];
            chain_end = node_list[search_len - 1];
        }
    }
}

```



```

    free(node_list);
}
if (diameter > largest_diameter)
{
    largest_diameter = diameter;
    if (largest_diameter_example)
        free(largest_diameter_example);
    largest_diameter_example = calloc(diameter, sizeof(hash_table_node_t
    *));
    i = diameter;
    for (node = chain_end; node != chain_start; node = node->previous)
        largest_diameter_example[--i] = node;
}
free(comp_nodes);
return diameter;
}

//
// find the shortest path from a given word to another given word (to be
// done)
//

static void path_finder(hash_table_t *hash_table, const char *from_word,
    const char *to_word)
{
    hash_table_node_t *from, *to;
    int i, list_len;

    // switch from with to in order to print path in correct order
    from = find_word(hash_table, from_word, 0);
    to = find_word(hash_table, to_word, 0);

    if (!from)
    {
        fprintf(stderr, "\nWord not found: %s\n", from_word);
        return ;
    }
    if (!to)
    {
        fprintf(stderr, "\nWord not found: %s\n", to_word);
        return ;
    }

    mark_all_vertices(hash_table);
    list_len = breadth_first_search(find_representative(to)->
        number_of_vertices, NULL, to, from);
    if (list_len == -1)
        fprintf(stderr, "Words are not connected\n");
    else
    {
        i = 0;
        for(; from && from != to; from = from->previous)
            printf(" [%d] %s\n", i++, from->word);
        printf(" [%d] %s\n", i++, from->word);
    }
}

```





```

static void component_info(hash_table_t *hash_table, char *word)
{
    hash_table_node_t *origin, *rep;

    origin = find_word(hash_table, word, 0);
    if (!origin)
        return (void)fprintf(stderr, "\nWord not found.\n");
    rep = find_representative(origin);
    printf("\nRepresentative: %s\nVertices: %u\nEdges: %u\nDiameter: %u\n",
        ,
        rep->word,
        rep->number_of_vertices,
        rep->number_of_edges,
        rep->component_diameter);
}

//
// some graph information (optional)
//

static void graph_info(hash_table_t *hash_table)
{
    printf("\nGraph info:\n\nNodes\t\t\t: %u\nEdges\t\t\t: %u\nEdge nodes\
\t\t: %u\nComponents\t\t: %u\n\
Largest component size : %u\nLargest component\t: %s\nLargest diameter\
\t: %d\n",
        hash_table->number_of_entries,
        hash_table->number_of_edges,
        hash_table->number_of_edge_nodes,
        hash_table->number_of_components,
        hash_table->largest_component_size,
        find_representative(largest_diameter_example[0])->word,
        largest_diameter);
    printf("Largest word chain:\n");
    for(unsigned int i=0; i < (unsigned int)largest_diameter; i++)
        printf(" [%d] %s\n", i, largest_diameter_example[i]->word);
}

//
// main program
//

int main(int argc, char **argv)
{
    char word[100], from[100], to[100];
    hash_table_t *hash_table;
    hash_table_node_t *node, *rep;
    unsigned int i;
    int command;
    FILE *fp;

    largest_diameter_example = NULL;
    largest_diameter = 0;
    // initialize hash table
    hash_table = hash_table_create();
    // read words

```



```
fp = fopen((argc < 2) ? "wordlist-big-latest.txt" : argv[1], "rb");
if(fp == NULL)
{
    fprintf(stderr, "main: unable to open the words file\n");
    exit(1);
}
while(fscanf(fp, "%99s", word) == 1)
    (void)find_word(hash_table, word, 1);
fclose(fp);
// find all similar words
for(i = 0; i < hash_table->hash_table_size; i++)
    for(node = hash_table->heads[i]; node != NULL; node = node->next)
        similar_words(hash_table, node);
for(i = 0; i < hash_table->hash_table_size; i++)
    for(node = hash_table->heads[i]; node != NULL; node = node->next)
    {
        if (node->visited == -1)
        {
            rep = find_representative(node);
            rep->component_diameter = connected_component_diameter(node);
        }
    }
// ask what to do
for(;;)
{
    fprintf(stderr, "\nYour wish is my command:\n");
    fprintf(stderr, "  1 WORD          (list the connected component WORD\nbelongs to)\n");
    fprintf(stderr, "  2 FROM TO      (list the shortest path from FROM to\nTO)\n");
    fprintf(stderr, "  3 WORD          (list component info)\n");
    fprintf(stderr, "  4              (list hash table info)\n");
    fprintf(stderr, "  5              (list graph info)\n");
    fprintf(stderr, "  0              (terminate)\n");
    fprintf(stderr, "> ");
    if(scanf("%99s", word) != 1)
        break;
    command = atoi(word);
    if(command == 1)
    {
        if(scanf("%99s", word) != 1)
            break;
        list_connected_component(hash_table, word);
    }
    else if(command == 2)
    {
        if(scanf("%99s", from) != 1)
            break;
        if(scanf("%99s", to) != 1)
            break;
        path_finder(hash_table, from, to);
    }
    else if(command == 3)
    {
        if(scanf("%99s", word) != 1)
            break;
        component_info(hash_table, word);
    }
}
```



```
    else if(command == 4)
        hash_table_info(hash_table);
    else if(command == 5)
        graph_info(hash_table);
    else if(command == 0)
        break;
}
// clean up
hash_table_free(hash_table);
if (largest_diameter_example)
    free(largest_diameter_example);
return 0;
}
```



## 7.2 Função hash\_table\_grow que testa o melhor incremento

```
static void hash_table_grow(hash_table_t *hash_table)
{
    unsigned int    i;
    double          j;
    unsigned int    k;
    unsigned int    test_new_size;
    unsigned int    test_new_key;
    hash_table_node_t *next;
    hash_table_node_t *node;
    hash_table_node_t **test_new_table;
    unsigned int    colnum;
    unsigned int    free_entries;

    if (hash_table->number_of_collisions > 0 && (hash_table->
        hash_table_size / hash_table->number_of_collisions) < 5)
    {
        printf("\nFinding best j. Current hash_table_size is %u.\n",
            hash_table->hash_table_size);
        printf("  j    | new size | memory | free m | colnum\n");
        for (j = 1.1; j < 3; j += 0.005)
        {
            colnum = 0u;
            free_entries = 0u;
            test_new_size = (double)hash_table->hash_table_size * j;
            test_new_table = (hash_table_node_t **)calloc(test_new_size,
                sizeof(hash_table_node_t *));

            for (i=0; i < hash_table->hash_table_size; i++)
            {
                for (node = hash_table->heads[i]; node; node = next)
                {
                    test_new_key = crc32(node->word) % test_new_size;
                    next = node->next;
                    if (test_new_table[test_new_key])
                    {
                        colnum++;
                    }
                    test_new_table[test_new_key] = node;
                }
            }
            for (k=0; k < test_new_size; k++) {
                if (!test_new_table[k]) {
                    free_entries++;
                }
            }
            printf("%3.3f | %8u | %6lu | %6lu | %6u\n", j, test_new_size,
                test_new_size * sizeof(hash_table_node_t *), free_entries * sizeof(
                    hash_table_node_t *), colnum);
        }
    }
}
```



### 7.3 Script MATLAB que gera os gráficos para análise da hash\_table\_grow

```
% Get data from file
table = load("first.txt");
j = table(:,1);
new_size = table(:,2);
memory = table(:,3);
free_memory = table(:,4);
collisions = table(:,5);

% Sort free_memory & collisions arrays, based on free_memory
[free_memory_sorted,sortIdx] = sort(free_memory,'ascend');
collisions_sorted = collisions(sortIdx);

% Get ratios
ratio_col_mem = collisions./memory;
ratio_col_free = collisions./free_memory;

% Plots
figure(1)
plot(memory,collisions)
xlabel('Total memory (bytes)')
ylabel('Collisions')
grid on

figure(2)
plot(free_memory_sorted,collisions_sorted)
xlabel('Free memory (bytes)')
ylabel('Collisions')
grid on
xlim([5000 20000])

figure(3)
plot(j,ratio_col_mem)
xlabel('Increment, j')
ylabel('Collisions/Total memory ratio')
grid on

figure(4)
plot(j,ratio_col_free)
xlabel('Increment, j')
ylabel('Collisions/Free memory ratio')
grid on

figure(5)
plot(memory,free_memory)
xlabel('Total memory (bytes)')
ylabel('Free memory (bytes)')
grid on
```

