

# Análisis Matemático para Inteligencia Artificial

Martín Errázquin (merrazquin@fi.uba.ar)

Especialización en Inteligencia Artificial

Descomposición en Valores Singulares (parte II)

# DVS Compacta, Reducida y Truncada

$$\min\{4,6\}=4=p$$

Sea  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  con DVS  $A = U \Sigma V^T$ :

$$\begin{matrix} m \times n & m \times m & m \times n & n \times n \\ \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \text{blue} & \text{yellow} & \text{green} \\ & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{red} & \text{purple} & \text{orange} & \text{blue} \\ & & & \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 6}$$

- Si  $p = \min\{m, n\}$ , la DVS compacta es  $A \ominus U_p \Sigma_p V_p^T$

$$\boxed{p} \quad p \quad \boxed{p}$$

$$\begin{matrix} p \times n & p \times p & p \times p & p \times n \\ \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \text{blue} & \text{yellow} & \text{green} \\ & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{red} & \text{purple} & \text{orange} & \text{blue} \\ & & & \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\Sigma_p \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \quad p=4$$

$$r=3 \quad \Sigma_r \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

$$k=1 \quad \Sigma_k \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$$

- Si  $\sigma_1, \dots, \sigma_r > 0, \sigma_{r+1}, \dots, \sigma_p = 0$ , la DVS reducida es  $A \oslash U_r \Sigma_r V_r^T$

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 = 2 & \sigma_3 = 0.1 & \sigma_5 = 0 \\ \sigma_2 = 1.9 & \sigma_4 = 10^{-2} & \sigma_6 = 0 \\ & r=1 & \sigma_3 = 0 \end{matrix} \right\}$$

$$\begin{matrix} m \times n & m \times r & r \times r & r \times n \\ \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \text{blue} & \text{yellow} & \text{red} \\ & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{red} & \text{purple} & \text{orange} & \text{blue} \\ & & & \end{bmatrix} \end{matrix}$$

!

- Sea  $k \in \{1, \dots, r-1\}$ , la DVS truncada es  $A \approx U_k \Sigma_k V_k^T$

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 = 10^1 & \sigma_3 = 10^{-5} \\ \sigma_2 = 10^2 & \sigma_4 = 10^{-6} \end{matrix} \right\} \approx 0$$

$$\begin{matrix} m \times n & m \times k & k \times k & k \times n \\ \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} & \approx & \begin{bmatrix} \text{blue} & \text{red} \\ & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{red} & \text{purple} & \text{orange} & \text{blue} \\ & & & \end{bmatrix} \end{matrix}$$

# Pseudoinversa de Moore-Penrose

Sea  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y el sistema lineal  $Ax = y$ . La inversa de  $A$  no está definida, pero si  $m > n$  una posible solución (cuadrados mínimos) era



$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T y$$

¿Pero qué ocurre si  $A^T A$  no es invertible? Se define la **pseudoinversa de Moore-Penrose** como



$$A^\dagger = V_r \Sigma_r^{-1} U_r^T$$

!  $\Sigma_r$  no hay 0's en la diagonal

y  $\hat{x} = A^\dagger y$  es (si  $m < n$ ) la solución de mínima norma euclídea o (si  $m > n$ ) la aproximación de mínimo error cuadrático/distancia euclídea.

**Obs.:** Todo lo anteriormente visto también vale para  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , utilizando  $\cdot^H$  en vez de  $\cdot^T$ . Se utilizaron matrices reales para facilitar la lectura.