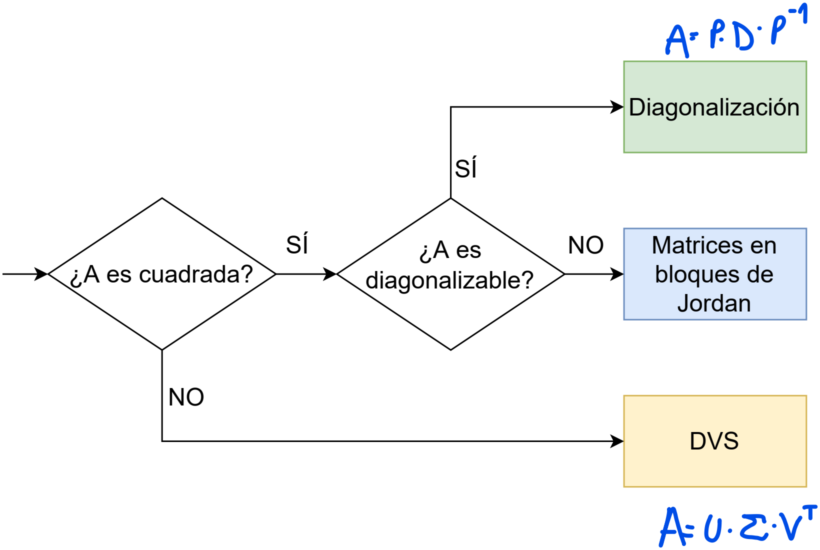
Análisis Matemático para Inteligencia Artificial

Martín Errázquin (merrazquin@fi.uba.ar)

Especialización en Inteligencia Artificial

Descomposición en Valores Singulares

¿Qué puede pasar al intentar diagonalizar?



¿Qué pasa cuando A no es cuadrada?

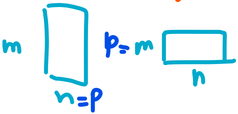
$S^T = (A^TA)^T = A^T \cdot A^{TT} = A^T \cdot A = S$

$(AB)^T = B^TA^T$

$x^T S x = x^T A^T A x = y^T y = \|y\|^2 \geq 0$ $\forall x$

$x \in \mathbb{R}^n$ $y = Ax \in \mathbb{R}^m$

Teorema: Dada $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, siempre se puede obtener una matriz simétrica, semidefinida positiva $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ como:



$$S \doteq A^T A$$

$p = \min\{m, n\}$

Obs.: $\tilde{S} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ definida como $\tilde{S} \doteq AA^T$ también resulta simétrica y semidefinida positiva.

A tiene rango r $0 \leq r \leq p$

Obs. (II): Como $S, \tilde{S}$ son semidef. positivas, todos sus autovalores son reales **no negativos** (¡incluso si A tomara valores complejos!).

$\lambda_i \in \mathbb{R}_0^+$

$\vec{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ el resto 0

$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ $i = 1, \dots, p$

$\vec{\lambda}' = (\underbrace{\lambda_1 \dots, \lambda_p}_{p \text{ componentes}}, 0, \dots, 0)$

Teorema: Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ una matriz de rango $r \in \{0,\ldots,\text{mín}\{m,n\}\}$. La **descomposición en valores singulares** (DVS, SVD en inglés) de A se define como:

$X = P \cdot D \cdot P^{-1}$

$$A = U \cdot \Sigma \cdot V^T$$

B→E trf. E→B

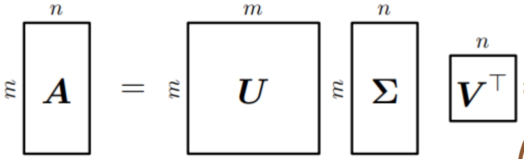
$\Sigma = \left(\begin{array}{ccc|cc} \sigma_1 & & 0 & 0 & 0 \\ & \ddots & & & \\ 0 & & \sigma_p & & \end{array}\right)$

si $A \in \mathbb{R}^{3\times 5}$

donde:

- $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ es la matriz ortogonal formada por los aves de AA^T.
- $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$ es la matriz "diagonal" de valores singulares $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$, con λ_i los primeros $p = \text{mín}\{m,n\}$ avas de AA^T y A^TA.
- $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es la matriz ortogonal formada por los aves de A^TA.

si Q es ortogonal las cols. forman BON $Q^{-1} = Q^T$



$U = P_{\xi} = \begin{pmatrix} | & & | \\ \tilde{n}_1 & \cdots & \tilde{n}_m \\ | & & | \end{pmatrix}$

$V^T = P_S^{-1} = \begin{pmatrix} - & v_1 & - \\ & \vdots & \\ - & v_n & - \end{pmatrix}$

 np.linalg.svd

Sea $A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$

$\rho = 2$

① avas $AA^T = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $\quad \underline{\lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = 1}$

$A^TA = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ $\quad \lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = 1, \ \lambda_3 = 0$

$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{2}$

$\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = 1$

$\Sigma = \begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$

② aves de S resolver $(S - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$

$v_1 = \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$ $\quad V = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$

③ aves de $\tilde{S}$ resolver $(\tilde{S} - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$

$\hookrightarrow \tilde{u}_i = \dfrac{A \cdot \tilde{v}_i}{\sigma_i}$

$\tilde{u}_1 = \dfrac{\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2}\\ 0\end{pmatrix}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\begin{pmatrix}2/\sqrt{2}\\ 0\end{pmatrix}}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$

$\tilde{u}_2 = \dfrac{\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}}{1} = \dfrac{\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$

$U = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$