Análisis Matemático para Inteligencia Artificial

Martín Errázquin (merrazquin@fi.uba.ar)

Especialización en Inteligencia Artificial

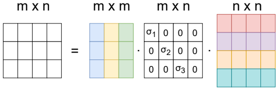
Descomposición en Valores Singulares (parte II)

DVS Compacta, Reducida y Truncada

$\min(4,6)=4=p$

Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ con DVS $A = U\Sigma V^T$:

$\Sigma = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 6}$



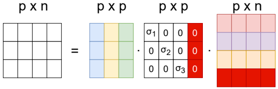
- Si $p = min\{m, n\}$, la DVS compacta es $A = U_p\Sigma_p V_p^T$

$\Sigma_p \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ $p=4$

$r=3$ $\Sigma_r \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$k=1$ $\Sigma_k \in \mathbb{R}^{1\times 1}$

p p

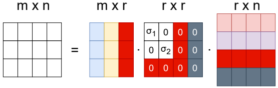


- Si $\sigma_1, \ldots, \sigma_r > 0, \sigma_{r+1}, \ldots, \sigma_p = 0$, la DVS reducida es $A = U_r\Sigma_r V_r^T$

$\sigma_1 = 2$ $\sigma_3 = 0.1$ $\sigma_5 = 0$

$\sigma_2 = 1.9$ $\sigma_4 = 10^{-2}$ $\sigma_6 = 0$

$r=4$ $\sigma_7 = 0$

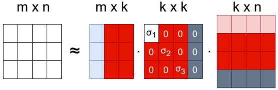


¡P!

- Sea $k \in \{1, \ldots, r-1\}$, la DVS truncada es $A \approx U_k\Sigma_k V_k^T$

$\sigma_1 = 10^3$ $\sigma_3 = 10^{-5}$

$\sigma_2 = 10^2$ $\sigma_4 = 10^{-6}$ ≈ 0



Pseudoinversa de Moore-Penrose

Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y el sistema lineal $Ax = y$. La inversa de A no está definida, pero si $m > n$ una posible solución (cuadrados mínimos) era

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T y$$

¿Pero qué ocurre si $A^T A$ no es invertible? Se define la pseudoinversa de Moore-Penrose como

$$A^{\dagger} = V_r \Sigma_r^{-1} U_r^T$$

! Σ_r no hay 0's en la diagonal

y $\hat{x} = A^{\dagger} y$ es (si $m < n$) la solución de mínima norma euclídea o (si $m > n$) la aproximación de mínimo error cuadrático/distancia euclídea.

Obs.: Todo lo anteriormente visto también vale para $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, utilizando $\cdot^H$ en vez de $\cdot^T$. Se utilizaron matrices reales para facilitar la lectura.