1. 教育部爲瞭解並研究大學教育問題，於是決定在台灣地區以隨機抽樣法選取 500 名學生作爲樣本。若已知大學生中各年級之人數及其餘資料如下表：

年　級	大一	大二	大三	大四
人數	24000	21000	18000	15000
學業成績平均	75	80	85	90
學業成績標準差	3	4	5	6
單位調查費用(萬元)	4	49	25	9

試問：

(1)以比例配置法選取樣本，各年級應抽取多少人？

(2)以 Neyman 配置法選取樣本，各年級抽取多少人？

(3)以 Deming 配置法選取樣本，各年度應抽取多少人？

2. 假設隨機變數 x 服從均勻分配，且機率質量函數爲

$$f(x)=\frac{1}{4},\quad x=0,1,2,3$$

現採取出放回的方式隨機抽取兩個樣本，試求

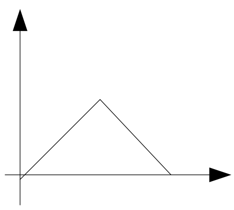
(1)樣本空間。

(2) $\bar{x}$ 的抽樣分配。

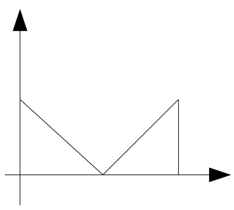
(3) $E(\bar{x})$ 與 $V(\bar{x})$ 。

3. 已知母體服從均勻分配，其機率質量函數爲： $f(x)=\frac{1}{4}, x=2,4,6,8$ ，現自此母體隨機抽取 n 個樣本，試問當(1) $n=1$ (2) $n=2$ (3) $n=4$ (4) $n=30$ 時，樣本平均數的抽樣分配的形狀爲何？請由下面的八種形狀中選出。

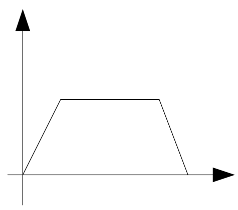
(A)



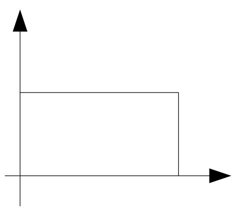
(B)



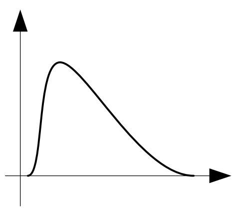
(C)



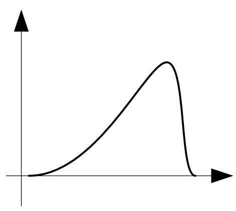
(D)

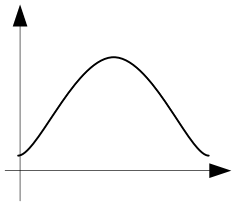
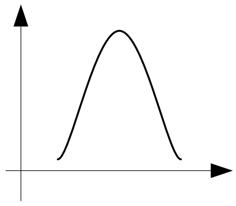


(E)



(F)



(G)  (H) 

4. 投擲骰子三次，求點數平均數的期望值與變異數。

5. 若某工廠所生產的磁磚平均重量 1.74 公斤，標準差 0.03 公斤。

(1)若隨機抽取 9 塊此工廠所生產的磁磚，請問樣本平均數的期望值與變異數為多少？

(2)若隨機抽取 50 塊此工廠所生產的磁磚，請問樣本平均數的期望值與變異數為多少？

(3)若隨機抽取 50 塊此工廠所生產的磁磚，請問這 50 塊磁磚的平均重量超過 1.745 公斤的機率？

(3)若隨機抽取 50 塊此工廠所生產的磁磚，請問這 50 塊磁磚的平均重量在 1.74 ± 0.005 公斤的機率？

6. 某進口商固定進口某項產品，由一批貨櫃內隨機抽驗 36 個產品，其樣本平均重量為 $\bar{x}$，根據過去檢驗記錄知有 5%的 $\bar{x}$ 超過 2.1 磅；有 5%的 $\bar{x}$ 低於 1.9 磅，試求此產品的平均重量及標準差。

7. 假設某產地的蘋果重量服從常態分配，平均每顆重量為 300 公克，標準差 30 公克。有一水果批發商欲購買 1000 箱蘋果，在購買前進行抽樣。

(1)隨機抽取一個蘋果，該蘋果重量超過 330 公克的機率為何？

(2)若隨機抽取 12 個蘋果，則 12 個蘋果平均重量超過 310 公克的機率為何？

(3)若將 12 個蘋果裝成一盒，則一盒蘋果重量不足 3.5 公斤的機率為何？

8. 假設 $x_1, x_2, \cdots, x_{36}$ 為隨機取自母體機率密度函數為 $f(x) = \frac{3}{2}x^2, -1 < x < 1$ 之一組樣本，令 $y = \sum_{i=1}^{36} x_i$ 試求：

(1)期望值 $E(y)$ 與變異數 $V(y)$。

(2)樣本平均數 $\bar{x}$ 大於 0.05 之機率。

9. 已知母體分配的機率密度函數為：$f(x) = (\frac{1}{4})^{x-1}(\frac{3}{4}), x = 1, 2, 3, \cdots$。若 $x_1, x_2, \cdots, x_{36}$ 為取自此母體之一組隨機樣本。試求：

(1) $P(46 \le \sum_{i=1}^{36} x_i \le 49)$。 (2) $P(1.25 \le \bar{x} \le 1.5)$。

10. 假設從台北開車到台南火車站所花的時數服從常態分配，平均 5 小時標準差 1 小時，根據此條件請回答下列問題：

(1)隨機抽取 100 位從台北開車到台南火車站，求平均時間超過 5.1 小時的機率。

(2)假設這 100 位當中，超過 5.1 小時人數為一隨機變數，求期望值與變異數？

(3)若某些開車族到台南火車站後，會到安平。假設從台南火車站到安平所需時間服從常態分配，平均 0.5 小時，標準差 0.5 小時。同時假設兩個路程是獨立的。現隨機抽一位開車族，求從臺北到安平，所需時間超過 5.5 小時，但未超過 6 小時的機率？

11. 已知台灣地區年滿 50 歲的人口比例約占全體的 47%，若現在隨機抽取 400 居住在台灣的人，則此 400 人中年滿 50 歲的比例在 50%~60%的機率爲何？

12. 一項針對是否贊成建蘇花高的民意調查，發現有 60%的民眾贊成建造。現在隨機抽取 30 位民眾，求此 30 位民眾贊成興建蘇花高的比例在 1/2~2/3 的機率爲何？

13. 假設 $\bar{x}_n, \bar{y}_n$ 分別表示兩組來自相同母體的 n 個獨立樣本的平均數，已知母體平均數爲 μ ，母體變異數爲 σ^2 ，試求

(1) $\bar{x}_n - \bar{y}_n$ 的平均數。

(2) $\bar{x}_n - \bar{y}_n$ 的標準差。

(3)求滿足 $P(|\bar{x}_n - \bar{y}_n| \le \frac{\sigma}{2}) = 0.98$ ，所需樣本數。

14. 已知 A 廠牌的電視映像管平均壽命 6.5 年，標準差 0.9 年，B 廠牌的電視映像管平均壽命 6 年，標準差 0.8 年。現自 A 廠牌隨機抽取 36 隻映像管，B 廠牌 49 隻映像管，求 A 廠牌映像管平均壽命比 B 廠牌映像管平均壽命至少超過一年的機率？

15. 分別自兩常態母體隨機抽取 4 個樣本，假設 $\bar{x}$ 爲來自母體 $N(4,9)$ 的 4 個樣本平均數，$\bar{y}$ 爲來自母體 $N(7,16)$ 的 4 個樣本平均數，，試求 $\bar{x} < \bar{y}$ 的機率。

16. 已知某校大四畢業生的畢業成績服從常態分配，現從該校大四畢業生中隨機抽取 16 位學生之畢業成績。

(1)試求此 16 位學生之平均畢業成績與全部大四畢業生之平均成績差，不超過該校全部大四畢業生成績標準差一半的機率。

(2)假設已知該校畢業生畢業成績標準差爲 10 分，若以此 16 位學生之平均成績估計該校全體畢業生的平均成績，其誤差不超過 4.38 分的機率爲何？

(3)若大四畢業成績沒有服從常態分配，則此 16 位學生之平均成績與該校全部大四畢業生的平均成績差，不超過全體成績 0.5 個標準差的機率爲何？

17. 求下列有關 t 分配的機率。

(1) $P(t_{12} < 1.782)$ 。 (2) $P(t_{12} > -1.365)$ 。 (3) $P(-2.179 \le t_{12} \le 1.782)$ 。

18. 求下列之 a 值。

(1) $P(t_{18} > a) = 0.05$ 。 (2) $P(t_{22} < a) = 0.1$ 。 (3) $P(t_{20} > a) = 0.90$ 。

(4) $P(-a \le t_{28} \le a) = 0.95$ 。

19. 試求下列之卡方值。

(1) $\chi^2_{0.05,5}$ 。 (2) $\chi^2_{0.01,10}$ 。 (3) $\chi^2_{0.975,20}$ 。 (4) $\chi^2_{0.95,18}$ 。

20. 試求下列之 F 值。

(1) $F_{0.05,12,10}$ 。 (2) $F_{0.025,20,15}$ 。 (3) $F_{0.975,10,20}$ 。 (4) $F_{0.95,10,20}$ 。

21. 設 $x_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1,2,3,\cdots,n$ 。

(1)試判斷$\sum_{i=1}^{n}(\frac{x_i-\mu_i}{\sigma_i})^2$服從何種分配，並求$E\left[\sum_{i=1}^{n}(\frac{x_i-\mu_i}{\sigma_i})^2\right]$與

$V\left[\sum_{i=1}^{n}(\frac{x_i-\mu_i}{\sigma_i})^2\right]$。

(2)當$n\to\infty$，$\sum_{i=1}^{n}(\frac{x_i-\mu_i}{\sigma_i})^2$的極限分配爲何？

22. 假設$x_1,x_2,\cdots,x_n$是來自於常態母體$N(\mu,\sigma^2)$的n個樣本，令

$\overline{x}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i, s_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$，令$x_{n+1}$爲第$n+1$個樣本，若$\frac{k(\overline{x}_n-x_{n+1})}{s_n}$服從$t$分配，試求$k$值。

23. 假設$x_1,x_2,\cdots,x_5$是來自於常態母體$N(0,\sigma^2)$的5個樣本，若$\frac{c(x_1-x_2)}{\sqrt{x_3^2+x_4^2+x_5^2}}$服從$t$分配，試求$c$值。

24. 試判斷下列之抽樣分配屬於何種分配，若需要自由度的話，請註明自由度。

(1)若$x_1,x_2,....,x_n \sim N(\mu,\sigma^2)$，求$\frac{1}{\sqrt{ns}}\sum_{i=1}^{n}x_i-n\mu$服從何種分配？

(2) $x_1,x_1,....,x_4 \sim N(0,1); y=\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_3^2+x_4^2}}$，求$y$服從何種分配？

(3) $x_1,x_2 \sim N(1,1), z_1,z_2 \sim N(0,1); y=\frac{z_1+z_2}{\sqrt{\frac{(x_2-x_1)^2}{2}+\frac{(z_1-z_2)^2}{2}}}$，求$y$服從何種分配？

(4) $x_1,x_2,....,x_{10} \sim N(0,5); y=\frac{\sqrt{90}\overline{x}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{10}(x_i-\overline{x})^2}}$，求$y$服從何種分配？

(5) $x \sim \chi_{10}^2, z \sim \chi_{20}^2; y=\frac{2x}{z}$，求$y$服從何種分配？

(6) $x \sim t_v; y=\frac{1}{x^2}$，求$y$服從何種分配？

(7) $x_1,x_2,....,x_n \sim N(0,\sigma^2); y=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$，求$y$服從何種分配？

(8) $x_1,x_1,....,x_n \sim N(0,1); y=n\overline{x}^2$，求$y$服從何種分配？

(9) $x_1, x_2 \sim N(0,1); y = \dfrac{(x_1+x_2)^2}{(x_1-x_2)^2}$ ，求 y 服從何種分配？

25. 解利用 F 分配表，求下列各值。

(1) $\chi^2_{0.95,15}$ 。　(2) $t_{0.025,11}$ 。

26. 從某公司 4 位(2 男 2 女)業務員中抽出 2 人，藉由其年度業績估計全體之平均業績。已知此公司 4 位業務員之業績分別爲：
女性：120 萬元、140 萬元；男性：170 萬元、190 萬元
(1)若採簡單隨機抽樣，請列出所有可能樣本。
(2)若依照比例配置之分層隨機抽樣法，請列出所有可能樣本。
(3)求(1)之樣本平均數之抽樣分配
(4)求(3)樣本平均數的期望值與變異數。

27. 一袋中裝有 4 個球，編號 1、2、4、5，隨機抽出 2 球，編號分別爲 x_1, x_2 ，假設 $\bar{x} = \dfrac{x_1+x_2}{2}$ 。
(1)若取出放回，試求 $\bar{x}$ 的抽樣分配， $E(\bar{x}), V(\bar{x})$ 。
(2)若取出不放回，試求 $\bar{x}$ 的抽樣分配， $E(\bar{x}), V(\bar{x})$ 。

28. 假設有一母體機率分配如下表所示：

x	0	3	12
$f(x)$	1/3	1/3	1/3

自該母體以抽出不放回的方式隨機抽出 3 個樣本，分別爲 x_1, x_2, x_3 。令 $\bar{x} = \dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}$ ， η 表 x_1, x_2, x_3 的中位數。
(1)試求 $\bar{x}$ 的抽樣分配。
(2)試求 η 的抽樣分配。

29. 從母體機率分配 $f(x) = (\frac{2}{3})^x(\frac{1}{3})^{1-x}, x = 0,1$ ，隨機抽出 2 個樣本 x_1, x_2 ，令 $\bar{x} = \dfrac{x_1+x_2}{2}$ ，求 $\bar{x}$ 的抽樣分配， $E(\bar{x})$ 與 $V(\bar{x})$ 。

30. 已知卡方分配機率密度函數爲 $f(x) = \dfrac{1}{2\Gamma(\frac{\nu}{2})}(\frac{x}{2})^{\frac{\nu}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}},\quad x > 0$ ， X, Y 爲卡方獨立隨機變數，令 $f = \dfrac{x/n}{y/m}$ 。試證明隨機變數 F 的機率密度函數爲：

$$f(F) = \frac{\Gamma(\frac{n_1+n_2}{2})}{\Gamma(\frac{n_1}{2})\Gamma(\frac{n_2}{2})}\frac{(\frac{n_1}{n_2})^{\frac{n_1}{2}}F^{\frac{n_1}{2}-1}}{(1+\frac{n_1}{n_2}F)^{\frac{n_1+n_2}{2}}},\quad F \geq 0$$

31. 已知卡方分配機率密度函數爲：$f(x)=\frac{1}{2\Gamma(\frac{\nu}{2})}(\frac{x}{2})^{\frac{\nu}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}},\quad x>0$；$Z$ 分配機率密度函數爲：$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}},\quad -\infty<z<\infty$。假設隨機變數 X 爲卡方隨機變數，Z 爲 Z 分配隨機變數，令隨機變數 $t=\frac{z}{\sqrt{\frac{x}{n}}}$。試證明 t 的機率密度函數爲：$f(t)=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}(1+\frac{t^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}\quad ,-\infty<t<\infty$。