

作業：

1. 已知隨機變數 X 的機率質量函數為 $f(x) = \frac{1}{5}, x = -2, -1, 0, 1, 2$ 。假設 Y 亦為一隨機變數，且 $y = x^2 + 1$ ，求 Y 的機率質量函數。

2. 已知隨機變數 X, Y 之聯合機率質量函數為：

$$f(x, y) = \frac{1}{31}(x^2 + y^2), x = 1, 2, 3; y = -1, 0$$

試求下列各小題：

(1) 若 $w = 3x + 5y$ ，求 w 之機率分配。

(2) 若 $z = \min(x, y)$ ，求 z 之機率分配與期望值。

3. 假設 X, Y 為二獨立隨機變數，已知其機率質量函數分別為：

$$f(x) = \frac{x}{6}, x = 1, 2, 3; \quad f(y) = \frac{y+2}{10}, y = -1, 2, 3$$

令 $w = x - y$ ，求 W 之機率分配。

4. 設隨機變數 X 之機率質量函數如下所示：

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{8}|x-3|, & x = 0, 1, 2, 3, 4 \\ 0, & o.w. \end{cases}$$

試求隨機變數 $y = \frac{1}{2}x + 1$ 的機率質量函數。

5. 已知隨機變數 X 其機率密度函數為： $f(x) = 1, 0 < x < 1$ ，假設 $y = x^2$ ，求 Y 之機率密度函數。

6. 已知 X, Y 為二獨立隨機變數，其機率密度函數分別為：

$$f(x) = 1, 0 < x < 1; \quad f(y) = 1, 0 < y < 1$$

$u = x + y$ ，求 U 之機率密度函數。

7. 設二隨機變數 X_1, X_2 ，其聯合機率密度函數為：

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 4x_1x_2, & 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1 \\ 0, & o.w. \end{cases}$$

令 $y_1 = \frac{x_1}{x_2}, y_2 = x_1x_2$ ，試求 Y_1, Y_2 之聯合機率密度函數。

8. 已知隨機變數 X 之機率密度函數為： $f(x) = \frac{8}{x^3}, 2 \leq x < \infty$ ，令 $y = 1 + \frac{1}{x}$ ，求 Y 之機率密度函數。

9. 已知隨機變數 X 之機率密度函數為： $f(x) = 1, 0 \leq x \leq 1$ ，令

$$y = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-x), \lambda > 0$$
，求 Y 之機率密度函數。

10. 已知隨機變數 X 之機率密度函數為：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{2}, & x \leq 0 \\ \frac{e^{-x}}{2}, & x > 0 \end{cases}$$

令 $y = x^2$ ，求 Y 之機率密度函數。

11. 已知隨機變數 X 之機率密度函數為：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{xe^{-\frac{x}{2}}}{4}, & x > 0 \\ 0, & o.w. \end{cases}$$

試求下列各隨機變數之機率密度函數。

(1) $y = \alpha x + \beta$ 。 (2) $z = e^x$ 。 (3) $y = \frac{1}{x}$ 。 (4) $z = \sqrt{x}$ 。

12. 設隨機變數 X 的機率質量函數為：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{8}|x-3|, & x = 0, 1, 2, 3, 4 \\ 0, & o.w. \end{cases}$$

若 $y = \frac{1}{2}x + 1$ ，求 Y 之機率質量函數？

13. 假設 X 、 Y 為隨機變數，已知機率質量函數分別為：

$$f(x) = \frac{x+2}{6}, x = -1, 0, 1 \quad f(y) = \frac{y^2+1}{7}, y = 1, 2$$

(1) 若 $z_1 = x^2$ ，求 $f(z_1)$ 。 (2) 若 $z_2 = xy$ ，求 $f(z_2)$ 。 (3) 求 $f(z_1, x)$ 。

14. 已知隨機變數 X 的機率分配如下表所示：

x	-1	0	1	2
$f(x)$	1/3	1/6	1/6	1/3

令 $z = x^3, y = x^2$ ，求 Y, Z 的聯合機率分配函數 $f(y, z)$

15. 投擲一公正硬幣 3 次，令表正面出現次數， Y 表反面出現次數，試求 $|x - y|$ 的機率密度函數。

16. 已知隨機變數 X 、 Y 的聯合機率密度函數為：

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xy, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & o.w. \end{cases}$$

假設 $u = 2x, v = 2y$ ，試求 U 、 V 的聯合機率密度函數。

17. 已知隨機變數 X 、 Y 的聯合機率密度函數為：

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & o.w. \end{cases}$$

假設 $z = x + y$ ，試求 Z 機率密度函數。

18. 已知隨機變數 X 、 Y 的聯合機率密度函數為：

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{o.w.} \end{cases}$$

假設 $w = \frac{x}{x+y}$ ，試求 W 機率密度函數。

19. 假設 $f(x) = 1, 0 < x < 1$ ，令 $y = 8x - 2$ ，試求 Y 的機率密度函數。

20. 已知隨機變數 X 的機率密度函數為： $f(x) = \frac{x^2}{3}, -1 < x < 2$ 。若隨機變數 Y

與 X 存在關係式 $y = x^2$ ，求隨機變數 y 的機率密度函數。

21. 已知隨機變數 X 的機率密度函數為： $f(x), x > 0$ 。又隨機變數 Y 滿足 $y = ax^2 + b$ ，且 $a > 0$ ，試求 Y 的機率密度函數。

22. 已知隨機變數 X 的機率密度函數為： $f(x) = \frac{5x^4}{64}, -2 \leq x \leq 2$ 。假設 $u = x^2$ ，求 U 的機率密度函數。

23. 已知隨機變數 X_1, X_2 的機率密度函數為：

$$f(x_1, x_2) = e^{-(x_1+x_2)}, 0 \leq x_1 < \infty; 0 \leq x_2 < \infty$$

假設 $y_1 = x_1 + x_2, y_2 = \frac{x_1}{x_1 + x_2}$ ，求 y_1, y_2 的聯合機率密度函數。

24. 已知隨機變數 X, Y 的聯合機率密度函數為：

$$f(x, y) = 1, \quad \theta - \frac{1}{2} \leq x \leq \theta + \frac{1}{2}, \theta - \frac{1}{2} \leq y \leq \theta + \frac{1}{2}$$

若 $w = x - y$ ，求隨機變數 W 的機率密度函數