1. 政府爲瞭解民眾對於健保漲價的支持率，於是隨機抽選 1000 位民眾當樣本，詢問是否支持保費上漲，結果詢問的結果有 220 位民眾支持該政策，請問民眾對於贊成健保上漲的支持率的點估計值爲多少？
2. 假設已知全國平均每戶家庭人口數爲 5.1 人，某研究機構欲調查國內每戶家庭平均人口數，隨機抽取 1000 個樣本，得樣本平均爲每戶 4.7 人，請問估計誤差爲多少？偏誤爲多少？是否高估了母體參數？
3. 假設$\{y_1, y_2, y_3\}$爲自母體爲指數分配所抽出的隨機樣本，且已知母體平均數爲θ ，考慮底下的四個估計式用來估計母體平均數θ：

   $$\hat{\theta} = y_1, \hat{\theta}_2 = \frac{y_1 + y_2}{2}, \hat{\theta}_3 = \frac{y_1 + 2y_2}{3} \hat{\theta}_4 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

   請問哪以個估計式具有不偏性？
4. 何謂不偏估計式？
5. 假設$x_1, x_2, \cdots, x_n$爲來自於機率密度函數爲$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} e^{-\frac{x^2}{2\theta}}$之一組隨機樣本， 試證明：$d(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$爲$\theta$的不偏估計式。
6. 假設$x_1, x_2, \cdots, x_n$爲來自於機率密度函數爲$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}, -\infty < x < \infty,$之一組隨機樣本，若$c\overline{x}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$爲$\mu$的不偏估計式，試求$c$。
7. 假設$x_1, x_2, \cdots, x_n$爲取自母體分配爲：$f(x;\theta) = \frac{x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{2\theta}}, \quad x > 0$之隨機樣本。

   (1)試證明$E(x^2) = 2\theta$ 。　　(2)求θ的不偏估計式。
8. 假設由一常態母體$N(\mu, \sigma^2)$隨機抽取n個樣本，令$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$試求：

   (1) s^2的平均數與變異數。

   (2) $\lim_{n\to\infty} E(s^2)$ 。
9. 假設$x_1, x_2, \cdots, x_n$爲來自機率質量函數$f(x) = p(1-p)^x, x = 0,1,2,3,\cdots$的隨機樣本，試求$p$的最大概似估計式。
10. 假設$x_1, x_2, \cdots, x_n$爲抽自母體分配爲$f(x) = \begin{cases} \theta^x (1-\theta)^{1-x}, & x = 0,1; 0 \le \theta \le 1 \\ 0, & o.w. \end{cases}$之一組隨機樣本。

    (1)試求θ的最大概似估計式。

(2)假設抽出的一組樣本爲 $x_1=1, x_2=0, x_3=1, x_4=0, x_5=1, x_6=1$，試利用(1)之估計式，計算 θ 的估計值。

11. 假設 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 爲抽自母體分配爲常態分配 $N(\mu, \sigma^2)$ 之一組隨機樣本。若有三個估計式：

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \hat{\mu}_2 = x_1, \hat{\mu}_3 = \frac{x_1}{2} + \frac{1}{2(n-1)}(x_2 + x_3 + \cdots + x_n)$$

試問：

(1)上面三個估計式哪一個具不偏性？

(2)哪一個具一致性？

(3)分別求 $\hat{\mu}_1$ 對 $\hat{\mu}_2$，$\hat{\mu}_1$ 對 $\hat{\mu}_3$，$\hat{\mu}_2$ 對 $\hat{\mu}_3$ 之相對效率。

12. 假設 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ 互相獨立，且均爲 θ 之不偏估計式，若 $V(\hat{\theta}_1) = \sigma_1^2, V(\hat{\theta}_2) = \sigma_2^2$。現在我們利用 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ 另外推導出一個 θ 之不偏估計式：$\hat{\theta}_3 = a\hat{\theta}_1 + (1-a)\hat{\theta}_2$，若欲使 $\hat{\theta}_3$ 的變異數爲最小，求 a。

13. 假設 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 爲抽自母體分配爲常態分配 $N(\mu, \sigma^2)$ 之一組隨機樣本，若

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2, \hat{\sigma}_2^2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2$$ 。

(1) $\hat{\sigma}_1^2$ 與 $\hat{\sigma}_2^2$ 何者爲 σ^2 的不偏估計式？

(2)試求 $\hat{\sigma}_1^2$ 相對於 $\hat{\sigma}_2^2$ 的效率。

14. 假設 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 爲抽自母體分配爲 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0 \\ 0, & o.w. \end{cases}$，試求 θ 的最大概似估計式。

15. 假設 $f(x) = \theta x^{\theta-1}, 0 < x < 1, \theta > 0$，若 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 爲自此分配中所抽出的一組隨機樣本，試求：

(1) θ 的最大概似估計式。

(2)若自此母體抽出 10 個樣本如下所示：

0.0256	0.3051	0.0278	0.8971	0.0739
0.3191	0.7379	0.3671	0.9763	0.0102

利用(1)求 θ 的估計值。

(3)請改用動差法求θ的估計式，並將上題以此估計式計算θ的估計值。

16. 假設 x,y 爲獨立隨機變數，已知$E(x)=1, E(y)=2, V(x)=V(y)=\sigma^2$，若 $k(x^2-y^2)+y^2$ 爲σ^2之不偏估計式，試求 k 之值。

17. 假設$x_1, x_2, \cdots, x_n$爲抽自母體分配爲 $f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}}$ 之一組樣本，試以動差法求α, β的估計式。

18. 已知母體分配爲 $f(x)=(\frac{2}{3})^x(\frac{1}{3})^{1-x}, x=0,1$。現自此母體隨機抽出一組樣本 x_1, x_2, x_3，並分別組成樣本統計量$\overline{x}$與s^2，其中

$$\overline{x}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, s^2=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}(x_i-\overline{x})^2$$ 。

(1)寫出此組隨機樣本的概似函數。

(2)列出樣本統計量$\overline{x}$的抽樣分配，並求$E(\overline{x})$與$V(\overline{x})$。

(3)列出樣本統計量s^2的抽樣分配，並求$E(s^2)$與$V(s^2)$。

19. 若 $x \sim B(n,p)$。

(1)試證 $\hat{p}=\frac{x}{n}$ 爲 p 之不偏估計式。

(2) $n\hat{p}(1-\hat{p})$ 是否爲$V(x)$之不偏估計式？若否，試求$V(x)$之不偏估計式。

20. 假設x_1, x_2, x_3爲抽自母體分配爲百努力分配之隨機樣本，若 $\hat{\theta}_1=x_1+x_2+x_3, \hat{\theta}_2=x_1+x_2\cdot x_3$，試證$\hat{\theta}_1$爲 p 之充分統計量，$\hat{\theta}_2$則不爲 p 之充分統計量。

21. 一池塘中有若干魚，今抓 7 尾魚做記號後放回，爲了估計池塘中到底有多少條魚，於是再抓數尾，發現其中有 3 尾有做記號，試用最大概似法估計池塘中的魚有幾條？

22. 假設台北捷運到站時間兩車間隔時間成指數分配：$f(x)=\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}$。現在隨機在台北火車站進行測量，發現每車間隔時間分別爲：

2　　3　　6　　10　　5　　2　　7（分）

試求平均間隔時間λ的最大似估計值。

23. 已知隨機變數 X 之機率密度函數爲：

$$f(x)=\frac{x}{\theta^2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}, \quad t>0$$

試求θ之最大概似估計式。

24. 已知隨機變數 X 之機率密度函數爲：

$$f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}}, \quad x>0; \alpha>0, \beta>0$$

試求 β 之最大概似估計式。

25. 從平均數爲 θ 變異數爲 σ^2 之母體，隨機選出樣本 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ ，欲使估計式 $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ 爲 θ 之不偏估計式，請問 a_i 要如何選？