APPENDIX

# 附錄 A

# A.1 $\overline{x}$ 抽樣分配補充說明

**定理 1**

自總數為 $N$ 的母體中以取出不放回方式抽取 $n$ 個樣本，此 $n$ 個樣本分別為 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，若已知母體平均數為 $\mu$ 變異數為 $\sigma^2$，則 $x_i, x_j, i \neq j$ 的共變異數為

$$Cov(x_i, x_j) = -\frac{\sigma^2}{N-1}, \quad i \neq j$$

**證明**

採取出不放回的方式抽取兩個樣本 $x_i, x_j$ 之機率為 $C_2^N = \frac{1}{N(N-1)}$

故 $x_i, x_j$ 之聯合機率質量函數為 $f(x_i, x_j) = \frac{1}{N(N-1)}$

$$Cov(x_i, x_j) = E\left[(x_i-\mu)(x_j-\mu)\right] = \sum_{i\neq j}(x_i-\mu)(x_j-\mu)f(x_i, x_j)$$

$$= \sum_{i\neq j}(x_i-\mu)(x_j-\mu)\frac{1}{N(N-1)}$$

$$= \frac{1}{N(N-1)}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i-\mu)(x_j-\mu) - \sum_{i=j}(x_i-\mu)(x_j-\mu)\right]$$

$$= \frac{1}{N(N-1)}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)\cdot\sum_{j=1}^{n}(x_j-\mu) - \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right]$$

$$= \frac{1}{N(N-1)}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)\right)^2 - \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right] = \frac{1}{N(N-1)}\left[0-\sigma^2\right]$$

$$= -\frac{\sigma^2}{N(N-1)}$$

**定理 2**

自總數為 $N$ 的母體中以取出不放回方式抽取 $n$ 個樣本，則樣本平均數的變異數為：

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}\frac{N-n}{N-1}$$

**證明**

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = V(\bar{x}) = V(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}) = \frac{1}{n^2}V(x_1+x_2+\cdots+x_n)$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n}V(x_i) + \sum_{i\neq j}Cov(x_i,x_j)\right] = \frac{1}{n^2}(n\sigma^2 - n(n-1)\frac{\sigma^2}{N-1})$$

$$= \frac{\sigma^2}{n}\frac{N-n}{N-1}$$

註：$(x_i,x_j), i\neq j$ 的排列數有 $P_2^n = n(n-1)$ 種情形。

# A.2 CASIO fx-350MS 操作手冊

## 1. 基本運算

**例 1**

求 $3\sqrt{2} + 4\sqrt[6]{5} + \sqrt[3]{2}$

**解**

3 $\times$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ 2 + 4 $\boxed{\times}$ 6 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\sqrt[x]{\ }$ 5 + $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\sqrt[3]{\ }$ 2 $\boxed{=}$

**例 2**

求 $\frac{2}{3} + 5\frac{3}{10} = 5\frac{29}{30}$

**解**

2 $ab/c$ 3 $\boxed{+}$ 5 $ab/c$ 3 $ab/c$ 10 $\boxed{=}$

答案轉假分數：再按 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{d/c}}$

例 3

求 $14^2+5^4$

解

14 $x^2$ $\boxed{+}$ 5 $\boxed{\wedge}$ 4 $\boxed{=}$

例 4

$\dfrac{C_2^4}{C_3^6}$

解

4 $\boxed{\text{nCr}}$ 2 $\boxed{\div}$ 6 $\boxed{\text{nCr}}$ 3 $\boxed{=}$

答案轉分數：再按 a$b/c$

例 5

$P_3^{10}+5!$

解

10 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{nPr}}$ 3 + 5 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $x!$ $\boxed{=}$

例 6

$\dfrac{e^2}{3}+2e^3$

解

$\boxed{\text{SHIFT}}$ $e^x$ 2 $\boxed{\div}$ 3 $\boxed{+}$ 2 $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $e^x$ 3 $\boxed{=}$

## 2. 統計應用

每一次進行統計計算時必須先轉成統計模式：按 $\boxed{\text{MODE}}$ 2

(2) 敘述統計

**例 1**

已知資料如下：35 56 56 78 78 78 78 96 73，求平均數、變異數、標準差…。

**解**

計算機操作：

先轉成統計模式： $\boxed{\text{MODE}}$ 2

輸入資料

35 $\boxed{\text{M+}}$ 56 $\boxed{\text{M+}}$ $\boxed{\text{M+}}$ 78 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{;}$ 4 $\boxed{\text{M+}}$ 96 $\boxed{\text{M+}}$ 73 $\boxed{\text{M+}}$

1. 求平均數

   $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{2}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$

2. 求母體標準差

   $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{2}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$

3. 求樣本標準差

   $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$

4. 求母體變異數

   $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{2}$ $\boxed{2}$ $x^2$ $\boxed{=}$

5. 求樣本變異數

   $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $x^2$ $\boxed{=}$

6. 求 $\sum x^2$

   $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $=$

7. 求 $\sum x$

   $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $=$

**例 2**

已知資料如下，求平均數、變異數、標準差…。

| 0-10 | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 | 50-60 | 60-70 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 12 | 23 | 6 | 21 | 5 | 7 | 13 |

**解**

計算機操作：

轉成統計模式： MODE 2

輸入資料

5 SHIFT ; 12 M+ 15 SHIFT ; 23 M+ 25 SHIFT ; 6 M+

35 SHIFT ; 21 M+ 45 SHIFT ; 5 M+ 55 SHIFT ; 7 M+

65 SHIFT ; 13 M+

其餘操作與例 1 相同。

**例 3**

已知資料如下：35 56 56 78 78 78 78 96 73，求偏態係數與峰度係數。

**解**

計算機操作：

1. 求偏態係數 $\beta_1 = \dfrac{M_3}{\sigma^3} = \dfrac{\frac{1}{n}\sum(x_i - \overline{x})^3}{\left(\sqrt{\frac{1}{n}\sum(x_i - \overline{x})^2}\right)^3}$

   先轉成統計模式： MODE 2

   輸入資料

   35 M+ 56 M+ M+ 78 SHIFT ; 4 M+ 96 M+ 73 M+

   求平均數 SHIFT 2 1 = 得 $\overline{x} = 69.778$

接著求分子部分：

轉成二次迴歸模式：$\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{3}$ $\boxed{⇨}$ $\boxed{3}$ 【註】$\boxed{⇨}$表方向鍵(面積最大的按鍵)

輸入資料

35 − 69.778 $\boxed{\text{M+}}$ 56 − 69.778 $\boxed{\text{M+}}$ $\boxed{\text{M+}}$ 78 − 69.778 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{;}$ $\boxed{4}$ $\boxed{\text{M+}}$
96 − 69.778 $\boxed{\text{M+}}$ 73 − 69.778 $\boxed{\text{M+}}$

$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{⇨}$ $\boxed{⇨}$ $\boxed{1}$ $\boxed{\div}$ 9 $\boxed{=}$ 得 −2997.236

再求分母部分：

$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ 9 $\boxed{=}$ $\boxed{\wedge}$ 1.5 $\boxed{=}$ 得 4819.619

代入偏態係數公式中，即可求出偏態係數。

2. 求峰度係數 $\beta_2 = \dfrac{M_4}{\sigma^4} = \dfrac{\frac{1}{n}\sum (x_i - \overline{x})^4}{\left(\frac{1}{n}\sum (x_i - \overline{x})^2\right)^2}$

求分子部分：

$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{⇨}$ $\boxed{⇨}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\div}$ 9 $\boxed{=}$ 得 225140.651

再求分母部分：

$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ 9 $\boxed{=}$ $x^2$ $\boxed{=}$ 得 1005.075

(2) 應用統計

**例** 1

隨機從三個母體各取出五個樣本，資料如下表所示，求 *SST*、*SSA*、*SSE*。(每一組樣本相同時)

| 編號 | 樣本 **1** | 樣本 **2** | 樣本 **3** |
|---|---|---|---|
| 1 | 32 | 44 | 33 |
| 2 | 30 | 43 | 36 |
| 3 | 30 | 44 | 35 |
| 4 | 26 | 46 | 36 |
| 5 | 32 | 48 | 40 |

**解**

計算機操作：

1. $SST$ 的計算：$SST = n_T \sigma_T^2$

先轉成統計模式：$\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{2}$

32 $\boxed{\text{M+}}$ 30 $\boxed{\text{M+}}$ $\boxed{\text{M+}}$ 26 $\boxed{\text{M+}}$ 32 $\boxed{\text{M+}}$ 44 $\boxed{\text{M+}}$ 43 $\boxed{\text{M+}}$ 44 $\boxed{\text{M+}}$ 46 $\boxed{\text{M+}}$ 48 $\boxed{\text{M+}}$ 33 $\boxed{\text{M+}}$ 36 $\boxed{\text{M+}}$ 35 $\boxed{\text{M+}}$ 36 $\boxed{\text{M+}}$ 40 $\boxed{\text{M+}}$

$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{2}$ $\boxed{2}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\times}$ 15 $\boxed{=}$

2. $SSA$ 的計算：$SSA = n_T \sigma_{\bar{A}_j}^2$

先求每一組的樣本平均數：分別為 30，45，36

轉成統計模式：$\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{2}$

30 $\boxed{\text{M+}}$ 45 $\boxed{\text{M+}}$ 36$\boxed{\text{M+}}$

$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{2}$ $\boxed{2}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\times}$ 15 $\boxed{=}$

3. $SSE$ 的計算：$SSE = SST - SSA$

**例 2**

已知資料如下，試求 $SST$，$SSA$，$SSE$ (每一組樣本資料不同時)

| 樣本 1 | 樣本 2 | 樣本 3 |
|---|---|---|
| 10 | 6 | 14 |
| 8 | 9 | 13 |
| 5 | 8 | 10 |
| 12 | 13 | 17 |
| 14 | | 16 |
| 11 | | |

**解**

計算機操作：

1. $SST$ 的計算：$SST = n_T \sigma_T^2$

先轉成統計模式：$\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{2}$

10 $\boxed{\text{M+}}$ 8 $\boxed{\text{M+}}$ 5 $\boxed{\text{M+}}$ 12 $\boxed{\text{M+}}$ 14 $\boxed{\text{M+}}$ 11 $\boxed{\text{M+}}$ 6 $\boxed{\text{M+}}$ 9 $\boxed{\text{M+}}$ 8 $\boxed{\text{M+}}$ 13 $\boxed{\text{M+}}$ 14 $\boxed{\text{M+}}$ 13 $\boxed{\text{M+}}$ 10 $\boxed{\text{M+}}$ 17 $\boxed{\text{M+}}$ 16 $\boxed{\text{M+}}$

$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{2}$ $\boxed{2}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\times}$ 15 $\boxed{=}$

2. $SSE$ 的計算： $SSE = \sum (n_j - 1)s_j^2$

先求出三組樣本之樣本變異數(使用前面介紹之變異數計算機使用過程，注意每算完一組需按 $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{2}$ 重新啟動統計模式)分別為 10，8.67，7.5

5 $\boxed{\times}$ 10 $\boxed{+}$ 3 $\boxed{\times}$ 8.67 $\boxed{+}$ 4 $\boxed{\times}$ 7.5 $\boxed{=}$

3. $SSA$ 的計算： $SSA = SST - SSE$

**例 3**

已知資料如下，求 $SST$，$SSA$，$SSB$，$SSE$

| 區域 / 銷售員 | 東區 | 南區 | 北區 | $\bar{x}_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 甲 | 53 | 61 | 51 | 55 |
| 乙 | 47 | 55 | 51 | 51 |
| 丙 | 46 | 52 | 49 | 49 |
| 丁 | 50 | 58 | 54 | 54 |
| 戊 | 49 | 54 | 50 | 51 |
| $\bar{x}_j$ | 49 | 56 | 51 | $\bar{\bar{x}} = 52$ |

**解**

假設 $A$ 因子表區域，$B$ 因子表銷售員：

計算機操作：

1. $SST$ 的計算： $SST = n_T \sigma_T^2$

先轉成統計模式： $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{2}$

53 $\boxed{\text{M+}}$ 47 $\boxed{\text{M+}}$ 46 $\boxed{\text{M+}}$ 50 $\boxed{\text{M+}}$ 49 $\boxed{\text{M+}}$ 61 $\boxed{\text{M+}}$ 55 $\boxed{\text{M+}}$ 52 $\boxed{\text{M+}}$ 58 $\boxed{\text{M+}}$ 54 $\boxed{\text{M+}}$ 51 $\boxed{\text{M+}}$ $\boxed{\text{M+}}$ 49 $\boxed{\text{M+}}$ 54 $\boxed{\text{M+}}$ 50 $\boxed{\text{M+}}$ 55 $\boxed{\text{M+}}$ 51 $\boxed{\text{M+}}$ 49 $\boxed{\text{M+}}$ 54 $\boxed{\text{M+}}$ 51 $\boxed{\text{M+}}$

$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{2}$ $\boxed{2}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\times}$ 15 $\boxed{=}$

2. $SSA$ 的計算： $SSA = n_T \sigma_{A_j}^2$

轉成統計模式： $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{2}$

49 $\boxed{\text{M+}}$ 56 $\boxed{\text{M+}}$ 51 $\boxed{\text{M+}}$

$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{2}$ $\boxed{2}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\times}$ 15 $\boxed{=}$

3. $SSB$ 的計算： $SSB = n_T \sigma_{B_i}^2$

   轉成統計模式： $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{2}$

   55 $\boxed{\text{M+}}$ 51 $\boxed{\text{M+}}$ 49 $\boxed{\text{M+}}$ 54 $\boxed{\text{M+}}$ 51 $\boxed{\text{M+}}$

   $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{2}$ $\boxed{2}$ $x^2$ $\boxed{\times}$ 15 $\boxed{=}$

4. $SSE$ 的計算： $SSE = SST - SSA - SSB$

**例 4**

已知資料如下，求 $SST$，$SSA$，$SSB$，$SSAB$，$SSE$

| | | 機器 | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 甲 | 乙 | 丙 | 丁 |
| 操作員 | 1 | 109 | 110 | 108 | 110 |
| | | 110 | 115 | 110 | 106 |
| | 2 | 110 | 110 | 112 | 114 |
| | | 112 | 111 | 109 | 112 |
| | 3 | 116 | 112 | 114 | 120 |
| | | 114 | 115 | 119 | 117 |

**解**

假設機器為因子，操作員為 B 因子。

計算機操作：

1. $SST$ 的計算： $SST = n_T \sigma_T^2$

   先轉成統計模式： $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{2}$

   109 $\boxed{\text{M+}}$ 110 $\boxed{\text{M+}}$ $\boxed{\text{M+}}$ 112 $\boxed{\text{M+}}$ 116 $\boxed{\text{M+}}$ 114 $\boxed{\text{M+}}$ 110 $\boxed{\text{M+}}$ 115 $\boxed{\text{M+}}$ 110 $\boxed{\text{M+}}$ 111 $\boxed{\text{M+}}$ 112 $\boxed{\text{M+}}$ 115 $\boxed{\text{M+}}$ 108 $\boxed{\text{M+}}$ 110 $\boxed{\text{M+}}$ 112 $\boxed{\text{M+}}$ 109 $\boxed{\text{M+}}$ 114 $\boxed{\text{M+}}$ 119 $\boxed{\text{M+}}$ 110 $\boxed{\text{M+}}$ 106 $\boxed{\text{M+}}$ 114 $\boxed{\text{M+}}$ 112 $\boxed{\text{M+}}$ 120 $\boxed{\text{M+}}$ 117 $\boxed{\text{M+}}$

   $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{2}$ $\boxed{2}$ $x^2$ $\boxed{\times}$ 24 $\boxed{=}$

   求出 $SST$ 後順便求出 $\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\sum_{k=1}^{n} x_{ijk}^2$ ，後面求 SSE 會用到(資料不需重新輸入)

   $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$

2. $SSA$，$SSB$，$SSE$ 的計算

求出行、列與小格子的平均

| | 機器 | | | | 列平均 |
|---|---|---|---|---|---|
| | 甲 | 乙 | 丙 | 丁 | |
| 1 | 109<br>110 | 110<br>115 | 108<br>110 | 110<br>106 | $\bar{B}_1 = 109.75$ |
| | $\overline{B_1A_1} = 109.5$ | $\overline{B_1A_2} = 112.5$ | $\overline{B_1A_3} = 109$ | $\overline{B_1A_4} = 108$ | |
| 2 | 110<br>112 | 110<br>111 | 112<br>109 | 114<br>112 | $\bar{B}_2 = 111.25$ |
| | $\overline{B_2A_1} = 111$ | $\overline{B_2A_2} = 110.5$ | $\overline{B_2A_3} = 110.5$ | $\overline{B_2A_4} = 113$ | |
| 3 | 116<br>114 | 112<br>115 | 114<br>119 | 120<br>117 | $\bar{B}_3 = 115.875$ |
| | $\overline{B_3A_1} = 115$ | $\overline{B_3A_2} = 113.5$ | $\overline{B_3A_3} = 116.5$ | $\overline{B_3A_4} = 118.5$ | |
| 行平均 | $\bar{A}_1 = 111.833$ | $\bar{A}_2 = 112.167$ | $\bar{A}_3 = 112$ | $\bar{A}_4 = 113.167$ | $\bar{\bar{x}} = 112.29$ |

(1) $SSA$ 的計算： $SSA = n_T \sigma^2_{\bar{A}_j}$

轉成統計模式： $\boxed{\text{MODE}}$ 2

111.833 $\boxed{\text{M+}}$ 112.167 $\boxed{\text{M+}}$ 112 $\boxed{\text{M+}}$ 113.167 $\boxed{\text{M+}}$

$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{2}$ $\boxed{2}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\times}$ 24 $\boxed{=}$

(2) $SS$B 的計算： $SSB = n_T \sigma^2_{\bar{B}_i}$

轉成統計模式： $\boxed{\text{MODE}}$ 2

109.75 $\boxed{\text{M+}}$ 111.25 $\boxed{\text{M+}}$ 115.875 $\boxed{\text{M+}}$

$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{2}$ $\boxed{2}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\times}$ 24 $\boxed{=}$

(3) $SSE$ 的計算： $SSE = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\sum_{k=1}^{n} x_{ijk}^2 - n\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\overline{A_jB_i}^2$

轉成統計模式： $\boxed{\text{MODE}}$ 2

109.5 $\boxed{\text{M+}}$ 111 $\boxed{\text{M+}}$ 115 $\boxed{\text{M+}}$ 112.5 $\boxed{\text{M+}}$ 110.5 $\boxed{\text{M+}}$ 113.5 $\boxed{\text{M+}}$ 109 $\boxed{\text{M+}}$ 110.5 $\boxed{\text{M+}}$ 116.5 $\boxed{\text{M+}}$ 108 $\boxed{\text{M+}}$ 113 $\boxed{\text{M+}}$ 118.5 $\boxed{\text{M+}}$

$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{\times}$ $-2$ $+$ $\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\sum_{k=1}^{n} x_{ijk}^2$ $\boxed{=}$

3. $SSAB$ 的計算： $SSAB = SST - SSA - SSB - SSE$

**例 5**

已知資料如下

| $X$ | 1 | 1 | 1 | 2 | 4 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Y$ | 568 | 577 | 652 | 657 | 755 | 759 | 840 | 832 |

求迴歸係數 $\hat{Y}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}X$ 與相關係數

**解**

計算機操作：

先轉成線性迴歸模式：$\boxed{\text{MODE}}$ 3 1

輸入資料

1 $\boxed{,}$ 568 $\boxed{\text{M+}}$ 1 $\boxed{,}$ 577 $\boxed{\text{M+}}$ 1 $\boxed{,}$ 652 $\boxed{\text{M+}}$ 2 $\boxed{,}$ 657 $\boxed{\text{M+}}$

4 $\boxed{,}$ 755 $\boxed{\text{M+}}$ 4 $\boxed{,}$ 759 $\boxed{\text{M+}}$ 5 $\boxed{,}$ 870 $\boxed{\text{M+}}$ 6 $\boxed{,}$ 832 $\boxed{\text{M+}}$

1. 求 $\hat{\alpha}$

   $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{2}$ $\boxed{\Rightarrow}$ $\boxed{\Rightarrow}$ 1 $\boxed{=}$ 得 550.821

2 求 $\hat{\beta}$

   $\boxed{\text{SHIFT}}$ 2 $\boxed{\Rightarrow}$ $\boxed{\Rightarrow}$ 2 $\boxed{=}$ 得 51.393

3. 求相關係數 $\gamma$

   $\boxed{\text{SHIFT}}$ 2 $\boxed{\Rightarrow}$ $\boxed{\Rightarrow}$ 3 $\boxed{=}$ 得 0.961