作業

1. 試寫出下列隨機變數之可能值？
(1)X 代表擲三枚硬幣正面出現的次數。
(2)投擲兩粒骰子，令 Y 代表兩粒骰子點數之差。
(3)某路口架設一超速照相機，令 Z 表每日被拍到之超速車子數目。
(4)T 代表某十字路口平均拍到違規車輛的間隔時間。

2. 設 X 爲擲二公正骰子之點數差，試分別用機率分配函數、機率分配線條圖、機率分配列舉表，求 X 的機率分配。

3. 已知 $f(x)=C_x^{10}(0.4)^x(0.6)^{10-x}, x=0,1,2,\cdots,10$，請問 $f(x)$ 是否爲一離散型的機率分配函數？

4. 說明以下的函數是否可以作爲機率密度函數，如果可以，請找出適當的 c 值。
(1) $f(x)=\begin{cases} cx, & 0\le x\le 2 \\ 0, & x<0 \text{ or } x>2 \end{cases}$
(2) $f(x)=cx^2e^{-cx}$

5. 請證明： $f(x)=\begin{cases} \dfrac{m^x e^{-m}}{x!}, & x=0,1,2,3,\cdots \\ 0, & o.w. \end{cases}$ ， $m>0$ 爲一機率值量函數。

6. 設 $f(x)$ 爲一機率值量函數，且
$$f(x)=\begin{cases} cx, & x=1,2 \\ c(x-1), & x=3,4 \\ c^2(x-4), & x=5,6 \\ c+7c^2, & x=7 \\ 0, & o.w. \end{cases}$$
，求 c。

7. (1)已知 $f(x)=1, x=2$ ，試求累積分配函數 $F(x)$ 。
(2)已知 $f(x)=\dfrac{x}{15}, x=1,2,3,4,5$ ，試求累積分配函數 $F(x)$ 。

8. 假設隨機變數 X 之機率分配爲： $f(1)=0.2, f(2)=0.3$，其餘機率是連續且均勻分配於 1 與 2 之間：
(1)試求 X 的累積分配函數並畫圖。
(2)試求 X 之中位數及平均數（期望值)。

9. 已知隨機變數 X 爲非負整數，其累積分配函數爲：
$$F(x)=\begin{cases} 1-(\frac{1}{2})^{x+1}, & x=0,1,2,3,\cdots \\ 0, & o.w. \end{cases}$$
(1)求 X 的機率值量函數。
(2)求 $P(10<x\le 20)$

10. 已知機率密度函數： $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, & 1<x<\infty \\ 0, & o.w. \end{cases}$
求累積分配函數。

11. 假設 X 之累積分配函數為：$F(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ \dfrac{x^2-1}{8}, & 1\le x\le 3\\ 1, & x>3\end{cases}$

(1)求 X 之機率密度函數。
(2)求 $f(2<x\le 3)$ 。
(3)求中位數。

12. 已知 X 為連續型隨機變數，若機率密度函數為：$f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le k\\ 0, & o.w.\end{cases}$ 。

(1)求 k。　(2)求 $f(k)$。　(3)求 $f(\frac{k}{3}<x<\frac{k}{2})$。　(4)求 X 之累積分配函數。

13. 某種易壞的食品每天需求量為 4、5、6 的機率分別為 0.1、0.4、0.5，假設購入成本每件 100 元，而以 200 元賣出，當天未賣出的必須拋棄。
(1)若每天購入 6 件的平均利潤是多少？
(2)每天購入幾件，才能獲得最大利潤？

14. 已知隨機變數 X 之機率函數為：$f(x)=\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^x, x=0,1,2,\cdots$。求隨機變數 X 的期望值。

15. 已知隨機變數 X 之機率函數為：$f(x)=\frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}, x\ge 0$，求隨機變數 X 的期望值。

16. 為比較台灣勞工與日本勞工之薪水必須將薪資折合相同貨幣，已知台灣的勞工每月平均薪資為新台幣 19000 元，每月薪資之變異數為新台幣 10000 元，假如新台幣 1 元等於日幣 4 元，試問台灣勞工每月平均薪資及標準差，以日幣表示各為多少？

17. 根據某年台灣地區人口資料顯示，在有子女的家庭中，依子女人數分類之家庭分配比例如下表所示：

子女人數	1	2	3	4	5
家庭比例	0.05	0.1	0.2	0.35	0.30

試求台灣家庭子女平均數與變異數。

18. 已知隨機變數 X 之累積分配函數為：$F(x)=\begin{cases}1-\frac{2}{3}e^{-x}, & x\ge 0\\ 0, & o.w.\end{cases}$

試求期望值與變異數。

19. 若隨機變數 X 之 pdf 在 $x=-2,0,2$ 為正數，其他為 0，已知 $f(0)=\frac{1}{2}$ ，求 $E(x^2)$ 。

20. 設 X 為正值隨機變數，試證：$E(x)=\int_0^\infty [1-F(x)]dx$

21. 假設機率密數函數如下：

$$f(x)=\begin{cases}kx(1-x), & 0<x<1\\ 0, & o.w.\end{cases}$$，求

(1) $k=?$　(2)累積分配函數。　(3) $f(x>\frac{1}{4})$　(4)中位數。

22. 已知機率密度函數如下所示：

$$:f(x)=\begin{cases}cx(1-x), & 0<x<1\\ 0, & o.w.\end{cases}$$

其中 c 爲常數，試求下列各小題：

(1) c。　(2)期望値 $E(x)$。　(3)變異數 $V(x)$。　(4) 中位數 η。

(5) 眾數 Mo。　(6) $f(\mu-2\sigma\le x\le\mu+2\sigma)$。

23. 若小家電之壽命爲 X，且已知 X 之累積分配函數爲 $F(x)=1-e^{-x}, x>0$，求 X 之偏態係數，請分別以動差法與 Pearson 法求之。

24. 某十字路口之紅綠燈設計爲，紅燈時間固定 60 秒，綠燈固定 40 秒，假設無黃燈，試求每部車經過此十字路口等候的平均時間與變異數。

25. 有一隻老鼠誤闖人類所設的迷宮陷阱，這隻老鼠只能選擇向左走或者向右走。若選擇向右走，3 分鐘後會回到原來的位置；若選擇向左走，則有 $\frac{1}{3}$ 的機會於 2 分鐘後離開迷宮，但有 $\frac{2}{3}$ 的機會 5 分鐘之後回到原來的位置。請問這隻老鼠平均大約多久能夠走出此迷宮？

26. 設 X 與 Y 爲兩個離散型隨機變數，其聯合機率質量函數爲：

$$f(x,y)=\begin{cases}k(x^2+y^2), & x=1,3; y=-1,1,2\\ 0, & o.w.\end{cases}$$

(1)求 k 值。

(2)分別求出 X 與 Y 的之邊際機率。

(3)求 $E(y|x=1)$。

27. 設 X 和 Y 的聯合機率密度函數如下：

$$f(x,y)=\frac{3x+2y}{k}, x=1,2; y=1,2$$

試求：(1)常數 k 值。　(2)X 的邊際機率密度函數。　(3)求 $P(y\ge x)$　(4) 求 $P(2x=y)$。

28. 假設已知 X 與 Y 的聯合機率函數爲：

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & 0<x<y, 0<y<1\\ 0, & o.w.\end{cases}$$

試求：(1) $P(\frac{1}{4}<x<\frac{1}{2}\Big|y=\frac{3}{4})$。　(2) $E(x|y)$。　(3)$V(x|y)$。　(4)X 與 Y 是否獨立。

29. 已知隨機變數 X 與 Y 的聯合機率密度函數如下：

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2}{5}(x+2y), & 0<x<1, 0<y<1\\ 0, & o.w.\end{cases}$$

求在 $y=\dfrac{1}{2}$ 的條件下，X 的條件變異數。

30. 已知隨機變數 X 與 Y 的聯合機率密度函數如下：

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2+\dfrac{xy}{3}, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 2 \\ 0, & o.w. \end{cases}$$

假設 $B=\{x+y\ge 1\}$，求 $P(B)$。

31. 設 X 與 Y 的聯合機率函數為

$f(x,y)=0.75(3x^2+y^2),\quad 0\le x,y\le 1$

求 $P(x>0.75 \mid y<0.1)$。

32. 假設台北車站春假台鐵火車列車預售票的購票者自進入等候區至買車票離開，需時 X 分鐘；而排隊等候至輪到他購買車票時，需時 Y 分鐘。現已知 X 和 Y 的聯合機率分函數配函數如下所示：

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-x}, & 0<y<x<\infty \\ 0, & o.w. \end{cases}$$

試求台北車站春價台鐵列車預售票的購票者的平均被服務時間。

33. 已知隨機變數 X、Y 的聯合機率密度函數為：

$$f(x,y)=\begin{cases} cx, & 0<x<1, x<y<x+1 \\ 0, & o.w. \end{cases}$$

(1)求 c。　(2)求機率 $P(x<0.5)$。　(3)求 $E(y\mid x)$。　(4)求 $V(y\mid x)$。

34. 從一含有編號 1,2,3 三球之袋中，以不放回方式抽取樣本數為 2 的樣本。令 X 表示第一次抽出的球號；Y 表示抽出兩球中較大的號碼，試求：

(1)求 X 與 Y 的聯合機率分配函數。

(2)求 $P(x=1 \mid y=3)$。

(3)求 $Cov(x,y)$。

35. 假設隨機變數 X、Y 的聯合機率密度函數為

$f(x,y)=1,\quad -x<y<x, 0<x<1$

求條件期望值 $E(y \mid x)$。

36. 假設隨機變數分別 X、Y 表示從某大學隨機選出一位學生統計學期末報告與期末考成績（1 分為滿分），以供下學年度教師教學之參考。其聯合機率密度函數為

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2}{5}(2x+3y), & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1 \\ 0, & o.w. \end{cases}$$

(1)求 X 的邊際機率。

(2)求 $E(x), E\left[(x-\mu)^2\right]$。

(3)請利用柴比雪夫不等式求至少涵蓋全體 $\dfrac{5}{9}$ 機率之 X 的區間範圍。

(4)求第(3)小題在此區間範圍內，實際的機率值。

37. 已知 X、Y 為兩隨機變數，平均數分別為 μ_x,μ_y；變異數分別為 σ_x,σ_y。假設

$z_x = \dfrac{x-\mu_x}{\sigma_x}, z_y = \dfrac{y-\mu_y}{\sigma_y}$。試證明：$Cov(z_x, z_y) = Corr(x, y)$。

38. 某班有 50 人，假設甲生期中考統計學成績 80 分；期末考成績 65 分。又統計學期中考全班平均 85 分標準差 4 分；期末考全班平均 70 分標準差 5 分。
(1)甲生在那一次考試成績表現較突出？
(2)請估計期末考全班至少有多少人成績介於 60 分到 80 分之間？
39. 已知剛畢業的大學生平均起薪 25000 元，標準差 2000 元。請用柴比雪夫不等式估計大約有多少比率的大學畢業生起薪在 21000 元到 29000 元之間？
40. 假設隨機變數 X 的平均數爲 μ，且 $E(x-\mu)^{2k}$ 存在，試證明
$P(|x-\mu| \ge d) \le E\left[(x-\mu)^{2k}\right]d^{-2k}$
41. 已知隨機變數 X，$E(x)=10, P(x \le 7)=0.2$ 且 $P(x \ge 13)=0.3$，試求 $V(x)$ 的最小值爲何？
42. 已知隨機變數 X、Y 的聯合機率質量函數爲：

y \ x	0	1	2
0	0	1/4	0
1	1/4	0	1/4
2	0	1/4	0

試求：(1)$Cov(x, y)$　(2)X、Y 是否獨立？
43. 假設 $X_1, X_2, \cdots, X_{10}$ 爲隨機變數，變異數皆爲 σ^2，且 $Cov(x_i, x_j) = \dfrac{1}{3}\sigma^2, i \ne j$。
求 $\dfrac{1}{10}(X_1 + X_2 + \cdots + X_{10})$ 的變異數。
44. 假設 X 爲一隨機變數，且 $E(x)=3, E(x^2)=18$。若另一隨機變數 Y 滿足 $y = 3x-1$，試求 $Corr(x, y)$。
45. 假設隨機變數 X、Y 之聯合機率密度函數爲：
$f(x, y) = x + ay + b, \quad 0 < x < 1, 0 < y < 1$
且 $E(y) = \dfrac{5}{12}$，試求　(1)a,b。　(2)$Cov(x, y)$。　(3)$Corr(x, y)$。
46. 已知隨機變數 X、Y 的機率密度函數爲：
$f(x, y) = x + y \quad ,0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$
若隨機變數 W 滿足 $w = 3x + 2y$，求 $E(w)$。
47. 已知有 $2n-1$ 個獨立常態隨機變數 $x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1}$，$E(x_i)=\mu, V(x_i)=\sigma^2$，令 $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n, W = X_n + X_{n+1} + \ldots + X_{2n-1}$，求共變異數 $Cov(y, w)$ 與相關係數 $Corr(y, w)$。
48. 已知 $E(x)=5, E(y)=10, V(x)=9, V(y)=16, Cov(x, y)=5$，試求
(1)$E(2x+4y)$　(2)$V(2x+4y)$　(3)$Corr(2x, 5y)$。
49. 假設 X 及 Y 的聯合機率密度函數表示如下：

x \ y	0	1	2	3
0	0.1	0.2	0	0
1	0.05	0.1	0.25	0.1
2	0	0.05	0.025	0.05
3	0.025	0	0.025	0.025

(1)求 X 的邊際密度函數。

(2)計算 $E(y)$ 。

(3)計算 $f(x|y=0)$ 。

(4)計算 $E(x|y)$ 。

(5)計算 $P(|y-x|=2)$ 。

50. 投擲兩個正四面體各面分別標示 1,2,3,4。X 表示兩個四面體向下的那一面中數字較小者，Y 表示兩個四面體向下的那一面的數字中為奇數者的個數，試求：

(1)X,Y 的聯合機率分配表。

(2) $E(x),V(x)$ 。

(3) $E(y),V(y)$ 。

(4) $Cov(x,y)$

51. 已知隨機變數 X、Y 的聯合機率密度函數為：

$f(x,y)=k(2x+y),\quad 0\le x\le 2, 2\le y\le 3$

求 k 之值。

52. 假設 X，Y 的聯合機率密度函數為：

$$f(x,y)=\begin{cases}3(1-y), & 0\le y\le x\le 1\\ 0, & o.w.\end{cases}$$

(1)求 $P(x\le \frac{3}{4}, y\ge \frac{1}{2})$ 。　(2)求 $f_X(x)$ 與 $f_Y(y)$ 。　(3)求 $E(x|y)$ 。