Mecânica TP1

exercício 1.1

a) $v(t) = 6{,}0 + 2{,}0t^4$

$t = 0s \rightarrow (0,0)$

$a(t) = \frac{dv}{dt} = (6{,}0 + 2{,}0t^4)' =$

$= 2{,}0 \times 4 \times t^3 = 8{,}0t^3$

b) $a(0) = 8 \times 0^3 = 0 \ m/s^2$

$a(1) = 8 \times 1^3 = 8 \ m/s^2$

c) $x(t) = \int v(t)\,dt \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(t) = \int (6{,}0 + 2{,}0t^4)\,dt \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(t) = 6{,}0t + \frac{2{,}0t^5}{5} + C$

Como $x(0) = 0$, cálculo de C:

$x(0) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(0) = 6 \times 0 + \frac{2}{5} \times 0 + C \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow C = 0$

$x(t) = 6{,}0t + \frac{2}{5}t^5 \ (m)$

d) deslocamento → Posição em $t=a$ − Posição em $t=b$, onde $a > b$

$t = 2s$ $\quad x(4) = 433{,}6 \ m$

$t = 4s$ $\quad x(2) = 24{,}8 \ m$

$\Delta x = x(4) - x(2) =$

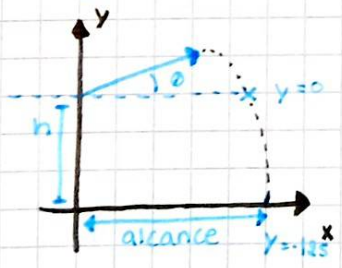
$= 4\cancel{0}33{,}6 - 24{,}8 \approx 409 \ (m)$

ou então, utilizar a fórmula

$\Delta s = \int_a^b v(t)\,dt$

exercício 1.2

a) Projétil



$\theta = 37°$

$V_0 = 125 \ (m/s)$

velocidade inicial ⇒ componentes segundo x e y

$\vec{v_0} = v_0 \cos\theta \hat{x} + v_0 \operatorname{sen}\theta \hat{y} =$

$= 125 \times 0{,}8 \hat{x} + 125 \times 0{,}6 \hat{y} =$

$= 84\hat{x} + 63\hat{y} \ (m/s)$

b) $t_{voo} = ?$

↳ equação $y(t)$ → $y(t) = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -125 = 0 + 63 t_{voo} - \frac{1}{2} g t_{voo}^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t_{voo} = \cancel{-1{,}75} \ \vee \ t_{voo} = 14{,}6 s$

c) alcance → distância medida na horizontal

$x = x_0 + v_{0x} t$

$x = 0 + 84\, t_{voo}$ (=)

(=) $x = 0 + 84 \times 14{,}6$ (=)

(=) $x = 1226{,}4$ m

Utilizámos:

em x:

→ $x = x_0 + v_{0x} t$

em y:

→ $v_y(t) = v_{0y} - gt$

→ $y(t) = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$

d) altura máxima → $V_y = 0$ m/s

$v_y(t) = v_{0y} - gt$ (=)

(=) $v_y = 0$ (=) $0 = 63 - gt$ (=)

(=) $gt = 63$ (=) $t = 6{,}4$ s → instante em que o projétil atinge a altura máxima

$y(6{,}4) = 0 + 63 \times 6{,}4 - \frac{1}{2} g (6{,}4)^2 = 202{,}5$ m //

exercício 1.3

a) $v(t) = (t^2 - 1)\hat{i} + (-t)\hat{j}$

$\vec{R}(t) = \int v(t)\, dt$ (=)

(=) $\vec{R}(t) = \hat{i}\left(\int t^2\, dt - \int dt\right) - \hat{j}\left(\int t\, dt\right)$ (=)

(=) $\vec{R}(t) = \left(\frac{t^3}{3} - t\right)\hat{i} - \frac{t^2}{2}\hat{j} + C$ (m)

Cálculo de C:

$R(0) = 0$ (=) $R(0) = (0 - 0)\hat{i} - 0\hat{j} + C$ (=) $C = 0$ //

$\vec{R}(t) = \left(\frac{t^3}{3} - t\right)\hat{i} - \frac{t^2}{2}\hat{j}$ //

$R(2) = \left(\frac{8}{3} - 2\right)\hat{i} - \frac{4}{2}\hat{j} =$

$= \frac{2}{3}\hat{i} - 2\hat{j}$ (m)

b) $a(t) = \frac{dv}{dt} =$

$= 2t\,\hat{i} - \hat{j}$ (m/s²)

c) aceleração tangencial → derivada do módulo da velocidade, ou seja, temos de fazer 1º módulo da $\vec{v}$

$a_t = \frac{d|v|}{dt}$

$|v| = \sqrt{(t^2-1)^2 + (-t)^2} = \sqrt{t^4 - 2t^2 + 1 + t^2} =$

$= \sqrt{t^4 - t^2 + 1}$ → módulo da velocidade

c) $((t^4 - 3t^2 + 1)^{1/2})' =$

$= \frac{1}{2}(4t^3 - 6t)(t^4 - 3t^2 + 1)^{-1/2} = a_t$

$a_t(2) = \frac{1}{2}(4\times 8 - 6\times 2)(2^4 - 3\times 4 + 1)^{-1/2} =$

$= \frac{1}{2}(32 - 12)(16 - 12 + 1)^{-1/2} =$

$= 10\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \simeq 4,47 \ m/s^2$

$a(1) = \frac{1}{2}(4 - 6)(1 - 3 + 1)^{-1/2} =$

$= 1 \ m/s^2$

d) aceleração normal $\rightarrow a_n = \frac{V^2}{R}$ $\rightarrow$ não sabemos o raio

sabemos que $a = a_n + a_t$, logo

$a_n = a - a_t \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_n = \sqrt{5} - a_t$

$\vec{a} = (2t)\hat{i} - \hat{j} \ (m/s^2)$

$|a| = \sqrt{2^2 t^2 + (-1)^2} =$

$= \sqrt{4t^2 + 1} = (t = 1s)$

$= \sqrt{5}$

exercício 1.4

a) velocidade angular $\rightarrow \omega = \frac{V}{R}$

$\omega(0) = \frac{v(0)}{R} = \frac{25}{4} = 6,25 \ rad/s$

b) Visto que se trata de um movimento uniformemente acelerado, então a aceleração angular $\vec{\alpha}$ é constante

componente escalar da aceleração $\rightarrow \alpha = \frac{d\omega}{dt} \Leftrightarrow \int_{t_0}^{t} \alpha \, dt = \int_{\omega_0}^{\omega(t)} d\omega \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha(t - t_0) = (\omega(t) - \omega_0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \omega(t) = \alpha(t - t_0) + \omega_0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \omega(t) = \alpha(t - t_0) + 6,25 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \omega(t) = \alpha t_0 + 6,25$

$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt} \Leftrightarrow \int_{t_0}^{t} \omega(t) \, dt = \int_{\theta_0}^{\theta(t)} d\theta \Leftrightarrow$

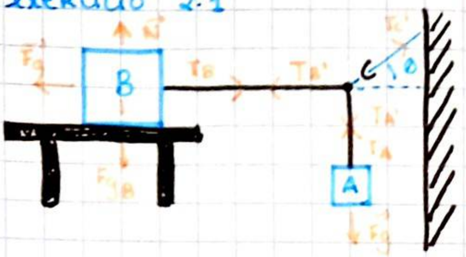
$\Leftrightarrow \int_{t_0}^{t} (6,25 + \alpha t) dt = \theta(t) - \theta_0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \theta(t) = \theta_0 + (6,25(t - t_0) + \frac{\alpha}{2}(t^2 - t_0^2)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \theta(t) \approx (6,25\, t + \frac{\alpha}{2} t^2) \ (rad)$

MECÂNICA TP2

exercício 2.1



$\theta = 30°$

$\mu_B = 0{,}25$

$\|\vec{Fa}\| = \mu \cdot \|\vec{N}\|$

Reação Normal

coeficiente de atrito
- → cinético → corpo em movimento
- → estático → corpo em repouso

"Fio inextensível e tem massa desprezável"

$\|\vec{T_A}\| = \|\vec{T_{A'}}\| = T_A$

$\|\vec{T_B}\| = \|\vec{T_{B'}}\| = T_B$

Se o corpo estiver
- em repouso $\boxed{\Sigma \vec{F} = 0}$
- em movimento $\boxed{\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}}$

b)

em A:

$$\begin{cases} xx: - \\ yy: \vec{Fg_A} + \vec{T_A} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} xx: - \\ yy: T_A - m_A g = \vec{0} \end{cases}$$

em B:

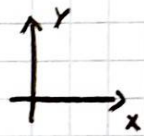
$$\begin{cases} xx: \vec{Fg_B} + \vec{T_B} = \vec{0} \\ yy: \vec{N} + \vec{Fg_B} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} xx: T_B + \mu N = 0 \\ yy: N - m_B g = 0 \end{cases}$$

em C:

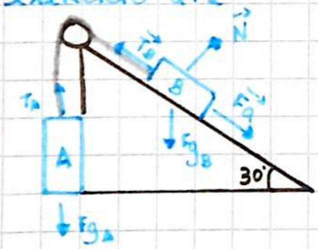
$$\begin{cases} xx: \vec{T_{B'}} + \vec{T_{C_x}} = \vec{0} \\ yy: \vec{T_{A'}} + \vec{T_{C_y}} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xx: T_C \cos\theta - T_B = 0 \\ yy: -T_A + T_C \operatorname{sen}\theta = 0 \end{cases}$$



$$\frac{m_A}{m_B} \simeq 0{,}14$$

exercício 2.2



$m_A = 2\,kg$

$m_B = 1\,kg$

"Fio inextensível e massa desprezável, bem como a massa da Roldana", logo:

$$\|\vec{T_A}\| = \|\vec{T_B}\| = T$$

2ª LEI DE NEWTON

$\vec{F_R} = m \cdot \vec{a}$

b) em A:

$$\begin{cases} xx: - \\ yy: m_A g - T_A = m_A \cdot \vec{a} \quad (1) \end{cases}$$

corpo em movimento

em B:

$$\begin{cases} xx: T_B - \mu N - Fg_B \hat{x} = m_B \cdot \vec{a} \quad (\Leftrightarrow) \\ yy: Fg_B \hat{y} - N = 0 \end{cases}$$

$$(\Leftrightarrow) \begin{cases} xx: T_B - \mu N - m_B g \operatorname{sen}\theta = m_B \vec{a} \quad (2) \\ yy: m_B g \cos\theta - N = 0 \quad (3) \end{cases}$$

b) Queremos saber μ_A para que $a = 3 m/s^2$

$$\begin{cases} (1) \\ (2) \\ (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\times 9{,}8 - T = 2\times 3 \\ T - \mu N - 1\times 9{,}8\times 0{,}5 = 1\times 3 \\ 1\times 9{,}8 \times 0{,}87 - N = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -T = -19{,}6 + 6 \\ T - \mu N = 4{,}9 + 3 \\ 8{,}53 = N \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} T = 13{,}6 \\ -8{,}53\mu = -13{,}6 + 3 + 4{,}9 \\ N = 8{,}53 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ \mu = 0{,}67 \right.$$

MECÂNICA TP3

exercício 3.1

$m = 5{,}0 kg$

$\vec{F} = (-2y + 4)\,\hat{e}_x + (-2x - 2)\,\hat{e}_y$

$W_F = -\Delta E_p$ (conservativa)

"única força" $\rightarrow \vec{F_{res}} = \vec{F}$

$W_F = \Delta E_c = W_{Fres}$

Força Conservativa

$\downarrow$

$W_F = -\Delta E_p$

Força não Conservativa

$\downarrow$

$W_F = \Delta E_m$

a) Expressão Geral do trabalho $\rightarrow W = \int \vec{F} d\vec{r} = \int F_x dx + \int F_y dy + \int F_z dz$

$x = 1 m \rightarrow y = \frac{1}{2}$ $\qquad y = \frac{x}{2} \Leftrightarrow x = 2y$

$x = 5 m \rightarrow y = \frac{5}{2}$

$$W = \int_2^5 (-2y + 4)\,dx + \int_{1/2}^{5/2} (-2x - 2)\,dy =$$

$$= \int_2^5 \left(-\cancel{2}\frac{x}{\cancel{2}} + 4\right) dx + \int_{1/2}^{5/2} (-4y - 2)\,dy =$$

$$= \int_2^5 (-x + 4)\,dx + \int_{1/2}^{5/2} (-4y - 2)\,dy =$$

$$= \left[-\frac{x^2}{2} + 4x\right]_2^5 + \left[-4\frac{y^2}{2} - 2y\right]_{1/2}^{5/2} =$$

$$= -\frac{25}{2} + 20 - \left(\frac{1}{2} + 4\right) + \left(-2\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5\right) - \left(-2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1\right) =$$

$$= -12 J$$

b) $W_F = -\Delta E_p \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -12 = -\Delta E_p \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Delta E_p = 12\,J$ //

c) $W_F = \Delta E_c$

velocidade de

$x = 1m$	$x = 5m$
$4m/s$	?
(v_i)	(v_f)

$$W_F = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -12 = \frac{1}{2} \times 5 \times v_f^2 - \frac{1}{2} \times 5 \times 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -12 + 40 = \frac{5}{2} v_f^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{28 \times 2}{5} = v_f^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{56}{5} = v_f^2 \Leftrightarrow v_f \approx \sqrt{\frac{56}{5}} \approx 3{,}34\ m/s$$

$$E_{c_f} = \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{56}{5} = 28\,J \text{ //}$$

exercício 3.2

~~m = 3kg~~ $m = 3kg$

$v_i = 5\ m/s \rightarrow x = 0m$

$\mu = 0{,}6\, e^x$

"Pista Retilínea, plano horizontal"

↓

movimento apenas segundo x (1D)

a) $\vec{F_a} = \mu N \hat{x} =$

$= -0{,}6\, e^x N \hat{x} =$

$= -0{,}6\, e^x (3 \times 9{,}8)\, \hat{x} =$

$= -18\, e^x\, \hat{x}$ (N) //

"sofre ação da força de atrito"

↓

$\vec{F_a} = \vec{F_{Res}}$

$W_{Fa} = \Delta E_c$

b) $W = \int \vec{F} d\vec{r} = \int_0^1 -18\, e^x dx = -18 \int_0^1 e^x dx = -18\,[e - 1] = -18e + 18 =$

$= -30{,}9\,J$

$W_{\vec{Fa}} = 30{,}9\,J$

c) $W_{FR} = \Delta E_c$

$$-30,9 = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -30,9 = \frac{1}{2} 3 v_f^2 - \frac{1}{2} \times 3 \times 5^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -30,9 + \frac{75}{2} = \frac{3}{2} v_f^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (6,6) \times \frac{2}{3} = v_f^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2,2) \times 2 = v_f^2 \Leftrightarrow$$

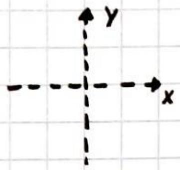
$$\Leftrightarrow 4,4 = v_f^2 \Leftrightarrow v_f = 2,1 \text{ m/s}$$

exercício 3.3

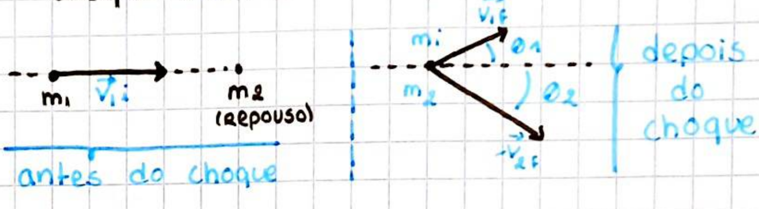
$\Delta \vec{p} = \vec{0}$

$\vec{p_i} = \vec{p_f}$

$\vec{p} = m\vec{v}$



choque elástico => $E_{cf} = E_{ci}$



a) $\vec{p_i} = \vec{p_{i1}} + \vec{p_{i2}}$

$p_i = m_1 \cdot \vec{v_1}i + m_2 \cancel{\vec{v_{2i}}}$ → 0, corpo em Repouso $t=i$

$= m_1 \vec{v_1} i$

$\vec{p_f} = \vec{p_{f1}} + \vec{p_{f2}} =$

$= m_1 (v_{1f} \cos\theta_1 \hat{x} + v_{1f} \sin\theta_1 \hat{y})$

$+$

$m_2 (v_{2f} \cos\theta_2 \hat{x} + v_{2f} \sin\theta_2 y)$

$$\begin{cases} xx \Rightarrow \vec{P_{ix}} = \vec{P_f}x \\ yy \Rightarrow \vec{P_{iy}} = \vec{P_f}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xx \Rightarrow m_1 v_1 i = m_1 v_{1f} \cos\theta_1 + m_2 v_{2f} \cos\theta_2 \\ yy \Rightarrow 0 = m_1 v_{1f} \operatorname{sen}\theta_1 y + m_2 v_2 \operatorname{sen}\theta_2 \end{cases}$$

b) $m_1 = m_2$
$\theta_1 = 45°$
$\theta_2 = 30°$

Se $\Delta E_c = 0 \Leftrightarrow E_{ci} = E_{cf}$ → Choque é elástico

Se $\Delta E_c \neq 0$ → Choque é inelástico