# Aula 10

# Vetor Auto-regressivo para Dados em Painel (PVAR)

Bibliografia:
Binder M., Hsiao C., Pesaran M.H. (2005) Estimation and Inference in Short Panel Vector Autoregressions with Unit Roots and Cointegration Econometric Theory, 21(4), 795–837
Sigmund, M., Ferstl, R. (2017) Panel Vector Autoregression in R with the Package panelvar Available at SSRN: https://ssrn.com/abstract=2896087

Rafael S. M. Ribeiro

Centro de Desenvolvimento e Planejamento Regional (CEDEPLAR)

Faculdade de Ciências Econômicas (FACE)

Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)

# Introdução

- Recentemente, importantes avanços foram feitos no estudo de modelos de dados de painéis dinâmicos, em que tanto a dimensão de tempo (T) quanto a dimensão de corte transversal (N) são grandes.
- Contudo, os modelos de *Panel Vector Auto-regressive* (PVAR) estão mais alinhados com a literatura de painel mais tradicional, onde N é grande e T é curto (normalmente 10 ou menos).
- Entretanto, como veremos mais adiante, o modelo PVAR não é incompatível com painéis grandes, onde $N \rightarrow \infty$ e $T \rightarrow \infty$, desde que algumas restrições sejam satisfeitas.

# Introdução

- Entretanto, esta literatura de dados em painel mais tradicional tem se concentrado principalmente em modelos dinâmico de equação única, ao passo que há muitas aplicações que idealmente requerem um tratamento para sistemas de equações onde um conjunto de variáveis endógenas são determinadas simultaneamente.
- Um ponto de partida natural são os modelos VAR, que têm sido extensivamente estudados na literatura de séries temporais. Uma análise preliminar dos VARs em painel (PVARs) com um T curto foi desenvolvida por Holtz-Eakin, Newey e Rosen (1988). Vale ressaltar que o fato de T ser curto não significa que os dados subjacentes não possam ter surgido de processos não estacionários.

# Introdução

- Assim como nos modelos de dados em painel dinâmico de equação única, há duas questões principais que precisam ser abordadas no estudo de PVARs.
  i. O fato de T ser fixo requer a modelagem das observações iniciais.
  ii. Presença de heterogeneidade entre as unidades de corte transversal coloca a importante questão de como melhor modelar os efeitos específicos de cada indivíduo não observados.

- Uma forma de contornar estes problemas é a partir da utilização do estimador do Método de Momentos Generalizado (GMM).

# Introdução

- Dentro dos estimadores GMM, é importante distinguir entre o estimador GMM-*Diff* (Holtz-Eakin et al., 1988; Arellano e Bond, 1991) que utiliza defasagens da(s) variável(is) endógena(s) como instrumentos e o GMM-*System* (Blundell e Bond, 1998) que utiliza condições de momento adicionais baseadas na informação contida nos “níveis”.

# Um modelo PVAR

Seja $\boldsymbol{w}_{it}$ o vetor $m \times 1$ formado por $m$ variáveis aleatórias endógenas com $i$ unidades de corte transversal e $t$ unidades de tempo cada. Assumindo, sem perda de generalidade, que $\boldsymbol{w}_{it}$ pode ser representado por um processo auto-regressivo de ordem 1 e sem a presença de variáveis exógenas, temos o seguinte modelo PVAR(1):

$$\boldsymbol{w}_{it} = \boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{w}_{i,t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{it} \qquad (1)$$

onde $\boldsymbol{a}_i$ é o vetor $m \times 1$ de efeitos unidade-específicos, $\boldsymbol{\Phi}$ é a matriz $m \times m$ de coeficientes de inclinação e $\boldsymbol{\varepsilon}_{it}$ é o termo de erros de ordem $m \times 1$.

# Um modelo PVAR

Algumas observações sobre a equação (1):

- Assumimos que os autovalores de $\mathbf{\Phi}$ se encontram fora do círculo unitário, i.e. as $m$ variáveis endógenas que constituem o vetor $\boldsymbol{w}_{it}$ são estacionárias.
- O modelo PVAR é a generalização do modelo GMM de painel dinâmico com uma equação ($m = 1$) para um modelo GMM com múltiplas equações ($m > 1$).
- Para um tratamento mais geral da equação (1) que representa $\mathbf{w}_{\mathrm{it}}$ como um processo auto-regressivo de ordem $p$ e inclui regressores estritamente exógenos, ver Sigmund and Ferstl (2017).

# Raiz unitária em modelos PVAR

- O fato de T ser curto não significa necessariamente que os dados subjacentes sejam estacionários ou não. Uma das vantagens do uso de dados em painel é que, sob a suposição de homogeneidade entre as unidades do painel, pode-se testar a não-estacionariedade ou a presença de "equilíbrio de longo prazo" com T curto.

- Em outras palavras, precisamos testar se as raízes de $\mathbf{\Phi}$ se encontram fora do círculo unitário, ou seja, se as $m$ variáveis endógenas que constituem o vetor $\mathbf{w}_{\mathrm{it}}$ são estacionárias.

# Raiz unitária em modelos PVAR

- Testes de raiz unitária para painéis com heterogeneidade nos coeficientes de inclinação têm sido propostos na literatura, mas requerem N e T grandes, ou seja, não são válidos quando a dimensão de tempo é curta.

- Um teste de raiz unitária de painel para N grande e T curto foi proposto por Harris e Tzavalis (1999), mas este teste pode ser difícil de ser aplicado a modelos com erros serialmente correlacionados.

# A estimação do PVAR por GMM

- Existe uma extensa literatura sobre modelos GMM em painéis dinâmicos para uma equação, ou seja $m = 1$ (eg, Arellano e Bond, 1991; Ahn e Schmidt, 1995, 1997; Arellano e Bover, 1995; Blundell e Bond, 1998).

- Contudo, se pelo menos uma das variáveis endógenas do modelo PVAR na equação (1) possue raíz unitária, o estimador GMM-*Diff* proposto por Arellano e Bond (1991) se torna inconsistente. Vale notar que o estimador GMM-*System* proposto por Blundell e Bond (1998) pode contornar este problema.

# A estimação do PVAR por GMM

- Entretanto, Binder, Hsiao e Pesaran (2005) argumentam que quando o problema requer a estimação de um sistema de equações, a estimação das mesmas através do modelo PVAR (por GMM) é mais eficiente do que a estimação de cada equação separadamente por GMM.

# A estimação do PVAR por GMM

GMM *Difference*

Seja o modelo:

$$\mathbf{w}_{\mathrm{it}} = \mathbf{a}_{\mathrm{i}} + \mathbf{\Phi}\mathbf{w}_{\mathrm{i,t-1}} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{it}} \tag{1}$$

Podemos eliminar o efeito correspondente às unidades $\boldsymbol{a}_i$ tirando a primeira diferença:

$$\Delta\mathbf{w}_{\mathrm{it}} = \mathbf{\Phi}\Delta\mathbf{w}_{\mathrm{i,t-1}} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{it}} \tag{2}$$

# A estimação do PVAR por GMM

GMM *Difference*

Contudo, note que

$$\mathrm{E}\left[\Delta\mathbf{w}_{\mathrm{i,t-1}}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{it}}\right] = \mathrm{E}\left[\boldsymbol{\Phi}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{i,t-1}}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{it}}\right] \neq 0 \tag{3}$$

Logo, o estimador de efeitos fixos é inconsistente. O estimador GMM de Arellano e Bond (1991) contorna esse problema usando variáveis em nível defasadas como instrumentos para as variáveis endógenas.

# A estimação do PVAR por GMM

GMM *Difference*

A condição de ortogonalidade é dada por:

$$\mathrm{E}\left[\left(\Delta \mathbf{w}_{\mathrm{it}} - \boldsymbol{\Phi}\Delta \mathbf{w}_{\mathrm{i,t-1}}\right)\mathbf{q}'_{\mathrm{it}}\right] = \mathbf{0} \qquad \mathrm{t} = 2, \dots, \mathrm{T} \qquad (4)$$

onde $\mathbf{q}_{\mathrm{it}} = \left(\mathbf{w}'_{\mathrm{i0}}, \mathbf{w}'_{\mathrm{i1}}, \dots, \mathbf{w}'_{\mathrm{i,t-2}}\right)'$ é o vetor de variáveis instrumentais de ordem $m(t-1) \times 1$.

# A estimação do PVAR por GMM

GMM *Difference*

Reescrevendo a condição de momentos para os dados no formato empilhado, temos:

$$\mathrm{E}\left[\mathbf{Q}_{\mathrm{i}}'\left(\Delta\mathbf{W}_{\mathrm{i}} - \Delta\mathbf{W}_{\mathrm{i},-1}\boldsymbol{\Phi}'\right)\right] = \mathbf{0} \qquad (5)$$

Obs: se incluirmos em (1) regressores estritamente exógenos, digamos $\boldsymbol{s}_{it}$ de ordem $k \times 1$ onde $k$ é o número de variáveis exógenas, então $\Delta\mathbf{W}_{\mathrm{i},-1} = \left(\Delta\mathbf{Y}_{\mathrm{i},-1}, \Delta\mathbf{S}_{\mathrm{i}}\right)$.

# A estimação do PVAR por GMM

GMM *Difference*

onde $\mathbf{Q}_{\mathrm{i}}'$ é uma matriz de dimensão $mT(T-1)/2 \times (T-1)$

$$\mathbf{Q}_{\mathrm{i}}' = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_{\mathrm{i}2} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{q}_{\mathrm{i}3} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{q}_{\mathrm{iT}} \end{pmatrix}$$

e $\Delta\mathbf{W}_{\mathrm{i}}$ e $\Delta\mathbf{W}_{\mathrm{i},-1}$ são matrizes de dimensão $(T-1) \times m$

$$\Delta\mathbf{W}_{\mathrm{i}} = (\Delta\mathbf{w}_{\mathrm{i}2}, \Delta\mathbf{w}_{\mathrm{i}3}, \dots, \Delta\mathbf{w}_{\mathrm{iT}})'$$

$$\Delta\mathbf{W}_{\mathrm{i},-1} = \left(\Delta\mathbf{w}_{\mathrm{i}1}, \Delta\mathbf{w}_{\mathrm{i}2}, \dots, \Delta\mathbf{w}_{\mathrm{i,T-1}}\right)'$$

# A estimação do PVAR por GMM

GMM *Difference*

Seguiremos a literatura padrão de GMM que propõe um procedimento de estimação em uma etapa (*one-step*) e em duas etapas (*two-step*) que diferem em como a matriz de ponderações $\boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{Z}}$ é definida. Como a estimativa *two-step* se baseia nos resíduos da estimativa *one-step*, começamos com a estimativa *one-step* (ou inicial).

# A estimação do PVAR por GMM

GMM *Difference*

A matriz de ponderações para o procedimento one-step (ou inicial) é dada por:

$$\boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{Z}} = \left( \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} \mathbf{Q}_{\mathrm{i}}' \mathbf{D} \mathbf{D}' \mathbf{Q}_{\mathrm{i}} \right) \otimes \mathbf{I}_{\mathrm{m} \times \mathrm{m}}$$

# A estimação do PVAR por GMM

## GMM *Difference*

A matriz $\mathbf{D}$ é uma transformação usada para remover o efeito-fixo unidade-específico. A matriz $\mathbf{D}$ pode ser de dois tipos:

Transformação em primeira diferença (first difference transformation)

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Transformação diagonal para a frente (forward orthogonal transformation)

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{T-1}{T}} & -\sqrt{\frac{1}{T(T-1)}} & -\sqrt{\frac{1}{T(T-1)}} & \cdots & -\sqrt{\frac{1}{T(T-1)}} \\ 0 & \sqrt{\frac{T-2}{T-1}} & -\sqrt{\frac{1}{(T-1)(T-2)}} & \cdots & -\sqrt{\frac{1}{(T-1)(T-2)}} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\frac{1}{2}} & -\sqrt{\frac{T-1}{T}\frac{1}{T-(T-1)}} \end{pmatrix}$$

# A estimação do PVAR por GMM

GMM *Difference*

Usando $\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{Z}}$ como a matriz de ponderações inicial, obtemos o estimador GMM *one-step*:

$$\widehat{\mathbf{\Phi}}_{1s} = \left(\mathbf{S}'_{\mathrm{ZX}}\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{Z}}^{-1}\mathbf{S}_{\mathrm{ZX}}\right)^{-1}\mathbf{S}'_{\mathrm{ZX}}\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{Z}}^{-1}\mathbf{S}_{\mathrm{Zy}} \tag{6}$$

onde

$$\mathbf{S}_{\mathrm{ZX}} = \frac{1}{N}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}}(\mathbf{Q}_{\mathrm{i}}'\otimes\mathbf{I}_{\mathrm{m}\times\mathrm{m}})\Delta\mathbf{W}_{\mathrm{i},-1} \qquad \mathbf{S}_{\mathrm{Z}y} = \frac{1}{N}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}}(\mathbf{Q}_{\mathrm{i}}'\otimes\mathbf{I}_{\mathrm{m}\times\mathrm{m}})\mathrm{vec}(\Delta\mathbf{W}_{\mathrm{i}}')$$

# A estimação do PVAR por GMM

GMM *Difference*

A matriz de ponderações ótima do estimador GMM *two-step* depende da estimativa do resíduo $\Delta\widehat{\mathbf{E}}_{\mathrm{i}} = \Delta\mathbf{W}_{\mathrm{i}} - \Delta\mathbf{W}_{\mathrm{i},-1}\widehat{\mathbf{\Phi}}'_{1s}$ obtido a partir do estimador GMM *one-step*. Assim, o estimador de GMM *two-step* é dado por:

$$\widehat{\mathbf{\Phi}}_{2s} = \left(\mathbf{S}'_{\mathrm{ZX}}\mathbf{\Lambda}^{-1}_{\mathrm{Z}_{\hat{e}}}\mathbf{S}_{\mathrm{ZX}}\right)^{-1}\mathbf{S}'_{\mathrm{ZX}}\mathbf{\Lambda}^{-1}_{\mathrm{Z}_{\hat{e}}}\mathbf{S}_{\mathrm{Zy}} \qquad (7)$$

onde

$$\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{Z}_{\hat{e}}} = \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}}(\mathbf{Q}'_{\mathrm{i}}\otimes\mathbf{I}_{\mathrm{m}\times\mathrm{m}})\mathbf{\Upsilon}_{\hat{\mathbf{e}}}(\mathbf{Q}_{\mathrm{i}}\otimes\mathbf{I}_{\mathrm{m}\times\mathrm{m}}) \qquad \mathbf{\Upsilon}_{\hat{\mathbf{e}}} = \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}}\hat{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}}\hat{\mathbf{e}}'_{\mathrm{i}} \qquad \mathbf{e}_{\mathrm{i}} = \mathrm{vec}(\Delta\mathbf{E}'_{\mathrm{i}})$$

# A estimação do PVAR por GMM

## GMM *Difference*

- O estimador GMM-*Diff* é consistente se todos os autovalores de $\mathbf{\Phi}$ caírem dentro do círculo unitário, ou seja, se as variáveis do modelo são estacionárias. Quando $\mathbf{\Phi} = \mathbf{I}_{\mathrm{m}}$, os instrumentos contidos em $\mathbf{q}_{\mathrm{it}}$, apesar de não correlacionados com o termo de erro, se tornam também não correlacionados com os regressores.

# A estimação do PVAR por GMM

GMM *Difference*

- Alvarez e Arellano (2003) e Koenker e Machado (1999) mostram que é possível obter estimadores de GMM consistentes para painéis grandes ($N \rightarrow \infty$ e $T \rightarrow \infty$). Porém, o número de defasagens para os instrumentos deve ser pequeno. Para isso, duas alternativas podem ser usadas: i) podemos fixar o número máximo de defasagens para os instrumentos de modo a reduzir o número de condições de momentos; ii) usar a matriz de instrumentos em sua versão colapsada.

# A estimação do PVAR por GMM

## GMM *System*

- Blundell e Bond (1998) mostram para $m = 1$ que o desempenho do estimador GMM-*Diff* deteriora à medida que a variável endógena se aproxima de um passeio aleatório, ou seja, exibe um padrão não-estacionário.
- Para os casos em que a variável endógena demonstra alto grau de persistência, suas observações defasadas em nível se tornam um instrumento fraco para as variações futuras da mesma variável.

# A estimação do PVAR por GMM

GMM *System*

- Blundell e Bond (1998) desenvolvem um método mais eficiente para tratar desses casos. Em vez de transformar (tirar a primeira diferença) os regressores para eliminar o viés causado pelos efeitos fixos em painéis dinâmicos, os autores propõem transformar (tirar a primeira diferença) os instrumentos para torná-los exógenos aos efeitos fixos.
- É válido assumir que variações na variável instrumental não são correlacionadas nem com os efeitos fixos unidade-específicos nem com o termo de erro.

# A estimação do PVAR por GMM

GMM *System*

Blundell e Bond (1998) propõem um conjunto adicional de condições de momento que, para o caso da equação (1), $\mathbf{w}_{\mathrm{it}} - \boldsymbol{\Phi}\mathbf{w}_{\mathrm{i,t-1}} = \mathbf{a}_{\mathrm{i}} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{it}}$, é dado por:

$$\mathrm{E}\left[(\mathbf{a}_{\mathrm{i}} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{it}})\Delta\mathbf{w}_{\mathrm{i,t-1}}\right] = 0, \qquad \mathrm{t} = 2,3,\ldots,\mathrm{T} \quad (8)$$

onde $\mathrm{E}\left[\mathbf{a}_{\mathrm{i}}\Delta\mathbf{w}_{\mathrm{i,t-1}}\right] + \mathrm{E}\left[\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{it}}\Delta\mathbf{w}_{\mathrm{i,t-1}}\right] = 0 + 0.$

# A estimação do PVAR por GMM

## GMM *System*

- Para explorar as novas condições de momento para os dados em nível, mantendo as condições originais de Arellano-Bond para a equação transformada, Blundell e Bond desenvolveram um “estimador de sistema”.
- Isso envolveu a construção de um conjunto de dados empilhados com o dobro das observações da matriz original; nos dados de cada indivíduo, agora empilhamos as observações não-transformadas e as transformadas.

# A estimação do PVAR por GMM

GMM *System*

Em notação matricial, o novo conjunto de condições de momento para um PVAR(1) é dado por:

$$\mathbf{P}_{\mathrm{i}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \Delta\boldsymbol{w}_{\mathrm{i}2} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Delta\boldsymbol{w}_{\mathrm{i}3} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \Delta\boldsymbol{w}_{\mathrm{i},T-1} \end{pmatrix}$$

De modo que a nova matriz de instrumentos empilhados é:

$$\mathbf{Q}_{\mathrm{i}}^{+} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{\mathrm{i}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_{\mathrm{i}} \end{pmatrix} \tag{10}$$

# A estimação do PVAR por GMM

GMM *System*

A partir daí, a base de dados aumentada com os dados empilhados para cada indivíduo $i$ é dada por:

$$\mathbf{W}_{\mathrm{i}}^{+} = \begin{pmatrix} \Delta\mathbf{W}_{\mathrm{i}} \\ \mathbf{W}_{\mathrm{i}} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{W}_{\mathrm{i},-1}^{+} = \begin{pmatrix} \Delta\mathbf{W}_{\mathrm{i},-1} \\ \mathbf{W}_{\mathrm{i},-1} \end{pmatrix} \qquad (11)$$

onde pode ser uma transformação ou em *first difference* ou *forward orthogonal*.

# A estimação do PVAR por GMM

GMM *System*

Analogamente, obtemos o estimador sistema GMM *one-step,* usando $\boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{Z}^+}$ como a matriz de ponderações inicial

$$\widehat{\boldsymbol{\Phi}}_{1s} = \left(\mathbf{S}'_{\mathrm{Z}^+\mathrm{X}}\boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{Z}^+}^{-1}\mathbf{S}_{\mathrm{Z}^+\mathrm{X}}\right)^{-1}\mathbf{S}'_{\mathrm{Z}^+\mathrm{X}}\boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{Z}^+}^{-1}\mathbf{S}_{\mathrm{Z}^+\mathrm{y}} \qquad (12)$$

onde

$$\mathbf{S}_{\mathrm{Z}^+\mathrm{X}} = \frac{1}{N}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}}(\mathbf{Q}_{\mathrm{i}}^{+\prime}\otimes\mathbf{I}_{\mathrm{m}\times\mathrm{m}})\mathbf{W}_{\mathrm{i},-1}^{+} \qquad \mathbf{S}_{\mathrm{Z}^+y} = \frac{1}{N}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}}(\mathbf{Q}_{\mathrm{i}}^{+\prime}\otimes\mathbf{I}_{\mathrm{m}\times\mathrm{m}})\mathrm{vec}(\mathbf{W}_{\mathrm{i}}^{+\prime})$$

# A estimação do PVAR por GMM

GMM *System*

A matriz de ponderações ótima do estimador sistema GMM *two-step* depende da estimativa do resíduo $\widehat{\mathbf{E}}_{\mathrm{i}}^{+} = \mathbf{W}_{\mathrm{i}}^{+} - \mathbf{W}_{\mathrm{i},-1}^{+}\widehat{\boldsymbol{\Phi}}_{1s}'$ obtido a partir do estimador sistema GMM *one-step*. Assim, o estimador de sistema GMM *two-step* é dado por:

$$\widehat{\boldsymbol{\Phi}}_{2\mathrm{s}} = \left(\mathbf{S}_{\mathrm{Z^+X}}'\boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{Z}_{\hat{e}}^{+}}^{-1}\mathbf{S}_{\mathrm{Z^+X}}\right)^{-1}\mathbf{S}_{\mathrm{Z^+X}}'\boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{Z}_{\hat{e}}^{+}}^{-1}\mathbf{S}_{\mathrm{Z^+y}} \qquad (13)$$

onde

$$\boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{Z}_{\hat{\mathbf{e}}}^{+}} = \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}}(\mathbf{Q}_{\mathrm{i}}^{+\prime}\otimes\mathbf{I}_{\mathrm{m}\times\mathrm{m}})\boldsymbol{\Upsilon}_{\hat{\mathbf{e}}^{+}}(\mathbf{Q}_{\mathrm{i}}^{+}\otimes\mathbf{I}_{\mathrm{m}\times\mathrm{m}}) \qquad \boldsymbol{\Upsilon}_{\hat{\mathbf{e}}^{+}} = \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}}\hat{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}}^{+}\hat{\mathbf{e}}_{\mathrm{i}}^{+\prime} \qquad \mathbf{e}_{\mathrm{i}}^{+} = \mathrm{vec}(\Delta\mathbf{E}_{\mathrm{i}}^{+\prime})$$

# A estimação do PVAR por GMM

## GMM *System*

- Em suma, enquanto o GMM-*Diff* de Arellano e Bond instrumentaliza as diferenças com as defasagens dos níveis, Blundell e Bond instrumentaliza os níveis com as defasagens das diferenças.
- Binder, Hsiao e Pesaran (2005) mostram por meio de simulações de Monte Carlo que o estimador GMM-*Diff* se deteriora quando pelo menos uma das variáveis do modelo PVAR possue raiz unitária mesmo em painéis grandes. Nesses casos, o estimador GMM-System é mais eficiente.

# A função de resposta ao impulso ortogonal

- A análise da função de resposta ao impulso em um contexto de vetores auto-regressivos está preocupada com a resposta de uma variável (endógena) a um impulso em outra variável (endógena).

- Analogamente, para o caso das análises de dados em painel, o primeiro passo é reescrever o PVAR em termos da sua representação PVMA (representação de média móvel do vetor de painel com variáveis exógenas).

# A função de resposta ao impulso ortogonal

Para um processo PVAR(1) sem regressores estritamente exógenos, temos a seguinte representação PVMA(∞):

$$\mathbf{w}_{\mathrm{it}} = (\mathbf{I}_{\mathrm{m}} - \mathbf{\Phi})^{-1}\overline{\mathbf{w}}_{\mathrm{i}} + \sum_{\mathrm{j}=0}^{\infty} \mathbf{\Phi}^{\mathrm{j}}\, \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{i,t-j}} \tag{14}$$

onde $(\mathbf{I}_{\mathrm{m}} - \mathbf{\Phi})^{-1}\overline{\mathbf{w}}_{\mathrm{i}}$ é uma constante e $\overline{\mathbf{w}}_{\mathrm{i}}$ é o valor médio de $\mathbf{w}_{\mathrm{it}}$.

# A função de resposta ao impulso ortogonal

De (14), obtemos a função de resposta ao impulso (IRF) abaixo:

$$\mathrm{IRF}(\mathrm{k},\mathrm{r}) = \frac{\partial \mathbf{w}_{\mathrm{i,t+k}}}{\partial (\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{it}})_{\mathrm{r}}} = \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{k}} \mathbf{e}_{\mathrm{r}} \tag{15}$$

onde $k$ é o número de períodos após o choque para o $r$-ésimo componente de $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{it}}$ com $\mathbf{e}_{\mathrm{r}}$ sendo um vector $m \times 1$ com o valor 1 na $r$-ésima coluna e 0 caso contrário.

# A função de resposta ao impulso ortogonal

- Entretanto, a IRF convencional apresenta um problema. Como, em geral, a correlação entre as variáveis endógenas do sistema são não-nulas, os choques através das $m$ equações do sistema não são independentes entre si.

- Para contornar este problema, assuma que a matriz de variância-covariância das variáveis do sistema, $\boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon}$, é simétrica positiva definida. Assim, existe uma única decomposição de Cholesky tal que $\boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon} = \mathbf{PP}'$, onde $\mathbf{P}$ é uma matriz simétrica triangular inferior.

# A função de resposta ao impulso ortogonal

Definindo $\boldsymbol{\Theta}_{\mathrm{k}} = \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{k}}\mathbf{P}$ e $\mathbf{u}_{\mathrm{it}} = \mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{it}}$, obtemos a função de resposta ao impulso ortogonal (OIRF):

$$\mathrm{OIRF(k, r)} = \frac{\partial \mathbf{w}_{\mathrm{i,t+k}}}{\partial (\mathbf{u}_{\mathrm{it}})_{\mathrm{r}}} = \boldsymbol{\Theta}_{\mathrm{k}}\mathbf{e}_{\mathrm{r}} \tag{16}$$

A OIRF isola a resposta de uma variável a impulsos das demais variáveis dentro da mesma equação. Entretanto, a OIRF é criticada pelo fato de que os resultados do modelo dependem da ordenação das variáveis (mais exógena $\rightarrow$ mais endógena).