# Aula 11

# O logaritmo natural

### Objetivos

- Estudar o logaritmo natural.
- Fazer aplicações da derivada da função logarítmica.
- Fazer aplicações da primitiva da função logarítmica.

Na aula passada vimos a conhecida fórmula para o cálculo da primitiva da função $y = x^r$, que é dada por

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, \quad r \neq -1.$$

Resta-nos saber o que acontece quando $r = -1$, ou seja, o que devemos fazer para encontrar a primitiva ou antiderivada de $y = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$. Esta aula é dedicada a definir e a estudar as propriedades dessa importante função chamada logaritmo natural (ou neperiano) e indicada por $y = \ln x$.

## 1 O logaritmo natural

O gráfico de $y = \frac{1}{t}$, para $t > 0$, é conhecido do leitor

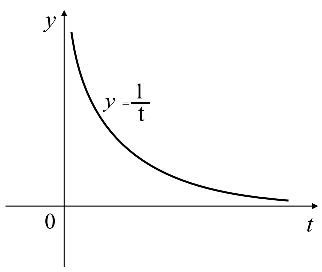


Fig. 11.1

e está esboçado na figura 11.1, sendo um ramo de uma hipérbole equilátera.

Para $x > 1$ a integral

$$\int_1^x \frac{1}{t} dt$$

representa a área sob a curva $y = \frac{1}{t}$ e acima do eixo $ot$, entre os valores $t = 1$ e $t = x$. Veja figura 11.2.

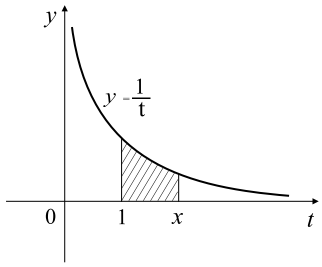


Fig. 11.2

Para $0 < x < 1$ a integral acima pode ser escrita como

$$\int_1^x \frac{1}{t} dt = -\int_x^1 \frac{1}{t} dt,$$

e assim, neste caso, esta última integral representa a área sob a curva, limitada inferiormente pelo eixo $ot$, entre $t = 1$ e $t = x$, precedida do sinal negativo. Veja a figura 11.3. Se $x = 1$, a integral dá zero.

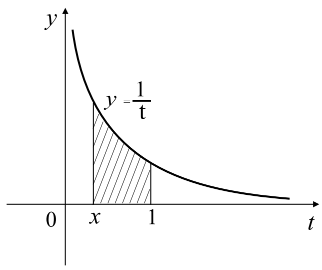


Fig. 11.3

Podemos, então, definir a função logaritmo natural da seguinte maneira.

**Definição 2.** Definimos a função *logaritmo natural*,

$$\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$$

por

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt, \quad \text{para} \quad t > 0.$$

Deve-se observar que a integral $\int_1^x \frac{1}{t}dt$ existe, pois a função $\frac{1}{t}$ é contínua para $t > 0$, donde se conclui que a integral que define a função *logaritmo* está bem definida, lembrando que qualquer função contínua, definida em intervalos fechados e limitados, é integrável.

Esta maneira, aparentemente não-natural, de definir a função logaritmo natural tornar-se-á clara à medida que formos avançando no seu estudo.

Em virtude do teorema fundamental do Cálculo, temos que ln é derivável e

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = (\ln)'(x) = \frac{1}{x}, \quad \text{para } \ x > 0.$$

Portanto, o logaritmo natural é uma primitiva ou antiderivada de $\frac{1}{x}$, somente para $x > 0$. Uma primitiva no caso em que $x \neq 0$ será construída futuramente.

Listaremos, a seguir, algumas propriedades da função logaritmo natural as quais começarão a tornar claro o porquê de chamarmos tal função de logaritmo.

**Propriedade 1.** $\ln 1 = 0$, porque

$$\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t}dt = 0.$$

**Propriedade 2.** Se $x > 1$, então $\ln x > 0$.

Isto é claramente verdade em virtude de integrais de funções positivas serem positivas e assim $\int_1^x \frac{1}{t}dt$ representará a área sob o gráfico de $\frac{1}{t}$ e acima do eixo $ox$, para $t$ variando de 1 até $x$.

**Propriedade 3.** Se $0 < x < 1$, então $\ln x < 0$.

Isto se segue do fato

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt = -\int_x^1 \frac{1}{t}dt.$$

e de que a integral $\int_x^1 \frac{1}{t}dt$ representa a área sob o gráfico de $\frac{1}{t}$ e acima do eixo $ox$, para $t$ variando de $x$ até 1.

**Propriedade 4.** $\frac{d}{dx}(\ln |x|) = \frac{1}{x}$

Isto se segue dos seguintes fatos: Se $x > 0$, temos que $|x| = x$ e assim

$$\frac{d}{dx}(\ln |x|) = \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}.$$

Se $x < 0$, temos que $|x| = -x$ e daí

$$\frac{d}{dx}(\ln |x|) = \frac{d}{dx}(\ln(-x)).$$

Fazendo $u = -x > 0$, e usando a regra da cadeia, obtemos

$$\frac{d}{dx}(\ln(-x)) = \frac{d}{du}(\ln u) \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot (-1) = \frac{1}{-u} = \frac{1}{x}.$$

**Propriedade 5** $\ln uv = \ln u + \ln v$

Inicialmente, observemos que

$$\frac{d}{dx}(\ln(ax)) = \frac{1}{ax}\frac{d}{dx}(ax),$$

em virtude da regra da cadeia. Dessa forma,

$$\frac{d}{dx}(\ln(ax)) = \frac{1}{ax}\, a = \frac{1}{x}.$$

Isto nos diz que as funções $\ln x$ e $\ln(ax)$ possuem derivadas iguais. Conseqüentemente,

$$\ln(ax) = \ln x + K,$$

para alguma constante $K$. Daí, quando $x = 1$, obteremos

$$\ln a = \ln 1 + K = 0 + K = K.$$

Conseqüentemente,

$$\ln(ax) = \ln a + \ln x.$$

Fazendo $a = u$ e $x = v$, obtemos a fórmula pretendida.

**Propriedade 6.** $\ln\left(\frac{u}{v}\right) = \ln u - \ln v$

Esta propriedade segue-se da anterior da seguinte maneira:

$$\ln u = \ln\left(\frac{u}{v} \cdot v\right) = \ln\left(\frac{u}{v}\right) + \ln v,$$

donde

$$\ln\left(\frac{u}{v}\right) = \ln u - \ln v.$$

**Propriedade 7.** $\ln\left(\frac{1}{v}\right) = -\ln v$

Na propriedade anterior, façamos $u = 1$ para obter

$$\ln\left(\frac{1}{v}\right) = \ln 1 - \ln v = -\ln v.$$

**Propriedade 8.** Se $r$ for um número racional e $x$ um número positivo, então

$$\ln(x^r) = r \ln x.$$

Pela regra da cadeia

$$\frac{d}{dx}(\ln(x^r)) = \frac{1}{x^r}(rx^{r-1}) = \frac{r}{x} = \frac{d}{dx}(r \ln x).$$

Deste modo, como as funções $\ln x^r$ e $r \ln x$ possuem derivadas iguais, elas diferem por uma constante, ou seja, existe uma constante $K$ tal que

$$\ln(x^r) = r \ln x + K.$$

Fazendo $x = 1$, obtém-se $\ln 1 = r \ln 1 + K$ e desde que $\ln 1 = 0$, concluímos que $K = 0$ e então

$$\ln(x^r) = r \ln x.$$

**Propriedade 9.** A função $\ln x$ é crescente.

Basta observar que

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} > 0$$

desde que $x > 0$. A propriedade segue-se do fato de que, se a derivada de uma função for positiva, então ela será crescente.

**Propriedade 10.** O gráfico da função ln é côncavo para baixo.

Basta observar que

$$\frac{d^2}{dx^2}(\ln x) = \frac{d}{dx}\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{d}{dx}(\frac{1}{x}) = -\frac{1}{x^2} < 0.$$

**Propriedade 11.** $\frac{1}{2} < \ln 2 < 1$

Observemos a figura 11.4 e conclua que a área sob o gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$, entre $x = 1$ e $x = 2$, e acima do eixo $ox$ é maior do que a área do retângulo com base $[1, 2]$ e altura $\frac{1}{2}$, que é $\frac{1}{2}$ que, por sua vez, é menor que a área do retângulo de base $[1, 2]$ e altura 1, a qual é 1.

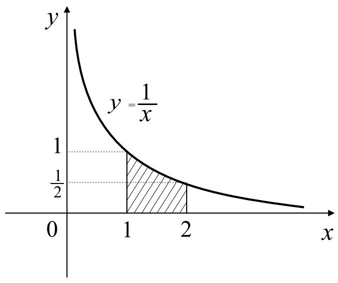


Fig. 11.4

Mais precisamente, $1 \cdot \frac{1}{2} < \int_1^2 \frac{1}{x}dx < 1 \cdot 1$, ou seja $\frac{1}{2} < \int_1^2 \frac{1}{x}dx < 1$. Portanto,

$$\frac{1}{2} < \ln 2 < 1.$$

**Propriedade 12.** $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

Seja $k$ um inteiro positivo qualquer. Então, para $x > 2^{2k}$, teremos

$$\ln x > \ln(2^{2k})$$

pois a função ln é crescente. Assim,

$$\ln x > \ln(2^{2k}) = 2k \ln 2 > 2k\left(\frac{1}{2}\right) = k.$$

Portanto, como $x \to +\infty$, temos que $\ln x$ excede qualquer número inteiro positivo $k$, o que implica que

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty.$$

**Propriedade 13.** $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

Façamos $u = \frac{1}{x}$ e observemos que $x \to 0^+$ se, e somente se, $u \to +\infty$. Portanto

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = \lim_{u \to +\infty} \ln\left(\frac{1}{u}\right) = \lim_{u \to +\infty}(-\ln u) = -\lim_{u \to +\infty} \ln u = -\infty.$$

**Propriedade 14.**

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx = \ln |g(x)| + C$$

Isto se segue da Regra da Cadeia e do seguinte fato

$$\frac{d}{dx}(\ln |g(x)|) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

bastando observar que

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx = \int \frac{d}{dx}(\ln |g(x)|)dx = \ln |g(x)| + C.$$

Esta propriedade pode ser reescrita como: Façamos $u = g(x)$, o que nos permite concluir que $du = g'(x)dx$ e daí

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C = \ln |g(x)| + C.$$

Observemos que as propriedades do logaritmo listadas até agora nos fazem tirar algumas conclusões importantes que serão utilizadas na aula 12 e verificar que o seu gráfico é esboçado na figura 11.5.

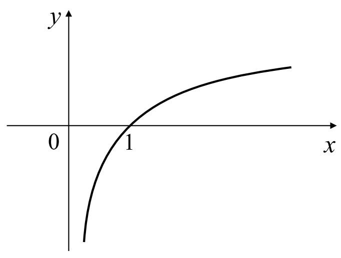


Fig. 11.5

Na figura 11.6 encontra-se esboçado o gráfico da função $\ln|x|$.

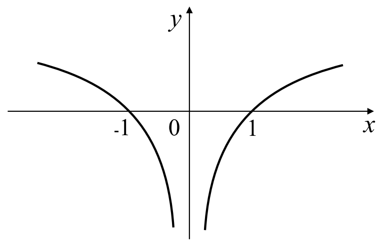


Fig. 11.6

Antes de resolvermos alguns exercícios, introduziremos uma técnica em que usamos a derivada do logaritmo, com algumas de suas propriedades, a fim de facilitar o cálculo da derivada de funções que, sem essa ajuda, tornaria o nosso trabalho bastante árduo. Tal técnica é chamada *derivação logarítmica*.

# 2 Derivação logarítmica

Ilustremos esse método por meio de exemplos.

**Exemplo 110.** Derivemos a função

$$y = (1 - 3x^2)^3 (\cos 2x)^4.$$

Calculando o logaritmo de ambos os membros da expressão acima, obtém-se

$$\ln y = \ln(1 - 3x^2)^3 + \ln(\cos 2x)^4.$$

Daí,

$$\ln y = 3\ln(1 - 3x^2) + 4\ln(\cos 2x)$$

e derivando ambos os seus membros

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{1-3x^2}\cdot(-6x) + \frac{4}{\cos 2x}\cdot(-\text{sen}\, 2x)\cdot(2) = -\frac{18x}{1-3x^2} - 8\text{tg}2x.$$

Conseqüentemente

$$y' = -(1-3x^2)^3(\cos 2x)^4\left(\frac{18x}{1-3x^2} + 8\text{tg}\, 2x\right).$$

**Exemplo 111.** Calcule a derivada de

$$y = \frac{x(1-x^2)^2}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Usando a derivação logarítmica, obtemos

$$\ln y = \ln x + 2\ln(1-x^2) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

logo,

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} + 2\frac{1}{1-x^2}(-2x) - \frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}(2x) = \frac{1}{x} - \frac{4x}{1-x^2} - \frac{x}{1+x^2}$$

e, após algumas manipulações algébricas, obtém-se

$$y' = \frac{(1-5x^2-4x^4)(1-x^2)}{(1+x^2)^{3/2}}.$$

Com a introdução da função logaritmo podemos considerar uma nova técnica de integração chamada *integração por frações parciais.*

# 3 Integração por frações parciais

A técnica de integração por frações parciais consiste em determinar primitivas de funções racionais decompondo tal tipo de funções em soma de funções racionais mais simples e cujas primitivas sejam calculadas facilmente. Comecemos com um exemplo simples.

**Exemplo 112.** Calculemos a integral

$$\int \frac{1}{x^2-1}dx.$$

A idéia é decompor a função racional $\frac{1}{x^2-1}$ na forma

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

em que $A$ e $B$ são constantes a ser determinadas. Dessa última igualdade obtém-se

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{(A+B)x+A-B}{x^2-1}.$$

Daí, por uma simples comparação, tem-se

$$\begin{array}{rcl} A+B & = & 0 \\ A-B & = & 1 \end{array}$$

que é um sistema linear cuja solução é $A = \frac{1}{2}$ e $B = -\frac{1}{2}$. Portanto,

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}\,.$$

Integrando ambos os membros dessa última igualdade

$$\int \frac{1}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx\,,$$

donde

$$\int \frac{1}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C.$$

Se quisermos simplificar esta última expressão, obteremos

$$\int \frac{1}{x^2-1}dx = \ln\left[K\left|\frac{x-1}{x+1}\right|^{1/2}\right],$$

em que $C = \ln K$. Verifique a validez dessa última igualdade.

**Exemplo 113.** Calculemos a integral

$$\int \frac{3x-1}{x^2+x-2}dx.$$

Usemos um procedimento semelhante àquele do exemplo anterior e escrevamos

$$\frac{3x-1}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

observando que $x^2+x-2 = (x-1)(x+2)$. Após um cálculo simples chegamos a

$$A = \frac{2}{3} \;\text{ e }\; B = \frac{7}{3}\,.$$

Assim

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int \frac{3x-1}{x^2+x-2}dx & = & \displaystyle\frac{2}{3}\int \frac{1}{x-1}dx + \frac{7}{3}\int \frac{1}{x+2}dx \\ & = & \displaystyle\frac{2}{3}\ln|x-1| + \frac{7}{3}\ln|x+2| + C. \end{array}$$

**Exemplo 114.** Em alguns casos o polinômio que figura no denominador não pode ser decomposto em fatores de primeiro grau reais, pois as suas raízes são complexas. Em virtude disso, devemos usar outra estratégia. Vejamos o que acontece com a integral

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2}dx.$$

Observemos que o trinômio do segundo grau $x^2+2x+2$ não possui raízes reais pois o seu discriminante é negativo. Verifique isso. No entanto, ele pode ser escrito na forma

$$x^2+2x+2 = x^2+2x+1+1 = (x+1)^2+1$$

e a integral em estudo se apresenta como

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2}dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+1}dx.$$

Neste ponto o estudante deve recordar a integral

$$\int \frac{1}{u^2+1}du = \arctan u + C.$$

Portanto, fazendo $u = x+1$ tem-se $du = dx$ e assim

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2}dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+1}dx = \int \frac{1}{u^2+1}du = \arctan u + C =$$

$$\int \frac{1}{u^2+1}du = \arctan u + C = \arctan(x+1) + C.$$

**Exemplo 115.** Vejamos a integral

$$\int \frac{x+1}{(x+1)^2+1}dx.$$

O que fazer com essa integral? Observe que podemos fazer a mudança de variáveis $u = x+1$ e obter

$$\int \frac{x+1}{(x+1)^2+1}dx = \int \frac{u}{u^2+1}du = \frac{1}{2}\int \frac{2u}{u^2+1}du.$$

Nesta última integral o numerador do integrando é exatamente a derivada da função que figura no denominador, de modo que

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{(x+1)^2+1}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2u}{u^2+1}du = \frac{1}{2}\ln(u^2+1) + C \\ &= \frac{1}{2}\ln(u^2+1) + C \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) + C.\end{aligned}$$

# 4 Exercícios resolvidos

1. Calcule a derivada de $\ln(5x+3)$.

   *Solução.* Usando a regra da cadeia

$$\frac{d}{dx}(\ln(5x+3)) = \frac{d}{dx}(5x+3)\cdot\frac{1}{5x+3} = \frac{5}{5x+3}.$$

2. Calcule a derivada de $\sqrt{\ln x}$.

   *Solução.* Usando a regra da cadeia

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\sqrt{\ln x}) &= \frac{d}{dx}(\ln x)^{\frac{1}{2}}\\ &= \frac{1}{2}(\ln x)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(\ln x)\\ &= \frac{1}{2}(\ln x)^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{x}\\ &= \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}.\end{aligned}$$

3. Calcule a integral

$$\int \frac{2x}{x^2+1}dx.$$

   *Solução.* Basta observar que fazendo $g(x) = x^2+1$ obtemos $g'(x) = 2x$. Daí

$$\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \int \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx = \ln|x^2+1| + C = \ln(x^2+1) + C.$$

4. Calcule a integral

$$\int \operatorname{tg} x dx.$$

   *Solução.* Observemos que

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}dx = -\int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}dx.$$

   Fazendo $g(x) = \cos x$ tem-se $g'(x) = -\operatorname{sen} x$ e assim

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}dx = \int \frac{\cos' x}{\cos x}dx = -\ln|\cos x| + C.$$

5. Calcule $\displaystyle\int \frac{4x^7}{3x^8-2}dx$.

   *Solução.* Para calcular a integral acima basta acompanhar os cálculos abaixo, justificando as passagens.

$$\int \frac{4x^7}{3x^8-2}dx = \frac{1}{6}\int \frac{24x^7}{3x^8-2}dx = \frac{1}{6}\ln|3x^8-2| + C.$$

6. Calcule $\displaystyle\int \ln x dx, \quad x > 0.$

   *Solução.* Calculemos essa integral usando a técnica de integração por partes. Para isso, façamos

$$u = \ln x \;\text{ e }\; dv = dx,$$

   de modo que $du = \dfrac{1}{x}$ e $v = x$.

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C.$$

7. Calcule $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x} dx.$

   *Solução.* Faça $u = \ln x$, o que nos dá $du = \dfrac{dx}{x}$ e assim

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int u du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{(\ln x)^2}{2} + C.$$

8. Calcule a integral $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - 9}$ .

   *Solução.* Escrevamos $\dfrac{1}{x^2 - 9} = \dfrac{1}{(x-3)(x+3)} = \dfrac{A}{x-3} + \dfrac{B}{x+3}$. Assim, $1 = A(x+3) + B(x-3)$ e daí $A = \dfrac{1}{6}$ e $B = -\dfrac{1}{6}$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2-9} &= \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x-3} + \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x+3} \\
&= \frac{1}{6}\ln|x-3| - \frac{1}{6}|x+3| + C \\
&= \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C
\end{aligned}$$

9. Calcule a integral $\displaystyle\int \frac{x}{(x+2)(x+3)} dx$ .

   *Solução.* $\dfrac{x}{(x+2)(x+3)} = \dfrac{A}{x+2} + \dfrac{B}{x+3}$ .Assim, $x = A(x+3) + B(x+2)$ e daí $A = -2$ e $B = 3$. Logo,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{(x+2)(x+3)} &= \int -\frac{2}{x+2} dx + \int \frac{3}{x+3} dx \\
&= -2\ln|x+2| + 3\ln|x+3| + C \\
&= \ln\left|\frac{(x+3)^3}{(x+2)^2}\right| + C
\end{aligned}$$

10. Calcule a integral $\displaystyle\int \frac{x-5}{x^2(x+1)}dx$

*Solução.* $\dfrac{x-5}{x^2(x+1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x+1}$. Assim, $x-5 = Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2$ e daí $A = 6$, $B = -5$ e $C = -6$. Conseqüentemente,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x-5}{x^2(x+1)}dx &= \int \frac{6}{x}dx - \int \frac{5}{x^2}dx - \int \frac{6}{x+1}dx \\
&= 6\ln|x| + \frac{5}{x} - 6\ln|x+1| + C \\
&= 6\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + \frac{5}{x} + C\,.
\end{aligned}$$

# 5 Exercícios propostos

1. Encontre as derivadas das funções.
   (a) $y = \ln(x+3)^2$
   (b) $y = (\ln(x+3))^2$
   (c) $y = \ln(\operatorname{sen} 5x)$
   (d) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2}\,)$
   (e) $y = x\ln x - x$
   (f) $y = \ln\sqrt{3-x^2}$

2. Calcule as seguintes primitivas.
   (a) $\displaystyle\int \frac{1}{7x}dx$
   (b) $\displaystyle\int \frac{x^8}{x^9-1}dx$
   (c) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}dx$
   (d) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 3x}{1-\cos 3x}dx$
   (e) $\displaystyle\int \frac{2x^4-x^2}{x^3}dx$
   (f) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}dx$
   (g) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}dx$

3. Encontre a área sob a curva $y = \dfrac{1}{x}$ e acima do eixo $ox$, entre $x = 2$ e $x = 4$.

4. Calcule a integral $\int \frac{x}{(2x+3)^2} dx$.
5. Resolva a equação $2 \ln x = \ln(2x)$.
6. Calcule a integral $\int_1^2 \frac{x}{4x^2-2} dx$.
7. Mostre que $\ln x < \sqrt{x}$, para todo $x > 0$.

# 6 Respostas dos exercícios propostos

1. (a) $y' = \dfrac{2}{x+3}$
   (b) $y' = 2\,\dfrac{\ln(x+3)}{x+3}$
   (c) $y' = 5\,\dfrac{\cos(5\,x)}{\sin(5\,x)}$
   (d) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
   (e) $y' = \ln x$
   (f) $y' = -\dfrac{x}{3-x^2}$
2. (a) $\dfrac{1}{7}\ln x + C$
   (b) $\dfrac{1}{9}\ln\left(x^9-1\right) + C$
   (c) $\ln(\ln x) + C$
   (d) $\dfrac{1}{3}\ln(1-\cos(3\,x)) + C$
   (e) $x^2 - \ln x + C$
   (f) $\dfrac{1}{2}(\ln x)^2 + C$
   (g) $-2\ln(-1+\sqrt{x}) + C$
3. $\ln 2$
4. $\dfrac{1}{4}\ln(2x+3) + \dfrac{3}{4(2x+3)} + C$
5. 2
6. $\dfrac{1}{8}\ln 7$
7. Sugestão: use o que você sabe sobre máximos e mínimos.

## Nesta aula você aprendeu:

- O que é o logaritmo natural.
- a fazer aplicação da derivada da função logarítmica.
- a fazer aplicação da primitiva da função logarítmica.

# 7 Apêndice

## História dos logaritmos

Os logaritmos surgiram como um instrumento para simplificar cálculos em que figuravam números muito grandes, principalmente aqueles oriundos de medições astronômicas. As propriedades que simplificavam tais cálculos eram aquelas que transformavam multiplicações em adições e divisões em subtrações.

Muito embora a formalização dos logaritmos tenha sido realizada por John Napier (1550-1617), um escocês proprietário de terras, que foi o primeiro a publicar, em 1614, uma tábua de logaritmos, a sua essência, ao que parece, foi levada em conta pelos antigos babilônios[1] que consideravam uma tabela em um tablete datado aproximadamente de 1888 a.C., dada por

Tabela 1

| | |
|---|---|
| 2 | 1 |
| 4 | 2 |
| 8 | 3 |
| 16 | 4 |
| 32 | 5 |
| 64 | 6 |

O leitor que analisar de maneira acurada esta tabela verificará que ela se estende obedecendo a uma regra geral, de modo que a tabela 2 a seguir é uma extensão da tabela 1

Tabela 2

| | |
|---|---|
| 2 | 1 |
| 4 | 2 |
| 8 | 3 |
| 16 | 4 |
| 32 | 5 |
| 64 | 6 |
| 128 | 7 |
| 256 | 8 |
| 512 | 9 |
| 1024 | 10 |
| 2048 | 11 |
| 4096 | 12 |

[1] Learn from the Masters, Editors Frank Swetz, John Fauvel, Otto Bekken, Bengt Johansson, Victor Katz, The Mathematical Association of America, 1995

e assim, caso queiramos calcular o produto $32 \times 64$, basta observar que 32 corresponde ao 5 e 64 corresponde ao 6. Somam-se $5+6=11$ e verifica-se a linha correspondente ao 11, na qual figura 2048. Assim, $32 \times 64 = 2048$.

Este foi, essencialmente, o procedimento usado por Napier, que usa *progressões aritméticas* e *progressões geométricas*, assuntos bem conhecidos dos matemáticos do século XVI. Vejamos como proceder. Consideremos uma progressão aritmética começando com 0 e com razão $a > 0$ e uma progressão geométrica começando com 1 e com razão $r > 0$ e vejamos a tabela 3, a seguir,

Tabela 3

| | |
|---|---|
| 1 | 0 |
| r | a |
| $r^2$ | $2a$ |
| $r^3$ | $3a$ |
| $r^4$ | $4a$ |
| $r^5$ | $5a$ |
| $r^6$ | $6a$ |
| $r^7$ | $7a$ |
| $r^8$ | $8a$ |
| $r^9$ | $9a$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ |

em que se exibe uma correspondência biunívoca entre os elementos das duas colunas dada por $0 \leftrightarrow 1, a \leftrightarrow r, 2a \leftrightarrow r^2, \cdots na \leftrightarrow r^n$ para todo $n = 0, 1, 2, \cdots$ Assim, as funções $f$ e $g$ definidas por

$$f(na) = r^n \ \text{ e } \ g(r^n) = na$$

são funções inversas uma da outra, de modo que

$$g(r^n) + g(r^m) = na + ma = (m+n)a = g(r^n r^m),$$

ou de maneira mais concisa

$$g(x) + g(y) = g(xy).$$

Também

$$g(r^n) - g(r^m) = na - ma = (n-m)a = g\left(\frac{r^n}{r^m}\right),$$

ou

$$g(x) - g(y) = g\left(\frac{x}{y}\right).$$

Pode-se constatar, sem muita dificuldade, que todas as regras do logaritmo se verificam, ou seja, $g$ nada mais é do que a função logaritmo conhecida com base $r$ sendo a inversa de uma potência.

Somente na década de 1650 foi verificado por Isaac Newton (1642-1727), em seu *Waste Book* (1664-1665), que a área abaixo da hipérbole satisfaz as propriedades do logaritmo. Posteriormente, em 1668, Mercator encontra o logaritmo como uma série dada por

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots$$

Evidentemente que o uso dos logaritmos como instrumento de cálculo está completamente ultrapassado, dado o advento das calculadoras, computadores, etc. No entanto, sua relevância perdura em virtude da função logarítmica, que se presta, em parceria com a função exponencial, a diversas aplicações práticas importantes. Isto ficará evidente, por exemplo, em várias aulas sobre *equações diferenciais*.

# Aula 12

# A função exponencial e a função logarítmica

## Objetivos

- Estudar a função exponencial.
- Calcular a derivada e a integral da função exponencial.

Como vimos na aula 11, a função logarítmica $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ é injetiva e sobrejetiva. Portanto, existe a sua função inversa $\ln^{-1} : \mathbb{R} \to (0, \infty)$. Esta aula é dedicada ao estudo dessa função, chamada função exponencial.

## 1 A função exponencial

Comecemos com a seguinte definição.

**Definição 3.** Definimos a *função exponencial* $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ como sendo a inversa da função logaritmo natural $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$.

Como as funções logaritmo e exponencial são inversas uma da outra, os seus gráficos são simétricos com relação à primeira bissetriz $y = x$, como mostra a figura 12.1.

Listaremos as propriedades da função exponencial que são, essencialmente, decorrentes das propriedades da função logarítmica.

**Propriedade 1.** $\exp x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Isto se segue da própria definição de exponencial pois, já que $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, a imagem da exponencial é exatamente o domínio do logaritmo que é o intervalo $(0, \infty)$.

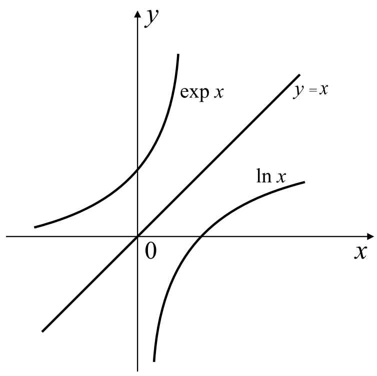


Fig. 12.1

**Propriedade 2.** $\ln(\exp x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Esse fato é decorrência da própria definição de função inversa e do fato de exp ser a inversa de ln.

**Propriedade 3.** $\exp(\ln x) = x$ para todo $x > 0$.

Justifica-se essa propriedade como no caso anterior.

**Propriedade 4.** $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ é uma função crescente.

Deve-se mostrar que se $u < v$ então $\exp u < \exp v$. Suponhamos que $u < v$. Como $u = \ln(\exp u)$ e $v = \ln(\exp v)$, tem-se $\ln(\exp u) < \ln(\exp v)$ e como ln é crescente concluímos que $\exp u < \exp v$.

**Propriedade 5.** $\dfrac{d}{dx}(\exp x) = \exp x$ ou $\exp'(x) = \exp x$.

Inicialmente, observemos que se $y = \exp x$ então $\ln y = x$. Derivando ambos os membros desta última igualdade com relação a $x$, observando que $y$ é uma função de $x$, obtemos

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = 1$$

e daí

$$\frac{y'}{y} = 1,$$

donde concluímos que

$$y' = \exp'(x) = y = \exp x.$$

**Propriedade 6.** Se $f(x)$ for uma função derivável, então a função $y = \exp f(x)$ é derivável e $y' = f'(x) \exp f(x)$.

Essa propriedade segue-se imediatamente da regra da cadeia.

À guisa de exemplo, a derivada da função $y = \exp(\cos x)$ é dada por $y' = (\cos x)' \exp(\cos x) = -\operatorname{sen} x \exp(\cos x)$.

**Propriedade 7.** $\int \exp x dx = \exp x + C.$

Esta propriedade é decorrência do fato de que $\exp' x = \exp x$, ou seja, exp é uma primitiva dela mesma.

**Propriedade 8.** $\exp 0 = 1$

Como a função exp e a função ln são inversas uma da outra, tem-se

$$1 = \exp \ln 1 = \exp 0$$

**Propriedade 9.** $\exp(u + v) = \exp u \cdot \exp v$ .

É suficiente observar que

$$\ln \exp(u + v) = u + v = \ln \exp u + \ln \exp v = \ln(\exp u \cdot \exp v)$$

e como ln é uma função injetiva, obtemos

$$\exp(u + v) = \exp u \cdot \exp v$$

**Propriedade 10.** $\exp(u - v) = \dfrac{\exp u}{\exp v}$

Observemos que

$$\exp(u - v) \exp v = \exp[(u - v) + v] = \exp u$$

e agora dividindo-se ambos os membros da igualdade acima por $\exp v$ obteremos a igualdade acima.

**Propriedade 11.** $\exp(-v) = \dfrac{1}{\exp v}$

Esta propriedade é imediata a partir da anterior.

**Propriedade 12.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp x = +\infty$

Observemos que, tomando $y = 2^k$, em que $k \in \mathbb{N}$, teremos $\ln y = \ln 2^k$, donde $\ln y = k \ln 2$ e desde que $\ln 2 > 0$ tem-se que $\ln y \to +\infty$ se $k \to +\infty$. Conseqüentemente $y = \exp x \to +\infty$ se $x \to +\infty$.

**Propriedade 13.** $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp x = 0$

Neste caso tomemos $y = 2^{-k}$ para $k \in \mathbb{N}$. Daí, $\ln y = \ln 2^{-k}$ de onde $\ln y = -k \ln 2$ e como $-k \ln 2 \to -\infty$ deveremos ter $\ln y \to -\infty$ e então $y = \exp x \to 0$.

# 2 A função exp e o número $e$

A partir de agora o fato de chamarmos a função exp de exponencial começará a ser esclarecido.

**Definição 4.** Definimos o número $e$ como sendo aquele que satisfaz

$$\ln e = 1$$

O número $e$ está bem definido, pois a função $\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ é injetora e sobrejetora. Portanto, dado o número $1 \in \mathbb{R}$, existe um único número positivo, que designaremos por $e$, tal que $\ln e = 1$.

**Propriedade 14.** $\exp x = e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Comecemos observando que a propriedade é válida para $x = 1$. De fato,

$$e = \exp(\ln e) = \exp 1.$$

Por indução, mostraremos que a propriedade se verifica para todo $n \in \mathbb{N}$. Para $n = 1$ isto foi exatamente o que acabou de ser demonstrado. Suponhamos que

$$e^n = \exp n, \quad \text{para } n \in \mathbb{N}.$$

Assim $\exp(n+1) = \exp\ n \cdot \exp 1 = e^n \cdot e^1 = e^{n+1}$, o que mostra que a propriedade é válida para $n + 1$ e, conseqüentemente, válida para todo $n \in \mathbb{N}$

Se $n$ for inteiro positivo, teremos

$$\exp(0) = 1 = \exp(n + (-n)) = \exp(n) \cdot \exp(-n)$$

e assim

$$\exp(-n) = \frac{1}{\exp n} = \frac{1}{e^n} = e^{-n}$$

Suponhamos que $r = \dfrac{m}{n}$ em que $m$ e $n$ são números inteiros e $n \neq 0$. Daí,

$$\exp r = \exp\left(\frac{m}{n}\right) = \exp\underbrace{\left(\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\right)}_{m-\text{vezes}} =$$

$$= \exp\left(\frac{1}{n}\right) \cdots \exp\left(\frac{1}{n}\right) = e^{\frac{1}{n}} \cdots e^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{m}{n}}$$

em que usamos o fato de que $\exp\left(\frac{1}{n}\right) = e^{\frac{1}{n}}$. Mostremos este fato: Seja $y = \exp\left(\frac{1}{n}\right)$, ou seja, $\ln y = \frac{1}{n}$ o que implica $n \ln y = 1$ e daí $\ln y^n = 1 = \ln e$ e pela injetividade da função ln tem-se $y^n = e$ e então $y = \exp\left(\frac{1}{n}\right) = e^{\frac{1}{n}}$.

Desse modo temos

$$\exp r = e^r,$$

para todo $r \in \mathbb{Q}$. Assim, é natural definir a potência $e^x$, para qualquer número real $x$, como feito a seguir.

**Definição 5.** Dado qualquer número $x \in \mathbb{R}$, define-se

$$e^x = \exp x.$$

De agora em diante trabalharemos com a função exponencial apresentando-a mais na forma $y = e^x$ do que na forma $y = \exp x$.

Cabem algumas observações sobre o número $e$, que é a base do sistema de logaritmos naturais.

O número $e$ é um número irracional, ou seja, ele não pode ser escrito na forma de uma fração $\frac{p}{q}$, em que $p, q \in \mathbb{Z}$, com $q \neq 0$, e seu valor aproximado é $2,71828182845....$ Na verdade, $e$ é um número *transcendente*, isto é, ele não é raiz de nenhum polinômio da forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \;\; a_n \neq 0$$

em que os coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sejam inteiros. Os números que não são transcendentes são chamados *algébricos*.

Deve-se ressaltar que todo número racional $\frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, com $q \neq 0$, é algébrico. Basta observar que $\frac{p}{q}$ é raiz do polinômio de grau 1

$$P(x) = qx - p.$$

No entanto, existem números irracionais que são algébricos, como é o caso de $\sqrt{2}$, que é raiz do polinômio $P(x) = x^2 - 2$. Para mais informações sobre tais classes de números, o leitor pode consultar D.G. de Figueiredo[1]

Uma maneira de calcular $e^x$ é por meio de uma entidade matemática chamada *série numérica* que é, grosso modo, uma *soma* com uma infinidade de parcelas. Detalhes sobre estas séries serão vistas nas aulas referentes à Análise. Apenas como uma informação adicional observemos que $e^x$ pode ser escrita como

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

sendo que uma boa aproximação para $e^x$, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, é dada por

$$e^x \cong 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

[1]Djairo G. de Figueiredo, Números Irracionais e Transcendentes, coleção Iniciação Científica, Sociedade Brasileira de Matemática, 2002.

de sorte que quanto maior o valor de $n$ melhor será a aproximação obtida.

Deve-se enfatizar que as funções exponencial e logarítmica são aplicáveis em vários problemas oriundos não só da Matemática como também do mundo físico.

Uma classe desses problemas está relacionada com os chamados crescimento ou decaimento exponencial. Tornemos isso mais preciso.

Suponhamos que $y = y(t)$ represente o valor de uma certa quantidade, no tempo $t$, cujo crescimento ou decrescimento seja expresso pela igualdade

$$\frac{dy}{dt} = ky,$$

em que $k$ é uma certa constante não-nula. Tal expressão traduz o fato de que a taxa de variação (derivada) da quantidade $y$ é proporcional ao valor de $y$ em cada instante $t$.

Façamos $g(t) = \frac{y}{e^{kt}}$ e calculemos sua derivada, usando a regra do quociente:

$$\frac{dg}{dt}(t) = \frac{e^{kt}\frac{dy}{dt} - yke^{kt}}{e^{2kt}} = \frac{e^{kt}ky - yke^{kt}}{e^{2kt}} = 0,$$

qualquer que seja $t$ em um certo intervalo, normalmente $(0, +\infty)$. Portanto, $g(t)$ deve ser constante, de modo que

$$\frac{y(t)}{e^{kt}} = C,$$

para alguma constante $C$ e para todo $t \geq 0$, ou seja,

$$y(t) = Ce^{kt}.$$

Suponhamos que no fenômeno que estejamos a estudar, conheça-se o valor de $y$ em $t = 0$, digamos $y(0) = y_0$. Assim, podemos determinar o valor de $C$:

$$y_0 = y(0) = Ce^{k \cdot 0} = C$$

e então

$$y(t) = y_0 e^{kt}.$$

Se $k > 0$, diz-se que $y$ cresce exponencialmente e, se $k < 0$, diz-se que $y$ decresce exponencialmente. Esse tipo de problema será estudado detalhadamente nas aulas referentes às equações diferenciais.

Nos exercícios resolvidos mostraremos várias propriedades importantes das funções exponencial e logarítmica e que o leitor deve estudar com cuidado.

Um problema importante em Biologia, que já foi citado *an passant*, é o do crescimento populacional de bactérias. Designemos por $N = N(t)$ o número de bactérias em uma certa colônia de um experimento científico. Um modelo razoável para descrever tal fenômeno, caso não haja inibição ao crescimento das bactérias, é o descrito pela relação

$$\frac{dN}{dt} = kN,$$

em que $\frac{dN}{dt}$ é a derivada de $N$, que representa a taxa de crescimento populacional, e $k$ é uma constante positiva, sendo que esta última relação é o que chamamos de *equação diferencial*, a qual expressa o fato de que a taxa de crescimento da cultura de bactérias, em cada instante $t$, é proporcional à quantidade de bactérias neste mesmo instante.

Reescrevamos tal equação diferencial na forma

$$\frac{N'(t)}{N(t)} = k$$

e observemos que $\frac{d}{dt}\ln(N(t)) = \frac{N'(t)}{N(t)}$, ou seja,

$$\frac{d}{dt}\ln(N(t)) = k$$

o que nos diz que $\ln N(t)$ é uma primitiva da função constante $k$, isto é,

$$\ln N(t) = \int kdt + C$$

Portanto,

$$\ln N(t) = kt + C$$

e usando o fato conhecido de que as funções logarítmica e exponencial são inversas uma da outra, teremos

$$N(t) = e^{kt+c} = c^c \cdot e^{kt}$$

e chamando $e^c = A$, obtemos

$$N(t) = Ae^{kt}$$

que é a chamada *solução geral* da equação diferencial $\frac{dN}{dt} = kN$, e diz então que a população de bactérias possui crescimento exponencial.

Admitindo que saibamos calcular o número de bactérias no início do experimento, isto é, $n(0) = N_0$ é um valor conhecido, obteremos $N(0) = Ae^0 = A = N_0$. Daí,

$$N(t) = N_0 e^{kt}.$$

Vejamos uma situação concreta.

Suponhamos que em um experimento científico um pesquisador dispõe de uma colônia de bactérias para ser observada. Admitamos que no dia 1 de abril existam 1 milhão de bactérias e no dia 1 de maio elas tenham crescido e atingido a marca de 7,5 milhões. Observemos que a função que rege tal fenômeno é $N(t) = N_0 e^{kt}$. Considerando $t = 0$ no dia 1 de abril, teremos

$$N(0) = 1000000 = N_0$$

e daí

$$N(t) = 10^6 e^{kt}.$$

Como calcular $k$? Ora, $N(30) = 75 \cdot 10^5$, e daí $N(30) = 10^6 e^{k \cdot 30}$, donde se conclui que

$$k = \frac{\ln 7,5}{30} \cong 0,0672.$$

Assim

$$N(t) \cong 10^6 \cdot e^{0,0672t}.$$

Quando a colônia de bactérias atingiria a formidável marca de $10^9$ elementos? Simples:

$$10^9 \cong 10^6 \cdot e^{0,0672t}$$

e daí

$$t \cong \frac{\ln 1000}{0,0672} \cong 102,8 \text{ dias}.$$

Essa marca será alcançada no dia 11 de julho.

# 3 A função exponencial de base $a$

Observe que, muito embora a função $e^x$ tenha sido introduzida no ensino médio, expressões como $\pi^{\sqrt{x}}$ ou $\sqrt{2}^{\sqrt{3}}$, entre outras, ainda não foram rigorosamente definidas. Ora, como já sabemos calcular $e^x$, para qualquer valor real de $x$, a definição seguinte deverá soar bastante natural.

**Definição 6.** Dado qualquer número real $a > 0, a \neq 1$, define-se a função *exponencial de base* $a$ por

$$a^x = e^{x \ln a}.$$

Essa função, como era de esperar, herda todas as propriedades da função $\exp x = e^x$. Façamos alguns casos, à guisa de exemplo.

$$a^0 = e^{x \ln a} = e^0 = 1,$$

$$a^1 = e^{1 \cdot \ln a} = e^{\ln a} = a,$$

pois, como já foi observado, as funções exponencial e logarítmica são inversas uma da outra.

$$a^{-x} = e^{-x \ln a} = e^{\ln a^{-x}} = a^{-x},$$

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y.$$

Esta propriedade segue-se dos cálculos a seguir:

$$a^{x+y} = e^{(x+y)\ln a} = e^{x\ln a + y\ln a} = e^{x\ln a} \cdot e^{x\ln a} = a^x \cdot a^y.$$

Estabeleceremos, em seguida, um teorema que nos fornecerá uma propriedade básica da função $a^x$.

**Teorema 18.** Seja $a$ um número positivo e sejam $x$ e $y$ números reais arbitrários. Então

$$(a^x)^y = a^{xy}.$$

*Demonstração.* Usando a definição de exponencial, tem-se

$$(e^x)^y = e^{y\ln e^x} = e^{yx} = e^{xy},$$

e assim a propriedade é válida para $a = e$. Portanto,

$$(a^x)^y = (e^{x\ln a})^y = e^{xy\ln a} = a^{xy}.$$

o que completa a demonstração. $\square$

Vejamos outras propriedades da função $a^x$. Comecemos com a sua derivada.

**Propriedade 15.** $\dfrac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a.$

De fato, considerando que $a^x = e^{x\ln a}$, podemos usar a *regra da cadeia*, para obter

$$\frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx}(x\ln a)e^{x\ln a} = a^x \ln a.$$

Decorre daí que, se $a > 1$, então $a^x$ é crescente e, se $0 < a < 1$, tal função é decrescente.

**Propriedade 16.** Se $a > 1$, então $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$.

Com efeito, $a^x = e^{x\ln a}$ e sendo $a > 1$, segue-se que $\ln a > 0$ e assim $x\ln a \to +\infty$ se $x \to +\infty$, o que implica que $e^{x\ln a} \to +\infty$, mostrando a propriedade.

**Propriedade 17.** Se $0 < a < 1$, então $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$.

Realmente, $a^x = e^{x\ln a}$ e como $0 < a < 1$ tem-se que $\ln a < 0$ e daí $x\ln a \to -\infty$ se $x \to +\infty$, donde se conclui que $e^{x\ln a} \to 0$.

De maneira análoga mostram-se as duas propriedades seguintes.

**Propriedade 18.** Se $a > 1$, então $\lim\limits_{x\to-\infty} = 0$.

**Propriedade 19.** Se $0 < a < 1$ então $\lim\limits_{x \to -\infty} = +\infty$.

Destas propriedades, segue-se que a função exponencial $a^x$, definida em $x \in \mathbb{R}$, é injetora e sobrejetora tendo como imagem o intervalo $(0, +\infty)$, de modo que seus gráficos, conforme sejam $0 < a < 1$ ou $a > 1$ estão esboçados nas figuras 12.2(a) e 12.2(b) dadas a seguir.

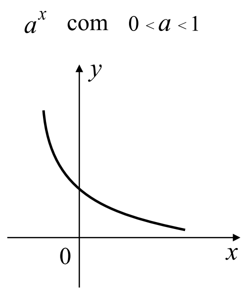

Fig. 12.2(a)

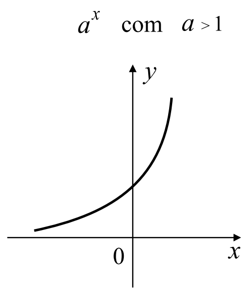

Fig. 12.2(b)

Observemos que

$$(a^x)' = \ln a \cdot e^{x \ln a}$$

$$(a^x)'' = (\ln a)^2 \cdot e^{x \ln a} > 0$$

que foram usadas para traçar os gráficos representados nas figuras 12.2(a) e 12.2(b).

# 4 A função logarítmica de base $a$

Até agora estudamos a função logarítmica ln, definida como sendo a inversa da função exponencial de base $e$. Introduziremos agora outras funções logarítmicas que são definidas como inversas de funções exponenciais de outras bases.

**Definição 7.** Seja $a > 0$, $a \neq 1$. Define-se a função *logarítmica de base* $a$, $\log_a : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, como sendo a inversa da função

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & (0, +\infty) \\ x & \mapsto & a^x, \end{array}$$

Portanto, temos que $y = \log_a x$ se, e somente se, $x = a^y$. Daí, segue-se que $\ln a^y = \ln x$ se, e somente se, $y \ln a = \ln x$, donde

$$y = \frac{\ln x}{\ln a}$$

o que nos fornece

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}\,.$$

Resulta, também, da definição que

$$a^{\log_a x} = x \text{ e } \log_a(a^x) = x.$$

Como exercício, prove as seguintes propriedades:

(i) $\log_a 1 = 0$;

(ii) $\log_a a = 1$;

(iii) $\log_a(uv) = \log_a u + \log_a v$;

(iv) $\log_a \left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$;

(v) $\log_a \left(\frac{1}{v}\right) = -\log_a v$;

(vi) $\log_a(u^r) = r \log_a u$.

Estas propriedades decorrem daquelas mostradas para o logaritmo natural.

# 5 Exercícios resolvidos

1. Mostre que

$$e^x = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

*Solução.* Escreva

$$f(t) = \left(1 + \frac{x}{t}\right)^t$$

de onde

$$\ln f(t) = t \ln\left(1 + \frac{x}{t}\right) = x \left[\frac{\ln(1 + \frac{x}{t}) - \ln 1}{\frac{x}{t}}\right].$$

Fixado $x$ teremos que $t \to +\infty$ implica $\frac{x}{t} \to 0$ e observe que

$$\frac{\ln(1 + x/t) - \ln 1}{\frac{x}{t}}$$

é o quociente de Newton da função ln no ponto 1 em que o acréscimo $h = \frac{x}{t}$ tende a zero quando $t \to +\infty$. Assim,

$$\lim_{t\to+\infty} \ln f(t) = x \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln(1 + x/t) - \ln 1}{\frac{x}{t}} = x \cdot \ln'(1) = x.$$

Desse modo,

$$\ln f(t) \to x \text{ se } t \to +\infty$$

e assim

$$e^{\ln f(t)} \to e^x \text{ se } t \to +\infty,$$

ou seja,

$$f(t) \to e^x \text{ se } t \to +\infty$$

Conseqüentemente,

$$e^x = \lim_{t\to+\infty} \left(1 + \frac{x}{t}\right)^t.$$

Fazendo $x = 1$ temos uma maneira de calcular aproximações para o número $e$:

$$e = \lim_{t\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t.$$

2. Calcule a integral

$$\int a^x dx$$

em que $a$ é um número real positivo e diferente de 1.

*Solução.* Sabemos que

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$$

e daí

$$a^x = \frac{d}{dx}(\frac{1}{\ln a} a^x).$$

Segue-se que $\dfrac{1}{\ln a} a^x$ é uma primitiva de $a^x$. Portanto,

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C.$$

3. Calcule a integral $\displaystyle\int x \ln x dx$.

*Solução.* Usaremos a fórmula de integração por partes, introduzida na aula 10, ou seja,

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Chamemos $u = \ln x$ e $dv = xdx$ para obter $du = \dfrac{1}{x} dx$ e $v = \dfrac{x^2}{2}$ donde

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x + C.$$

4. Calcule a integral $\int \ln x dx$.

   *Solução.* Façamos $u = \ln x$ e $dv = dx$ e usemos a fórmula da integração por partes. Assim, $du = \frac{1}{x}dx$ e $v = x$, o que nos fornece

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} x dx = x \ln x - x + C.$$

5. Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da função $y = \ln x$ no ponto $(1, 0)$.

   *Solução.* A inclinação da reta tangente ao gráfico da função $y = \ln x$ em um ponto de abscissa $x > 0$ é dada por $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$. Fazendo $x = 1$, teremos a inclinação $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = 1$ e daí a reta tangente solicitada no problema é $y = x - 1$.

6. Calcule o limite

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^{x+1}.$$

   *Solução.* Observemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^{x+1} &= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+1-1}{x+1}\right)^{x+1} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^{x+1} \\
&= e^{-1}
\end{aligned}$$

# 6 Exercícios propostos

1. Calcule $\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx$.

2. Mostre que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = e^{-x}.$$

3. Encontre todas as funções $f(x)$ que satisfazem à igualdade $f'(x) = f(x)$.

4. Encontre a área da região plana limitada pelos gráficos das funções $y = x^2, y = \frac{1}{x}$ e pela reta vertical $x = \frac{1}{2}$.

5. Mostre que a reta tangente ao gráfico de $y = \ln x$, passando pelo ponto de abscissa $e$ passa pela origem.

6. Encontre a área da região limitada pelo eixo $ox$, a reta $x = e$ e o gráfico de $y = \ln x$.

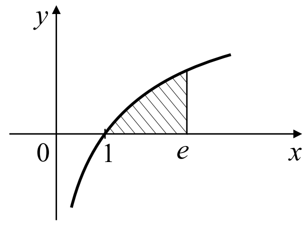


Fig. 12.3

7. Calcule a derivada de cada uma das funções abaixo:
   (a) $x8^x$ (b) $10^{x^2}$ (c) $10^x x^{10}$.

8. Calcule as derivadas das funções abaixo:

   (a) $y = e^{5x}$
   (b) $y = e\sqrt{x}$
   (c) $y = e^{\frac{x}{3}}$
   (d) $y = e^{\cos x}$
   (e) $y = e^{|x|}$
   (f) $y = \frac{e^x}{x^2}$
   (g) $y = 3^{\operatorname{sen} x}$
   (h) $y = 10^{x \cos x}$
   (i) $y = x^{e^x}$
   (j) $y = e^{2^x}$

9. Esboce o gráfico da função $y = e^{|x|}$.

10. Esboce o gráfico da função $y = e^{x+k}$ em que $k$ é uma constante.

11. Esboce o gráfico da função $y = e^{|x|+k}$.

12. Determine a reta normal ao gráfico da função $y = e^{x^2}$ quando $x = 1$.

13. Mostre que as funções $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{2x}$ e $y_3(x) = Ae^x + Be^{2x}$ satisfazem à igualdade

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

# 7 Respostas dos exercícios propostos

1. $\ln 2$

2. Sugestão: Verifique inicialmente que $e^x = \lim_{n\to -\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. A seguir, no limite $\lim_{n\to +\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = e^{-x}$, faça a mudança de variável $u = -n$.

3. $f(x) = Ae^x$ em que $A$ é uma constante.

4. $\ln 2 - \frac{7}{24}$

5. A equação da reta procurada é $y = \frac{1}{e}x$

6. 1

7. (a) $8^x + 8^x x \ln x$ (b) $2\cdot 10^{x^2} x \ln(10)$ (c) $10^x x^{10}\ln x + 10\cdot 10^x x^9$

8. (a) $y' = 5e^{5x}$
   (b) $y' = \frac{e}{2\sqrt{x}}$
   (c) $y' = \frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}$
   (d) $y' = -e^{\cos x}\mathrm{sen}\, x$
   (e) $y' = \begin{cases} e^x & \text{se } x > 0 \\ -e^{-x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$
   (f) $y' = \frac{e^x(x-1)}{x^3}$
   (g) $y' = \ln 3\,(3^{\mathrm{sen}\, x}\cos x)$
   (h) $y' = 10^{x\cos x}(\cos x - x\,\mathrm{sen}\, x)\ln 10$
   (i) $y' = x^{e^x}e^x\left(\ln x + \frac{1}{x}\right)$
   (j) $y' = e^{2^x}2^x\ln x$

9.

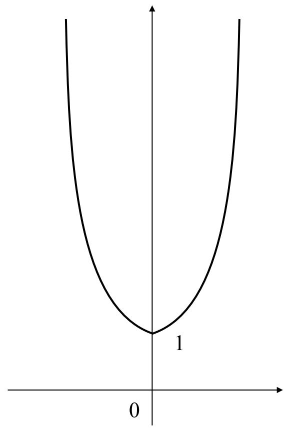


Fig. 12.4

10.

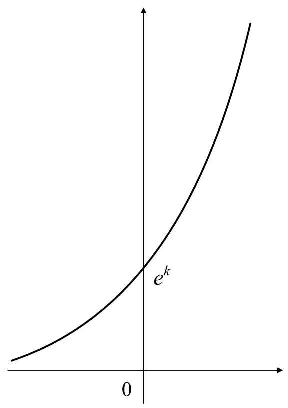


Fig. 12.5

11.

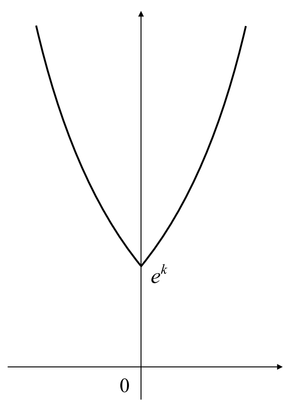


Fig. 12.6

12. $y = -\dfrac{1}{2e}(x-1) + e$

13. Basta mostrar que a função $y_1$ e suas primeira e segunda derivadas satisfazem $y_1'' - 3y_1' + 2y_1 = 0$ fazendo substituição de $y_1$, $y_1'$ e $y_1''$

nessa fórmula. O mesmo deve ser feito para $y_2$ e $y_3$.

## Nesta aula você aprendeu:

- a definição e as propriedades da função exponencial.
- a calcular a derivada e a integral da função exponencial.

# 8 Apêndice

## Como construir uma tábua de logaritmos

Este Apêndice é baseado, parcialmente, em um artigo do Prof. Geraldo Ávila[2]

Como vimos na Definição 7 desta aula, dado um número positivo $a \neq 1$, o logaritmo de um número positivo $x$, na base $a$, é dado por

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

e a função $\log_a : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ é a inversa da função exponencial

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & (0, +\infty) \\ x & \mapsto & a^x. \end{array}$$

Antes do advento e popularização das calculadoras eletrônicas, os valores dos logaritmos vinham listados em tabelas incluídas nos textos utilizados no Curso Científico, um dos precursores do atual ensino médio. Veja o livro de Bezerra[3], bastante popular há algumas décadas, que contém uma tábua de logaritmos.

Como, então, tais tábuas eram construídas?

Os logaritmos que mais se popularizaram foram os decimais, que são aqueles calculados na base 10. Tais logaritmos, foram introduzidos por Henry Briggs (1561-1631), e por isso são também chamados logaritmos de Briggs, tiveram sua tábua publicada pela primeira vez em 1617 e, depois, em uma versão mais ampliada, em 1624.

Comecemos lembrando o que vem a ser o logaritmo de um número na base 10:

> O logaritmo de um número $N$ na base 10, designado por $\log_{10} N$, é o expoente $r$ a que se deve elevar 10 a fim de obter $N$, isto é, $N = 10^r$.

De agora em diante designaremos o logaritmo na base 10 simplesmente por log. Observemos, inicialmente, que qualquer número positivo pode ser escrito na forma de uma potência de 10 vezes um número $\alpha$ pertencente ao intervalo $[0, 10)$. Por exemplo,

$$\begin{array}{rcl} 17749 & = & 1,7749 \times 10^4 \\ 0,00031 & = & 3,1 \times 10^{-4} \end{array}$$

[2]Geraldo Ávila, Como se Constrói uma Tábua de Logaritmos, Revista do Professor de Matemática 26(1994)1-7.

[3]Manoel Jairo Bezerra, Curso de Matemática, Companhia Editora Nacional, São Paulo, 1970.

Portanto, é suficiente conhecer os logaritmos dos números do intervalo $(1, 10)$. Tais logaritmos são chamados *mantissas*. Se quisermos calcular $\log 17749$, basta saber o valor de $\log 1,7749$ pois

$$\log 17749 = \log(1,7749 \times 10^4) = \log 1,7749 + \log 10^4 = \log 1,7749 + 4.$$

Briggs procedeu da seguinte maneira. Inicialmente ele extraiu a raiz quadrada de 10, seguida das extrações sucessivas das raízes quadradas dos resultados obtidos em cada extração. Isto é equivalente a calcular

$$10^{\frac{1}{2}},\ \ 10^{\frac{1}{4}},\ \ 10^{\frac{1}{8}},\ \ 10^{16},\ldots$$

Assim,

$$\begin{aligned} 10^{\frac{1}{2}} &= 3,1622 \quad \Rightarrow \quad \log 3,1622 = 0,5; \\ 10^{\frac{1}{4}} &= 1,7783 \quad \Rightarrow \quad \log 1,7783 = 0,25; \\ 10^{\frac{1}{8}} &= 1,3352 \quad \Rightarrow \quad \log 1,3352 = 0,125. \end{aligned}$$

Prosseguindo desta maneira ele obtinha uma tabela na qual estava incluída a seguinte tabelinha:

| $x$ | $\log x$ |
|---|---|
| $10^{1/2} = 3,16228$ | 0,50000 |
| $10^{1/4} = 1,77828$ | 0,25000 |
| $10^{1/8} = 1,33352$ | 0,12500 |
| $10^{1/16} = 1,15478$ | 0,06250 |
| $10^{1/32} = 1,07461$ | 0,03125 |
| $10^{1/64} = 1,03663$ | 0,01563 |
| $10^{1/128} = 1,01815$ | 0,00781 |
| $10^{1/256} = 1,00904$ | 0,00391 |