(Por favor ver la solución al punto 5 primero porque en el se detalla la lógica de la demostración. Para el punto 4 se procedió análogamente, solamente se cambió la forma de la reducción gaussiana para obtener una matriz triangular inferior).

Muestre con detalle que la sustitución hacia atrás se expresa como:

$$x_i = b_i - \sum_{j=0}^{n} a_{ij} x_j$$

Si hacemos una reducción gaussiana con la forma $E_i - (a_{i,j} / a_{jj})E_j$, con $i = 1, 2, \ldots, n-1$, $j = i+1, i+2, \ldots, n$ y $a_{jj} \neq 0$, sobre la matriz

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & a_{n,n+1} \end{array}\right]$$

obtenemos la matriz triangular inferior

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & a_{n,n+1} \end{array}\right]$$

que se puede escribir como el sistema lineal

$$
\begin{array}{lcl}
a_{11}x_1 & = & a_{1,n+1} \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = & a_{2,n+1} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn} & = & a_{n,n+1}
\end{array}
$$

Resolviendo la primera ecuación obtenemos

$$x_1 = \frac{a_{1,n+1}}{a_{11}}$$

Resolviendo la segunda nos da

$$x_2 = \frac{a_{2,n+1} - a_{21}x_1}{a_{22}}$$

Resolviendo la tercera

$$x_3 = \frac{a_{3,n+1} - a_{32}x_2 - a_{31}x_1}{a_{33}}$$

y en general

$$x_i = \frac{a_{i,n+1} - a_{i,i-1}x_{i-1} - a_{i,i-2}x_{i-2} - \cdots - a_{i,1}x_1}{a_{ii}}$$

$$= \frac{a_{i,n+1} - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j}{a_{ii}}$$

$$= \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j}{a_{ii}}$$