Muestre con detalle que la sustitución hacia atrás se expresa como:

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j}{a_{ii}}$$

donde $i = n, n-1, \dots, 0$. Note que la diagonal de la matriz triangular superior puede tener cualquier valor.

Consideremos el sistema

$$\begin{aligned}
E_1 &: a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1,\\
E_2 &: a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2,\\
&\vdots\\
E_n &: a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n
\end{aligned}$$

Esto lo podemos escribir como una matriz ampliada así

$$[A, b] = \left[\begin{array}{cccc|c}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1}\\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_{2,n+1}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & a_{n,n+1}
\end{array}\right]$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{A} \quad \underbrace{\qquad}_{b}$$

donde A es la matriz de coeficientes y $b_i = a_{i,n+1}$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$.

Ahora aplicamos la reducción gaussiana a esta matriz. Si $a_{11} \neq 0$, entonces $E_j - (a_{j1}/a_{11})E_1 \rightarrow E_j$, $j = 2, 3, \ldots, n$, elimina el coeficiente de x_1 en cada fila. Si hacemos esto secuencialmente vemos que $E_j - (a_{ji}/a_{ii})E_i \rightarrow E_j$, $j = i+1, i+2, \ldots, n$, siempre que $a_{ii} \neq 0$, elimina x_i en cada fila debajo de la i-ésima para $i = 1, 2, \ldots, n-1$. La matriz resultante nos queda

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} & a_{n,n+1} \end{array}\right]$$

Como esta matriz es triangular superior podemos hacer sustituciones hacia atrás. Primero, escribamos la matriz como un sistema lineal de ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots \cdots + a_{1n}x_n & = & a_{1,n+1} \\ a_{22}x_2 + \cdots \cdots + a_{2n}x_n & = & a_{2,n+1} \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots & = & \cdots \\ a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n & = & a_{n-1,n+1} \\ a_{nn}x_n & = & a_{n,n+1} \end{array}$$

Resolviendo la n-ésimo ecuación obtenemos

$$x_n = \frac{a_{n,n+1}}{a_{nn}}$$

Resolviendo la (n-1)-ésima para x_{n-1} y usando x_n obtenemos

$$x_{n-1} = \frac{(a_{n-1,n+1} - a_{n-1,n}\, x_n)}{a_{n-1}, a_{n-1}}$$

y si continuamos vemos que

$$x_i = \frac{(a_{i,n+1} - a_{i,n} x_n - a_{i,n-1} x_{n-1} - \cdots - a_{i,a_{i+1}} x_{i+1})}{a_{n-1,n-1}}$$

$$= \frac{a_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j}{a_{ii}}$$

$$= \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j}{a_{ii}}$$

donde $i = n, n-1, \ldots, 0$.