TALLER 2 - Interpolación de Lagrange - 1

Consideremos los $n+1$ polinomios dados por

$$L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \qquad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

Si hacemos la expansión:

$$L_k(x) = \frac{x - x_0}{x_k - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_k - x_1} \cdots \frac{x - x_{k-1}}{x - x_{k-1}} \cdot \frac{x - x_{k+1}}{x - x_{k+1}} \cdots \frac{x - x_n}{x_k - x_n}$$

vemos que x se multiplica consigo misma n veces. Luego, $\text{grad}(L_k) = n$.

También, este polinomio cumple $L_k(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j \\ 0 & \text{si } k \neq j \end{cases}$

Ahora, consideremos el conjunto de puntos $\Omega = \{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$, y el polinomio interpolador $P(x)$ dado por

$$P(x) := \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x)$$

Es obvio que $\text{grad}(P) \leq n$ porque P es una suma de L_n polinomios de grado n.

Por la condición que cumplen los polinomios L_k, tenemos que para un determinado punto punto x_i valen 1 y en los demás 0. Por tanto,

$$P(x_0) = y_0, \quad P(x_1) = y_1, \quad \dots, \quad P(x_n) = y_n$$

Ahora, supongamos que hay otro polinomio interpolador $Q(x)$, con $grad(Q) \leq n$, tal que

$$P(x_i) = Q(x_i) = y_i, \quad i = 0,1,2,\dots,n.$$

Entonces, podríamos considerar a su vez el polinomio $H(x) = P(x) - Q(x)$ que tiene $grad(H) = grad(P-q) \leq n$. Pero, por otra parte, $H(x)$ se anula en los $n+1$ puntos de Ω porque $P(x_i) = Q(x_i) = y_i$, $i = 0,1,2,\dots,n \Rightarrow P(x_i) - Q(x_i) = 0$, $i = 0,1,2,\dots,n$.

Vemos entonces que H tendría grado $\leq n$ y $n+1$ ceros, lo cual contradice el hecho de que un polinomio de grado n tiene exactamente n ceros (Teorema fundamental del A'lgebra).

Entonces, tal polinomio H sólo tendría sentido si es nulo, es decir, $H(x) = 0 \Rightarrow P(x) - Q(x) = 0 \Rightarrow P(x) = Q(x)$, lo cual prueba la unicidad.

TALLER 2 - Integración - 1 y 3

① El polinomio de Lagrange de primer orden que interpola dos puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ es

$$L(x) = \frac{f(a)(x-b)}{(a-b)} + \frac{f(b)(x-a)}{(b-a)}$$

y entonces la integral en el intervalo $[a, b]$ de la curva $f(x)$ donde se encuentran $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ es más o menos

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b L(x)\,dx$$

4. $$\int_a^b L(x)\,dx = \int_a^b \frac{f(a)(x-b)}{a-b} + \frac{f(b)(x-a)}{b-a}\,dx$$

$$= \int_a^b \frac{f(a)(x-b)}{a-b}\,dx + \int_a^b \frac{f(b)(x-a)}{b-a}\,dx$$

$$= \frac{f(a)}{a-b}\int_a^b x - b\,dx + \frac{f(b)}{b-a}\int_a^b x - a\,dx$$

$$= \frac{f(a)}{a-b}\int_a^b x\,dx - \int_a^b b\,dx + \frac{f(b)}{b-a}\int_a^b x\,dx - \int_a^b a\,dx$$

$$= \frac{f(a)}{a-b}\left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b - [bx]_a^b\right) + \frac{f(b)}{b-a}\left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b - [ax]_a^b\right)$$

$$= \frac{f(a)}{a-b}\left[\left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right) - (b^2 - ab)\right] + \frac{f(b)}{b-a}\left[\left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right) - (ab - a^2)\right]$$

$$= \frac{f(a)}{a-b}\left[\frac{b^2 - a^2 - 2b^2 + 2ab}{2}\right] + \frac{f(b)}{b-a}\left[\frac{b^2 - a^2 - 2ab + 2a^2}{2}\right]$$

$$= \frac{f(a)}{a-b}\left[\frac{-a^2 - b^2 + 2ab}{2}\right] + \frac{f(b)}{b-a}\left[\frac{b^2 - 2ab + a^2}{2}\right]$$

$$= -\frac{f(a)}{a-b}\left[\frac{a^2+b^2-2ab}{2}\right] + \frac{f(b)}{b-a}\left[\frac{b^2-2ab+a^2}{2}\right]$$

$$= -\frac{f(a)}{\cancel{a-b}}\frac{(a-b)^{\cancel{2}}}{2} + \frac{f(b)}{\cancel{b-a}}\frac{(b-a)^{\cancel{2}}}{2}$$

$$= \frac{f(a)(b-a)}{2} + \frac{f(b)(b-a)}{2}$$

$$= \frac{(b-a)}{2}[f(a) + f(b)]$$

② En este caso, el polinomio interpolador de Lagrange es de grado dos definido en el conjunto $\Omega = \{(a, f(a)), (x_m, f(x_m)), (b, f(b))\}$, donde $x_m = \frac{a+b}{2}$ es el punto medio del intervalo, es:

$$L(x) = \frac{(x-b)(x-x_m)}{(a-b)(a-x_m)}f(a) + \frac{(x-a)(x-b)}{(x_m-a)(x_m-b)}f(x_m) + \frac{(x-a)(x-x_m)}{(b-a)(b-x_m)}f(b)$$

Sea $A = \frac{f(a)}{(a-b)(a-x_m)}$, $B = \frac{f(x_m)}{(x_m-a)(x_m-b)}$ y $C = \frac{f(b)}{(b-a)(b-x_m)}$, podemos escribir

$$L(x) = A(x-b)(x-x_m) + B(x-a)(x-b) + C(x-a)(x-x_m)$$

$$= A(x^2 - xx_m - bx + bx_m) + B(x^2 - bx - ax + ab) + C(x^2 - xx_m - ax + ax_m)$$

$$= Ax^2 - Axx_m - Abx + Abx_m + Bx^2 - Bbx - Bax + Bab + Cx^2 -$$

$$Cxx_m - Cax + Cax_m$$

$$= (A+B+C)x^2 + (-Ax_m - Ab - Bb - Ba - Cx_m - Ca)x + Abx_m + Bab$$

$$+ Cax_m$$

y ahora, sea $U = A + B + C$, $V = -Ax_m - Ab - Bb - Ba - Cx_m - Ca$ y $W = Abx_m + Bab + Cax_m$. Entonces, $L(x) = Ux^2 + Vx + W$.

De manera que $\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b L(x)\,dx.$

Así pues, $\int_a^b L(x)\,dx = \int_a^b ux^2 + vx + w\,dx$

$$= \frac{ux^3}{3} + \frac{vx^2}{2} + wx \Big|_a^b$$

$$= \frac{u(b^3 - a^3)}{3} + \frac{v(b^2 - a^2)}{2} + W(b-a)$$

$$= \frac{b-a}{6}\left[2U(b^2 + ab + a^2) + 3V(b+a) + 6W\right]$$

$$= \frac{b-a}{6}(2ub^2 + 2uab + 2ua^2 + 3Vb + 3Va + 6W)$$

$$= \frac{b-a}{6}(\underbrace{ua^2 + va + w}_{L(a)} + \underbrace{ub^2 + vb + w}_{L(b)} + ub^2 + 2uab + 2Vb$$

$$+ 2Va + 4W + ua^2)$$

$$= \frac{b-a}{6}(L(a) + L(b) + U(a^2 + 2ab + b^2) + 2V(a+b)$$

$$+ 4W$$

$$= \frac{b-a}{6}(L(a) + L(b) + u(a+b)^2 + 2V(a+b) + 4W)$$

$$= \frac{b-a}{6}(L(a) + L(b) + 4\underbrace{\left[U\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + V\left(\frac{a+b}{2}\right) + W\right]}_{L\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

$$= \frac{b-a}{6}\left(L(a) + L(b) + 4L\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{b-a}{6}(L(a) + 4L(x_m) + L(b))$$