

Taller 4 - Técnicas de conteo - Ejercicio 20

Consideremos una colección de n objetos:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$$

y suponemos que escogemos r de estos objetos y que la repetición de objetos está permitida.

¿Cómo se puede expresar la combinación de objetos elegidos?

Una forma es considerando r espacios que serán llenados con los objetos escogidos:

$$\underline{a_1} \quad \underline{a_1} \quad \underline{a_3} \quad \underline{a_4} \quad \underline{a_4} \quad \underline{a_7} \quad \dots \quad \underline{a_{n-1}} \quad \underline{a_n} \quad \underline{a_n}$$

r espacios

Notar que el orden es irrelevante, sin importar como los acomodamos la colección de r objetos es la misma.

Otra forma es considerando de nuevo los mismos r espacios, pero esta vez usaremos barras para separar las diferentes secciones que quiero llenar con diferentes objetos. Así,

Indica que paro de llenar con a_1 y sigo con a_2

Indica que paro de llenar con a_2 y sigo con a_3 (En este caso no hay ningún a_2 entonces).

Paro de llenar con a_3 y sigo con a_4

Paro con a_{n-1} y sigo con a_n
Paro con a_{n-2} y sigo con a_{n-1}
Paro con a_6 y sigo con a_7
Paro con a_5 y sigo con a_6
Paro con a_4 y sigo con a_5

De manera que obtenemos de nuevo

$$\underline{a_1} \quad \underline{a_1} \parallel \underline{a_3} \mid \underline{a_4} \quad \underline{a_4} \parallel \underline{a_7} \quad \dots \quad \mid \underline{a_{n-1}} \mid \underline{a_n} \quad \underline{a_n}$$

Por tanto, el problema de contar de cuántas formas se pueden escoger r objetos de una colección de n objetos con repetición, permitida se convierte en el problema de contar de cuántas formas podemos organizar las barras en medio de r espacios porque cada arreglo de barras corresponde a una combinación de r objetos y viceversa.

Para responder esta última pregunta notemos que entre los espacios y las barras tenemos un total de cosas $= r$ espacios $+ n-1$ barras (porque no es necesario poner una barra al final).

Entonces, podemos responder la pregunta imaginando que tenemos $K = r + n - 1$ espacios para poner cosas (barras y objetos) y necesitamos organizar $n-1$ barras o r objetos, no importa, en estos K espacios. Esto último es exactamente una combinación clásica. Por tanto,

$$C_r^n = \binom{K}{r} = \binom{r + n - 1}{r} = \binom{r + n - 1}{n - 1}$$