Consideremos una función f cuyo dominio es el conjunto de puntos discretos equiespaciados $\Omega = \{(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n)\}$, siendo $h << 1$ el paso entre dos puntos contiguos.

Nos interesa la cuarta derivada de f, denotada f^4, en un punto cualquiera x. Para ello, consideremos la expansiones de Taylor de f en los puntos $x-2h$, $x-h$, $x+h$ y $x+2h$. Así:

$$f(x+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(h)^n = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f^2(x) + \frac{h^3}{3!}f^3(x) + \frac{h^4}{4!}f^4(x) + \frac{h^5}{5!}f^5(x) + \frac{h^6}{6!}f^6(x) + \cdots \quad (1)$$

$$f(x-h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(-h)^n = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f^2(x) - \frac{h^3}{3!}f^3(x) + \frac{h^4}{4!}f^4(x) - \frac{h^5}{5!}f^5(x) + \frac{h^6}{6!}f^6(x) + \cdots \quad (2)$$

$$f(x+2h) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(2h)^n = f(x) + 2hf'(x) + \frac{4h^2}{2!}f^2(x) + \frac{8h^3}{3!}f^3(x) + \frac{16h^4}{4!}f^4(x) + \frac{32h^5}{5!}f^5(x) + \frac{64h^6}{6!}f^6(x) + \cdots \quad (3)$$

$$f(x+2h) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(2h)^n = f(x) - 2hf'(x) + \frac{4h^2}{2!}f^2(x) - \frac{8h^3}{3!}f^3(x) + \frac{16h^4}{4!}f^4(x) - \frac{32h^5}{5!}f^5(x) + \frac{64h^6}{6!}f^6(x) + \cdots \quad (4)$$

Sumando (1) y (2) y, por otro lado, (3) y (4):

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + \frac{2h^2}{2!}f^2(x) + \frac{2h^4}{4!}f^4(x) + \frac{2h^6}{6!}f^6(x) \quad (5)$$

$$f(x+2h) + f(x-2h) = 2f(x) + \frac{8h^2}{2!}f^2(x) + \frac{32h^4}{4!}f^4(x) + \frac{128h^6}{6!}f^6(x) \quad (6)$$

Multiplicando (5) por 4 obtenemos:

$$4f(x+h) + 4f(x-h) = 8f(x) + \frac{8h^2}{2!}f^2(x) + \frac{8h^4}{4!}f^4(x) + \frac{8h^6}{6!}f^6(x) \quad (7)$$

Restando (6) de (7):

$$4f(x+h) + 4f(x-h) - f(x+2h) - f(x-2h) = 6f(x) - \frac{24}{4!}h^4f^4(x) - \frac{120h^6 f^6(x)}{6!}$$

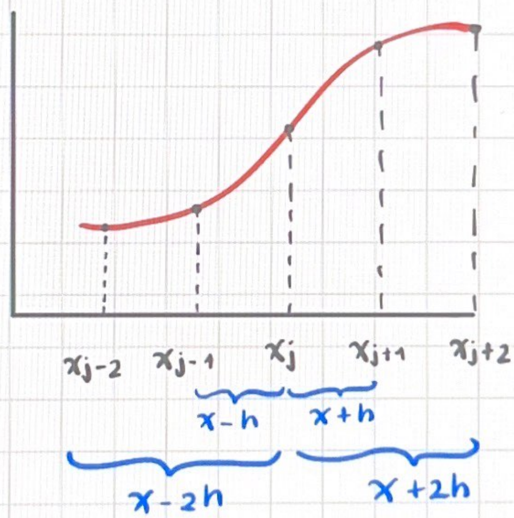
$$4f(x+h) + 4f(x-h) - f(x+2h) - f(x-2h) = 6f(x) - h^4f^4(x) - \frac{120h^6 f^6(x)}{6!} \quad (8)$$

Despejamos f^4 en (8):

$$f^4(x) = \frac{4f(x+h) + 4f(x-h) - f(x+2h) - f(x-2h) - 6f(x)}{-h^4} - \frac{120 h^2 f^6(x)}{6!}$$

$$f^4(x) = \frac{f(x+2h) - 4f(x+h) + 6f(x) - 4f(x-h) + f(x+2h)}{h^4} - \frac{120 h^2 f^6(x)}{6!}$$

Entonces, para un punto x_j vemos que:



De manera que

$$f^4(x_j) = \frac{f(x_{j+2}) - 4f(x_{j+1}) + 6f(x_j) - 4f(x_{j-1}) + f(x_{j-2})}{h^4} + O(h^2)$$

El orden de aproximación es cuadrático.