

二分法和牛顿迭代法求解非线性方程的比较及应用

张晓勇,王仲君

(武汉理工大学,湖北 武汉 430070)

摘要:本文基于计算机MATLAB和C语言编程去分析两者的计算复杂性,并深入探讨了两种方法的优缺点。最后,通过将两种方法结合起来解决非线性方程的求解问题,取得了显著地效果。同时,这也再次证明了方法组合解决问题的高效性。

关键词:二分法;牛顿迭代法;非线性方程

中图分类号:O242

文献标志码:B

文章编号:1674-9324(2013)25-0139-01

求解方程的近似根,一般需要解决两个问题:

1.根的隔离。即找出有根区域,使得在一些小区间中方程只有一根(或一对共轭复根)以便获取各根的较粗糙的近似值。

2.近似根的精确化。即用求根的数值方法,使求得的近似根逐步精确化,直到获得一定精度的近似根。

一、二分法和牛顿迭代法的基本思想

1.二分法。一般地,对于函数 $f(x)$,如果存在实数 c ,当 $x=c$ 时,若 $f(c)=0$,那么把 $x=c$ 叫做函数 $f(x)$ 的零点。解方程即要求 $f(x)$ 的所有零点。假定 $f(x)$ 在区间 (x,y) 上连续,先找到 a,b 属于区间 (x,y) ,使 $f(a),f(b)$ 异号,说明在区间 (a,b) 内一定有零点,然后求 $[f(a+b)/2]$,现在假设 $f(a)<0,f(b)>0,a<b$,①如果 $[f(a+b)/2]=0$,该点就是零点。如果 $[f(a+b)/2]<0$,则在区间 $((a+b)/2,b)$ 内有零点,注: $(a+b)/2>a$,从①开始继续使用中点函数值判断。如果 $[f(a+b)/2]>0$,则在区间 $(a,(a+b)/2)$ 内有零点,注: $(a+b)/2<b$,从①开始继续使用中点函数值判断。这样就可以不断接近零点。通过每次把 $f(x)$ 的零点所在小区间收缩一半的方法,使区间的两个端点逐步逼近函数的零点,以求得零点的近似值,这种方法叫做二分法。从以上可以看出,每次运算后,区间长度减少一半,是线形收敛。另外,二分法不能计算复根和重根。

2.牛顿迭代法。设 r 是 $f(x)=0$ 的根,选取 x_0 作为 r 初始近似值,过点 $(x_0,f(x_0))$ 做曲线 $y=f(x)$ 的切线 L,L 的方程为 $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$,求出 L 与 x 轴交点的横坐标 $x_1=x_0-f(x_0)/f'(x_0)$,称 x_1 为 r 的一次近似值。过点 $(x_1,f(x_1))$ 作曲线 $y=f(x)$ 的切线,并求该切线与 x 轴交点的横坐标 $x_2=x_1-f(x_1)/f'(x_1)$,称 x_2 为 r 的二次近似值。重复以上过程,得 r 的近似值序列,其中 $x_{(n+1)}=x_{(n)}-f(x_{(n)})/f'(x_{(n)})$,称为 r 的 $n+1$ 次近似值,上式称为牛顿迭代公式。解非线性方程 $f(x)=0$ 的牛顿法是把非线性方程线性化的一种近似方法。把 $f(x)$ 在 x_0 点附近展开成泰勒级数 $f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+(x-x_0)^2 \cdot f''(x_0)/2!+\dots$ 取其线性部分,作为非线性方程 $f(x)=0$ 的近似方程,即泰勒展开的前两项,则有 $f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=0$ 设 $f'(x_0) \neq 0$ 则其解为 $x_1=x_0-f(x_0)/f'(x_0)$ 这样,得到牛顿法的一个迭代序列: $x_{(n+1)}=x_{(n)}-f(x_{(n)})/f'(x_{(n)})$,记为: $\{x_{(n)}\}$ 。此时,当 n 趋于无穷大时, $x_{(n)}$ 就会逐渐逼近 $f(x)=0$ 的根。

二、例证分析

1.对此非线性方程 $x^3-50x^2-6610=0$ 在单独用二分法和牛顿迭代法时的效果都不显著。

实验的结果分析:

由此可见,牛顿迭代法是一种特殊的迭代法,用于求

表1 二分法程序结果

迭代数	区间值: x0	区间值: x1
1	0.00000000000000	500.000000000000
2	0.00000000000000	250.000000000000
...
20	52.4063110000000	52.4072650000000
21	52.4067880000000	52.4067880000000

表2(a) 牛顿迭代法程序结果(初始值取0.00时)

迭代数	每次迭代初始值: x0	每次迭代输出值: x1
1	0.00000000000000	不存在
2	不收敛	不收敛

表2(b) 牛顿迭代法程序结果(初始值取10.00时)

迭代次数	每次迭代初始值: x0	每次迭代输出值: x1
1	10.0000000000000	-5.15714300000000
2	-5.15714300000000	8.40613300000000
.....
25	52.4816860000000	53.9111020000000
26	52.4069290000000	52.0406929000000

表3 牛顿迭代法和二分法结合的程序结果

迭代数	每次迭代初始值: x0	每次迭代输出值: x1
1	50.0000000000000	52.6440010000000
2	52.4057080000000	52.4087180000000
3	52.4067310000000	52.4087310000000

非线性方程单根时具有二阶收敛速度。但是,牛顿法也有自己的缺点。如对初值要求苛刻,而且还要求函数的导数。

综上所述,显然,通过将两种方法结合起来解决非线性方程的求解问题,取得了显著地效果。迭代次数大大减少,极大降低了计算的复杂性,收到了很好的效果。

如何针对不同的方程构造不同的迭代公式,如何降低对初值的依赖性和提高收敛的速度,都是非线性方程求根问题中经常考虑的问题。本文通过对比两种算法的优劣,得出了牛顿迭代法和二分法各自的特点,并把两种方法结合起来,先通过二分法找到合适的初始值,然后再用牛顿法进行迭代运算,大大节约了时间,降低了计算复杂性。这也证实了把各种方法的长处结合起来,来解决问题往往收到不错的结果。

作者简介:张晓勇(1987-),男,河南民权人,在读研究生,研究方向:计算数学中的系统建模与仿真。