信号检测与估值

段江涛
机电工程学院

2019 年 9 月

ch3. 信号检测与估计理论的基础知识

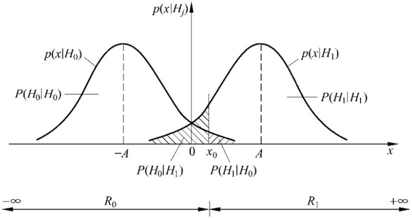
ch3-2. 贝叶斯准则

$$H_0: x = -A + n, \quad H_1: x = A + n$$

$$H_0: x_k = -A + n_k, \quad H_1: x_k = A + n_k$$

$$k = 1, 2, \ldots, N, \quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)^T$$

$$P(H_i|H_j) = \int_{R_i} p(\boldsymbol{x}|H_j) d\boldsymbol{x}$$



$$P(H_0|H_0) = \int_{R_0} p(\boldsymbol{x}|H_0) d\boldsymbol{x}, \qquad P(H_1|H_0) = \int_{R_1} p(\boldsymbol{x}|H_0) d\boldsymbol{x}$$

$$P(H_0|H_1) = \int_{R_0} p(\boldsymbol{x}|H_1) d\boldsymbol{x}, \qquad P(H_1|H_1) = \int_{R_1} p(\boldsymbol{x}|H_1) d\boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{R} = R_0 \cup R_1, \quad R_0 \cap R_1 = \emptyset, \quad \int_{\boldsymbol{R}} p(\boldsymbol{x}|H_j) d\boldsymbol{x} = 1$$

$$P(H_0|H_0) + P(H_1|H_0) = \int_{R_0} p(\boldsymbol{x}|H_0) d\boldsymbol{x} + \int_{R_1} p(\boldsymbol{x}|H_0) d\boldsymbol{x} = \int_{\boldsymbol{R}} p(\boldsymbol{x}|H_0) d\boldsymbol{x} = 1$$

$$P(H_0|H_1) + P(H_1|H_1) = \int_{R_0} p(\boldsymbol{x}|H_1) d\boldsymbol{x} + \int_{R_1} p(\boldsymbol{x}|H_1) d\boldsymbol{x} = \int_{\boldsymbol{R}} p(\boldsymbol{x}|H_1) d\boldsymbol{x} = 1$$

贝叶斯准则—基本要求

- 充分理解平均代价 (Average risk) 的概念
- 贝叶斯准则 (Bayes criterion) 的判决表达式
- 判决性能分析

贝叶斯准则的基本原理：在划分观察空间时，使平均代价最小。

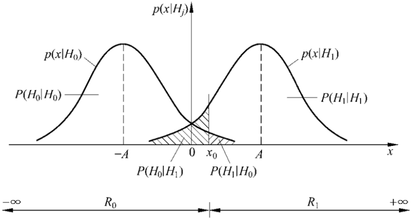
信号统计检测理论要研究的基本问题—判决域的划分

$$H_0 : x = -A + n, \quad H_1 : x = A + n$$

$$H_0 : x_k = -A + n_k, \quad H_1 : x_k = A + n_k$$

$$k = 1, 2, \ldots, N, \quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)^T$$

$$P(H_i|H_j) = \int_{R_i} p(\boldsymbol{x}|H_j) d\boldsymbol{x}$$



- 目标: 正确判决概率 $P(H_j|H_j)$ 尽可能大,错误判决概率 $P(H_i|H_j)(i \neq j)$ 尽可能小。
- 判决域的划分影响判决概率 $P(H_i|H_j)$, 因此**需要最佳划分判决域**。
- $p(\boldsymbol{x}|H_j)(j = 0, 1)$: 假设 H_j 下观测信号的概率密度函数。它描述观测 (接收) 信号的统计特性。
- 按照一定的准则,将观察空间 $\boldsymbol{R}$ 分别划分为 R_0 和 R_1 两个子空间。计算判决概率 $P(H_i|H_j)(i,j = 0, 1)$。

贝叶斯检测的提出动机

通信系统中, 二元信号的平均解调错误概率 (由全概率公式得出):

$$P_e = P(0)P(1|0) + P(1)P(0|1)$$

可以看出, 检测性能不仅与两种错误判决概率 $[P(1|0), P(0|1)]$ 有关, 还与信源发送的 0 和 1 的先验概率 $[P(0), P(1)]$ 有关。

另外, 没做出一种判断, 人们要付出的代价也是不同的。

如何综合考虑上述因素来设计好的检测方法?

贝叶斯检测

给定各种判决代价因子, 且已知各假设的先验概率条件下, 使**平均代价最小**的检测准则。

问题

1. 代价因子如何定义?
2. 平均代价如何计算?
3. 如何获得最小的平均代价?

代价因子的定义

对于二元信号统计检测, 共有四种事件发生, 即

$$\begin{array}{cccc} (H_0|H_0) & (H_1|H_0) & (H_1|H_1) & (H_0|H_1) \\ \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\ c_{00} & c_{10} & c_{11} & c_{01} \end{array}$$

c_{ij} 表示假设 H_j 为真时, 判决假设 H_i 成立所付出的代价

Notes

一般地, $c_{10} > c_{00}, c_{01} > c_{11}$

平均代价的计算

平均代价 C 由两部分构成

1. 信源发送 H_0 假设时, 判决所付出的代价 $C(H_0)$
2. 信源发送 H_1 假设时, 判决所付出的代价 $C(H_0)$

$$C = P(H_0)C(H_0) + P(H_1)C(H_1)$$

参见:

$$P_e = P(0)P(1|0) + P(1)P(0|1)$$

平均代价的计算

对于二元信号统计检测, 共有四种事件发生, 即

$$\begin{array}{cccc} (H_0|H_0) & (H_1|H_0) & (H_1|H_1) & (H_0|H_1) \\ \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\ c_{00} & c_{10} & c_{11} & c_{01} \end{array}$$

c_{ij} 表示假设 H_j 为真时, 判决假设 H_i 成立所付出的代价

因此, 两种假设下, 判决所付出的代价:

$$C(H_0) = c_{00}P(H_0|H_0) + c_{10}P(H_1|H_0)$$

$$C(H_1) = c_{01}P(H_0|H_1) + c_{11}P(H_1|H_1)$$

平均代价: $C = P(H_0)C(H_0) + P(H_1)C(H_1)$

平均代价的计算

$$C = P(H_0)C(H_0) + P(H_1)C(H_1)$$

$$C(H_0) = c_{00}P(H_0|H_0) + c_{10}P(H_1|H_0)$$

$$C(H_1) = c_{01}P(H_0|H_1) + c_{11}P(H_1|H_1)$$

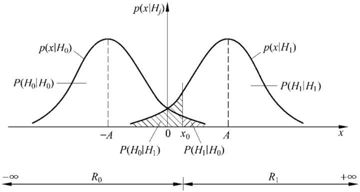
$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} C =& P(H_0)c_{00}P(H_0|H_0) + c_{10}P(H_1|H_0) + \\ & P(H_1)c_{01}P(H_0|H_1) + c_{11}P(H_1|H_1) \end{aligned}$$

平均代价的计算

$$C = P(H_0)c_{00}P(H_0|H_0) + c_{10}P(H_1|H_0) +$$
$$P(H_1)c_{01}P(H_0|H_1) + c_{11}P(H_1|H_1)$$

$$P(H_i|H_j) = \int_{R_i} p(x|H_j)dx$$

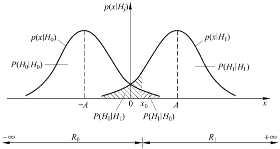


$$\Downarrow$$

$$C = P(H_0)\left(c_{00}\int_{R_0} p(x|H_0)dx + c_{10}\int_{R_1} p(x|H_0)dx\right) +$$
$$P(H_1)\left(c_{01}\int_{R_0} p(x|H_1)dx + c_{11}\int_{R_1} p(x|H_1)dx\right)$$

平均代价的计算

$$C = P(H_0)\left(c_{00}\int_{R_0} p(x|H_0)dx + c_{10}\int_{R_1} p(x|H_0)dx\right) + P(H_1)\left(c_{01}\int_{R_0} p(x|H_1)dx + c_{11}\int_{R_1} p(x|H_1)dx\right)$$



$$\int_R p(x|H_j)dx = 1 \implies \int_{R_1} p(x|H_j)dx = 1 - \int_{R_0} p(x|H_0)dx$$

$$\Downarrow$$

$$C = P(H_0)\left(c_{00}\int_{R_0} p(x|H_0)dx + c_{10}\left(1 - \int_{R_0} p(x|H_0)dx\right)\right) + P(H_1)\left(c_{01}\int_{R_0} p(x|H_1)dx + c_{11}\left(1 - \int_{R_0} p(x|H_1)dx\right)\right)$$

平均代价的计算

$$
\begin{aligned}
C =& P(H_0)\left(c_{00}\int_{R_0} p(x|H_0)dx + c_{10}\left(1-\int_{R_0} p(x|H_0)dx\right)\right) + \\
& P(H_1)\left(c_{01}\int_{R_0} p(x|H_1)dx + c_{11}\left(1-\int_{R_0} p(x|H_1)dx\right)\right) \\
=& P(H_0)\left(c_{10} + c_{00}\int_{R_0} p(x|H_0)dx - c_{10}\int_{R_0} p(x|H_0)dx\right) + \\
& P(H_1)\left(c_{11} + c_{01}\int_{R_0} p(x|H_1)dx - c_{11}\int_{R_0} p(x|H_1)dx\right) \\
=& c_{10}P(H_0) + c_{11}P(H_1) + \\
& \left(\int_{R_0}\left[P(H_1)(c_{01}-c_{11})p(x|H_1) - P(H_0)(c_{10}-c_{00})p(x|H_0)\right]dx\right)
\end{aligned}
$$

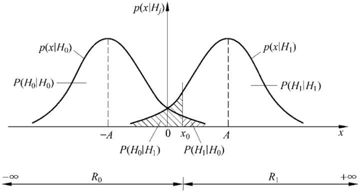
平均代价取最小的条件

$$C = c_{10}P(H_0) + c_{11}P(H_1) + \left(\int_{R_0} \left[P(H_1)(c_{01} - c_{11})p(x|H_1) - P(H_0)(c_{10} - c_{00})p(x|H_0)\right] dx\right)$$

$c_{10}P(H_0)$ 和 $c_{11}P(H_1$ 是两项固定的值

$P(H_1)(c_{01} - c_{11})p(x|H_1) \geq 0$

$P(H_0)(c_{10} - c_{00})p(x|H_0) \geq 0$

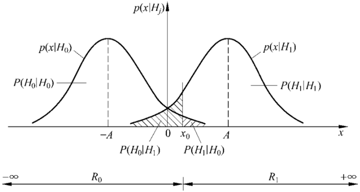


- **因此, 给定信道特性和先验信息, 平均代价 C 的大小完全由判决域 R_0 确定。**
- **把被积函数取负值的观测值 x 划分给 R_0 区域, 而把其余的观测值 x 划分给 R_1, 即可保证平均代价最小。**

平均代价取最小的条件

$$C = c_{10}P(H_0) + c_{11}P(H_1) + \left(\int_{R_0} \left[P(H_1)(c_{01} - c_{11})p(x|H_1) - P(H_0)(c_{10} - c_{00})p(x|H_0)\right] dx\right)$$

把被积函数取负值的观测值 x 划分给 R_0 区域，而把其余的观测值 x 划分给 R_1，即可保证平均代价最小。



$P(H_1)(c_{01} - c_{11})p(x|H_1) < P(H_0)(c_{10} - c_{00})p(x|H_0)$ **判决 H_0 假设成立**

$P(H_1)(c_{01} - c_{11})p(x|H_1) \geq P(H_0)(c_{10} - c_{00})p(x|H_0)$ **判决 H_1 假设成立**

解决方案

1. 代价因子如何定义?

   c_{ij} 表示假设 H_j 为真时, 判决假设 H_i 成立所付出的代价。

   $c_{00}, c_{10}, c_{11}, c_{01}$

2. 平均代价如何计算?

$$
\begin{aligned}
C =& P(H_0)C(H_0) + P(H_1)C(H_1) \\
=& c_{10}P(H_0) + c_{11}P(H_1) + \\
& \left(\int_{R_0} \left[P(H_1)(c_{01} - c_{11})p(x|H_1) - P(H_0)(c_{10} - c_{00})p(x|H_0) \right] dx \right)
\end{aligned}
$$

3. 如何获得最小的平均代价?

$$P(H_1)(c_{01} - c_{11})p(x|H_1) < P(H_0)(c_{10} - c_{00})p(x|H_0) \quad \textbf{判决 } H_0 \textbf{ 假设成立}$$

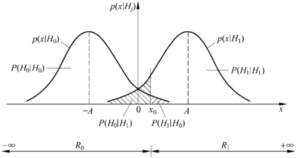
$$P(H_1)(c_{01} - c_{11})p(x|H_1) \geq P(H_0)(c_{10} - c_{00})p(x|H_0) \quad \textbf{判决 } H_1 \textbf{ 假设成立}$$

贝叶斯判决准则

二元信号检测模型:

$$H_0: x = -A + n$$

$$H_1: x = A + n$$



$P(H_1)(c_{01}-c_{11})p(x|H_1) < P(H_0)(c_{10}-c_{00})p(x|H_0)$ **判决 H_0 假设成立**

$P(H_1)(c_{01}-c_{11})p(x|H_1) \geq P(H_0)(c_{10}-c_{00})p(x|H_0)$ **判决 H_1 假设成立**

贝叶斯判决准则

$$\frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} < \frac{P(H_0)(c_{10}-c_{00})}{P(H_1)(c_{01}-c_{11})}$$ **判决 H_0 假设成立**

$$\frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \geq \frac{P(H_0)(c_{10}-c_{00})}{P(H_1)(c_{01}-c_{11})}$$ **判决 H_1 假设成立**

贝叶斯准则判决思路

根据给定的代价计算平均代价

$\Downarrow$

按照平均代价最小划分观测空间, 得到判决准则

$\Downarrow$

对判决表达式进行化简

贝叶斯判决准则

贝叶斯判决准则

$$\frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} < \frac{P(H_0)(c_{10}-c_{00})}{P(H_1)(c_{01}-c_{11})} \qquad \text{判决 } H_0 \text{ 假设成立}$$

$$\frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \geq \frac{P(H_0)(c_{10}-c_{00})}{P(H_1)(c_{01}-c_{11})} \qquad \text{判决 } H_1 \text{ 假设成立}$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)(c_{10}-c_{00})}{P(H_1)(c_{01}-c_{11})}$$

$\Longrightarrow$

$$\lambda(x) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

贝叶斯判决准则

贝叶斯判决准则

$$\frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)(c_{10}-c_{00})}{P(H_1)(c_{01}-c_{11})} \Longrightarrow \lambda(x) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

$$\lambda(x) \overset{def}{=} \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)}$$ 定义为**似然比函数**

$$\eta \overset{def}{=} \frac{P(H_0)(c_{10}-c_{00})}{P(H_1)(c_{01}-c_{11})}$$ 定义为**判决门限**

$\lambda(x)$ 是一维随机变量, 称为**检验统计量**

$\lambda(x)$ 不依赖于假设的先验概率 $[P(H_0), P(H_1)]$, 也与代价因子无关。**适用于不同先验概率和不同代价因子的最佳信号检测**。

贝叶斯准则检测步骤

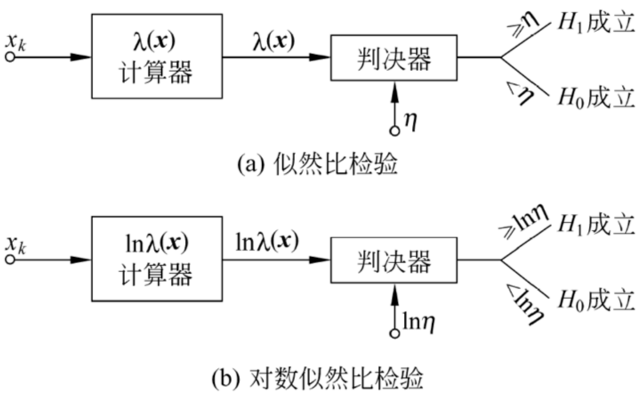
贝叶斯判决准则

$$\frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)(c_{10}-c_{00})}{P(H_1)(c_{01}-c_{11})} \implies \lambda(x) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

利用贝叶斯判决准则进行检测的基本步骤:

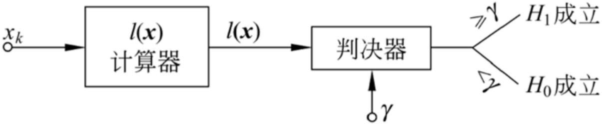
1. 计算两个似然函数, 构建似然比 $\lambda(x) \stackrel{def}{=} \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)}$
2. 根据两个假设的先验概率和代价因子, 计算判决门限 $\eta \stackrel{def}{=} \frac{P(H_0)(c_{10}-c_{00})}{P(H_1)(c_{01}-c_{11})}$
3. 利用上式, 形成贝叶斯检测基本表达式 $\lambda(x) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$
4. 化简, 形成贝叶斯检测判决表达式。如对数似然比检验
   $$\ln\lambda(x) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \ln\eta \implies l(x) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \gamma$$

二元信号检测系统: $\lambda(x) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$

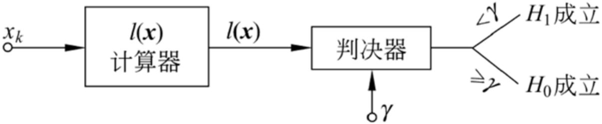


二元信号检测系统原理框图

二元信号检测系统: $\ln \lambda(x) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \ln \eta \implies l(x) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \gamma$



(c) 检验统计量 $l(\boldsymbol{x}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \gamma$



(d) 检验统计量 $l(\boldsymbol{x}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\lessgtr}} \gamma$

二元信号检测系统原理框图

术语

$H_j(j=0,1)$: 信源输出的信号, 称为假设 H_j

$P(H_j)(j=0,1)$: 假设 H_j 为真的先验概率 (先验: 先于试验)

$(x|H_j)(j=0,1)$: 假设 H_j 下的观测信号是随机变量

$p(x|H_j)(j=0,1)$: 假设 H_j 下观测信号的概率密度函数

$(H_i|H_j)(i,j=0,1)$: 在假设 H_j 为真的条件下,判决假设 H_i 成立的结果。

$P(H_i|H_j)(i,j=0,1)$: 在假设 H_j 为真的条件下,判决假设 H_i 成立的概率。

$c_{ij}(i,j=0,1)$: 假设 H_j 为真时, 判决假设 H_i 成立所付出的代价

贝叶斯准则小结 (1)

贝叶斯检测—给定各种判决代价因子, 且已知各假设的先验概率条件下, 使平均代价最小的检测准则。

贝叶斯准则基本思路:

根据给定的代价计算平均代价

$\Downarrow$

按照平均代价最小划分观测空间, 得到判决准则

$\Downarrow$

对判决表达式进行化简

贝叶斯准则小结 (2)

代价因子的定义

对于二元信号统计检测, 共有四种事件发生, 即

$$\begin{array}{cccc} (H_0|H_0) & (H_1|H_0) & (H_1|H_1) & (H_0|H_1) \\ \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\ c_{00} & c_{10} & c_{11} & c_{01} \end{array}$$

c_{ij} 表示假设 H_j 为真时, 判决假设 H_i 成立所付出的代价

Notes

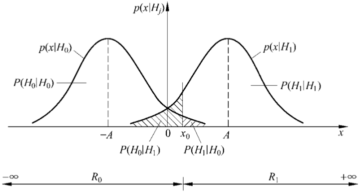
一般地, $c_{10} > c_{00}$, $c_{01} > c_{11}$

贝叶斯准则小结 (3)

平均代价取最小的条件

$$C = c_{10}P(H_0) + c_{11}P(H_1) + \left(\int_{R_0} \left[P(H_1)(c_{01} - c_{11})p(x|H_1) - P(H_0)(c_{10} - c_{00})p(x|H_0) \right] dx \right)$$

把被积函数取负值的观测值 x 划分给 R_0 区域，而把其余的观测值 x 划分给 R_1，即可保证平均代价最小。



$$P(H_1)(c_{01} - c_{11})p(x|H_1) < P(H_0)(c_{10} - c_{00})p(x|H_0) \qquad \text{判决 } H_0 \text{ 假设成立}$$

$$P(H_1)(c_{01} - c_{11})p(x|H_1) \geq P(H_0)(c_{10} - c_{00})p(x|H_0) \qquad \text{判决 } H_1 \text{ 假设成立}$$

贝叶斯准则小结 (4)

贝叶斯判决准则

$$\frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)(c_{10}-c_{00})}{P(H_1)(c_{01}-c_{11})} \implies \lambda(x) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

$$\lambda(x) \overset{def}{=} \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)}$$ **定义为似然比函数**

$$\eta \overset{def}{=} \frac{P(H_0)(c_{10}-c_{00})}{P(H_1)(c_{01}-c_{11})}$$ **定义为判决门限**

$\lambda(x)$ **是一维随机变量, 称为检验统计量**

$\lambda(x)$ **不依赖于假设的先验概率** $[P(H_0), P(H_1)]$**, 也与代价因子无关。适用于不同先验概率和不同代价因子的最佳信号检测。**

贝叶斯准则小结 (5)

贝叶斯判决准则

$$\frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)(c_{10}-c_{00})}{P(H_1)(c_{01}-c_{11})} \implies \lambda(x) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

利用贝叶斯判决准则进行检测的基本步骤:

1. 计算两个似然函数, 构建似然比 $\lambda(x) \overset{def}{=} \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)}$
2. 根据两个假设的先验概率和代价因子, 计算判决门限 $\eta \overset{def}{=} \frac{P(H_0)(c_{10}-c_{00})}{P(H_1)(c_{01}-c_{11})}$
3. 利用上式, 形成贝叶斯检测基本表达式 $\lambda(x) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$
4. 化简, 形成贝叶斯检测判决表达式。如对数似然比检验
   $\ln\lambda(x) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \ln\eta \implies l(x) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \gamma$

贝叶斯准则例题 1

在二元数字通信系统中, 假设为 H_1 时, 信源输出为常值正电压 m, 假设为 H_0 时, 信源输出零电平, 信号在传输过程中迭加了噪声 $n(t)$, 每种信号的持续时间为 T, 请:

1. 若接收端对接收信号 $x(t)$ 在 $(0, T)$ 时间内进行 1 次采样, 给出对应的贝叶斯检测准则。
2. 若接收端对接收信号 $x(t)$ 在 $(0, T)$ 时间内进行 N 次独立采样, 样本为 $x_k(k = 1, 2, \cdots, N)$。给出对应的贝叶斯检测准则。

上述两种情况下, 噪声采样值 n_k 是均值为零, 方差为 σ_n^2 的高斯噪声。

贝叶斯准则例题 1: 解

解: 一次采样时:

$$H_0 : x = n$$

$$H_1 : x = m + n$$

步骤 1: 计算两个似然函数, 构建似然比

由于 n 是高斯分布随机变量, 因此在 H_0 假设下, 观测信号 x 也服从高斯分布, 且均值为 0, 方差为 σ_n^2; 在 H_1 假设下, 观测信号 x 服从均值为 m, 方差为 σ_n^2 的高斯分布。

$$p(x|H_0) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

$$p(x|H_1) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

$$\lambda(x) = \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} = \exp\left(\frac{x^2-(x-m)^2}{2\sigma_n^2}\right) = \exp\left(\frac{m}{\sigma_n^2}x - \frac{m^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

贝叶斯准则例题 1: 解续 (1)

步骤 2: 根据两个假设的先验概率和代价因子, 计算判决门限

$$\eta \overset{def}{=} \frac{P(H_0)(c_{10}-c_{00})}{P(H_1)(c_{01}-c_{11})}$$

步骤 3: 形成贝叶斯检测基本表达式

$$\lambda(x) = \frac{p(\boldsymbol{x}|H_1)}{p(\boldsymbol{x}|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

$$\exp\left(\frac{m}{\sigma_n^2}x - \frac{m^2}{2\sigma_n^2}\right) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

步骤 4: 化简, 形成贝叶斯检测判决表达式

$$\left(\frac{m}{\sigma_n^2}x - \frac{m^2}{2\sigma_n^2}\right) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \ln\eta$$

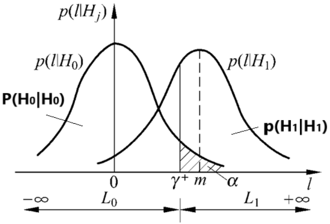
$$l(x) \overset{def}{=} x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma_n^2}{m}\ln\eta + \frac{m}{2} \overset{def}{=} \gamma$$

贝叶斯准则例题 1: 解续 (2)

$$n \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$$

$$H_0 : x = n \qquad x \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$$

$$H_1 : x = m + n \qquad x \sim \mathcal{N}(m, \sigma_n^2)$$



判决表达式: $l(x) \overset{def}{=} x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma_n^2}{m} \ln \eta + \frac{m}{2} \overset{def}{=} \gamma$

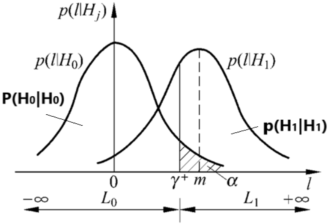
$p(l|H_j)(j = 0, 1)$: 假设 H_j 下观测信号的概率密度函数; $r^+ = \frac{\sigma_n^2}{m} \ln \eta + \frac{m}{2}$; $\alpha = P(H_1|H_0)$

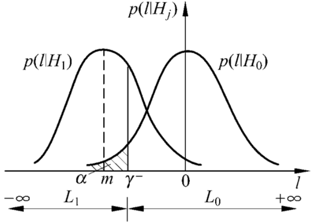
思考

1. $\frac{m}{2}$ 是两个假设的中间值, $\frac{\sigma_n^2}{m} \ln \eta$ 为中间值的修正量, 其含义如何?
2. 考虑 $m > 0, m < 0, m = 0$ 时, 如何构造判决表达式?

贝叶斯准则例题 1: 解续 (3)

1. $m=0$ 时: H_0, H_1 成为一样的噪声信号 $n(t)$。
2. $m\uparrow \Longrightarrow$ 中间值修正量 $(\frac{\sigma^2}{m}\ln\eta)\downarrow, \gamma$ 越接近于中间值 $\frac{m}{2}$。
3. m 值越大, 更易区分两种假设, 检测性能越好。
4. $m>0$ 和 $m<0$ 下的判决表达式如下图。





$m>0$; $\quad x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma^2}{m}\ln\eta + \frac{m}{2}$

$m<0$; $\quad x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\lessgtr}} -\frac{\sigma^2}{|m|}\ln\eta - \frac{|m|}{2}$

贝叶斯准则例题 1: 解续 (4)

解: N 次独立采样, 样本为 $x_k(k=1,2,\cdots,N)$:

$$H_0: x_k = n_k \qquad x_k(k=1,2,\cdots,N)$$

$$H_1: x_k = m + n_k \qquad x_k(k=1,2,\cdots,N)$$

步骤 1: 计算两个似然函数, 构建似然比

由于 n 是高斯分布随机变量, 因此在 H_0 假设下, 第 k 次采样值 x_k 服从高斯分布, 且均值为 0, 方差为 σ_n^2; 在 H_1 假设下, 第 k 次采样值 x_k 服从均值为 m, 方差为 σ_n^2 的高斯分布。

$$p(x_k|H_0) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x_k^2}{2\sigma_n^2}\right) \implies p(\boldsymbol{x}|H_0) = \prod_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x_k^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

$$p(x_k|H_1) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{(x_k-m)^2}{2\sigma_n^2}\right) \implies p(\boldsymbol{x}|H_1) = \prod_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{(x_k-m)^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

$$\lambda(\boldsymbol{x}) = \frac{p(\boldsymbol{x}|H_1)}{p(\boldsymbol{x}|H_0)} = \exp\left(\frac{\sum_{k=1}^{N}(x_k^2-(x_k-m)^2)}{2\sigma_n^2}\right)$$

贝叶斯准则例题 1: 解续 (5)

步骤 2: 根据两个假设的先验概率和代价因子, 计算判决门限

$$\eta \overset{def}{=} \frac{P(H_0)(c_{10}-c_{00})}{P(H_1)(c_{01}-c_{11})}$$

步骤 3: 形成贝叶斯检测基本表达式

$$\lambda(\boldsymbol{x}) = \frac{p(\boldsymbol{x}|H_1)}{p(\boldsymbol{x}|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

$$\exp\left(\frac{\sum_{k=1}^{N}(x_k^2-(x_k-m)^2)}{2\sigma_n^2}\right) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

步骤 4: 化简, 形成贝叶斯检测判决表达式

$$-Nm^2 + \sum_{k=1}^{N} 2mx_k \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 2\sigma_n^2 \ln\eta \implies \sum_{k=1}^{N} x_k \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma_n^2}{m}\ln\eta + \frac{Nm}{2}$$

$$l(\boldsymbol{x}) \overset{def}{=} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma_n^2}{Nm}\ln\eta + \frac{m}{2} \overset{def}{=} \gamma$$

贝叶斯准则例题 1: 解续 (6)

经过上述化简, 信号检测的判决式由似然比检验的形式, 简化为检验统计量 $l(x)$ 与检测门限 γ 相比较的形式, 形成贝叶斯检测判决表达式:

$$l(\boldsymbol{x}) \stackrel{def}{=} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma_n^2}{Nm}\ln\eta + \frac{m}{2} \stackrel{def}{=} \gamma$$

检验统计量 $l(x) \stackrel{def}{=} \frac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N} x_k$ 是观测信号 $x_k(k = 1, 2, \ldots, N)$ 的求和取平均值的结果, 即它是 $x_k(k = 1, 2, \ldots, N)$ 的函数, 是一个随机变量。

因为高斯随机变量的线性组合还是高斯随机变量, 所以两种假设下的观测量 $(l|H_0), (l|H_1)$ 也是服从高斯分布的随机变量。

贝叶斯准则例题 1: 解续 (7)

N 次独立采样, 样本为 $x_k(k=1,2,\ldots,N)$

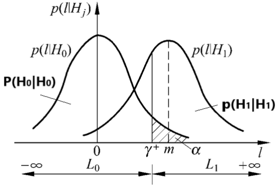
$$n_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$$

$$H_0: x_k = n_k \qquad (l|H_0) \sim \mathcal{N}(0, \frac{\sigma_n^2}{N})$$

$$H_1: x_k = m + n_k \qquad (l|H_1) \sim \mathcal{N}(m, \frac{\sigma_n^2}{N})$$

贝叶斯检测判决表达式:

$$l(\boldsymbol{x}) \overset{def}{=} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma_n^2}{Nm}\ln\eta + \frac{m}{2} \overset{def}{=} \gamma$$



$p(l|H_j)(j=0,1)$: 假设 H_j 下观测信号的概率密度函数; $r^+ = \frac{\sigma^2 \ln\eta}{Nm} + \frac{m}{2}$; $\alpha = P(H_1|H_0)$

欢迎批评指正！