信号检测与估值

段江涛

机电工程学院

2019 年 8 月

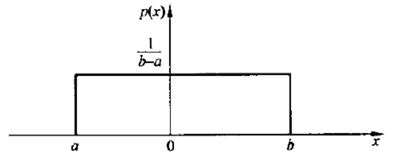
ch2. Example

1. 习题

均匀分布随机变量 x 的均值 μ_x 和方差 σ_x^2

Example

求如图均匀分布随机变量 x 的均值 μ_x 和方差 σ_x^2。



均匀分布随机变量 x 的均值 μ_x 和方差 σ_x^2

解: 随机变量 x 的概率密度函数 $p(x)$ 为

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-1}, & a \le x \le b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

根据随机变量均值的定义,有

$$\mu_x = E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = \int_a^b \frac{1}{b-1}p(x)dx = \frac{a+b}{2}$$

根据随机变量方差的定义,有

$$\sigma_x^2 = E[(x-\mu_x)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_x)^2 p(x)dx = \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \frac{1}{b-a}dx$$
$$= \frac{(b-a)^2}{12}$$

高斯变量的线性组合仍然是高斯随机变量

Example

设随机变量 y 与 x 之间为线性关系 $y = ax + b, a, b$ 为常数, 且 $a \neq 0$。已知随机变量 x 服从高斯分布, 即

$$p(x) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_x^2}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right]$$

证明随机变量 y 是服从均值为 $a\mu_x + b$, 方差为 $a^2\sigma_x^2$ 的高斯分布。

Proof.

证法 I: 雅可比变换法

$$\text{因为} \qquad y = ax + b$$

$$\text{所以, 反函数为} \qquad x = \frac{y-b}{a}$$

$$\text{且有} \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{a}$$

于是, 由一维雅可比变换, 得

$$p(y) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_x^2}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{(\frac{y-b}{a} - \mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right] \left|\frac{1}{a}\right|$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi a^2\sigma_x^2}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{(y-(a\mu_x+b))^2}{2a^2\sigma_x^2}\right]$$

所以, 随机变量 y 是服从均值为 $a\mu_x + b$, 方差为 $a^2\sigma_x^2$ 的高斯分布。 □

Proof.

证法 II: 利用高斯随机变量的特性来证明

因为 $y = ax + b$

是高斯随机变量 x 的线性变换，所以 y 仍然是高斯随机变量。

其均值 μ_y 和方差 σ_y^2 分别为

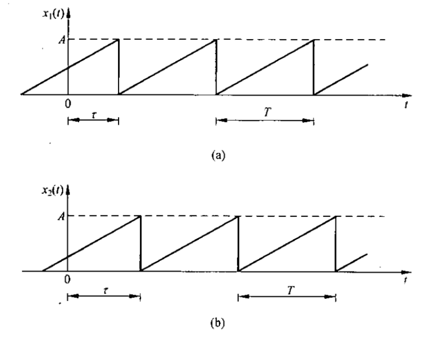
$$\begin{aligned}
\mu_y &= E(y) = E(ax+b) = aE(x) + b \\
&= a\mu_x + b \\
\sigma_y^2 &= E[(y-\mu_y)^2] = E[(ax+b-a\mu_x-b)^2] \\
&= a^2E[(x-\mu_x)^2] \\
&= a^2\sigma_x^2
\end{aligned}$$

所以，随机变量 y 是服从均值为 $a\mu_x + b$，方差为 $a^2\sigma_x^2$ 的高斯分布。 $\square$

周期性锯齿波

Example

设随机过程的样本函数是周期性的锯齿波，下图是它的两个样本函数。各样本函数具有相同的波形，其区别在于锯齿波的起点位置不同。设在 $t=0$ 后的第一个值位于 τ，τ 是一个随机变量，它在 $(0,T)$ 上服从均匀分布。若锯齿波的幅度为常数 A，求该随机过程 $x(t)$ 的一维概率密度函数。



解: 因为是周期性锯齿波, 所以只需求出一个周期的概率密度函数。在一个周期内, 随机信号为

$$x(t) = \frac{A}{T}(t + T - \tau), \quad t - T \leq t \leq \tau$$

其反函数 τ 为

$$\tau = T - \frac{T}{A}x(t) + t, \quad 0 \leq \tau \leq T, 0 \leq x \leq A$$

因为随机变量 τ 在 $(0, T)$ 上脉冲均匀分布, 即

$$p(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{T}, & 0 \leq \tau \leq T \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

所以, 由一维雅可比变换, 得

$$p(x;t) = p[\tau = h(x)] \left| \frac{d\tau}{dx} \right|$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{T}\frac{T}{A} \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{A}, & 0 \leq x \leq A \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

确知函数 $a(t)$ 的均值 $E[a(t)] = a(t)$

Example

设随机过程 $x(t)$ 的均值为 $\mu_x(t)$, 自相关函数为 $r_x(t_j, t_k)$。若有随机过程 $y(t) = a(t)x(t)x(t) + b(t)$, 其中 $a(t), b(t)$ 是确知函数。求随机过程 $y(t)$ 的均值和自相关函数。

确知函数 $a(t)$ 的均值 $E[a(t)] = a(t)$

解:

由均值定义 $E[x(\xi)] \overset{def}{=} \mu_x = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$ 知:

确知函数 $a(t)$ 的均值:

$$
\begin{aligned}
E[a(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} a(t)p(x)dx \\
&= a(t)\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx && \text{by } a(t) \text{ 是常数} \\
&= a(t)\cdot 1 && by \int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1 \\
&= a(t)
\end{aligned}
$$

确知函数 $a(t)$ 的均值 $E[a(t)] = a(t)$

解 (续): 随机过程 $y(t)$ 的均值为:

$$
\begin{aligned}
\mu_y &= E[y(t)] = E[a(t)x(t) + b(t)] = E[a(t)x(t)] + E[b(t)] \\
&= a(t)E[x(t)] + b(t) = a(t)\mu_x + b(t)
\end{aligned}
$$

随机过程 $y(t)$ 的自相关函数为:

$$
\begin{aligned}
y(t_j, t_k) &= E[y(t_j)y(t_k)] \\
&= E[(a(t_j)x(t_j)] + b(t_j))(a(t_k)x(t_k) + b(t_k))] \\
&= a(t_j)a(t_k)E[x(t_j)]x(t_k)] + a(t_j)b(t_k)E[x(t_j)] + b(t_j)a(t_k)E[x(t_k)] + b(t_j)b(t_k) \\
&= a(t_j)a(t_k)r_x(t_j, t_k) + a(t_j)b(t_k)\mu_x(t_j) + b(t_j)a(t_k)\mu_x(t_k) + b(t_j)b(t_k)
\end{aligned}
$$

其中: $\mu_x(t_k) = E[x(t_k)], r_x(t_j, t_k) = E[x(t_j)x(t_k)]$

平稳随机过程随着间隔的增大, 采样之间的相关性减小

Example

对于平稳随机过程 $x(t)$, 随着间隔 τ 的增大, 随机过程采样之间的相关性减小, 即满足

$$\lim_{\tau\to\infty} c_x(\tau) = 0$$

证明: (1) $r_x(\infty) = \mu_x^2$; (2) $r_x(0) - r_x(\infty) = \sigma_x^2$

Proof.

(1) 因为

$$r_x(\tau) = c_x(\tau) + \mu_x^2$$

所以

$$\lim_{\tau\to\infty} r_x(\tau) = \lim_{\tau\to\infty} c_x(\tau) + \mu_x^2$$

当

$$\lim_{\tau\to\infty} c_x(\tau) = 0$$

时, 有

$$\lim_{\tau\to\infty} r_x(\tau) = r_x(\infty) = \mu_x^2$$

(2) 因为

$$r_x(0) = E[x(t)x(t)] = E[x^2(t)]$$

而

$$r_x(\infty) = \mu_x^2$$

于是

$$r_x(0) - r_x(\infty) = E[x^2(t)] - \mu_x^2 = \sigma_x^2$$

□

周期性平稳过程的自相关函数也是周期性, 且周期相同

Example

假定平稳随机过程 $x(t)$ 是周期的, 周期为 T, 即

$$x(t) = x(t+T)$$

证明其自相关函数 $r_x(\tau)$ 也是以 T 为周期的, 即

$$r_x(\tau) = r_x(\tau+T)$$

周期性平稳过程的自相关函数也是周期性, 且周期相同

Example

假定平稳随机过程 $x(t)$ 是周期的, 周期为 T, 即

$$x(t) = x(t+T)$$

证明其自相关函数 $r_x(\tau)$ 也是以 T 为周期的, 即

$$r_x(\tau) = r_x(\tau+T)$$

Proof.

因为

$$\begin{aligned} r_x(\tau) &= E[x(t)x(t+\tau)] \\ &= E[x(t)x(t+\tau+T)] \qquad \text{by } x(t+\tau) = x(t+\tau+T) \\ &= r_x(\tau+T) \end{aligned}$$

联合平稳的随机过程

Example

设 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是联合平稳的随机过程, 试证明:

1. $r_{xy}(\tau) = r_{yx}(-\tau), c_{xy}(\tau) = c_{yx}(-\tau)$
2. $|r_{xy}(\tau)|^2 \leq r_x(0)r_y(0)$
3. $|\rho_{xy}(\tau)| \leq 1$

联合平稳的随机过程

Proof.

1.

$$
\begin{aligned}
r_{xy}(\tau) &= E[x(t)y(t+\tau)] = E[y(t+\tau)x(t)] = r_{xy}(-\tau) \\
c_x y(\tau) &= E[(x(t)-\mu_x(t))(y(t+\tau)-\mu_y(t+\tau))] \\
&= E[(y(t+\tau)-\mu_y(t+\tau))(x(t)-\mu_x(t))] \\
&= c_{yx}(-\tau)
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
|r_{xy}(\tau)|^2 = |E[x(t)y(t+\tau)]|^2 &\le (E|x(t)y(t+\tau)|)^2 \\
&\le E|x(t)|^2 E|y(t+\tau)|^2 = r_x(0)r_y(0)
\end{aligned}
$$

$\square$

联合平稳的随机过程

Proof.

3. 因为

$$\begin{aligned}|c_{xy}(\tau)|^2 &= |E[(x(t)-\mu_x(t))(y(t+\tau)-\mu_y(t+\tau))]|^2 \\ &\leq E|(x(t)-\mu_x(t))|^2 E|(y(t+\tau)-\mu_y(t+\tau))|^2 \\ &= c_x(0)c_y(0) = \sigma_x^2\sigma_y^2\end{aligned}$$

所以

$$|c_{xy}(\tau)| \leq \sigma_x\sigma_y$$

从而得

$$|\rho_{xy}(\tau)| = \frac{|c_{xy}(\tau)|}{\sigma_x\sigma_y} \leq 1$$

□

雷达回波信号

Example

设 $s(t)$ 是雷达的发射信号, 遇到目标后的反射信号为 $as(t-t_0)$, t_0 是信号返回的延迟时间。如果回波信号中伴有加性噪声 $n(t)$, 则接收到的信号为

$$x(t) = as(t-t_0) + n(t)$$

1. 假定 $s(t)$ 和 $n(t)$ 是平稳相关的, 试求互相关函数 $r_sx(\tau)$。
2. 如果噪声 $n(t)$ 的均值为零, 且与 $s(t)$ 相互统计独立, 试求互相关函数 $r_sx(\tau)$。

解:

1. 假定 $s(t)$ 和 $n(t)$ 是平稳相关的, 试求互相关函数 $r_sx(\tau)$。

$$
\begin{aligned}
r_{xy}(\tau) &= E[s(t)x(t+\tau)] \\
&= E[s(t)(as(t-t_0+\tau)+n(t+\tau)))] && \text{by } x(t)=as(t-t_0)+n(t) \\
&= aE[s(t)s(t-t_0+\tau)] + E[s(t)n(t+\tau)] \\
&= ar_s(\tau-t_0) + r_{sn}(\tau)
\end{aligned}
$$

2. 如果噪声 $n(t)$ 的均值为零, 且与 $s(t)$ 相互统计独立, 试求互相关函数 $r_sx(\tau)$。

$$
\begin{aligned}
r_{xy}(\tau) &= E[s(t)x(t+\tau)] \\
&= E[s(t)(as(t-t_0+\tau)+n(t+\tau)))] && \text{by } x(t)=as(t-t_0)+n(t) \\
&= aE[s(t)s(t-t_0+\tau)] + E[s(t)n(t+\tau)] && \text{确知信号 } s(t) \text{ 看作常数} \\
&= aE[s(t)s(t-t_0+\tau)] + s(t)E[n(t+\tau)] && \text{by } E[n(t)]=0 \\
&= ar_s(\tau-t_0) + r_{sn}(\tau)
\end{aligned}
$$

欢迎批评指正！