信号检测与估值

段江涛
机电工程学院

2019 年 9 月

主要内容

随机事件的特征是不确定性,但是我们可以通过重复观测,从不确定现象中寻找、观察特定事件发生的规律,为此需要让某一随机现象重复发生(不一定是人为控制的)并记录观测结果,称之为随机试验。

随机试验的三个特征:

- 可以在相同条件下重复进行;
- 试验的所有可能结果是明确可知的,并且不止一个;
- 每次试验总是恰好出现这些可能结果中的一个,但在一次试验之前却不能肯定这次试验会出现哪个结果。

概率论中的三个组成部分

- 样本空间 Ω
- 事件域 $\mathcal{F}$
- 概率 P

- 样本空间 Ω:一个随机试验所有可能出现的结果的全体,称为随机事件的样本空间。
  每一个可能的结果称为基本事件,它们的全体就是样本空间。
- 样本点 ξ_k:随机试验的一个结果,就是某个基本事件,也就是 Ω 中的一个元素。
  $\Omega = \{\xi_k | k = 1, \ldots, n\}$
- 随机事件 A: 样本空间中的某个子集称为随机事件,简称事件 (事件是集合)。
- 事件域 $\mathcal{F}$: 样本空间中的某些子集构成的满足如下条件的集合,称为事件域 (又称 σ^- 域)。
  (1) $\Omega \in \mathcal{F}$
  (2) 若 $A \in \mathcal{F}$, 则 A 的补 $\overline{A} \in \mathcal{F}$
  (3) 若 $A_n \in \mathcal{F}, n = 1, 2, \ldots,$ 则 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

Example

一个盒子中有 10 个相同的球,5 各白色,5 个黑色,搅匀后从中任意摸取一球。

$\xi_1 = \{$取得白球$\}, \xi_2 = \{$取得黑球$\}$

$\Omega = \{\xi_1, \xi_2\}$

Example

一个盒子中有 10 个相同的球,编号 1,2,...,10, 从中取一球。

$\Omega = \{1, 2, \ldots, 10\}$

$A = \{6$ 号球$\} = \{6\}, B = \{$偶数编号球$\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$,

$\overline{B} = \{$奇数编号球$\}$,$C = \{$编号小于等于 5 的球$\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

事件 A 是基本事件,而 B 和 C 则由多个基本事件所组成,并且 $A, B, C \subset \Omega$。

空集 $\emptyset$ 可以看作 Ω 的子集,在任意一次试验中不可能有此事件发生,称为不可能事件。

事件 A 的概率 $P(A)$

事件域中的元素就是随机事件。如果这些事件的随机性能够由定义在 $\mathcal{F}$ 上的具有非负性,归一性和可列加性的实函数 $P(A)$ 来确定,则称 P 是定义在二元组 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的概率,而称 $P(A)$ 为事件 A 的概率。

(1) 非负性。$P(A) \geq 0$

(2) 归一性。$P(\Omega) = 1$

(3) 可列加性。$A_1, A_2, ..., A_n$ 互不相容 $(A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j)$,则
$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

非空的事件域 $\mathcal{F}$ 关于交、并、补、差元素是封闭的。

1. 若 $A \in \mathcal{F}$, 则 $\overline{A} \in \mathcal{F}$
2. 若 $A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{F}$, 则 $A \cup B \in \mathcal{F}$
3. 若 $A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{F}$, 则 $A \cap B \in \mathcal{F}$
4. 若 $A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{F}$, 则 $A - B \in \mathcal{F}$

Proof.

由于 $\mathcal{F}$ 为非空子集类,则若 $A \in \mathcal{F}$, 由 (1) 知,$\overline{A} \in \mathcal{F}$,又由 (2) 知 $A \cup \overline{A} = \Omega \in \mathcal{F}$. 故有 $\Omega \in \mathcal{F}$.

若 $A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{F}$, 则 $\overline{A} \in \mathcal{F}, \overline{B} \in \mathcal{F}$, 那么 $\overline{A} \cup \overline{B} \in \mathcal{F}$, 即有 $A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} \in \mathcal{F}$, 故 $\mathcal{F}$ 对交也封闭。

再若 $A, B \in \mathcal{F}$, 则有 $A - B = A\overline{B} \in \mathcal{F}$, 即 $\mathcal{F}$ 对交也封闭。

由数学归纳法可证,若 $A_i \in \mathcal{F}$, 则 $\bigcup_{i=1}^{n} \in \mathcal{F}$ $\square$

古典概型

- 样本空间的元素 (即基本事件) 只有有限个, 不妨设为 n 个, $\Omega = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$
- 每个基本事件出现的可能性是相等的, 即有 $P(\xi_1) = P(\xi_2) = \cdots = P(\xi_n)$
- 事件域 $\mathcal{F}$ 为 Ω 的所有子集的全体, 即是 $Pwr(\Omega)$, Ω 的 m 幂集, 共有 2^n 个事件, $\emptyset \in \mathcal{F}, \Omega \in \mathcal{F}$。
- 由概率的有限可加性知 $1 = P(\Omega) = \Sigma_{i=1}^{n} P(\xi_i) \implies P(\xi_i) = \frac{1}{n}, (i = 1, \ldots, n)$
- 对任意一个随机事件 $A \subseteq \mathcal{F}$, 如果 A 是 k 个基本事件的和, 即 $A = \{\xi_{i_1}\} \cup \{\xi_{i_2}\} \cup \cdots \cup \{\xi_{i_k}\}$, 则

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{A\text{ 中所包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}$$

样本空间的选取

为求一个事件的概率,样本空间可以有不同的取法,但一定要认真,基本事件和求概事件数的计算都要在同一个样本空间中进行,否则会导致谬误!

Example

一个盒子中有 10 个相同的球,编号 1,2,...,10, 从中取一球,求此球的号码为偶数的概率。

$\Omega = \{1, 2, \ldots, 10\}$

$A = \{\text{偶数编号球}\} = \{2\} \cup \{4\} \cup \{6\} \cup \{8\} \cup \{10\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$。

$P(A) = \frac{|A|}{n} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

另外一种解法:

$\Omega = \{A, \overline{A}\}, A = \{\text{编号为偶数的球}\}, \overline{A} = \{\text{编号为奇数的球}\}, \mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, A, \overline{A}\}$, 由 $A, \overline{A}$ 的对称性, 即得 $P(A) = \frac{1}{2}$

样本空间的选取

Notes

两种解法的样本空间 Ω 不同 (从而事件域 $\mathcal{F}$ 是不同的)。严格地说,两者所描述的随机试验是不同的。例如对于第二种解法来说,$B=\{$号码为 4 的球$\}$ 并不属于事件域 $\mathcal{F}$, 就是说 B 不是一个事件,从而也就没有概率可言。但对第一种解法, B 是事件,而且 $P(B)=\frac{1}{10}$。

Example

甲、乙两人掷硬币,其中甲掷 $n+1$ 次,乙掷 n 次。求“甲掷出正面的次数大于乙掷出正面的次数”这一事件的概率。

令

$A_1=$ 甲掷出正面的次数,$A_2=$ 甲掷出反面的次数,$B_1=$ 乙掷出正面的次数,$B_2=$ 乙掷出反面的次数。

$\Omega-\{A_1>B_1\}=\{A_2\le B_1\}=\{A_2>B_2\}$

由对称性知

$P(A_1>B_1)=P(A_2>B_2)$

由此即得

$P(A_1>B_1)=\frac{1}{2}$

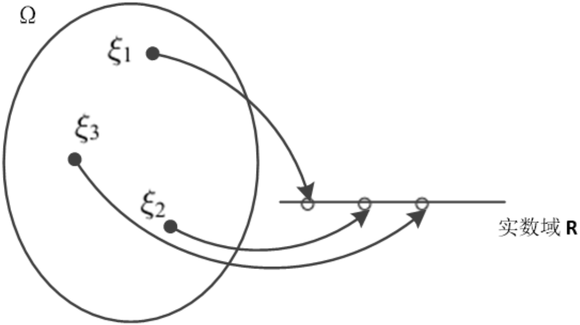
Notes

在古典概型中,所谓“等可能性”,正是“对称性”产生的结果,因为各个基本事件处在“对称”的位置上,所以才有“等可能性”。

几何概率

我们在一个面积为 S_Ω 的区域 Ω 中，等可能地任意投点，如果点落入小区域 S_A 中的可能性与 S_A 成正比，而与 A 的位置及形状无关。如果"点落入小区域 A"这个随机事件仍然记为 A，则由 $P(\Omega) = 1$ 可得

$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega}$$

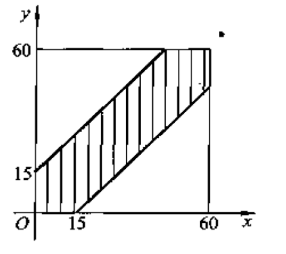


Example

(会面问题) 甲、乙两人约定在 6 时到 7 时之间在某处会面,并约定先到者应等候另一个人一刻钟,过时即可离去。求两人能会面的概率。

如图,以 x,y 表示甲乙两人,则两人能会面的充要条件是: $|x-y| \leq 15$

$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{60^2 - 45^2}{60^2} = \frac{7}{16}$$



概率的加法公式与条件概率

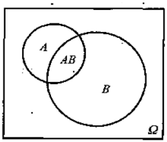
如果有两个随机事件 $A, B \in \mathcal{F}$, 有如下加法公式:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

特备地, 当 A, B 是补不相容的两个事件, 即 $A \cap B = \emptyset$ 时, 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A|B) = \frac{S_{AB}}{S_B} = \frac{S_{AB}/S_\omega}{S_B/S_\omega} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$



条件概率

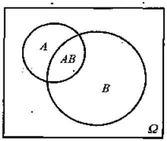
Definition

若 $\Omega, \mathcal{F}, P$ 是一个概率空间，$B \in \mathcal{F}$，且 $P(B) > 0$，则对任意的 $A \in \mathcal{F}$，称

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

为在已知事件 B 发生的条件下，事件 A 发生的条件概率。

$$P(A|B) = \frac{S_{AB}}{S_B} = \frac{S_{AB}/S_\omega}{S_B/S_\omega} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$



条件概率的性质及其推论

条件概率 $P(\bullet|B)$ 的具备概率的三个基本性质

1. 非负性: 对任意的 $A \in F, P(A|B) \geq 0$;
2. 规范性: $P(\Omega|B) = 1$;
3. 可列加性: 对任意的一列两两互不相容的事件 $A_i(i = 1, 2, \dots)$, 有
$$P\left[\bigcup_{i=1}^{+\infty}(A_i|B)\right] = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i|B)$$

Corollary

概率的乘法公式: $P(AB) = P(B)P(A|B)$

Corollary

$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$

Example

一个家庭中有两个小孩,已知其中有一个是女孩,问这时另一个小孩也是女孩的概率有多大?

Ω ={(男, 男),(男, 女),(女, 男),(女 , 女)}

A ={已知有一个是女孩}={(男, 女),(女, 男),(女, 女)}

B ={另一个也是女孩}={(女, 女)}

于是所求概率为

$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$

差事件、条件事件或由差事件及条件事件复合而成的事件的概率均可化为 $P(A), P(B), P(AB)$ 的形式。例如

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A\overline{B}) = 1 - [P(A) - P(AB)] = 1 - P(A) + P(AB)$$

$$P(A|\overline{B}) = \frac{P(A) - P(AB)}{1 - P(B)}$$

Example

有外形相同的球分装在三个盒子,每盒 10 个。其中第一个盒子中 7 个球标有字母 A,3 个球标有字母 B; 第二个盒子中有红球和白球各 5 个; 第三个盒子中则有红球 8 个, 白球 2 个。试验按如下规则进行: 先在第一个盒子中任取一个球,若取得标有字母 A 的球,则在第二个盒子中任取一个球; 若第一次取得标有字母 B 的球,则在第三个盒子中任取一个球。如果第二次取出的是红球,则称试验成功。求试验成功的概率。

Solution

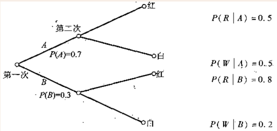
令 A ={从第一个盒子取得标有字母 A 的球},B ={从第一个盒子取得标有字母 B 的球},R ={第二次取出的球是红球},W ={第二次取出的球是白球}。

则容易球得:

$P(A)=\frac{7}{10}, P(B)=\frac{3}{10}, P(R|A)=\frac{1}{2}, P(W|A)=\frac{1}{2}, P(R|B)=\frac{4}{5}, P(W|B)=\frac{1}{5}$

于是,试验成功的概率为

$$\begin{aligned}P(R)=P(R\cap\Omega)&=P[R\cap(A\cup B)]\\&=P(RA\cup RB)=P(RA)+P(RB)\\&=P(R|A)\cdot P(A)+P(R|B)\cdot P(B)\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{10}+\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{10}=0.59\end{aligned}$$



概率树/全概率公式

概率树思想:为了求解复杂事件的概率,往往可以先把它分解成两个(或若干个)互不相容的较简单的事件之并。求出这些较简单事件的概率,在利用加法公式即得所要求的复杂事件的概率。把这个方法一般化,便的到下述定理。

Theorem

设 $B_1, B_2, \cdots$ 是一列互不相容的事件,且有

$$\bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i = \Omega, P(B_i) > 0$$

则对任一事件 A, 有

$$P(A) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(B_i) P(A|B_i)$$

概率树/全概率公式

Proof.

$$P(A) = P(A \cap \Omega) = P[A \cap (\bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i)]$$

$$= P[\bigcup_{i=1}^{+\infty} (AB_i)] = \sum_{i=1}^{+\infty} P(AB_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{+\infty} P(B_i)P(A|B_i)$$

□

Example

某工厂有 4 条流水线生产同一种产品, 该 4 条流水线的产品分别占总产量的 15%, 20%, 30%, 35%, 又这 4 条流水线的不合格品率依次为 0.05, 0.04, 0.03 及 0.02. 现从出厂产品中任取一件, 问 (1) 恰好抽到不合格品的概率为多少? (2) 第 4 条流水线应承担的责任?

解: (1) 令

$$A=\{\text{任取一件,恰好抽到不合格品}\}$$

$$B=\{\text{任取一件,恰好抽到第 } i \text{ 条流水线的产品},(i=1,2,3,4)\}$$

于是由全概率公式可得

$$P(A)=\sum_{i=1}^{4}P(B_i)P(A|B_i)=0.15\times 0.05+0.20\times 0.04+0.30\times 0.03+0.35\times 0.02$$

$$=0.0315=3.15\%$$

实际上,$P(A|B_i)$ 可以从过去生产的产品中统计出来,称为先验概率。

(2) 从概率论的角度考虑可以按 $P(B_i|A)$ 的大小来追究第 i 条 $i=1,2,3,4$ 流水线的责任。

$P(AB_4)=P(B_4)P(A|B_4)=0.35\times 0.02=0.007$

由条件概率的定义知

$$P(B_4|A)=\frac{P(AB_4)}{P(A)}=\frac{P(B_4)P(A|B_4)}{\sum\limits_{i=1}^{4}P(B_i)P(A|B_i)}=\frac{0.007}{0.0315}\approx=0.222$$

贝叶斯 (Bayes) 公式

Theorem

若 $B_1, B_2, \dots$ 为一系列互不相容的事件, 且

$$\bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i = \Omega$$

$$P(B_i) > 0, i = 1, 2, \dots$$

则对任一事件 A, 有

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{+\infty} P(B_j)P(A|B_j)}, \quad i = 1, 2, \dots$$

$P(B_i)$ 是试验以前就已经知道的概率—**先验 (先于试验) 概率**。

条件概率 $P(B_i|A)$ 反映了试验以后,对 A 发生的“来源”的各种可能性的大小—**后验概率**。

相互独立事件

条件概率: $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$

一般的概率乘法公式: $P(AB)=P(A)P(B|A)$

如果 “事件 B 发生与否不受事件 A 的影响”: $P(B)=P(B|A)$

乘法公式变为: $P(AB)=P(A)P(B)$

Definition

对任意的两个事件 A,B, 若

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

成立, 则称事件 A,B 是相互独立的, 简称为独立的。

依这个定义, 不难验证:

若 A 与 B 相互独立, 则 $\{\emptyset,A,\overline{A},\Omega\}$ 中的任意一个与 $\{\emptyset,B,\overline{B},\Omega\}$ 中的任意一个仍相互独立。

分别掷两枚均匀的硬币,令

$$A=\{\text{硬币甲出现正面}\} \quad B=\{\text{硬币乙出现正面}\}$$

验证事件 A,B 是相互独立的。

Proof.

$$\text{样本空间}=\{(\text{正},\text{正}),(\text{正},\text{反}),(\text{反},\text{正}),(\text{反},\text{反})\}$$

共还有 4 个基本事件, 它们是等可能的,各有概率为 1/4, 而

$$A=\{(\text{正},\text{正}),(\text{正},\text{反})\}$$

$$B=\{(\text{正},\text{正}),(\text{反},\text{正})\}$$

$$AB=\{\text{正},\text{正}\}$$

由此知

$$P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$$

这时有

$$P(AB)=\frac{1}{4}=P(A)P(B)$$

成立,所以 A, B 事件是相互独立的。 □

伯努利 (Bernoulli) 概型

如果试验 E 只有两个可能的结果: A 及 $\overline{A}$, 并且 $P(A)=p, P(\overline{A})=1-p=q$ 其中 $0<p<1$, 把 E 独立地重复 n 次的试验就构成了一个试验,这个试验称作 n **重伯努利 (Bernoulli) 试验**, 简称伯努利 (Bernoulli) 试验或**伯努利 (Bernoulli) 概型**, 并记作 B^n.

例如,"一次抛掷 n 枚相同硬币" 的试验就可以看作是一个 n 重伯努利试验。一个伯努利试验的结果记作:

$$\omega=(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)$$

其中的 $\omega_i(1\leq i\leq n)$ 或者为 A 或者为 $\overline{A}$, 因而这样的 ω 共有 2^n 个。他们的全体就是这个伯努利试验的样本空间 ω。

$$B_k=\{n \text{ 重伯努利试验中事件 A 出现 } k \text{ 次}\}$$

$$P(B_k)=C_n^k p^k q^{n-k}, 0\leq k\leq n$$

Definition

设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是一概率空间,$x(\xi)|\xi \in \Omega$ 是定义在 Ω 上的单值实函数,如果对任一实数 x, 集合 $\{x(\xi) \leq x\} \in \mathcal{F}$, 则称 $x(\xi)$ 为 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的一个**随机变量**。

随机变量 $x(\xi)$ 的定义域为样本空间 Ω, 它的值域是实数 R。所有随机变量 $x(\xi)$ 实际上是一个映射,这个映射为每个来自概率空间的结果 (样本点)ξ 赋予一个实数 x。这种映射必须满足条件:

(1) 对任一 x, 集合 $\{x(\xi) \leq x\}$ 是这个概率空间中的一个事件,并有确定的概率 $P\{x(\xi) \leq x\}$;

(2) $P\{x(\xi) = \infty\} = 0, P\{x(\xi) = -\infty\} = 0$

Notes

随机变量 $x(\xi)$ 就是试验结果 (即样本点) 和实数之间的一一对应关系。虽然在试验之前不能肯定随机变量 $x(\xi)$ 会取哪一个数值,但是对于任一实数 a, 我们可以研究 $\{x(\xi) = a\}$ 发生的概率, 也就是 $x(\xi)$ 取值的统计规律。

关于随机变量 (及向量) 的研究,是概率论的中心内容. 这是因为,对于一个随机试验,我们所关心的往往是与所研究的特定问题有关的某个或某些量,而这些量就是随机变量.

也可以说:**随机事件**是从静态的观点来研究随机现象,而**随机变量**则是一种动态的观点,一如数学分析中的常量与变量的区分那样. 变量概念是高等数学有别于初等数学的基础概念。同样,概率论能从计算一些孤立事件的概念发展为一个更高的理论体系,其基础概念是随机变量。

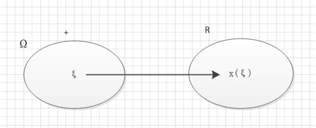
Example

抛硬币试验中,H 表示正面,T 表示反面,样本空间 $\Omega = \{H, T\}$,H 与 T 不是数量,不便于计算及理论的研究,因而引入以下变量 ξ,

$$x = x(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi = T \\ 1, & \xi = H \end{cases}$$

Definition (随机变量)

设随机试验 E 的样本空间是 $\Omega = \{\xi\}$, 若对于每一个 $\xi \in \Omega$, 有一个实数 $x(\xi)$ 与之对应, 即 $x(\xi)$ 是定义在 Ω 上的单值函数, 称为随机变量。



- 可用随机变量 $x(\xi)$ 描述事件。
  例掷一颗骰子 (色子), 设出现的点数记为随机事件 A, 表示 "掷出的点数大于 3" 的事件 A, 可表示为 "$x(\xi) > 3$"。反过来, A 的一个变化范围表示一个随机事件:"$2 < x(\xi) < 5$" 表示事件 "掷出的点数大于 2 且小于 5"。
- 随机变量随着试验的结果而取不同的值, 在试验之前不能确切知道它取什么值, 但是随机变量的取值有一定的统计规律性—概率分布。

离散型随机变量

Definition (离散型随机变量)

定义在样本空间 Ω 上,取值于实数域 $\mathbb{R}$, 且只取有限个或可列个值的变量 $x = x(\xi)$, 称作是**一维 (实值) 离散型随机变量**。

“可列个” 值

所谓 “可列个” 值,是指这个变量所取的值可依某种次序一一列举,排成一列。例如自然数全体就是可列的。

Example

设 Ω ={某公司 2018 年对某险种售出的保单}, 对 $\xi \in \Omega$, 令

$$x(\xi) = \xi\text{在一年中的索赔次数}$$

则 $x(\xi)$ 是 Ω 上的一个一维离散型随机变量, $x(\xi)$ 的可能取值范围为 $\{0, 1, 2, \ldots\}$。在试验 (即签定某一份保单) 之前, 并不能断定 x 会取哪一个值, 但是我们可以知道 $(x = 0), (x = 1), \ldots$ 这些事件发生的概率 (也就是在总体中所占的比例)$P[x(\xi)]$。

离散型随机变量 $x(\xi)$ 的可能取值为 $a_i(i = 1, 2, \ldots)$, 相应的取值 a_i 的概率 $P(x(\xi) = a_i) = p_i$, 写成如下表格形式, 制表称为随机变量 $x(\xi)$ 的**分布列**, 也称为**分布列**, 简称**分布**。

$x(\xi)$	a_1	a_2	$\cdots$
$P[x(\xi)]$	$P[x(\xi) = a_1]$	$P[x(\xi) = a_2]$	$\cdots$

Example

在 $n = 5$ 的伯努利试验中，设事件 A 在一次试验中出现的概率为 p，即 $P(A) = p, P(\overline{A} = q = 1 - p)$，令

$$x(\xi) = 5 \text{ 次试验中事件 A 出现的次数}$$

则

$$P[x(\xi) = k] = C_5^k p^k q^{5-k}$$

$x(\xi)$	0	1	2	3	4	5
$P[x(\xi)]$	q^5	$5pq^4$	$10p^2q^3$	$10p^3q^2$	$5p^4q$	p^5

离散型随机变量 ξ 的分布列的性质

离散型随机变量 ξ 的分布列

ξ	0	1	$\cdots$
$P(\xi)$	p_1	p_2	$\cdots$

由概率的性质可知,任一离散型随机变量的分布 $\{p_i\}$ 都有下述两个性质:

1. $p_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots$
2. $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} p_i = 1.$

反过来,任意一个具有以上两个性质的数列 $\{p_i\}$,都有资格作为某一个随机变量的分布列。

分布列不仅明确地给出了 $(\xi = a_i)$ 的概率，而且对于任意一个的实数 a,b, 事件 $(a \leq \xi \leq b)$ 发生的概率均可由分布列算出，因为

$$(a \leq \xi \leq b) = \bigcup_{a \leq \xi \leq b} (\xi = a_i)$$

于是由概率的可列加性有

$$P(a \leq \xi \leq b) = \sum_{i \in I_{a,b}} P(\xi = a_i) = \sum_{i \in I_{a,b}} p_i$$

其中 $I_{a,b} = \{i : a \leq a_i \leq b\}$, 即使对 $\mathbb{R}$ 中更复杂可列的集合 B, 也有

$$P(\xi \in B) = \sum_{i \in I(B)} P(\xi = a_i) = \sum_{i \in I(B)} p_i$$

其中 $I(B) = \{i : a_i \in B\}$

由知此可 ,$x(\xi)$ 取各种值的概率都可以由它的分布列通过计算而得到。

分布列全面地描述了离散型随机变量 $x(\xi)$ 的统计规律。

二项分布

若试验 E 只有两种可能结果，一种是事件 A 出现，另一种是事件 $\overline{A}$ 出现，$P(A)=p$，称试验 E 为伯努利 (Bernoulli) 试验。现将试验 E 独立重复 n 次，若用 ξ 表示事件 A 出现的次数，在这 n 重伯努利试验中，事件 A 恰好出现 k 次的概率为

$$P\{\xi=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, \qquad k=0,1,2,\ldots,n$$

Definition (二项分布)

若 ξ 的概率分布是

$$P\{\xi=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, \qquad k=0,1,2,\ldots,n$$

则称 ξ 服从参数为 n,p 的二项分布，记作 $\xi\sim B(n,p)$。

Notes

n 次伯努利试验是相互独立的事件，就是试验的结果是相互独立的。

一个伯努利试验的结果 (样本点) 为:

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$$

其中的 $\xi_i (1 \le i \le n)$ 或者是 A 或者是 $\overline{A}$, 因而这样的 ξ 共有 2^n 个, 它们的全体就是这个伯努利试验的样本空间 Ω, 对于 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \Omega$, 如果 $\xi_i (1 \le \xi \le n)$ 中有 k 个为 A, 则必有 $n-k$ 个为 $\overline{A}$, 于是由独立性即得

$$P(\xi) = p^k (1-p)^{n-k}$$

如果要求 "n 重伯努利试验中事件 A 出现 k 次" 这一事件的概率, 为此记

$$B_k = \{n \text{ 重伯努利试验中事件 } A \text{ 出现 } k \text{ 次}\}$$

由概率的有限可加性记得

$$P(B_k) = \sum_{\xi \in B_k} P(\xi)$$

对于 $\xi \in B_k$, 已知 $P(\xi) = p^k (1-p)^{n-k}$, 而 B_k 中这样的 ξ 共有 C_n^k 个, 所以

$$P(B_k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \qquad 0 \le k \le n$$

Example

抛掷一枚硬币,出现正面的概率 $p=\frac{1}{2}$,“抛掷 n 枚相同的硬币,恰好出现 k 个正面” 这一事件的概率, 就是 n 重伯努利试验。

$$P(\xi=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=C_n^k(\frac{1}{2})^n$$

Example

一批产品的废品率为 0.03,进行 20 次独立重复抽样,求出现废品的频率为 0.1 的概率。

令 ξ 表示在这 20 次独立重复抽样中出现的废品数,则 $\xi\sim B(20,0.03)$。于是

$$P\{\frac{\xi}{20}=0.1\}=P\{\xi=2\}=C_{20}^2 0.03^2(0.97)^{18}\approx 0.0988$$

金工车间由 10 台同类型的机床,每台机床配备的电动机功率为 10 千瓦,已知每台机床工作时,平均每小时实际开动 12 分钟,且开动与否是相互独立的。现因当地电力供应紧张,供电部门只提供 50 千瓦的电力给这 10 台机床。问这 10 台机床能够正常工作的概率为多大?

解 50 千瓦电力可同时供给 5 台机床工作 (开动),因而 10 台机床中同时开动的台数不超过 5 台时都可以正常工作。每台机床正常工作的概率 $p = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$。设 10 台机床中正常工作的机床台数为 ξ, 则

$$P(\xi = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = C_{10}^k (\frac{1}{5})^k (\frac{4}{5})^{10-k}, \quad 0 \le k \le 10$$

于是同时正常工作着的机床台数不超过 5 台的概率为

$$\begin{aligned} P(\xi \le 5) &= \sum_{k=0}^{5} P(\xi = k) \\ &= \sum_{k=0}^{5} C_{10}^k (\frac{1}{5})^k (\frac{4}{5})^{10-k} \approx 0.994 \end{aligned}$$

某大学的校乒乓球队与数学系乒乓球队举行对抗赛。校队的实力比系队强，当一个校队的运动员与一个系队的运动员比赛时，校队运动员获胜概率为 0.6。校、系双方对抗赛有以下三种方案:

(1) 双方各出 3 人，比三局; (2) 双方各出 5 人，比五局; (3) 双方各出 7 人，比七局。三种方案中均以比赛中得胜人数多得一方为胜利。问: 对系队来说，哪一种方案有利?

设系队得胜人数为 ξ, 则在上述三种方案中，系队胜利的概率为:

$$(1)P(\xi \geq 2) = \sum_{k=2}^{3} C_3^k (0.4)^k (0.6)^{3-k} \approx 0.352$$

$$(2)P(\xi \geq 3) = \sum_{k=3}^{5} C_5^k (0.4)^k (0.6)^{5-k} \approx 0.317$$

$$(3)P(\xi \geq 4) = \sum_{k=4}^{7} C_7^k (0.4)^k (0.6)^{7-k} \approx 0.290$$

随机变量的分布函数

Definition

设 ξ 是随机变量, 对 $\forall x \in \mathbb{R}$, 称函数

$$F(x) = P\{x(\xi) \leq x\}$$

为随机变量 $x(\xi)$ 的 (累积) 分布函数 [(cumulative) distribution function]。

分布函数性质

1. 单调不减性: 对 $\forall x_1 < x_2$, 恒有 $F(x_1) \leq F(x_2)$
2. 规范性: $F(-\infty) = \lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0, F(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$
3. 右连续性: 对 $\forall x_0$, 恒有 $F(x_0+0) = \lim\limits_{x\to x_0^+} F(x) = F(x_0)$

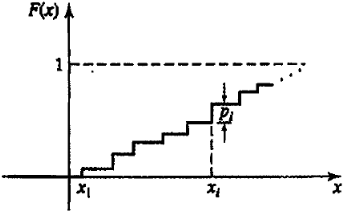
随机变量的概率密度函数

Definition

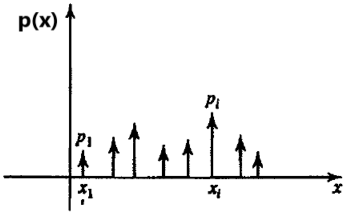
设连续随机变量 $x(\xi)$ 的一维累积分布函数为 $F(x)$, 如果 $F(x)$ 对 x 的一阶导数存在, 则有

$$p(x) \stackrel{def}{=} \frac{dF(x)}{dx}$$

式中, $p(x)$ 称为随机变量 $x(\xi)$ 的一维概率密度函数, 简称概率密度函数 (probability density function,p.d.f)



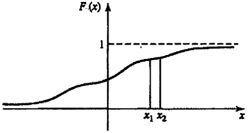
(a)

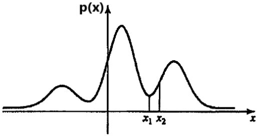


(b)

随机变量概率密度函数性质

1. 根据随机变量 $x(\xi)$ 的 $p(x)$ 与 $F(x)$ 的关系, 有
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(u)du$$
2. 对所有 x, p(x) 是非负函数, 即
$$p(x) \geq 0, \quad -\infty < x < +\infty$$
3. $p(x)$ 对 x 的全域积分结果等于 1, 一般表示为
$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$$
4. 随机变量 $x(\xi)$ 落在区间 $[x_1, x_2]$ 内的概率为
$$P\{x_1 \leq x(\xi) \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx$$

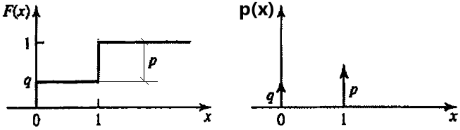




抛掷一枚硬币: 样本空间: $\Omega = \{h, t\}$, h 表示正面, t 表示反面。正面的概率 p, 反面的概率 q. 定义随机变量 $x(\xi), \xi \in \Omega$ 满足:

$$x(\xi = h) = x(h) = 1 \qquad x(\xi = t) = x(t) = 0,$$

求 $F(x)$, 其中: $-\infty < x < \infty$.



如果 $x \geq 1$, 则 $x(h) = 1 \leq x$, 且 $x(t) = 0 \leq x$, 有

$$F(x) = P\{x(\xi) \leq x\} = P\{h, t\} = 1 \qquad x \geq 1$$

如果 $0 \leq x < 1$, 则 $x(h) = 1 > x$, 且 $x(t) = 0 \leq x$, 有

$$F(x) = P\{x(\xi) \leq x\} = P\{t\} = q \qquad 0 \leq x < 1$$

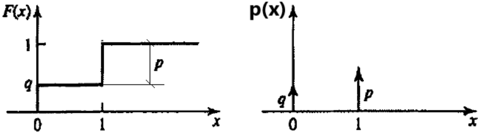
如果 $x < 0$, 则 $x(h) = 1 > x$, 且 $x(t) = 0 > x$, 有

$$F(x) = P\{x(\xi) \leq x\} = P\{\emptyset\} = 0 \qquad x < 0$$

事件 A, 试验的样本空间: $\Omega=\{A,\overline{A},\emptyset\}$. 定义随机变量 $x(\xi)$, 满足:

$$x(\xi)=1,\quad \xi\in A$$

$$x(\xi)=0,\quad \xi\in\overline{A}$$



$P(A)=p, P(\overline{A})=q=1-p$

如果 $x\geq 1$, 则 $\{x(\xi)\leq x\}=\{\Omega\}$, 有

$$F(x)=P\{x(\xi)\leq x\}=P\{\Omega\}=1 \qquad x\geq 1$$

如果 $0\leq x<1$, 则 $\{x(\xi)\leq x\}=\{\overline{A}\}$, 有

$$F(x)=P\{x(\xi)\leq x\}=P\{\overline{A}\}=q \qquad 0\leq x<1$$

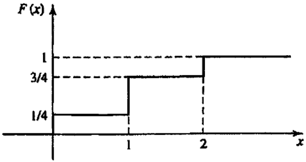
如果 $x<0$, 则 $\{x(\xi)\leq x\}=\{\emptyset\}$, 有

$$F(x)=P\{x(\xi)\leq x\}=P\{\emptyset\}=0 \qquad x<0$$

抛掷两枚硬币: 随机变量 $x(\xi)$ 表示正面数目。求 $F(x)$.

样本空间: $\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$, H 表示正面, T 表示反面。

随机变量 $x(\xi)$: $x(HH) = 2, \quad x(HT) = 1, \quad x(TH) = 1, \quad x(TT) = 0$



如果 $x \geq 2$, $\{x(\xi) \leq x\} = \Omega \Rightarrow F(x) = 1$

如果 $1 \leq x < 2$,

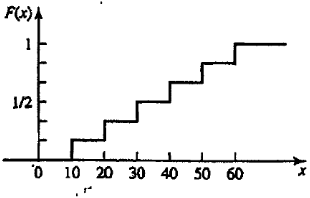
$\{x(\xi) \leq x\} = \{TT, HT, TH\} \Rightarrow F(x) = P\{TT\} + P\{HT\} + P\{TH\} = \frac{3}{4}$

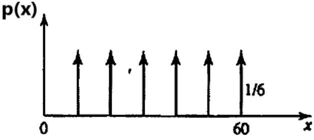
如果 $0 \leq x < 1$, $\{x(\xi) \leq x\} = \{TT\} \Rightarrow F(x) = P\{TT\} = P(T)P(T) = \frac{3}{4}$

如果 $x < 0$, $\{x(\xi) \leq x\} = \emptyset \Rightarrow F(x) = 0$

当 $x = 1$, $P\{x(\xi) = 1\} = F(1) - F(1^{-}) = 3/4 - 1/4 = 1/2$

掷一枚骰子: 样本空间: $\Omega = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$。定义随机变量 $x(\xi), \xi \in \Omega$ 满足:$x(f_i) = 10i$ 求 $F(x)$, 其中: $-\infty < x < \infty$.





$$F(100) = P\{x(\xi) \leq 100\} = P(\Omega) = 1$$

$$F(35) = P\{x(\xi) \leq 35\} = P\{f_1, f_2, f_3\} = \frac{3}{6}$$

$$F(30.01) = P\{x(\xi) \leq 30.01\} = P\{f_1, f_2, f_3\} = \frac{3}{6}$$

$$F(30) = P\{x(\xi) \leq 30\} = P\{f_1, f_2, f_3\} = \frac{3}{6}$$

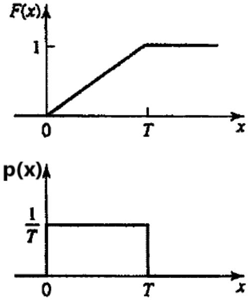
$$F(29.9) = P\{x(\xi) \leq 35\} = P\{f_1, f_2\} = \frac{2}{6}$$

均匀分布随机变量 $x(t)=t, 0<t<T$

$P\{t_1 \le t \le t_2\} = \frac{t_2-t_1}{T}, 0<t_1<t_2<T$

如果 $x>T$, 有

$F(x)=P\{x(t)\le x\}=P\{0\le t\le T\}=P(\Omega)=$



如果 $0\le x\le T$, 有

$$F(x)=P\{x(t)\le x\}=P\{0\le t\le x\}=\frac{x}{T}$$

如果 $x<0$, 有

$$F(x)=P\{x(t)\le x\}=P\{\emptyset\}=0 \qquad x<0$$

定义随机变量 $x(\xi)$, 满足

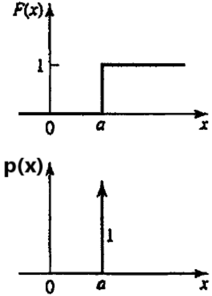
$\forall xi \in \Omega, x(\xi) = a$

如果 $x \geq a$, 则,$\forall \xi \in \Omega, x\xi = a \leq x$, 有

$$F(x) = P\{x(\xi) \leq x\} = P(\Omega) = 1 \qquad x \geq a$$

如果 $x < a$, 有

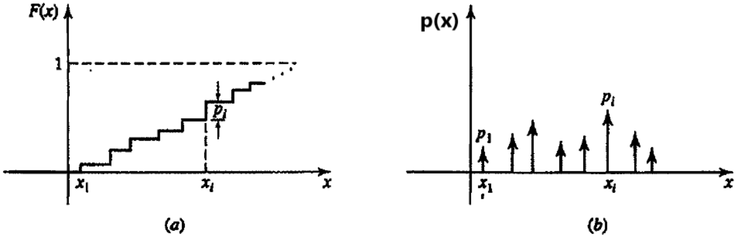
$$F(x) = P\{x(t) \leq x\} = P\{\emptyset\} = 0 \qquad x < a$$



非负实数集合 $\{p_i\},\forall i, i = 1, 2, \ldots, \infty$ 满足,

1. $P\{x(\xi) = x_i\} = p_i$
2. $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$

求 $F(x)$, 其中: $-\infty < x < \infty$.



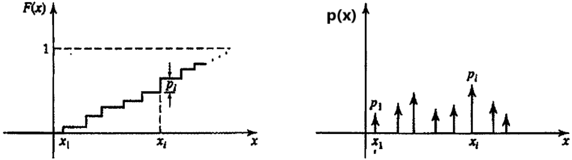
对于 $x_i \le x < x_{i+1}$, 我们有 $\{x(\xi) \le x\} = \bigcup_{x_k \le x} \{x(\xi) = x_k\} = \bigcup_{k=1}^{i} \{x(\xi) = x_k\}$, 因此

$$F(x) = P\{x(\xi) \le x\} = \sum_{k=1}^{i} p_k \qquad x_i \le x < x_{i+1}$$

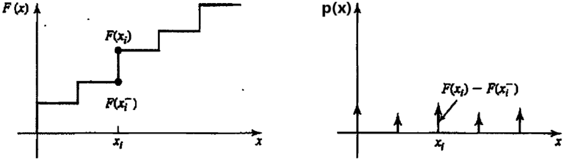
离散型随机变量 $x(\xi)$ 的 $p(x)$

$$P\{x(\xi) = x_i\} = F(x_j) - F(x_i^-) = p_i$$

$$p(x) = \sum_i p_i \delta(x - x_i)$$



(a) (b)



Example

某产品 40 件, 其中次品 3 件, 现从中任取 3 件。(1) 求取出的 3 件产品中所含次品数 ξ 的分布列; (2) 求取出的产品中至少有一件次品的概率; (3) 求 $x(\xi)$ 的分布函数 $F(x)$。

(1) $P\{\xi=0\}=\frac{C_{37}^3}{C_{40}^3}=0.7865 \quad P\{\xi=1\}=\frac{C_3^1C_{37}^2}{C_{40}^3}=0.2022$

$P\{\xi=2\}=\frac{C_3^2C_{37}^1}{C_{40}^3}=0.0112 \quad P\{\xi=3\}=\frac{C_3^3}{C_{40}^3}=0.0001$

(2) $P\{\xi\geq 1\}=1-P\{\xi=0\}=1-0.7865=0.2135$

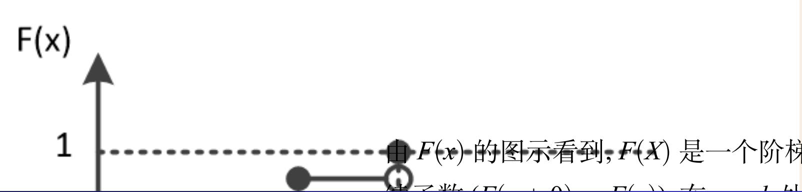
(3) 由分布函数定义得: $F(x)=P\{x(\xi)\leq x\}=\begin{cases}0, & x<0\\ 0.7865, & 0\leq x<1\\ 0.9887, & 1\leq x<2\\ 0.9999, & 2\leq x<3\\ 1, & x\geq 3\end{cases}$

解:

(1)
$$P\{\xi=0\}=\frac{C_{37}^3}{C_{40}^3}=0.7865 \qquad P\{\xi=1\}=\frac{C_3^1C_{37}^2}{C_{40}^3}=0.2022$$
$$P\{\xi=2\}=\frac{C_3^2C_{37}^1}{C_{40}^3}=0.0112 \qquad P\{\xi=3\}=\frac{C_3^3}{C_{40}^3}=0.0001$$

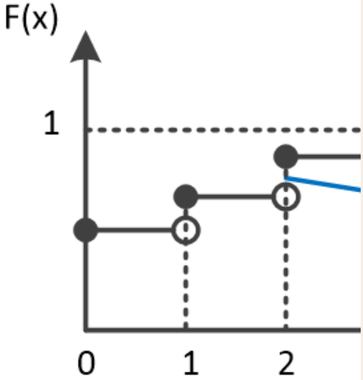
(2) $P\{\xi\geq 1\}=1-P\{\xi=0\}=1-0.7865=0.2135$

(3) 由分布函数定义得: $F(x)=P\{x(\xi)\leq x\}=\begin{cases}0, & x<0\\ 0.7865, & 0\leq x<1\\ 0.9887, & 1\leq x<2\\ 0.9999, & 2\leq x<3\\ 1, & x\geq 3\end{cases}$



由 $F(x)$ 的图示看到, $F(X)$ 是一个阶梯状的右连

由随机变量 $x(\xi)$ 的分布函数 $F(x)$, 可以计算



$$P(x(\xi) \leq x) = F(x)$$

$$P(x(\xi) = x) = F(x) - F(x-0)$$

$$P(x(\xi) < x) = F(x-0)$$

$$P(x(\xi) > x) = 1 - F(x)$$

$$P(x(\xi) \geq x) = 1 - F(x-0)$$

进一步,形如 $\{x_1 \leq x(\xi) \leq x_2\}, \{x_1 < x(\xi) < x_2\}\{x_1 < x(\xi) \leq x_2\}, \{x_1 \leq x(\xi) < x_2\}$ 等一些事件及它们经过有限次或可列次并、交、差运算以后的概率,都可以由 $F(x)$ 算出来。

$F(x)$ 全面地描述了随机变量 $x(\xi)$ 地统计规律。既然分布函数能够描述一般的随机变量的统计规律,因而分布函数这个概念比分布列更重要。只不过对离散型随

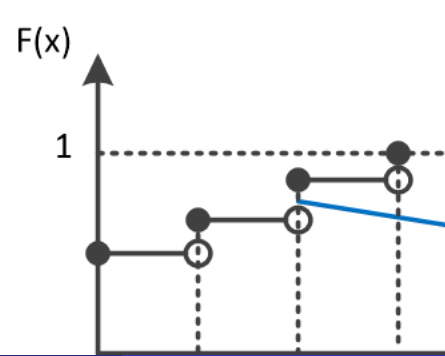
离散性随机变量的分布函数与分布列之间的关系

$$F(x) = P(x(\xi) \leq x) = \sum_{a_i \leq x} P(x(\xi) = a_i)$$

离散型随机变量 ξ 的分布列

$x(\xi)$	a_1	a_2	$\cdots$
$P(x(\xi))$	p_1	p_2	$\cdots$

离散型随机变量 ξ 的分布函数

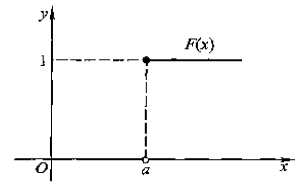


Example

若 ξ 只取一个值 a, 即有 $P(\xi = a) = 1$, 求 ξ 的分布函数 $F(x)$.

解

$$F(x) = P(\xi \le x) = \begin{cases} 1, & x \ge a \\ 0, & x < a \end{cases}$$



如图所示,$F(x)$ 是一个右连续的、阶梯状的函数,在 $x = a$ 处有一个跳跃,其跃度为

$$1 = P(\xi = a)$$

Example

等可能地在 $[a,b]$ 上投点，所投的点落在 $[a,b]$ 中的任一子区间 $B=[c,d]$ 中的概率与 B 的长度 l_B 成正比，而与 B 在 $[a,b]$ 中的位置无关。如果记 “点落入 B 中” 这一事件为 B, 则上述等可能性意味着

$$P(B)=\frac{l_B}{b-a}=\frac{d-c}{b-a}$$

如果投在 $[a,b]$ 中的点的坐标为 $\xi(a\le\xi)$ 令

$$x(\xi)=\xi \qquad (a\le\xi)$$

这样就得到一个随机变量 $x(\xi)$, 它的取值充满了整个区间 $[a,b]$. 对于任意一点 ξ_0 的概率为:

$$P(x(\xi)=\xi_0)=P(\xi=\xi_0)=\frac{l_{\xi_0}}{b-a}=0$$

由于单点集的长度为零。因此用 “分布列” 研究随机变量 $x(\xi)$ 的统计规律是行不通的。引入分布函数的概念。

点落落入 $B=[c,d]$ 区间的概率与 B 的长度 l_B 成正比，设 $B=[c,d]\subset[a,b]$，就有

$$P(c\le d)=P(\text{点落入 } B \text{ 中})=P(B)=\frac{d-c}{b-a}$$

因为 $P(\xi=c)=0$, 所以

$$a$$

注释的内容

n 重伯努利试验 k 次成功的概率 (二项分布):

$$P\{\xi = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

特例:令二项分布的 $n = 1, k$ 只能取 0 或 1, 描述事件 A 发生的概率。

Definition (0–1 分布)

若 $x(\xi)$ 的概率分布是

ξ	0	1
$P(\xi)$	$1-p$	p

则称 $x(\xi)$ 服从参数 p 的 0–1 分布。

Example

抛掷一枚硬币, $p = 1 - p = \frac{1}{2}$。

ξ	0(正面朝上)	1(正面朝下)
$P(\xi)$	0.5	0.5

Example

一批产品的废品率为 5%, 从中任取一个进行检查, 若令 ξ 表示取得废品的数量, 写出 ξ 的概率分布。

ξ	0	1
$P(\xi)$	0.95	0.05

在一个努利试验中,每次试验成功的概率为 p, 失败的概率为 $1-p$, 设试验进行到第 k 次才成功,试验结束。第 k 次才成功,表明 k-1 次是的失败的,概率为 $(1-p)^{k-1}$, 有独立性即得总的概率为 $(1-p)^{k-1}p$。

Definition (几何分布)

若 $x(\xi)$ 的概率分布是

$$P(\xi=k)=(1-p)^{k-1}p, \qquad (0<p<1, k=1,2,\dots)$$

则称 $x(\xi)$ 服从参数为 p 的几何分布,记作 $\xi \sim G(p)$

Example

社会上定期发行某种奖券，每券一元，中奖率为 p，某人每次购买 1 张奖券，如果没有中奖，下次继续购买一张，直到中奖为止。求该人购买奖券次数 ξ 的概率分布。

令 A_k ={第 k 次购买的奖券中奖}, $k=1,2,3,...,$

则 $P(A_k)=p, \quad P(\overline{A_k})=1-p,$

由于 $A_1,A_2,A_3,\ldots$ 相互独立，于是：

$$
\begin{aligned}
P(\xi=1) &= P(A_1)=p \\
P(\xi=2) &= P(\overline{A_1}A_1)=P(\overline{A_1})P(A_2)=(1-p)p \\
P(\xi=3) &= P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(A_3)=(1-p)^2p \\
&\cdots \\
P(\xi=k) &= P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_{k-1}}A_k)=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})\cdots P(\overline{A_{k-1}})P(A_k)=(1-p)^{k-1}p
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow \ \xi\sim G(p)$

Example

某射手命中率为 $p,(0<p<1)$，现有五发子弹。射击一发，如果命中，即停止射击，否则再射击一次，依次类推，如用 η 表示他射击所用去的子弹数，求 η 的分布。当 $(\eta=k),1\leq k\leq 4$ 时表示前 $(k-1)$ 次射击均未命中。第 k 次才首次命中，依题意，每次射击是相互独立的。故 $P(\eta=k|1\leq k\leq 4)=(1-p)^{k-1}p$。而 $(\eta=5)$ 时表示前 4 次射击均未命中，第 5 次射击后不管是否命中均要停止。故
$P(\eta=k|k=5)=(1-p)^{k-1}p$。

η	1	2	3	4	5
$P(\eta)$	p	$p(1-p)$	$p(1-p)^2$	$p(1-p)^3$	$(1-p)^4$

Example

设随机相位正弦信号 $s(t;\theta)=a\cos(\omega_0 t+\theta)$, 其中振幅 a 和 ω_0 为常数, 相位 θ 是一随机变量, 它服从 $[-\pi,\pi]$ 上的均匀分布。

1. 求该过程的均值 $E[s(t;\theta)]$ 和自相关函数 $E[s(t_j;\theta)s(t_k;\theta)]$。
2. 写出 $s(t;\theta)$ 的样本函数。
3. 求 $s(t;\theta)$ 的概率密度函数。

解:

1. 因为相位 θ 服从 $[-\pi,\pi]$ 上的均匀分布, 所以,

$$p(\theta)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}, & -\pi\le\theta\le\pi\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

该随机过程的均值为:

$$\begin{aligned}\mu_\theta(t)&=E[s(t;\theta)]=E[a\cos(\omega_0 t+\theta)]\\&=\int_{-\infty}^{\infty}a\cos(\omega_0 t+\theta)p(\theta)d\theta\\&=\int_{-\pi}^{\pi}a\cos(\omega_0 t+\theta)\frac{1}{2\pi}d\theta\\&=\frac{a}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\omega_0 t+\theta)d\theta\\&=0\end{aligned}$$

解 (续): [1]

1. (续) 该随机过程的自相关函数为:

$$\begin{aligned} r_x(t_j, t_k) &= E[s(t_j)s(t_k)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} a\cos(\omega_0 t_j + \theta) a\cos(\omega_0 t_k + \theta) p(\theta) d\theta \\ &= \frac{a^2}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(\omega_0 t_j + \omega_0 t_k + 2\theta) + \cos\omega_0(t_k - t_j)] d\theta \\ &= \frac{a^2}{2}\cos\omega_0\tau, \qquad (\tau = t_k - t_j) \end{aligned}$$

2. 当 θ 在 $[-\pi, \pi]$ 内任取定值时, 如 $\theta = 0$, 则样本函数为

$$s_1(t; \theta = 0) = a\cos\omega_0 t$$

当 $\theta = \frac{\pi}{2}$, 则样本函数为

$$s_2(t; \theta = \frac{\pi}{2}) = a\cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}) = -a\sin\omega_0 t$$

[1] $\cos A \cos B = \frac{1}{2}\cos(A+B)\cos(A-B)$

解 (续):

3. 求 $s(t;\theta)$ 的概率密度函数。

固定时刻 t, 则随机变量 $s(t;\theta)=a\cos(\omega_0 t+\theta)$ 是随机变量 θ 的函数。由分布函数的定义:

$$F_{s(t)}(y)=P\{s(t)\le y\}=P\{a\cos(\omega_0 t+\theta)\le y\}$$

当 $y<-a$ 时, $F_{x(t)}(y)=0$; 当 $y\ge +a$ 时, $F_{x(t)}(y)=1$

当 $-a<y\le +a$ 时, 我们有:

$$\begin{aligned}
F_{s(t)}(y) &= P\{x(y)\le y\}=P\{a\cos(\omega_0 t+\theta)\le y\}\\
&= P(\{-\pi<\theta\le \omega_0 t-\arccos\frac{y}{a}\}\cup\{\arccos\frac{y}{a}-\omega_0 t<\theta\le\pi\})\\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\omega_0 t-\arccos\frac{y}{a}}dx+\int_{\arccos\frac{y}{a}-\omega_0 t}^{\pi}dx\right]\\
&= \frac{1}{\pi}[\omega_0 t+\pi-\arccos\frac{y}{a}]
\end{aligned}$$

解 (续):

3. (续) 求 $x(t;\theta)$ 的概率密度函数。

   当 $-a < y \le +a$ 时, 有: $F_{x(t)}(y) = \frac{1}{\pi}[\omega_0 t + \pi - \arccos\frac{y}{a}]$

   此时, $x(t;\theta)$ 的概率密度函数为:

$$p_{x(t)}(y) = F'_{x(t)}(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - y^2}}$$

   最终得到 $x(t;\theta)$ 的概率密度函数为:

$$p(\theta;t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}, & -a < x \le +a \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

Example

考察一随机过程,它在 $t_0 + nT_0$ 时刻具有宽度为 b 的矩形脉冲波,脉冲幅度为一等概率 (p), 取值 $\pm a$ 的随机变量,且 $b < T_0, T_0$ 是在 $(0, T_0)$ 上服从均匀分布的随机变量,并且脉冲幅度 A 与 t_0 独立, 试求该过程的自相关函数和方差。

解: 由给定的随机过程,我们有, 均值:

$$\mu_x(t) = E\{x(t)\} = a \times p + (-a) \times p + 0 \times (1 - 2p) = 0$$

下面求自相关函数:

任取 t_1, t_2, 且 $t_1 < t_2$, 当 $|t_1 - t_2| > T_0$ 时, t_1, t_2 位于不同的周期内,此时有:

$$r_x(t_1, t_2) = E\{x(t_1)x(t_2)\} = E\{x(t_1)\}E\{x(t_2)\} = 0$$

当 $|t_1 - t_2| \le T_0$, 且 t_1, t_2 位于两个不同的周期内时,此时有:

$$r_x(t_1, t_2) = E\{x(t_1)x(t_2)\} = E\{x(t_1)\}E\{x(t_2)\} = 0$$

当 $|t_1-t_2|\le T_0$, 且 t_1,t_2 位于同一周期内时,假设 θ 为 t_1 所在的脉冲的起始时刻,只有当 $t_2<\theta+b$ 时, $x(t_1)x(t_2)$ 取到不为 0 的值, 此时的概率为:

$$P\{t_2<\theta+b\}=1-P\{t_2>\theta+b\}=1-\frac{1}{T_0}\int_{t_1-T_0}^{t_2-b}d\theta=\frac{b-(t_2-t_1)}{T_0}$$

由此,我们有:

$$r_x(t_1,t_2)=E\{x(t_1)\}E\{x(t_2)\}=a^2\cdot\frac{b-(t_2-t_1)}{T_0}$$

同理,当 $t_1>t_2$ 时,我们有:

$$r_x(t_1,t_2)=E\{x(t_1)x(t_2)\}=a^2\cdot\frac{b-(t_1-t_2)}{T_0}$$

因此, 最终得到自相关函数和方差:

$$r_x(\tau)=\frac{a^{(}b-|\tau|)}{T_0},\tau=t_2-t_1,\qquad \sigma_x^2(t)=r_x(0)=\frac{a^2b}{T_0}$$

中心极限定理

高斯噪声的数学模型—中心极限定理

在一般条件下,N 个相互**统计独立**的随机变量 n_i 之和 $n=\sum_{k=1}^{N} n_k$, 在 $N\to\infty$ 的极限情况下,其概率密度趋于高斯分布,而不管每个变量 n_k 的具体分布如何。

注

(1) 实际上,只要 N 足够大,每个分量之间也不一定完全统计独立,但不存在占统治地位的若干分量,则它们和的分布就可以近似为高斯分布。

(2) 无限多的、相互独立的、各自作用有限的系统干扰分量叠加形成噪声干扰,并且服从高斯分布。

欢迎批评指正！