信号检测与估值

段江涛
机电工程学院

2019 年 10 月

ch3. 信号检测与估计理论的基础知识

ch3-3. 派生贝叶斯准则 (2), 信号统计检测的性能及 M 元信号的统计检测

1. 极小极大化准则 (续)
2. 奈曼—皮尔逊准则
3. 信号统计检测的性能
4. 利用接收机工作特性,各种判决准则的分析和计算
5. M 元信号的统计检测

极小极大化准则

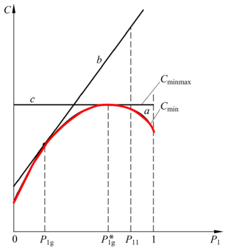
给定 P_{1g} 的条件下，平均代价 $C(P_1, P_{1g})$ 是先验概率 P_1 的线性函数，若 $P_{1g} \neq P_1$，平均代价 $C(P_1, P_{1g})$ 大于最小平均代价。

为避免产生过分大的代价，需要猜测一种先验概率 P_{1g}^*，使得平均代价 $C(P_1, P_{1g}^*)$ 不依赖于信源的先验概率 P_1。

$$C(P_1, P_{1g}) = c_{00} + (c_{10} - c_{00})P_F(P_{1g}) +$$

$$P_1[(c_{11} - c_{00}) + (c_{01} - c_{11})P_M(P_{1g}) - (c_{10} - c_{00})P_F(P_{1g})]$$

$$\left.\frac{\partial C(P_1, P_{1g})}{\partial P_1}\right|_{P_{1g}=P_{1g}^*} = 0$$



极小化极大方程

$$(c_{11} - c_{00}) + (c_{01} - c_{11})P_M(P_{1g}^*) - (c_{10} - c_{00})P_F(P_{1g}^*) = 0$$

平均代价: $C(P_{1g}^*) = c_{00} + (c_{10} - c_{00})P_F(P_{1g}^*)$

极小极大化准则

极小化极大方程

$$(c_{11}-c_{00})+(c_{01}-c_{11})P_M(P_{1g}^*)-(c_{10}-c_{00})P_F(P_{1g}^*)=0$$

平均代价:

$$C(P_{1g}^*)=c_{00}+(c_{10}-c_{00})P_F(P_{1g}^*)$$

正确判决不付出代价

$$c_{11}=c_{00}=0 \qquad c_{01}P_M(P_{1g}^*)=c_{10}P_F(P_{1g}^*)$$

正确判决不付出代价, 错误判决代价因子相同

$$c_{11}=c_{00}=0$$

$$c_{10}=c_{01}=1$$

$$P_M(P_{1g}^*)=P_F(P_{1g}^*)$$

极小化极大准则的基本步骤

1. 计算两个似然函数, 构建似然比 $\lambda(x) \overset{def}{=} \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)}$
2. 假设判决门限 η, 构建贝叶斯检测基本表达式
3. 化简成最简形式 $l(x) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \gamma(\eta)$
4. 利用极小化极大准则, 确定最终判决门限 $\gamma(\eta)$

贝叶斯准则例题 6

在闭启键控通信系统中,两个假设下的观测信号模型为:

$$H_0 : x = n$$

$$H_1 : x = A + n$$

其中,噪声 n 是均值为零,方差为 σ_n^2 的高斯噪声,若两个假设的先验概率未知,且 $c_{00} = c_{11} = 0, c_{01} = c_{10} = 1$。

采用极小化极大准则,试确定检测门限,并求最小平均错误概率。

贝叶斯准则例题 6: 解

解: 观测信号模型为:

$$H_0 : x = n$$

$$H_1 : x = A + n$$

步骤 1: 计算两个似然函数, 构建似然比

由于 n 是高斯分布随机变量, 因此在 H_0 假设下, 检测统计量 x 服从高斯分布, 且均值为 0, 方差为 σ_n^2; 在 H_1 假设下, 检测统计量 x 服从均值为 A, 方差为 σ_n^2 的高斯分布。

$$p(x|H_0) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right) \qquad p(x|H_1) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{(x-A)^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

$$\lambda(x) = \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} = \exp\left(\frac{(x^2-(x-A)^2)}{2\sigma_n^2}\right) = \exp\left(\frac{A}{\sigma_n^2}x - \frac{A^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

贝叶斯准则例题 6: 解 (续 1)

步骤 2: 假设判决门限 η, 构建贝叶斯检测基本表达式

$$\lambda(x) \overset{def}{=} \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

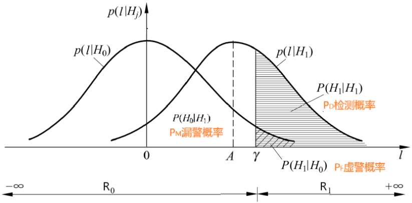
$$\lambda(x) = \exp\left(\frac{A}{\sigma_n^2}x - \frac{A^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

步骤 3: 化简成最简形式

$$x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma_n^2 \ln \eta}{A} + \frac{A}{2} \overset{def}{=} \gamma$$

贝叶斯准则例题 6: 解 (续 2)

步骤 4: 利用极小化极大准则, 确定最终判决门限 γ



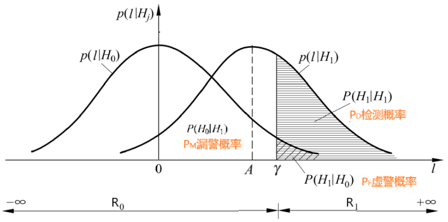
$$P_F \overset{def}{=} P(H_1|H_0) = \int_{\gamma}^{\infty} p(x|H_0)dx \implies Q(x) = \int_{x}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

$$= \int_{\gamma}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right) dx \qquad \text{by } x = \sigma_n u$$

$$= \int_{\frac{\gamma}{\sigma_n}}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

$$= Q\left(\frac{\gamma}{\sigma_n}\right)$$

贝叶斯准则例题 6: 解 (续 3)



$$P_M \stackrel{def}{=} P(H_0|H_1) = 1 - \int_{\gamma}^{\infty} p(x|H_1)dx \implies Q(x) = \int_{x}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

$$= 1 - \int_{\gamma}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{(x-A)^2}{2\sigma_n^2}\right) dx \qquad \text{by } x = \sigma_n u + A$$

$$= 1 - \int_{\frac{\gamma-A}{\sigma_n}}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

$$= 1 - Q\left(\frac{\gamma - A}{\sigma_n}\right)$$

贝叶斯准则例题 6: 解 (续 4)

正确判决不付出代价, 错误判决代价因子相同时的极小化极大方程

$$c_{11} = c_{00} = 0 \qquad c_{10} = c_{01} = 1$$

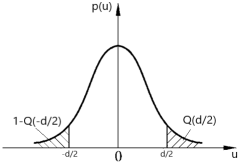
$$P_M(P_{1g}^*) = P_F(P_{1g}^*)$$

$$P_F \stackrel{def}{=} P(H_1|H_0) = Q\left(\frac{\gamma}{\sigma_n}\right)$$

$$P_M \stackrel{def}{=} P(H_0|H_1) = 1 - Q\left(\frac{\gamma - A}{\sigma_n}\right) = Q\left(-\frac{\gamma - A}{\sigma_n}\right)$$

$$Q(x) = \int_x^\infty \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

$$Q\left(\frac{d}{2}\right) = 1 - Q\left(-\frac{d}{2}\right)$$



根据上述极小化极大方程,有

$$Q\left(\frac{\gamma}{\sigma_n}\right) = Q\left(-\frac{\gamma - A}{\sigma_n}\right) \Longrightarrow \gamma = \frac{A}{2}$$

贝叶斯准则例题 6: 解 (续 5)

本例, 按照极小化极大准则, 平均错误概率为:

$$
\begin{aligned}
P_e &= P(H_1)P(H_0|H_1) + P(H_0)P(H_1|H_0) \\
&= P(H_1)P_M + P(H_0)P_F \\
&= [P(H_1) + P(H_0)]P_F && \text{by 本例的极小化极大方程} P_M(P_{1g}^*) = P_F(P_{1g}^*) \\
&= P_F = P(H_1|H_0) && \text{by } P(H_1) + P(H_0) = 1, P_F \overset{def}{=} P(H_1|H_0) \\
&= Q(\frac{\gamma}{\sigma}) = Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right) && \text{by } \gamma = \frac{A}{2} \\
&= Q(\frac{d}{2}) && \text{by 功率信噪比} d^2 = \frac{A^2}{\sigma^2}
\end{aligned}
$$

例题 5, 按照按照平均错误概率准则, 平均错误概率同上。

因此, **先验等概条件下的最小平均错误准则等价于正确判决为 0, 错误判决代价为 1 时的极小化极大准则**。

奈曼—皮尔逊准则 (Neyman-Pearson criterion)

- **应用范围**

  假设的先验概率未知, 判决代价未知 (雷达信号检测)

- **目标**

  错误判决概率尽可能小, 正确判决概率尽可能大

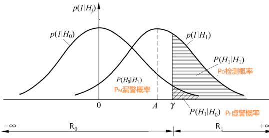
- **实际情况**

  $P(H_1|H_0)$ 减小时, $P(H_1|H_1)$ 也相应减小;

  增加 $P(H_1|H_1)$, $P(H_1|H_0)$ 也随之增加。

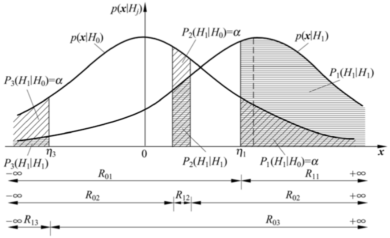
- **奈曼皮尔逊检测**

  在虚警概率 $P_F \overset{def}{=} P(H_1|H_0) = \alpha$ 约束条件下, 使正确判决概率 (检测概率)$P_D \overset{def}{=} P(H_1|H_1)$ 最大的准则。



奈曼—皮尔逊准则的存在性

1. 图中, 三个判决域 (R_{0i}, R_{1i}) 均满足错误判决概率 $P_i(H_1|H_0) = \alpha(i = 0, 1, 2)$。
2. 原则上判决域 R_0 和 R_1 有无限多种划分方法, 均可以保证错误判决概率 $P(H_1|H_0) = \alpha$, 但是正确判决概率 $P(H_1|H_1)$ 一般是不一样的。
3. 至少有一种判决域划分能使 $P(H_1|H_0) = \alpha$, 又能使 $P(H_1|H_1)$ 到达最大。



奈曼-皮尔逊检测准则是一定存在的

奈曼—皮尔逊准则的推导

在 $P(H_1|H_0)=\alpha$ 约束条件下, 使正确判决概率 $P(H_1|H_1)$ 最大的准则

$\Updownarrow$ (由于 $P(H_0|H_1)+P(H_1|H_1)=1$)

在 $P(H_1|H_0)=\alpha$ 约束条件下, 使错误判决概率 $P(H_0|H_1)$ 最小的准则

利用拉格朗日乘子 $\mu(\mu\geq 0)$, 构建目标函数

$$J=P(H_0|H_1)+\mu\left[P(H_1|H_0)-\alpha\right]$$

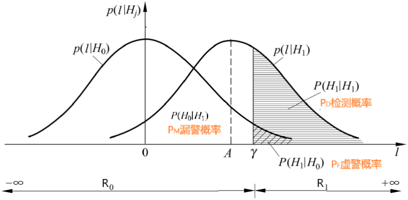
若 $P(H_1|H_0)=\alpha, J$ 达到最小时, $P(H_0|H_1)$ 也达到最小。

漏警概率 $P(H_0|H_1)+$ 检测概率 $P(H_1|H_1)=1$,

虚警概率 $P(H_1|H_0)=\alpha$

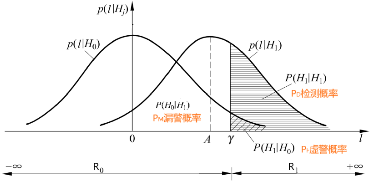
当 J 最小 $\Longrightarrow$ 漏警概率 $(P(H_0|H_1)$ 最小

$\Longrightarrow$ 检测概率 $P(H_1|H_1)$ 最大。



奈曼—皮尔逊准则的推导 (续)

$$
\begin{aligned}
J &= P(H_0|H_1) + \mu[P(H_1|H_0) - \alpha] \\
&= \int_{R_0} p(x|H_1)dx + \mu\left[\int_{R_1} p(x|H_0)dx - \alpha\right] \\
&= \int_{R_0} p(x|H_1)dx + \mu\left[1 - \int_{R_0} p(x|H_0)dx - \alpha\right] \\
&= \mu(1-\alpha) + \int_{R_0} \left[p(x|H_1) - \mu p(x|H_0)\right] dx
\end{aligned}
$$



把使被积函数取负值的观测值 x 值划分给 R_0 区域,而把其余的观测值 x 值划分给 R_1,即可保证平均代价最小,从而使 J 值最小。

$p(x|H_1) < \mu p(x|H_0)$ **判决 H_0 假设成立**

$p(x|H_1) \geq \mu p(x|H_0)$ **判决 H_1 假设成立**

奈曼—皮尔逊准则

奈曼—皮尔逊准则

$$\lambda(x) \stackrel{def}{=} \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \mu$$

其中, 判决门限有下式确定

$$P(H_1|H_0) = \int_{R_1} p(x|H_0)dx = \int_{\mu}^{\infty} p(\lambda|H_0)d\lambda = \alpha$$

求出的 μ 必满足 $\mu \geq 0$

贝叶斯判决准则

$$\lambda(x) = \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)(c_{10}-c_{00})}{P(H_1)(c_{01}-c_{11})} \stackrel{def}{=} \eta$$

贝叶斯准则的特例, 当 $P(H_1)(c_{01}-c_{11}) = 1, P(H_0)(c_{10}-c_{00}) = \mu$ 时, 就成为奈曼—皮尔逊准则。

奈曼—皮尔逊准则的求解步骤

1. 计算两个似然函数, 构建似然比 $\lambda(x) \stackrel{def}{=} \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \mu$
2. 假设判决门限 μ, 构建贝叶斯检测基本表达式
3. 化简
4. 根据统计量计算 $p(l|H_0)$ 和 $p(l|H_1)$
5. 在 $P(H_1|H_0) = \int_{R_1} p(l|H_0)dl = \alpha$ 约束下, 计算判决门限

贝叶斯准则例题 7

在闭启键控通信系统中,两个假设下的观测信号模型为:

$$H_0 : x = n$$

$$H_1 : x = 1 + n$$

其中,噪声 n 是均值为零,方差为 1 的高斯噪声。

试构造在 $P(H_1|H_0) = 0.1$ 条件下的奈曼—皮尔逊接收机

贝叶斯准则例题 7: 解

解: 观测信号模型为:

$$H_0 : x = n$$
$$H_1 : x = 1 + n$$

步骤 1: 计算两个似然函数, 构建似然比

由于 n 是高斯分布随机变量, 因此在 H_0 假设下, 检测统计量 x 服从高斯分布, 且均值为 0, 方差为 σ_n^2; 在 H_1 假设下, 检测统计量 x 服从均值为 1, 方差为 σ_n^2 的高斯分布。

$$p(x|H_0) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right) \qquad p(x|H_1) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

$$\lambda(x) = \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} = \exp\left(\frac{(x^2-(x-1)^2)}{2\sigma_n^2}\right) = \exp\left(\frac{1}{\sigma_n^2}x - \frac{1}{2\sigma_n^2}\right)$$

贝叶斯准则例题 7: 解 (续 1)

步骤 2: 假设判决门限 μ, 构建贝叶斯检测基本表达式

$$\lambda(x) \overset{def}{=} \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \mu$$

$$\lambda(x) = \exp\left(\frac{1}{\sigma_n^2}x - \frac{1}{2\sigma_n^2}\right)$$

步骤 3: 化简成最简形式

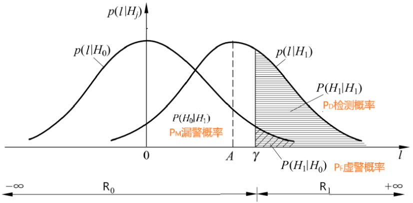
$$x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \sigma_n^2 \ln\mu + \frac{1}{2} \overset{def}{=} \gamma$$

$$\text{by } \sigma_n = 1$$

$$x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \ln\mu + \frac{1}{2} \overset{def}{=} \gamma$$

贝叶斯准则例题 7: 解 (续 2)

步骤 4: 利用奈曼—皮尔逊准则, 确定最终判决门限 γ



$$
\begin{aligned}
P_F \overset{def}{=} P(H_1|H_0) &= \int_\gamma^\infty p(x|H_0)dx \implies Q(x) = \int_x^\infty \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \\
&= \int_\gamma^\infty \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right) dx \qquad \text{by } x = \sigma_n u \\
&= \int_{\frac{\gamma}{\sigma_n}}^\infty \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \\
&= Q\left(\frac{\gamma}{\sigma_n}\right) = Q(\gamma) \qquad \text{by } \sigma_n = 1
\end{aligned}
$$

贝叶斯准则例题 7: 解 (续 3)

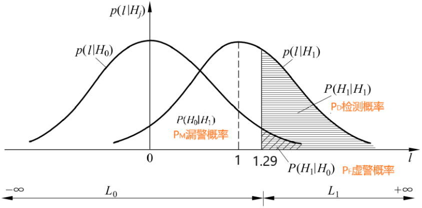
$$x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \ln \mu + \frac{1}{2} \overset{def}{=} \gamma$$

$$P(H_1|H_0) = Q(\gamma)$$

在 $P(H_1|H_0) = 0.1$ 条件下,确定判决门限

由 $Q(\gamma) = 0.1$, 解得 $\gamma = 1.29$,

由 $\ln \mu + \frac{1}{2} = \gamma$, 解得 $\mu = 2.2$



$$P_D \overset{def}{=} P(H_1|H_1) = \int_{\gamma}^{\infty} p(x|H_1)dx \implies Q(x) = \int_{x}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

$$= \int_{\gamma}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{2\sigma_n^2}\right) dx \qquad \text{by } x = \sigma_n u + 1$$

$$= \int_{\frac{\gamma-1}{\sigma_n}}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

$$= Q\left(\frac{\gamma - 1}{\sigma_n}\right) = Q(\gamma - 1) = Q(0.29) = 0.386$$

贝叶斯准则以及派生贝叶斯准则 (1)

贝叶斯检测，给定各种判决代价因子，且已知各假设的先验概率条件下，使平均代价最小的检测准则。

$$\frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)(c_{10}-c_{00})}{P(H_1)(c_{01}-c_{11})}$$

$c_{00}=c_{11}=0$

$c_{01}=c_{10}=1$

$c_{10}-c_{00}=c_{01}-c_{11}$

最小平均错误概率判决准则

$$\frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$$

最大后验概率检测准则

$$P(H_1|x) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} P(H_0|x)$$

等概

最大似然判决准则

$$p(x|H_1) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} p(x|H_0)$$

符合最小平均错误概率准则的一定符合最大后验概率检测准则，反之不成立。

贝叶斯准则以及派生贝叶斯准则 (2)

贝叶斯检测，给定各种判决代价因子，且已知各假设的先验概率条件下，使平均代价最小的检测准则。

$$\boxed{\frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)(c_{10}-c_{00})}{P(H_1)(c_{01}-c_{11})}}$$

信源先验概率未知 → **极小化极大准则**

按照似然比检测形式构建基本表达式，并在 $\boxed{P_M(P_{1g}^*)=P_F(P_{1g}^*)}$ 的约束下计算最终判决门限。

$$c_{11}=c_{00}=0 \quad c_{10}=c_{01}=1$$

信源先验概率及代价因子均未知 → **奈曼皮尔逊准则**

按照似然比检测形式构建基本表达式，并在 $\boxed{P(H_1|H_0)=\int_{R_1} p(l|H_0)\mathrm{d}l=\alpha}$ 的约束下计算最终判决门限。

贝叶斯准则以及派生贝叶斯准则求解步骤

分析某种检测方法得性能时,需要根据化简后得最简判决表达式进行。

计算步骤:

1. 推导某种检测方法下获得的最简判决表达式 $l(x) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \gamma$
2. 根据最简表示式,计算各种假设下,统计量的概率密度函数

$$p(l|H_0) \qquad p(l|H_1)$$

3. 计算判决概率

$$P(H_0|H_1) \qquad P(H_1|H_0)$$

信号统计检测的性能

基本要求

- 理解判决概率的不同计算方法
- 理解似然比检测的接收机工作特性
- 利用接收机工作特性求解不同检测准则的解

信号统计检测的性能

- **判决概率计算**

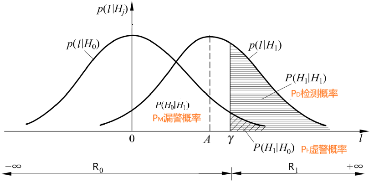
$$\lambda(\boldsymbol{x}) = \frac{p(\boldsymbol{x}|H_1)}{p(\boldsymbol{x}|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta \qquad l(\boldsymbol{x}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \gamma$$

$$P(H_1|H_0) = \int_{\eta}^{\infty} p(\lambda|H_0)d\lambda \qquad P(H_1|H_0) = \int_{\gamma}^{\infty} p(l|H_0)dl$$

$$P(H_1|H_1) = \int_{\eta}^{\infty} p(\lambda|H_1)d\lambda \qquad P(H_1|H_1) = \int_{\gamma}^{\infty} p(l|H_1)dl$$

- **似然比检测的接收机工作特性**

根据 $P_D = P(H_1|H_1)$ 和 $P_F = P(H_1|H_0)$ 分析似然比检测的接收机工作特性



信号统计检测的性能

- **判决概率计算**

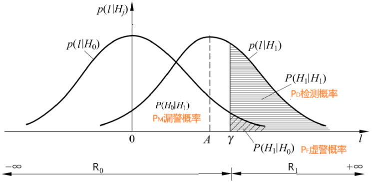
$$\lambda(\boldsymbol{x}) = \frac{p(\boldsymbol{x}|H_1)}{p(\boldsymbol{x}|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta \qquad l(\boldsymbol{x}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \gamma$$

$$P(H_1|H_0) = \int_{\eta}^{\infty} p(\lambda|H_0)d\lambda \qquad P(H_1|H_0) = \int_{\gamma}^{\infty} p(l|H_0)dl$$

$$P(H_1|H_1) = \int_{\eta}^{\infty} p(\lambda|H_1)d\lambda \qquad P(H_1|H_1) = \int_{\gamma}^{\infty} p(l|H_1)dl$$

- **似然比检测的接收机工作特性**

根据 $P_D = P(H_1|H_1)$ 和 $P_F = P(H_1|H_0)$ 分析似然比检测的接收机工作特性



例如, 雷达信号检测

$H_0 : x_k = n_k$

$H_1 : x_k = A + n_k$

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma_n^2 \ln\eta}{NA} + \frac{A}{2} \overset{def}{=} \gamma$$

统计量: $l(\boldsymbol{x}) \overset{def}{=} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k$

假设 H_0 条件下, 统计量 $l(x)$ 为高斯分布, $(l|H_0) \sim \mathcal{N}(0, \frac{\sigma_n^2}{N})$

$$p(l|H_0) = \left(\frac{N}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{Nl^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

假设 H_1 条件下, 统计量 $l(x)$ 为高斯分布, $(l|H_1) \sim \mathcal{N}(A, \frac{\sigma_n^2}{N})$

$$p(l|H_1) = \left(\frac{N}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{N(l-A)^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

虚警概率 $P_F = P(H_1|H_0)$

$$
\begin{aligned}
P(H_1|H_0) &= \int_{\gamma}^{\infty} p(l|H_0)dl \implies Q(x) = \int_{x}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \\
&= \int_{\gamma}^{\infty} \left(\frac{N}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{Nl^2}{2\sigma_n^2}\right) dl \qquad \text{by } l = \frac{\sigma_n u}{\sqrt{N}} \\
&= \int_{\frac{\sqrt{N}\gamma}{\sigma_n}}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \\
&= Q\left(\frac{\sqrt{N}\gamma}{\sigma_n}\right) \qquad \text{by } \gamma = \frac{\sigma_n^2 \ln\eta}{NA} + \frac{A}{2} \\
&= Q\left(\frac{\sqrt{N}\left(\frac{\sigma_n^2 \ln\eta}{NA} + \frac{A}{2}\right)}{\sigma_n}\right) \\
&= Q\left(\frac{\sigma_n \ln\eta}{\sqrt{NA}} + \frac{\sqrt{NA}}{2\sigma_n}\right) \qquad \text{by } d^2 = \frac{NA^2}{\sigma_n^2} \\
&= Q\left(\frac{\ln\eta}{d} + \frac{d}{2}\right)
\end{aligned}
$$

检测概率 $P_D = P(H_1|H_1)$

$$
\begin{aligned}
P(H_1|H_1) &= \int_{\gamma}^{\infty} p(l|H_1)dl \implies Q(x) = \int_{x}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)du \\
&= \int_{\gamma}^{\infty}\left(\frac{N}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{N(l-A)^2}{2\sigma_n^2}\right)dl \qquad \text{by } l = \frac{\sigma_n u}{\sqrt{N}} + A \\
&= \int_{\frac{\sqrt{N}(\gamma-A)}{\sigma_n}}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)du \\
&= Q\left(\frac{\sqrt{N}(\gamma-A}{\sigma_n}\right) \qquad \text{by } \gamma = \frac{\sigma_n^2\ln\eta}{NA} + \frac{A}{2} \\
&= Q\left(\frac{\sqrt{N}\left(\frac{\sigma_n^2\ln\eta}{NA} - \frac{A}{2}\right)}{\sigma_n}\right) \\
&= Q\left(\frac{\sigma_n\ln\eta}{\sqrt{NA}} - \frac{\sqrt{NA}}{2\sigma_n}\right) \qquad \text{by } d^2 = \frac{NA^2}{\sigma_n^2} \\
&= Q\left(\frac{\ln\eta}{d} - \frac{d}{2}\right)
\end{aligned}
$$

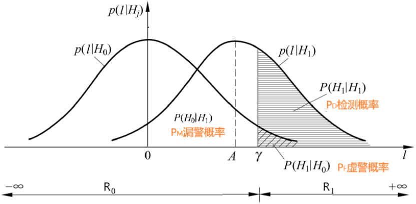
判决域与判决概率

N 次独立采样, 样本为 $x_k (k = 1, 2, \ldots, N)$

$$n_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$$

$$H_0 : x_k = n_k \qquad (l|H_0) \sim \mathcal{N}(0, \frac{\sigma_n^2}{N})$$

$$H_1 : x_k = A + n_k \qquad (l|H_1) \sim \mathcal{N}(A, \frac{\sigma_n^2}{N})$$



检验统计量 $l(\boldsymbol{x})$, 归一化后, $(l|H_j) \sim \mathcal{N}(0, 1)$

判决表达式: $$l(\boldsymbol{x}) \overset{def}{=} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma^2 \ln\eta}{NA} + \frac{A}{2} \overset{def}{=} \gamma$$

判决概率: (式中, 信噪比 $d^2 = \frac{NA^2}{\sigma_n^2}$)

虚警概率: $$P_F \overset{def}{=} P(H_1|H_0) = Q\left(\frac{\ln\eta}{d} + \frac{d}{2}\right)$$

检测概率: $$P_D \overset{def}{=} P(H_1|H_1) = Q\left(\frac{\ln\eta}{d} - \frac{d}{2}\right)$$

接收机工作特性

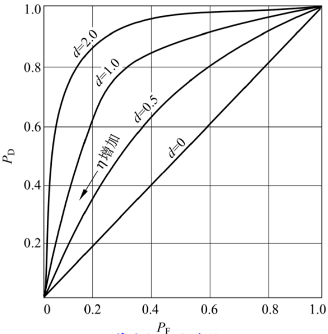
- 错误判别概率 (虚警概率):

$$P_F \stackrel{def}{=} P(H_1|H_0) = Q\left(\frac{\ln\eta}{d} + \frac{d}{2}\right)$$

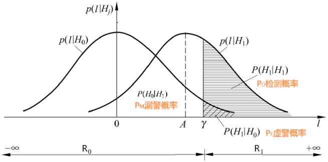
- 正确判别概率 (检测概率):

$$P_D \stackrel{def}{=} P(H_1|H_1) = Q\left(\frac{\ln\eta}{d} - \frac{d}{2}\right)$$

- 不同的信噪比 d, 有不同的 $P_D \sim P_F$ 曲线
- 似然比函数 $\lambda(x)$ 超过无穷大门限 $\eta = +\infty$ 是不可能事件, $(P_D, P_F) = (0, 0)$
- $\lambda(x) \geq 0, \eta = 0$ 是必然事件, $(P_D, P_F) = (1, 1)$
- 当 $\lambda(x)$ 是连续随机变量时, $\eta \uparrow \Longrightarrow (P_D, P_F) \downarrow$

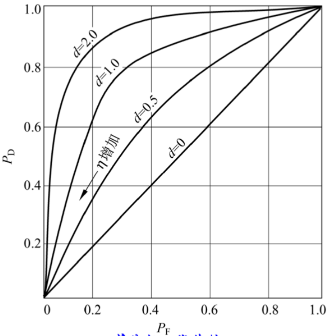


接收机工作特性

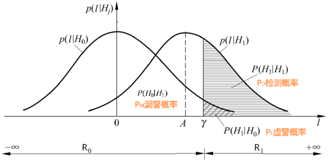


接收机工作特性的共同特点

- 上凸曲线
- 曲线位于 $P_D = P_F$ 之上
- 随着门限 η 的增加, 两种判决概率 P_D 和 P_F 之都会减小
- P_D 和 P_F 同时增加, 或同时减小
- 给定 $P_D(P_F)$, 随着信噪比 d 的增加, P_F 减小 (P_D 增加)
- 工作特性某点上的斜率等于该点 P_D 和 P_F 所要求的检测门限值
- 利用接收机工作特性, 可进行各种判决准则的分析和计算



接收机工作特性



检测概率 P_D 与信噪比 d 的关系

信噪比 d 是接收机的主要指标之一,因此常把接收机工作特性改成 $P_D \sim d$ 曲线,而以 P_F 作为参变量。

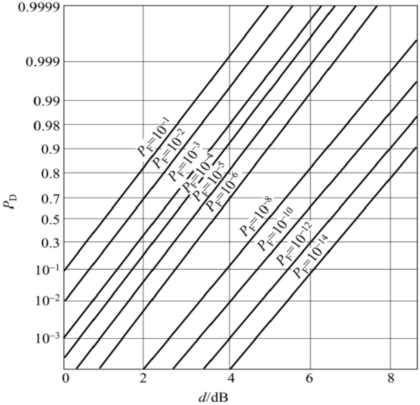
$$P_F = P(H_1|H_0) = Q(\ln\eta/d + d/2)$$

$$\ln\eta/d = Q^{-1}[P(H_1|H_0)] - d/2$$

$$P_D = P(H_1|H_1) = Q\left(\ln\eta/d - d/2\right)$$

$$= Q[Q^{-1}[P(H_1|H_0)] - d/2 - d/2]$$

$$= Q[Q^{-1}[P(H_1|H_0)] - d]$$



检测概率P_D与信噪比d的关系

$Q(x)$ 是递减函数,当给定 P_F 时,P_D 随功率信噪比 $(d^2 = NA^2/\sigma_n^2)$ 单调增加。

工作特性某点上的斜率等于该点 P_D 和 P_F 所要求的检测门限值 η

$$P_D \stackrel{def}{=} P(H_1|H_1) = \int_{\eta}^{\infty} p(\lambda|H_1)d\lambda \stackrel{def}{=} P_D(\eta)$$

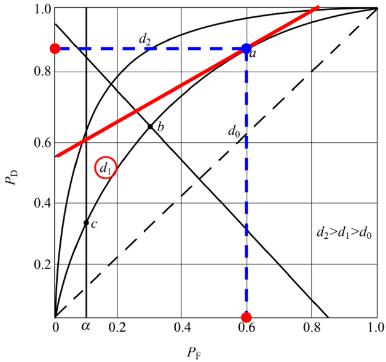
$$P_F \stackrel{def}{=} P(H_1|H_0) = \int_{\eta}^{\infty} p(\lambda|H_0)d\lambda \stackrel{def}{=} P_F(\eta)$$

$$\frac{dP_D(\eta)}{d\eta} = -p(\eta|H_1)$$

$$\frac{dP_F(\eta)}{d\eta} = -p(\eta|H_0)$$

$$\text{by } \Phi'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \qquad (a \le x \le b)$$

$$\frac{dP_D(\eta)}{dP_F(\eta)} = \frac{-p(\eta|H_1)}{-p(\eta|H_0)} = \frac{p(\eta|H_1)}{p(\eta|H_0)}$$

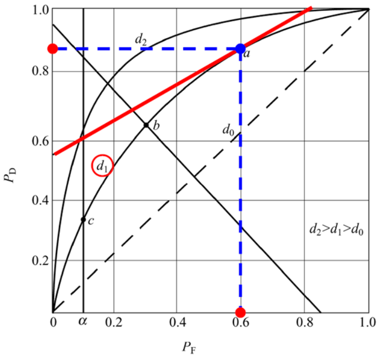


工作特性某点上的斜率等于该点 P_D 和 P_F 所要求的检测门限值 η

$$
\begin{aligned}
P_D(\eta) &= P[(\lambda|H_1) \geq \eta] \\
&= \int_{\eta}^{\infty} p(\lambda|H_1)d\lambda = \int_{R_1}^{\infty} p(x|H_1)dx \\
&= \int_{R_1}^{\infty} \lambda p(x|H_0)dx \qquad \text{by } \lambda(x) = \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta \\
&= \int_{\eta}^{\infty} \lambda p(\lambda|H_0)d\lambda \\
&\text{by } \Phi'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \qquad (a \leq x \leq b)
\end{aligned}
$$

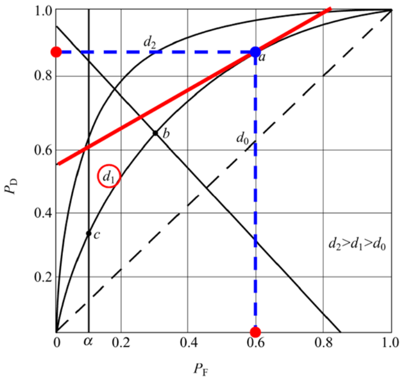
$$
\frac{dP_D(\eta)}{d\eta} = -\eta p(\eta|H_0)
$$

$$
\frac{dP_D(\eta)}{dP_F(\eta)} = \frac{-p(\eta|H_1)}{-p(\eta|H_0)} = \frac{-\eta p(\eta|H_0)}{-p(\eta|H_0)} = \eta
$$



贝叶斯准则和最小错误概率准则

- 根据先验概率和代价因子, 求得判决门限 η
- 以 η 为斜率, 可找到一条直线, 与在给定信噪比 d 下的 $P_D - P_F$ 曲线相切; 如, $d = d_1$, 切点 u
- 切点对应的 P_D 和 P_F 值,就是在给定信噪比下的两种判决概率。



极小化极大准则

满足极小化极大方程

$$(c_{11}-c_{00})+(c_{01}-c_{11})P_M(P_{1g}^*)-(c_{10}-c_{00})P_F(P_{1g}^*)=0$$

$$(c_{11}-c_{00})+(c_{01}-c_{11})\left(1-P_D(P_{1g}^*)\right)-(c_{10}-c_{00})P_F(P_{1g}^*)=0$$

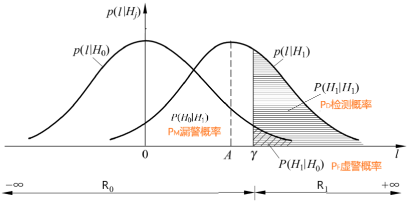
$$(c_{01}-c_{11})P_D(P_{1g}^*)+(c_{10}-c_{00})P_F(P_{1g}^*)-c_{01}+c_{00}=0$$

$$P_D\overset{def}{=}P_F(P_1)=P(H_1|H_1)$$

$$P_F\overset{def}{=}P_F(P_1)=P(H_1|H_0)$$

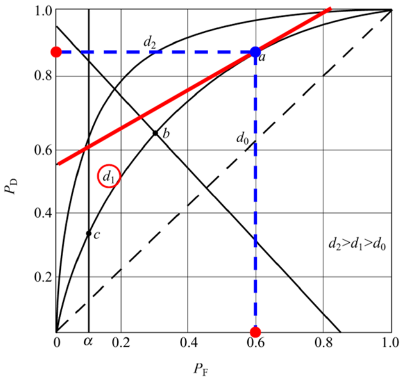
$$P_M\overset{def}{=}P_M(P_1)=P(H_0|H_1)=1-P_D$$

$$P_M(P_{1g}^*)=1-P_D(P_{1g}^*)$$



极小化极大准则

- 按照满足极小化极大方程的关系公式,画出一条 $P_D - P_F$ 直线,该直线与给定信噪比下的 $P_D - P_F$ 工作特性曲线相交。如,$d = d_1$,交点 b
- 交点即是在极小化极大准则条件下的两种判决概率。

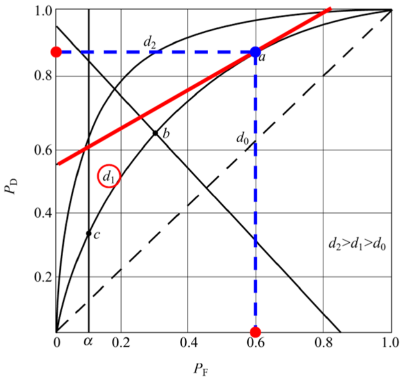


满足极小化极大方程

$$(c_{01} - c_{11})P_D(P_{1g}^*) + (c_{10} - c_{00})P_F(P_{1g}^*) - c_{01} + c_{00} = 0$$

奈曼—皮尔逊准则

- 由 $P_F = \alpha$ 画一条直线
- 该直线与给定信噪比下的 $P_D - P_F$ 工作特性曲线相交。如, $d = d_1$, 交点 c
- 交点即是在奈曼—皮尔逊准则下的两种判决概率。

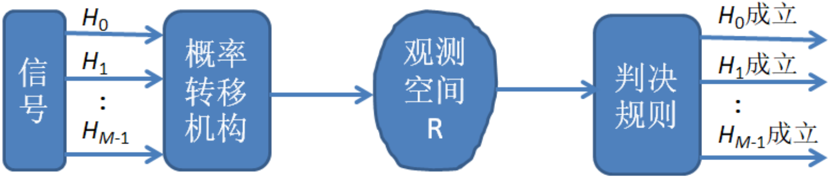


M 元信号的统计检测

基本要求

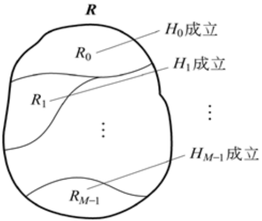
- 了解贝叶斯准则
- 了解最小平均错误概率准则和最大似然准则

M 元信号检测检测模型



判决域划分:

$$\boldsymbol{R} = \bigcup_{i=0}^{M-1} R_i, R_i \cap R_j = \emptyset, (i \neq j)$$



贝叶斯准则

给定各假设先验概率及各判决代价因子。问题: 寻找一种判决空间的划分方法, 使平均代价最小。

平均代价:

$$C = P(H_0)C(H_0) + P(H_1)C(H_1)$$

$$C(H_0) = c_{00}P(H_0|H_0) + c_{10}P(H_1|H_0)$$

$$C(H_1) = c_{01}P(H_0|H_1) + c_{11}P(H_1|H_1)$$

$$\begin{aligned} C =& P(H_0)(c_{00}P(H_0|H_0) + c_{10}P(H_1|H_0))+ \\ & P(H_1)(c_{01}P(H_0|H_1) + c_{11}P(H_1|H_1)) \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$C = \sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{M-1} c_{ij}P(H_j)P(H_i|H_j)$$

平均代价计算

$$C = \sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{M-1} c_{ij}P(H_j)P(H_i|H_j)$$

$$= \sum_{i=0}^{M-1} c_{ii}P(H_i)P(H_i|H_i) + \sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0,j\neq i}^{M-1} c_{ij}P(H_j)P(H_i|H_j)$$

$$\text{by } P(H_i|H_i) = 1 - \sum_{j=0,j\neq i}^{M-1} P(H_j|H_i)$$

$$= \sum_{i=0}^{M-1} c_{ii}P(H_i)\left(1 - \sum_{j=0,j\neq i}^{M-1} P(H_j|H_i)\right) + \sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0,j\neq i}^{M-1} c_{ij}P(H_j)P(H_i|H_j)$$

$$= \sum_{i=0}^{M-1} c_{ii}P(H_i) - \sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0,j\neq i}^{M-1} c_{ii}P(H_i)P(H_j|H_i) + \sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0,j\neq i}^{M-1} c_{ij}P(H_j)P(H_i|H_j)$$

平均代价计算

因为 $\sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{M-1} c_{ii}P(H_i)P(H_j|H_i) = \sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{M-1} c_{jj}P(H_j)P(H_i|H_j)$

所以 $\sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0,j\neq i}^{M-1} c_{ii}P(H_i)P(H_j|H_i) = \sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0,j\neq i}^{M-1} c_{jj}P(H_j)P(H_i|H_j)$

$$
\begin{aligned}
C &= \sum_{i=0}^{M-1} c_{ii}P(H_i) - \sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0,j\neq i}^{M-1} c_{ii}P(H_i)P(H_j|H_i) + \sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0,j\neq i}^{M-1} c_{ij}P(H_j)P(H_i|H_j) \\
&= \sum_{i=0}^{M-1} c_{ii}P(H_i) + \sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0,j\neq i}^{M-1} (c_{ij}-c_{jj})\,P(H_j)P(H_i|H_j) \\
&= \sum_{i=0}^{M-1} c_{ii}P(H_i) + \sum_{i=0}^{M-1}\int_{R_i}\sum_{j=0,j\neq i}^{M-1} (c_{ij}-c_{jj})\,P(H_j)p(\boldsymbol{x}|H_j)d\boldsymbol{x}
\end{aligned}
$$

贝叶斯准则

$$C=\sum_{i=0}^{M-1} c_{ii}P(H_i)+\sum_{i=0}^{M-1}\int_{R_i}\sum_{j=0,j\neq i}^{M-1}\left(c_{ij}-c_{jj}\right)P(H_j)p(\boldsymbol{x}|H_j)d\boldsymbol{x}$$

$$I_i(\boldsymbol{x})=\sum_{j=0,j\neq i}^{M-1}\left(c_{ij}-c_{jj}\right)P(H_j)p(\boldsymbol{x}|H_j)$$

$$c_{ij}\geq c_{jj},\quad P(H_j)\geq 0,\quad p(\boldsymbol{x}|H_j)\geq 0 \implies I_i(\boldsymbol{x})\geq 0$$

贝叶斯准则

为保证平均风险最小,应把所有使 $I_i(\boldsymbol{x})$ 最小的 $\boldsymbol{x}$ 划分至 R_i 判决区域,即当满足

$$I_i(\boldsymbol{x})<I_j(\boldsymbol{x}),j=0,1,\cdots,M-1,j\neq i$$

时,判决 H_i 成立

$$R_i=\{\boldsymbol{x}|I_i(\boldsymbol{x})<I_j(\boldsymbol{x}),0\leq j\leq M,j\neq i\}$$

贝叶斯准则

贝叶斯准则

为保证平均风险最小,应把所有使 $I_i(\boldsymbol{x})$ 最小的 $\boldsymbol{x}$ 划分至 R_i 判决区域,即当满足

$$I_i(\boldsymbol{x}) < I_j(\boldsymbol{x}), j = 0, 1, \cdots, M-1, j \neq i$$

时, 判决 H_i 成立

$$R_i = \{\boldsymbol{x} | I_i(\boldsymbol{x}) < I_j(\boldsymbol{x}), 0 \leq j \leq M, j \neq i\}$$

H_0 成立的判决域, 是满足下列方程组的解

$$\begin{cases} I_0(\boldsymbol{x}) < I_1(\boldsymbol{x}) \\ I_0(\boldsymbol{x}) < I_2(\boldsymbol{x}) \\ \qquad \vdots \\ I_0(\boldsymbol{x}) < I_{M-1}(\boldsymbol{x}) \end{cases}$$

贝叶斯准则

定义似然比函数

$$\lambda_i(\boldsymbol{x}) = \frac{p(\boldsymbol{x}|H_i)}{p(\boldsymbol{x}|H_0)}, \quad i = 0, 1, \cdots, M-1$$

$$J_i(\boldsymbol{x}) = \frac{I_i(\boldsymbol{x_i})}{p(\boldsymbol{x}|H_0)} = \sum_{j=0, j\neq i}^{M-1} P(H_j)(c_{ij} - c_{jj})\lambda(\boldsymbol{x}), \quad i = 0, 1, \cdots, M-1$$

定义判决规则

如果

$$J_i(\boldsymbol{x}) < J_j(\boldsymbol{x}) \quad (j = 0, 1, \cdots, M-1, j \neq i)$$

则判决 H_i 成立

最小平均错误准则

$$C=\sum_{i=0}^{M-1}c_{ii}P(H_i)+\sum_{i=0}^{M-1}\int_{R_i}\sum_{j=0,j\neq i}^{M-1}(c_{ij}-c_{jj})\,P(H_j)p(\boldsymbol{x}|H_j)d\boldsymbol{x}\qquad I_i(\boldsymbol{x})=\sum_{j=0,j\neq i}^{M-1}(c_{ij}-c_{jj})\,P(H_j)p(\boldsymbol{x}|H_j)$$

正确判决代价为 0, 错误判决代价为 1 的条件下: $I_i(\boldsymbol{x})=\sum_{j=0,j\neq i}^{M-1}P(H_j)p(\boldsymbol{x}|H_j)$

最小平均错误准则

为保证最小错误概率,应把所有使 $I_i(\boldsymbol{x})$ 最小的 $\boldsymbol{x}$ 划分至 R_i 判决区域,即当满足

$$I_i(\boldsymbol{x})<I_j(\boldsymbol{x}),j=0,1,\cdots,M-1,j\neq i$$

时, 判决 H_i 成立

$$R_i=\{\boldsymbol{x}|I_i(\boldsymbol{x})<I_j(\boldsymbol{x}),0\leq j\leq M,j\neq i\}$$

最小平均错误概率: $P_e=\sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{M-1}P(H_j)P(H_i|H_j),\quad j\neq i$

最小平均错误准则

H_0 成立的判决域, 是满足下列下面方程组的解

$$\begin{cases} I_0(\boldsymbol{x}) < I_1(\boldsymbol{x}) \\ I_0(\boldsymbol{x}) < I_2(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ I_0(\boldsymbol{x}) < I_{M-1}(\boldsymbol{x}) \end{cases}$$

H_1 成立的判决域, 是满足下列下面方程组的解

$$\begin{cases} I_1(\boldsymbol{x}) < I_0(\boldsymbol{x}) \\ I_1(\boldsymbol{x}) < I_2(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ I_1(\boldsymbol{x}) < I_{M-1}(\boldsymbol{x}) \end{cases}$$

最大似然准则

$$C=\sum_{i=0}^{M-1} c_{ii}P(H_i)+\sum_{i=0}^{M-1}\int_{R_i}\sum_{j=0,j\neq i}^{M-1}(c_{ij}-c_{jj})\,P(H_j)p(\boldsymbol{x}|H_j)d\boldsymbol{x}$$

$$I_i(\boldsymbol{x})=\sum_{j=0,j\neq i}^{M-1}(c_{ij}-c_{jj})\,P(H_j)p(\boldsymbol{x}|H_j)$$

正确判决代价为 0,错误判决代价为 1,且信源的假设先验概率相等: $P(H_j)=\dfrac{1}{M}$

$$I_i(\boldsymbol{x})=\sum_{j=0,j\neq i}^{M-1}P(H_j)p(\boldsymbol{x}|H_j)=\frac{1}{M}\sum_{j=0,j\neq i}^{M-1}p(\boldsymbol{x}|H_j)=\frac{1}{M}\left(\sum_{j=0}^{M-1}p(\boldsymbol{x}|H_j)-p(\boldsymbol{x}|H_i)\right)$$

判决规则是 M 个似然函数 $p(\boldsymbol{x}|H_i), i=0,1,\cdots,M-1$ **中,选择使** $p(\boldsymbol{x}|H_i)$ **最大的假设成立**

最小平均错误概率: $P_e=\sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{M-1}P(H_j)P(H_i|H_j)=\dfrac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{M-1}P(H_i|H_j),\quad j\neq i$

最大似然准则

H_0 成立的判决域, 是满足下列下面方程组的解

$$\begin{cases} p(\boldsymbol{x}|H_0) > p(\boldsymbol{x}|H_1) \\ p(\boldsymbol{x}|H_0) > p(\boldsymbol{x}|H_2) \\ \qquad\vdots \\ p(\boldsymbol{x}|H_0) > p(\boldsymbol{x}|H_{M-1}) \end{cases}$$

H_1 成立的判决域, 是满足下列下面方程组的解

$$\begin{cases} p(\boldsymbol{x}|H_1) > p(\boldsymbol{x}|H_0) \\ p(\boldsymbol{x}|H_1) > p(\boldsymbol{x}|H_2) \\ \qquad\vdots \\ p(\boldsymbol{x}|H_1) > p(\boldsymbol{x}|H_{M-1}) \end{cases}$$

M 元信号检测例题 9

在三元通信系统中,信源有三个可能的输出,即假设为 H_0 时输出 $-A$,假设为 H_1 时输出为 0,假设为 H_2 时输出为 A。各个假设的先验概率相等,且正确判决代价为 0,错误判决代价为 1,并进行了 N 次独立观测。信号在传输过程中叠加有均值为零,方差为 σ_n^2 的加性高斯白噪声。

试按照最小平均错误概率准则设计检测系统,并求正确判决和错误判决的概率。

M 元信号检测例题 9: 解

解: 本例的检测模型为:

$$H_0 : x_k = -A + n_k$$

$$H_1 : x_k = n_k$$

$$H_2 : x_k = A + n_k$$

根据题设: 各个假设的先验概率相等, 且正确判决代价为 0, 错误判决代价为 1。因此本例的贝叶斯检测等价于最大似然检测, 即使似然函数 $p(\boldsymbol{x}|H_i)$ 最大的观测值划分个判决区域 R_i.

M 元信号检测例题 9: 解续 (1)

步骤 1: 计算各假设下的似然函数

由于 n_k 是高斯分布随机变量, 因此在 H_0 假设下, 第 k 次采样值 x_k 服从高斯分布, 且均值为 $-A$, 方差为 σ_n^2; 在 H_1 假设下, 第 k 次采样值 x_k 服从均值为 0, 方差为 σ_n^2 的高斯分布; 在 H_2 假设下, 第 k 次采样值 x_k 服从均值为 A, 方差为 σ_n^2 的高斯分布。

$$p(x_k|H_0) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{(x_k+A)^2}{2\sigma_n^2}\right) \quad \Longrightarrow p(\mathbf{x}|H_0) = \prod_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{(x_k+A)^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

$$p(x_k|H_1) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x_k^2}{2\sigma_n^2}\right) \quad \Longrightarrow p(\mathbf{x}|H_1) = \prod_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x_k^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

$$p(x_k|H_2) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{(x_k-A)^2}{2\sigma_n^2}\right) \quad \Longrightarrow p(\mathbf{x}|H_2) = \prod_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{(x_k-A)^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

以上 3 个似然函数统一写成: $p(\mathbf{x}|H_i) = \prod_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{(x_k-s_i)^2}{2\sigma_n^2}\right), \quad i = 0, 1, 2$

其中, $s_0 = -A \qquad s_1 = 0 \qquad s_2 = A$

M 元信号检测例题 9: 解续 (2)

步骤 2: 按照最大似然准则划分观测空间

$$
\begin{aligned}
p(\boldsymbol{x}|H_i) &= \prod_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{(x_k-s_i)^2}{2\sigma_n^2}\right)\\
&= \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{N/2}\exp\left(-\sum_{i=1}^{N}\frac{(x_k-s_i)^2}{2\sigma_n^2}\right)\\
&= \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{N/2}\exp\left(-\sum_{i=1}^{N}\frac{x_k^2-2x_ks_i+s_i^2}{2\sigma_n^2}\right)
\end{aligned}
$$

因此, 判决规则转化为使

$$\left(\sum_{i=1}^{N}2x_ks_i\right)-Ns_i^2$$

最大时, 判决 H_i 假设成立

令 $\hat{\boldsymbol{x}}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_k$, 使

$$2s_i\hat{\boldsymbol{x}}-s_i^2$$

最大时, 判决 H_i 假设成立

M 元信号检测例题 9: 解续 (3)

判决规则: 使

$$2s_i\hat{\boldsymbol{x}} - s_i^2$$

最大时,判决 H_i 假设成立。

$$\begin{aligned}
H_0 : s_0 &= -A, & 2s_i\hat{\boldsymbol{x}} - s_i^2 &= -2A\hat{\boldsymbol{x}} - A^2 \\
H_1 : s_1 &= 0, & 2s_i\hat{\boldsymbol{x}} - s_i^2 &= 0 \\
H_2 : s_0 &= A, & 2s_i\hat{\boldsymbol{x}} - s_i^2 &= 2A\hat{\boldsymbol{x}} - A^2
\end{aligned}$$

因此, 假设 H_0 的判决区域由下列方程组确定

$$\begin{cases} -2A\hat{\boldsymbol{x}} - A^2 & \geq 0 \\ -2A\hat{\boldsymbol{x}} - A^2 & \geq 2A\hat{\boldsymbol{x}} - A^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \hat{\boldsymbol{x}} & \leq -\frac{A}{2} \\ \hat{\boldsymbol{x}} & \leq 0 \end{cases}$$

合并得到, **当 $\hat{\boldsymbol{x}} \leq -\frac{A}{2}$ 时,判决 H_0 假设成立**。

M 元信号检测例题 9: 解续 (4)

判决规则: 使

$$2s_i\hat{\boldsymbol{x}} - s_i^2$$

最大时,判决 H_i 假设成立。

$$\begin{aligned} H_0 : s_0 &= -A, & 2s_i\hat{\boldsymbol{x}} - s_i^2 &= -2A\hat{\boldsymbol{x}} - A^2 \\ H_1 : s_1 &= 0, & 2s_i\hat{\boldsymbol{x}} - s_i^2 &= 0 \\ H_2 : s_0 &= A, & 2s_i\hat{\boldsymbol{x}} - s_i^2 &= 2A\hat{\boldsymbol{x}} - A^2 \end{aligned}$$

因此, 假设 H_1 的判决区域由下列方程组确定

$$\begin{cases} 0 & > -2A\hat{\boldsymbol{x}} - A^2 \\ 0 & \geq 2A\hat{\boldsymbol{x}} - A^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \hat{\boldsymbol{x}} & > -\frac{A}{2} \\ \hat{\boldsymbol{x}} & \leq \frac{A}{2} \end{cases}$$

合并得到, **当 $-\frac{A}{2} < \hat{\boldsymbol{x}} \leq \frac{A}{2}$ 时,判决 H_1 假设成立**。

M 元信号检测例题 9: 解续 (5)

判决规则: 使

$$2s_i\hat{\boldsymbol{x}} - s_i^2$$

最大时,判决 H_i 假设成立。

$$\begin{aligned} &H_0 : s_0 = -A, && 2s_i\hat{\boldsymbol{x}} - s_i^2 = -2A\hat{\boldsymbol{x}} - A^2 \\ &H_1 : s_1 = 0, && 2s_i\hat{\boldsymbol{x}} - s_i^2 = 0 \\ &H_2 : s_0 = A, && 2s_i\hat{\boldsymbol{x}} - s_i^2 = 2A\hat{\boldsymbol{x}} - A^2 \end{aligned}$$

因此, 假设 H_2 的判决区域由下列方程组确定

$$\begin{cases} 2A\hat{\boldsymbol{x}} - A^2 & > -2A\hat{\boldsymbol{x}} - A^2 \\ 2A\hat{\boldsymbol{x}} - A^2 & > 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \hat{\boldsymbol{x}} & > 0 \\ \hat{\boldsymbol{x}} & > \frac{A}{2} \end{cases}$$

合并得到, **当 $\hat{\boldsymbol{x}} > \frac{A}{2}$ 时, 判决 H_2 假设成立**。

欢迎批评指正！