信号检测与估值

段江涛
机电工程学院

2019 年 9 月

ch2. 信号检测与估计理论的基础知识

随机过程

随机过程引例 (1)

Example

考察 $[0, t_0]$ 时间内某网站收到的访问次数 $X(t_0), X(t_0)$ 则是一个随机变量。

- 如果要长时间内该网站的访问次数, 则需要让 t 变化起来, 即 t 趋于无穷大, 则 $X(t)$ 是一簇随机变量.
- 此时 $X(t)$ 是与时间有关系的随机变量, 称 $\{X(t), t \in [0, \infty]\}$ 是随机过程。

随机过程引例 (2)

Example

具有随机初位相的简谐波

$$X(t) = A\cos(\omega t + \Phi)$$

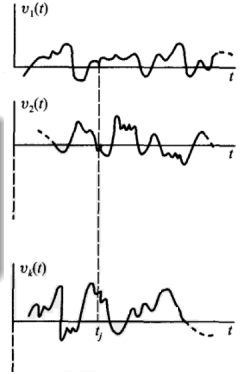
其中 A, ω 为常数, Φ 服从 $[0, 2\pi]$ 上的均匀分布。

- 由于初位相的随机性, 在某时刻 $t = t_0, X(t)$ 是一个随机变量.
- 若要观察任一时刻 t 的波形, 则需要用一簇随机变量 $X(t)$ 描述.
- 称 $\{X(t), t \in [0, \infty]\}$ 是随机过程。

随机过程引例 (3)

Example

三次热噪声电压测量结果：固定 t 时刻电压，对应一个随机变量 $v(t)$；无限个 t，则无限个电压—时间的函数族构成一随机过程。



随机过程引例 (4)

Example

生物群体的增长问题. 以 X_t 表示在时刻 t 某种生物群体的个数, 则对每一个固定的 t, X_t 是一个随机变量。

- 如果从 $t = 0$ 开始, 每隔 24 小时对群体的个数观察一次, 则对每一个 t, X_t 是一簇随机变量。记为 $X_n, n = 0, 1, \ldots$
- 若要观察任一时刻 t 的波形, 则需要用一族随机变量 $X(t)$ 描述.
- 称 $\{X_t, t = 0, 1, 2, \ldots\}$ 是随机过程。

随机过程引例特点

以上例子的共同特点—随机现象在时间上的延展 $\Longrightarrow$ 随机过程

- 给定一个 t, 就有一个随机变量 $X(t)$ 与之对应。
- 概率论主要是以**一个或有限个随机变量**为研究对象的.
- 随机过程是概率论的 “动力学” 部分，研究对象为随时间演变的随机现象, 通常会有**无穷多个随机变量**。

Definition (随机过程)

设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是一概率空间, T 是一实参数集,定义在 Ω 和 T 上的二元函数 $X(t,\xi)$

1. 固定 $t_k \in T, X(t_k,\xi)$ 是概率空间上的**随机变量**;
2. 固定 $\xi_i \in \Omega, X(t,\xi_i)$ 是概率空间上的**随机函数** (或称 $X(t,\xi_i)$ 是对应于 ξ_i 的**样本函数)**

则称 $\{X(t,\xi), t \in T, \xi \in \Omega\}$ 为一**随机过程**, 简记为 $X(t)$, 其中 t 和 ξ 均是变量。
随机过程的定义域是实参数集 T 和样本空间 Ω。值域是实数集 $\mathbb{R}$.

- 样本空间 Ω:一个随机试验所有可能出现的结果的全体,称为随机事件的样本空间。
- 事件域 $\mathcal{F}$: 样本空间中的某些子集。
- 参数集 T 表示时间或空间,通常的形式: $T = \{0, 1, 2, \ldots\}$ 或 $T = [a, b], T = [-\infty, \infty]$

用映射表示随机过程

$$X(t,\xi):T\times\Omega\rightarrow\mathbb{R}$$

1. $X(\bullet,\bullet)$ 实质是定义在 $T\times\Omega$ 上的二元单值函数;
2. 固定 $t\in T, X(t,\bullet)$ 是样本空间 Ω 上的函数, 即 $X(t,\bullet)$ 为一**随机变量**;
3. 固定 $\xi\in\Omega, X(\bullet,\xi)$ 是一个关于 $t\in T$ 的函数,通常称为**样本函数**, 或称随机过程的**一次实现**,所有样本函数的集合确定一随机过程。
4. 随机过程 $\{X(t,\xi)\}$ 可能取值的全体所构成的集合称为此随机过程的**状态空间**,记作 S。S 中的元素称为**状态**。状态空间可以由复数、实数或更一般的抽象空间构成。

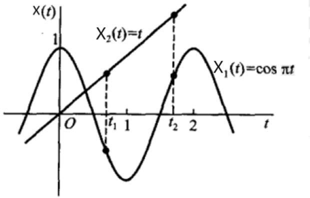
记号 $X(t,\xi)$ 有时记为 $X_t(\xi)$ 或简记为 $X(t)$。

Example (随机过程示例)

抛掷硬币的试验,样本空间 $\Omega = \{H, T\}$, 定义

$$X(t) = \begin{cases} \cos \pi t, & \text{当出现 } H \\ t, & \text{当出现 } T \end{cases}, t \in (-\infty, \infty)$$

其中 $P(H) = P(T) = 1/2$, 则 $\{X(t), t \in (-\infty, +\infty)\}$ 是一随机过程。试考察其样本函数和状态空间。



样本函数: $X(\bullet, \xi) = \{\cos \pi t, t\}, \xi \in \Omega$

状态空间: $S = \{\cos \pi t_0, t_0\}, \forall t_0 \in (-\infty, +\infty)$

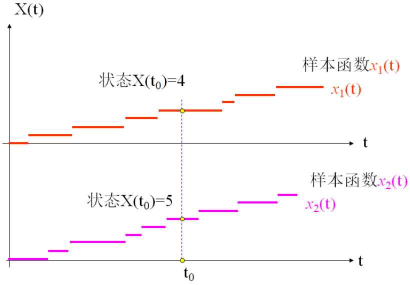
每次试验的结果是下列事件集合之一:

$$\{(H, T), (T, H), (H, H), (T, T)\}$$

Example

考察 $[0, t_0]$ 时间内某网站收到的访问次数 $X(t_0)$, $X(t_0)$ 则是一个随机变量。

- 如果要长时间内该网站的访问次数, 则需要让 t 变化起来, 即 t 趋于无穷大, 则 $X(t)$ 是一簇随机变量.
- 此时 $X(t)$ 是与时间有关系的随机变量, 称 $\{X(t), t \in [0, \infty]\}$ 是随机过程。



状态空间S={0,1,2,….}, T=[0,+∞)

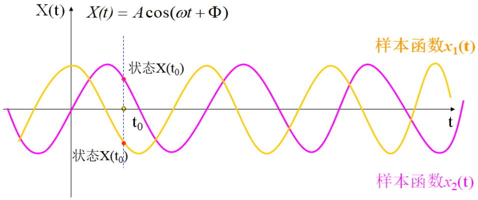
Example

具有随机初位相的简谐波

$$X(t)=A\cos(\omega t+\Phi)$$

其中 A,ω 为常数, Φ 服从 $[0,2\pi]$ 上的均匀分布。

- 由于初位相的随机性,在某时刻 $t=t_0, X(t)$ 是一个随机变量.
- 若要观察任一时刻 t 的波形,则需要用一簇随机变量 $X(t)$ 描述.
- 称 $\{X(t),t\in[0,\infty]\}$ 是随机过程。

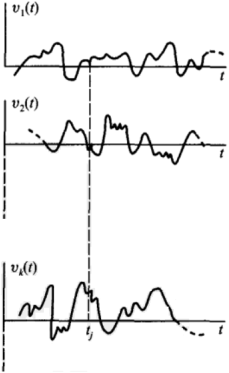


状态空间S=[-A,A],参数集T=[-∞,+ ∞]

Example

三次热噪声电压测量结果：固定 t 时刻电压，对应一个随机变量 $v(t)$；

无限个 t，则无限个电压—时间的函数族构成一随机过程。



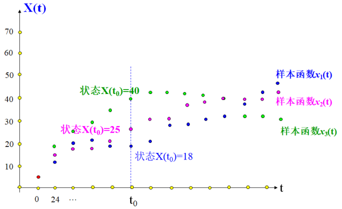
样本函数: $X(\bullet, \xi) = \{v_k(t)\}, k = 1, 2, \ldots, \xi \in \Omega$

状态空间: $S = \{v_k(t_0)\}, k = 1, 2, \ldots, \forall t_0 \in (-\infty, +\infty)$

Example

生物群体的增长问题. 以 X_t 表示在时刻 t 某种生物群体的个数, 则对每一个固定的 t, X_t 是一个随机变量。

- 如果从 $t = 0$ 开始, 每隔 24 小时对群体的个数观察一次, 则对每一个 t, X_t 是一簇随机变量。记为 $X_n, n = 0, 1, \ldots$
- 若要观察任一时刻 t 的波形, 则需要用一族随机变量 $X(t)$ 描述.
- 称 $\{X_t, t = 0, 1, 2, \ldots\}$ 是随机过程。



状态空间S={0,1,2,....}, T=[0,24,......)

Example

设随机相位正弦信号 $s(t;\theta)=a\cos(\omega_0 t+\theta)$, 其中振幅 a 和 ω_0 为常数, 相位 θ 是一随机变量, 它服从 $[-\pi,\pi]$ 上的均匀分布。写出 $s(t;\theta)$ 的样本函数。

解:

当 θ 在 $[-\pi,\pi]$ 内任取定值时, 如

当 $\theta=0$, 则样本函数为

$$s_1(t;\theta=0)=a\cos\omega_0 t$$

当 $\theta=\frac{\pi}{2}$, 则样本函数为

$$s_2(t;\theta=\frac{\pi}{2})=a\cos(\omega_0 t+\frac{\pi}{2})=-a\sin\omega_0 t$$

一维概率密度函数

连续随机过程 $\{X(t,\xi),t\in T,\xi\in\Omega\}$ 的 M 个样本函数如图。通常用**有限维概率密度函数**来描述随机过程。

设 $\{X(t,\xi),t\in T,\xi\in\Omega\}$ 是一随机过程，对于任意固定的时刻 t，$X(t,\xi)$ 是一随机变量，称

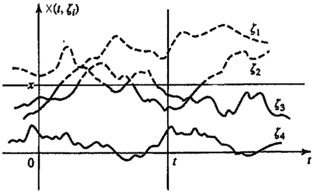
$$F(x;t)=P\{X(t,\xi)\le x\},x\in\mathbb{R},t\in T$$

为该随机过程的**一维累积分布函数**。

如果 $F(x;t)$ 对 x 的一阶导数存在，则有

$$p(x;t)=\frac{dF(x;t)}{dx}$$

$p(x;t)$ 称为随机过程 $X(t,\xi)$ 的**一维概率密度函数**。



二维联合概率密度函数

对于任意固定的时刻 $t_1, t_2 \in T$, 随机变量 $X(t_1, \xi), X(t_2, \xi)$ 构成二维矢量 $[X(t_1, \xi), X(t_2, \xi)]^T$, 称

$$F(x_1, x_2; t_1, t_2) = P\{X(t_1, \xi) \leq x_1, X(t_2, \xi) \leq x_2\}, x_1, x_2 \in \mathbb{R}, t_1, t_2 \in T$$

为该随机过程的**二维累积分布函数**。

如果 $F(x_1, x_2; t_1, t_2) \in T$ 对 x_1, x_2 的二阶混合偏导数存在, 则有

$$p(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

$p(x; t)$ 称为随机过程 $X(t, \xi)$ 的**二维联合概率密度函数**。

N 维联合概率密度函数

推广至 N 维随机矢量的情况

随机过程的 **N 维累积分布函数**

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_N;t_1,t_2,\cdots,t_N) = \\ P\{X(t_1,\xi)\le x_1, X(t_2,\xi),\cdots,X(t_N,\xi)\le x_N\}, \\ x_1,x_2,\cdots,x_N\in\mathbb{R}, t_1,t_2,\cdots,t_N\in T$$

随机过程的 **N 维联合概率密度函数**

$$p(x_1,x_2,\cdots,x_N;t_1,t_2,\cdots,t_N) = \\ \frac{\partial^N F(x_1,x_2,\cdots,x_N;t_1,t_2,\cdots,t_N)}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_N}$$

一维雅可比变换法

设一维随机变量为 $X(\xi)$, 它的概率密度函数为 $p(x)$ 已知, 若 $X(\xi)$ 的一个函数为

$$Y(\xi) = g(X(\xi))$$

该函数也是一维随机变量。若它的反函数存在,即有

$$X(\xi) = h(Y(\xi))$$

且连续可导, 则 $Y(\xi)$ 的概率密度函数为

$$p(y) = p[x = h(y)]|J|$$

这种变换称为**一维雅可比变换**, 其中**雅可比** $J = \frac{dh(Y)}{dY}$, $|\bullet|$ 是绝对值符号。

Notes

雅可比变换法的意义在于: $Y(\xi)$ 的概率密度函数 $p(y)$ 可以通过它的反函数 $X(\xi)$ 的概率密度函数 $p(x)$ 与雅可比的乘积得到。进而, 由 $X(\xi)$ 的数学期望值可以通过 $Y(\xi)$ 的数学期望值。

Example

设随机过程 $X(t) = V\cos\omega t, t \in (-\infty, +\infty)$, 其中 ω 为常数, V 服从 $[0, 1]$ 上的均匀分布。

1. 确定 $\{X(t), t \in (-\infty, +\infty)\}$ 的两个样本函数。
2. 求 $t = 0, t = 3\pi/4\omega$ 时, 随机变量 $X(t)$ 的概率密度函数。
3. 求 $t = \pi/2\omega$ 时, $X(t)$ 的分布函数。

解:

1. V 服从 $[0, 1]$ 上的均匀分布, 取 $V = 1/2, 1/3$ 分别得到两个样本函数

$$X_1(t) = \frac{1}{2}\cos\omega t, X_2(t) = \frac{1}{3}\cos\omega t$$

2. $t = 0$ 时, $x(t) = V\cos\omega 0 = V$, 而 V 为 $[0, 1]$ 上的均匀分布, 则

$$p(x; t = 0) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

解 (续):

2. (续) 当 $t=\frac{3\pi}{4\omega}$ 时, $X(t)=V\cos\omega\frac{3\pi}{4\omega}=-\frac{\sqrt{2}}{2}V$

由于函数 $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}V$ 的反函数为 $V=h(x)=-\sqrt{2}x$, 其导数为 $h'(x)=-\sqrt{2}$, 则利用一维雅可比变换公式, 求得

$$p(x,t=\frac{3\pi}{4\omega})=\begin{cases} p_V(h(x))|h'(x)| & 0\le h(x)\le 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \sqrt{2} & 0\le -\sqrt{2}x\le 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \sqrt{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2}\le x\le 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

解 (续):

3. $t=\frac{\pi}{2\omega}$ 时, $X(t)=V\cos\omega\frac{pi}{2\omega}=0$, 此时 $X(t=\frac{\pi}{2\omega})$ 是单点分布, 则

$$
\begin{aligned}
F(x,t=\frac{\pi}{2\omega}) &= P\{X(t)\le x\} \\
&= \begin{cases} 1 & x\ge 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Example

设有一采用脉宽调制以传输信息的通信系统。脉冲的重复周期为 T, 每个周期传输一个值, 脉冲宽度收到随机信息的调制, 使每个脉冲的宽度 τ 服从 $(0, T)$ 上的均匀分布, 而且不同周期的脉宽是相互统计独立的随机变量。脉冲的幅度为常数 A。也就是说, 这个通信系统传送的信号是随机脉宽等幅度的周期信号, 它是一个随机过程。下图画出了它的一个样本函数。试求该随机过程 $x(t)$ 的一维概率密度函数。

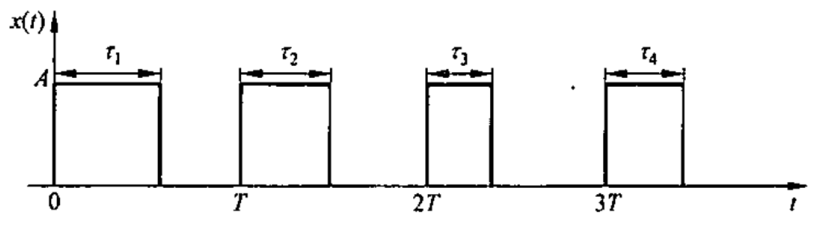


Figure 1: 脉宽调制信号的一个样本函数

Example (解)

因为脉冲的重复周期为 T, 所以只需求出一个周期的概率密度函数。

在一个周期内, 随机信号为

$$x(t) = \begin{cases} A, & 0 \le t \le \tau \\ 0, & \tau < t \le T \end{cases}$$

$x(t)$ 的分布函数为

$$F(x;t) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{t}{T}, & 0 \le x < A \\ 1, & x \ge A \end{cases}$$

所以, 它的一维概率密度函数为:

$$p(x;t) = \frac{t}{T}\delta(x) + (1 - \frac{t}{T})\delta(x - A)$$

由 δ 函数性质, 当 $x = 0$ 时, $\delta(x) = \infty$; 其它, $\delta(x) = 0$. 并且 $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$

可以验证以上分布函数的正确性. $F(x;t) = P\{x(t) \le x\} = \int_{-\infty}^{x} p(u)du$

函数的均值

$$\bar{y} = \frac{1}{b-a} \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \Delta x = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

交流电 $i = I_m \sin \omega t$,

电压 $u = iR = I_m R \sin \omega t$,

功率 $p = ui = I_m^2 R \sin^2 \omega t$

此功率在长度为一个周期的区间 $[0, \frac{2\pi}{\omega}]$ 上的平均值

$$\bar{p} = \frac{1}{\frac{2\pi}{\omega}} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} I_m^2 R \sin^2 \omega t dt = \frac{I_m^2 R}{2} = \frac{I_m U_m}{2}, (U_m = I_m R)$$

I_m, U_m 为交流电电流、电压的最大值,ω 为交流电的角频率。

随机过程的均值 $\mu_x(t)$: 表示随机过程在 t 时刻状态取值的理论平均值

$$\mu_x(t) \overset{def}{=} E[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x;t)dx$$

如果 $x(t)$ 是电压或电流，则 $\mu_x(t)$ 可以理解为在 t 时刻的“直流分量”。

随机过程的均方值 $\varphi_x^2(t)$

$$\varphi_x^2(t) \overset{def}{=} E[x^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2p(x;t)dx$$

如果 $X(t)$ 是电压或电流，则 $\varphi_x^2(t)$ 可以理解在 t 时刻它在 1Ω 电阻上消耗的“平均功率”。

随机过程的方差/标准偏差 $\delta_x^2(t)$

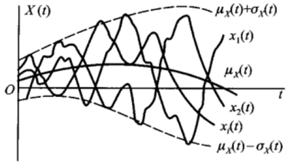
$$\sigma_x^2(t) \overset{def}{=} E[(x(t) - \mu_x(t))^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x(t))^2 p(x;t) dx$$

方差 $\sigma_x^2(t)$ 表示随机过程在 t 时刻取其值**偏离其均值** $\mu_x(t)$ 的离散程度。

如果 $x(t)$ 是电压或电流，则 $\delta_x^2(t)$ 可以理解在 t 时刻它在 1Ω 电阻上消耗的“交流功率”。

均值 $\mu_x(t)$, 均方值 $\varphi_x^2(t)$, 方差 $\delta_x^2(t)$ 之间的关系

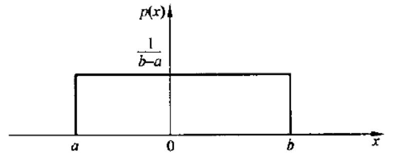
$$\sigma_x^2(t) = \varphi_x^2(t) - \mu_x^2(t)$$



均匀分布随机变量 x 的均值 μ_x 和方差 σ_x^2

Example

求如图均匀分布随机变量 x 的均值 μ_x 和方差 σ_x^2。



均匀分布随机变量 x 的均值 μ_x 和方差 σ_x^2

解: 随机变量 x 的概率密度函数 $p(x)$ 为

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

根据随机变量均值的定义,有

$$\mu_x = E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = \int_a^b \frac{1}{b-a}xdx = \frac{a+b}{2}$$

根据随机变量方差的定义,有

$$\sigma_x^2 = E[(x-\mu_x)^2] = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_x)^2 p(x)dx = \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \frac{1}{b-a}dx$$
$$= \frac{(b-a)^2}{12}$$

随机过程的自相关函数 $r_x(t_j, t_k)$

$$r_x(t_j, t_k) \overset{def}{=} E[x(t_j)x(t_k)]$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_j x_k p(x_j, x_k; t_j, t_k) dx_j dx_k$$

随机过程的自相关函数 $r_x(t_j, t_k)$ 可以理解为它的两个随机变量 $x(t_j)$ 与 $x(t_k)$ 之间**含有均值**时的相关程度的度量。显然

$$r_x(t, t) = \varphi_x^2(t)$$

Example

设随机过程 $x(t)$ 的均值为 $\mu_x(t)$, 自相关函数为 $r_x(t_j, t_k)$。若有随机过程 $y(t) = a(t)x(t) + b(t)$, 其中 $a(t), b(t)$ 是确知函数。求随机过程 $y(t)$ 的均值和自相关函数。

解:

由均值定义 $E[x(\xi)] \overset{def}{=} \mu_x = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$ 知:

确知函数 $a(t)$ 的均值:

$$
\begin{aligned}
E[a(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} a(t)p(x)dx \\
&= a(t)\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx && \text{by } a(t) \text{ 是常数} \\
&= a(t)\cdot 1 && by \int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1 \\
&= a(t)
\end{aligned}
$$

结论: 确知函数 $a(t)$ 的均值 $E[a(t)] = a(t)$

解 (续): 随机过程 $y(t)$ 的均值为:

$$\begin{aligned}\mu_y &= E[y(t)] = E[a(t)x(t) + b(t)] = E[a(t)x(t)] + E[b(t)] \\ &= a(t)E[x(t)] + b(t) = a(t)\mu_x + b(t)\end{aligned}$$

随机过程 $y(t)$ 的自相关函数为:

$$\begin{aligned}r_y(t_j, t_k) &= E[y(t_j)y(t_k)] \\ &= E[(a(t_j)x(t_j) + b(t_j))(a(t_k)x(t_k) + b(t_k))] \\ &= a(t_j)a(t_k)E[x(t_j)x(t_k)] + a(t_j)b(t_k)E[x(t_j)] \\ &+ b(t_j)a(t_k)E[x(t_k)] + b(t_j)b(t_k) \\ &= a(t_j)a(t_k)r_x(t_j, t_k) + a(t_j)b(t_k)\mu_x(t_j) + b(t_j)a(t_k)\mu_x(t_k) + b(t_j)b(t_k)\end{aligned}$$

其中: , $r_x(t_j, t_k) = E[x(t_j)x(t_k)], \mu_x(t_j) = E[x(t_j)], \mu_x(t_k) = E[x(t_k)]$

Example

设随机相位正弦信号 $s(t;\theta)=a\cos(\omega_0 t+\theta)$, 其中振幅 a 和 ω_0 为常数, 相位 θ 是一随机变量，它服从 $[-\pi,\pi]$ 上的均匀分布。

1. 求该过程的均值 $E[s(t;\theta)]$
2. 自相关函数 $E[s(t_j;\theta)s(t_k;\theta)]$。

解:

1. 因为相位 θ 服从 $[-\pi, \pi]$ 上的均匀分布, 所以,

$$p(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & -\pi \le \theta \le \pi \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

该随机过程的均值为:

$$\begin{aligned} \mu_x(t) &= E[s(t;\theta)] = E[a\cos(\omega_0 t + \theta)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} a\cos(\omega_0 t + \theta) p(\theta) d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} a\cos(\omega_0 t + \theta) \frac{1}{2\pi} d\theta \\ &= \frac{a}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega_0 t + \theta) d\theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

解 (续): [1]

2. 该随机过程的自相关函数为:

$$
\begin{aligned}
r_x(t_j, t_k) &= E[s(t_j)s(t_k)] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} a\cos(\omega_0 t_j + \theta) a\cos(\omega_0 t_k + \theta) p(\theta) d\theta \\
&= \frac{a^2}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(\omega_0 t_j + \omega_0 t_k + 2\theta) + \cos\omega_0(t_k - t_j)] d\theta \\
&= \frac{a^2}{2}\cos\omega_0\tau, \qquad (\tau = t_k - t_j)
\end{aligned}
$$

[1] $\cos A\cos B = \frac{1}{2}\cos(A+B)\cos(A-B)$

随机过程的自协方差函数 $c_x(t_j, t_k)$

$$
\begin{aligned}
c_x(t_j, t_k) &\overset{def}{=} E[((x(t_j) - \mu_x(t_j))(x(t_k) - \mu_x(t_k))] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_j - \mu_x(t_j))(x_k - \mu_x(t_k))p(x_j, x_k; t_j, t_k)dx_i dx_k
\end{aligned}
$$

随机过程的自协方差函数 $c_x(t_j, t_k)$ 可以理解为它的两个随机变量 $x(t_j)$ 与 $x(t_k)$ 之间的相关程度的度量。

而随机过程的自相关函数 $r_x(t_j, t_k)$ 可以理解为它的两个随机变量 $x(t_j)$ 与 $x(t_k)$ 之间**含有均值**时的相关程度的度量。

它们的自相关系数定义为

$$
\rho_x(t_j, t_k) \overset{def}{=} \frac{c_x(t_j, t_k)}{\sigma_x(t_j)\sigma_x(t_k)}
$$

易证

$$
c_x(t_j, t_k) = r_x(t_j, t_k) - \mu_x(t_j)\mu_x(t_k), \quad c_x(t, t) = \sigma_x^2(t)
$$

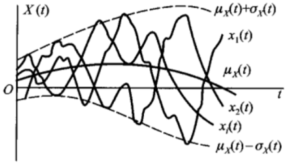
随机过程的统计平均量之间的关系

- 随机过程的均值 $\mu_x(t)$: 表示随机过程在 t 时刻状态取值的**理论平均值**。
- 方差 $\sigma_x^2(t)$ 表示随机过程在 t 时刻取其值**偏离其均值** $\mu_x(t)$ 的离散程度。
- 随机过程的自相关函数 $r_x(t_j, t_k)$ 可以理解为它的两个随机变量 $x(t_j)$ 与 $x(t_k)$ 之间**含有均值**时的相关程度的度量。
- 随机过程的自协方差函数 $c_x(t_j, t_k)$ 随机过程的自协方差函数 $c_x(t_j, t_k)$ 可以理解为它的两个随机变量 $x(t_j)$ 与 $x(t_k)$ 之间的相关程度的度量。

$$c_x(t_j, t_k) = r_x(t_j, t_k) - \mu_x(t_j)\mu_x(t_k), \quad c_x(t, t) = \sigma_x^2(t)$$

均值 $\mu_x(t)$, 均方值 $\varphi_x^2(t)$, 方差 $\delta_x^2(t)$ 之间的关系:

$$\sigma_x^2(t) = \varphi_x^2(t) - \mu_x^2(t)$$



随机过程的互相关函数 $r_{xy}(t_j, t_k)$

对于两个随机过程 $x(t)$ 和 $y(t)$, 其互相关函数定义为

$$\begin{aligned} r_{xy}(t_j, t_k) &\overset{def}{=} E[x(t_j)y(t_k)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_j y_k p(x_j, t_j; y_k, t_k) dx_j dy_k \end{aligned}$$

式中, $p(x_j, t_j; y_k, t_k)$ 是 $x(t)$ 与 $y(t)$ 的二维混合概率密度函数。

随机过程的互协方差函数 $c_{xy}(t_j, t_k)$

$$
\begin{aligned}
c_{xy}(t_j, t_k) &\overset{def}{=} E[(x(t_j) - \mu_x(t_j))(y(t_k) - \mu_x(t_k))] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x_j - \mu_x(t_j))(y_k - \mu_x(t_k))p(x_j, t_j; x_k, t_k)dx_j dy_k
\end{aligned}
$$

随机过程 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的互协方差函数 $c_{xy}(t_j, t_k)$ 可以理解为它们各自的随机变量 $x(t_j)$ 与 $y(t_k)$ 之间的相关程度, 实际上表示两个随机过程 $x(t)$ 与 $y(t)$ 之间的相关程度。它们的互相关系数定义为

$$
\rho_{xy}(t_j, t_k) \overset{def}{=} \frac{c_{xy}(t_j, t_k)}{\sigma_x(t_j)\sigma_x(t_k)}
$$

易证

$$
c_{xy}(t_j, t_k) = r_{xy}(t_j, t_k) - \mu_x(t_j)\mu_y(t_k)
$$

Definition (广义平稳随机过程, 简称平稳随机过程)

随机过程 $x(t)$ 的平均统计量满足

1. $x(t)$ 的均值是与时间 t 无关的常数, 即

$$E[x(t)] = \mu_x$$

2. $x(t)$ 的自相关函数只取决于时间间隔 $\tau = t_k - t_j$, 而与时间的起始时刻无关, 即

$$E[x(t_j)x(t_k)] = E[x(t_j)x(t_j + \tau)] = r_x(\tau)$$

平稳随机过程 $x(t)$ 自相关函数 $r_x(t_k - t_j)$ 仅取决于时间间隔 $(t_k - t_j)$, 而与时间的起始时刻无关。$E[x(t_j)x(t_k)] = r_x[t_k - t_j]$

平稳随机过程的统计平均量之间的关系

平稳随机过程 x(t) 的均值 μ_x, 均方值 φ_x^2, 方差 σ_x^2, 自相关函数 $r_x(\tau)$, 自协方差函数 $c_x(\tau)$ 之间的关系

$$\sigma_x^2 = \varphi_x^2 - \mu_x^2$$

$$r_x(\tau) = r_x(-\tau)$$

$$c_x(\tau) = r_x(\tau) - \mu_x^2$$

$$c_x(\tau) = c_x(-\tau)$$

$$\varphi_x^2 = r_x(0)$$

$$\sigma_x^2 = c_x(0)$$

$$r_x(0) \geq |r_x(\tau)|, \tau \neq 0$$

$$c_x(0) \geq |c_x(\tau)|, \tau \neq 0$$

Example

假定平稳随机过程 $x(t)$ 是周期的, 周期为 T, 即

$$x(t) = x(t+T)$$

证明其自相关函数 $r_x(\tau)$ 也是以 T 为周期的, 即

$$r_x(\tau) = r_x(\tau+T)$$

Proof.

因为

$$\begin{aligned} r_x(\tau) &= E[x(t)x(t+\tau)] \\ &= E[x(t)x(t+\tau+T)] && \text{by } x(t+\tau) = x(t+\tau+T) \\ &= r_x(\tau+T) \end{aligned}$$

所以, 自相关函数 $r_x(\tau)$ 也是以 T 为周期的。 □

Definition (联合平稳随机过程)

设 $x(t)$ 和 $y(t)$ 分别是两个平稳的随机过程, 如果对于任意的 Δt, 有 $r_{xy}(t_j+\Delta t, t_k+\Delta t) = r_{xy}(t_j, t_k)$, 即互相关函数 $r_{xy}(t_j, t_k) = r_{xy}(\tau), (\tau = t_k - t_j)$ 仅与时间间隔 τ 有关, 而与 t_j 和 t_k 无关, 则称过程 $x(t)$ 与 $y(t)$ 是联合平稳的随机过程。

联合平稳随机过程 $x(t)$ 与 $y(t)$ 的互协方差函数

$$c_{xy}(t_j, t_k) = c_{xy}(\tau) = r_{xy}(\tau) - \mu_x\mu_y, \tau = t_k - t_j$$

互相关系数:

$$\rho_{xy}(\tau) \overset{def}{=} \frac{c_{xy}(t_j, t_k)}{\sigma_x(t_j)\sigma_y(t_k)} = \frac{c_{xy}(\tau)}{\sigma_x\sigma_y}$$

$$r_{xy}(\tau) = r_{yx}(-\tau)$$

$$c_{xy}(\tau) = c_{yx}(-\tau)$$

$x(t)$ 的正交性与互不相关性

随机过程 $x(t)$ 的任意两个不同时刻的随机变量 $x(t_j)$ 与 $x(t_k)$ 之间是否相互正交、互不相关和相关统计独立，表征了随机过程的重要统计特性。

Definition

设 $x(t_j), x(t_k)$ 是随机过程 $x(t)$ 的任意两个不同时刻的随机变量，其均值分别为 $\mu_x(t_j)$ 和 $\mu_x(t_k)$，自相关函数为 $r_x(t_j, t_k)$，自协方差函数为 $c_x(t_j, t_k)$。

1. 相互正交

$$r_x(t_j, t_k) \overset{def}{=} E[x(t_j)x(t_k)] = 0, \quad j \neq k$$

2. 互不相关

$$c_x(t_j, t_k) \overset{def}{=} E[((x(t_j) - \mu_x(t_j))(x(t_k) - \mu_x(t_k))] = 0, \quad j \neq k$$

3. 互不相关的等价条件

$$c_x(t_j, t_k) = r_x(t_j, t_k) - \mu_x(t_j)\mu_x(t_k), j \neq k \implies r_x(t_j, t_k) = \mu_x(t_j)\mu_x(t_k), j \neq k$$

平稳随机过程 $x(t)$ 的正交性与互相关性

Definition

如果 $x(t)$ 是平稳随机过程,

1. 相互正交:
$$r_x(\tau) = 0, \tau = t_k - t_j$$
2. 互不相关:
$$c_x(\tau) = 0, \tau = t_k - t_j$$
3. 互不相关的等价条件
$$r_x(\tau) = \mu_x^2, \tau = t_k - t_j$$

$x(t)$ 的统计独立性

Definition

设 $x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_N)$ 是随机过程 $x(t)$ 在不同时刻 $t_k(k=1,2,\ldots,t_N)$ 的随机变量, 如果其 N 维联合概率密度函数对于任意的 $N \geq 1$ 和所有时刻 $t_k(k=1,2,\ldots,N)$ 都能够表示成各自一维概率密度函数之积的形式, 即

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_N; t_1, t_2, \ldots, t_N)$$
$$= p(x_1; t_1)p(x_2; t_2)\cdots p(x_N; t_N)$$

则称 $x(t)$ 是相互统计独立的随机变量过程。

$x(t)$ 的正交性, 不相关性以及统计独立性之间的关系

1. 均值 $\mu_x(t_j)=0, \mu_x(t_k)=0$ 则, $x(t)$ 相互正交 $\Leftrightarrow$ 互不相关
2. $x(t)$ 相互统计独立 $\Rightarrow$ 互不相关
3. $x(t)$ 互不相关 $\nRightarrow$ 相互统计独立。但是若 $x(t)$ 服从联合高斯分布,则互不相关 $\Leftrightarrow$ 相互统计独立

第 1 条可由 $x(t)$ 互不相关的等价条件 $r_x(t_j,t_k)=\mu_x(t_j)\mu_x(t_k), j\neq k$ 直接导出。现证明第 2 条,第 3 条的证明见后。

证明: 如果 $x(t)$ 是一个相互统计独立随机变量过程, 则它一定是一个互不相关随机变量过程。

Proof.

设 $x(t_j)$ 与 $x(t_k)$ 是相互统计独立的, 则其自相关函数为

$$
\begin{aligned}
r_x(t_j, t_k) &\overset{def}{=} E[x(t_j)x(t_k)] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_j x_k p(x_j, x_k; t_j, t_k)dx_j d_k \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x_j p(x_j; t_j)dx_j \int_{-\infty}^{\infty} x_j p(x_k; t_k)dx_k \\
&= \mu_x(t_j)\mu_x(t_k)
\end{aligned}
$$

这正是 $x(t)$ 互不相关的等价条件 $r_x(t_j, t_k) = \mu_x(t_j)\mu_x(t_k), j \neq k$, 所以 $x(t)$ 统计独立 $\Longrightarrow$ 互不相关 $\square$

两个随机过程 $x(t), y(t)$ 的正交性与互不相关性

设 $x(t_j)$ 是 $x(t)$ 在 t_j 时刻的随机变量, $y(t_k)$ 是 $y(t)$ 在 t_k 时刻的随机变量。

Definition

$x(t)$ 在 t_j, $y(t)$ 在 t_k 的均值分别为 $\mu_x(t_j)$ 和 $\mu_y(t_k)$, 互相关函数为 $r_{xy}(t_j, t_k)$, 互协方差函数为 $c_{xy}(t_j, t_k)$。

1. 相互正交

$$r_{xy}(t_j, t_k) \stackrel{def}{=} E[x(t_j)y(t_k)] = 0, \quad j \neq k$$

2. 互不相关

$$c_{xy}(t_j, t_k) \stackrel{def}{=} E[((x(t_j) - \mu_x(t_j))(y(t_k) - \mu_y(t_k))] = 0, \quad j \neq k$$

3. 互不相关的等价条件

$$c_{xy}(t_j, t_k) = r_{xy}(t_j, t_k) - \mu_x(t_j)\mu_y(t_k), j \neq k \implies r_{xy}(t_j, t_k) = \mu_x(t_j)\mu_y(t_k), j \neq k$$

两个平稳随机过程 $x(t), y(t)$ 的正交性与互相关性

Definition

如果 $x(t), y(t)$ 是联合平稳的随机过程,

1. 相互正交:
$$r_{xy}(\tau) = 0, \tau = t_k - t_j$$
2. 互不相关:
$$c_{xy}(\tau) = 0, \tau = t_k - t_j$$
3. 互不相关的等价条件
$$r_{xy}(\tau) = \mu_x \mu_y, \tau = t_k - t_j$$

两个随机过程 $x(t), y(t)$ 的统计独立性

Definition

如果随机过程 $x(t)$ 和 $y(t)$ 对任意的 $N \geq 1, M \geq 1$ 和所有时刻 $t_k(k = 1, 2, \ldots, t_N)$ 与 $t'_k(k = 1, 2, \ldots, M)$, 其 $N + M$ 维联合概率密度表示为

$$
\begin{aligned}
& p(x_1, x_2, \ldots, x_N; t_1, t_2, \ldots, t_N; y_1, y_2, \ldots, y_N; t'_1, t'_2, \ldots, t'_M) \\
= & p(x_1, x_2, \ldots, x_N; t_1, t_2, \ldots, t_N) p(y_1, y_2, \ldots, y_N; t'_1, t'_2, \ldots, t'_M)
\end{aligned}
$$

则称 $x(t)$ 与 $y(t)$ 是相互统计独立的两个随机变量过程。

$x(t), y(t)$ 的正交性, 不相关性以及统计独立性之间的关系

1. 均值之一或同时为零, 则 $x(t), y(t)$ 相互正交 $\Leftrightarrow$ 互不相关
2. $x(t), y(t)$ 相互统计独立 $\Rightarrow$ 互不相关
3. $x(t), y(t)$ 互不相关 $\nRightarrow$ 相互统计独立。但是若 $x(t), y(t)$ 服从联合高斯分布, 则互不相关 $\Leftrightarrow$ 相互统计独立

雷达回波信号

Example

设 $s(t)$ 是雷达的发射信号, 遇到目标后的反射信号为 $as(t-t_0)$, t_0 是信号返回的延迟时间。如果回波信号中伴有加性噪声 $n(t)$, 则接收到的信号为

$$x(t) = as(t-t_0) + n(t)$$

1. 假定 $s(t)$ 和 $n(t)$ 是平稳相关的, 试求互相关函数 $r_{sx}(\tau)$。
2. 如果噪声 $n(t)$ 的均值为零, 且与 $s(t)$ 相互统计独立, 试求互相关函数 $r_{sx}(\tau)$。

解:

1. 假定 $s(t)$ 和 $n(t)$ 是平稳相关的, 试求互相关函数 $r_{sx}(\tau)$。

$$\begin{aligned} r_{sx}(\tau) &= E[s(t)x(t+\tau)] \\ &= E[s(t)(as(t-t_0+\tau)+n(t+\tau)))] && \text{by } x(t)=as(t-t_0)+n(t) \\ &= aE[s(t)s(t-t_0+\tau)] + E[s(t)n(t+\tau)] \\ &= ar_s(\tau-t_0) + r_{sn}(\tau) \end{aligned}$$

2. 如果噪声 $n(t)$ 的均值为零, 且与 $s(t)$ 相互统计独立, 试求互相关函数 $r_{sx}(\tau)$。

$$\begin{aligned} r_{sx}(\tau) &= E[s(t)x(t+\tau)] \\ &= E[s(t)(as(t-t_0+\tau)+n(t+\tau)))] && \text{by } x(t)=as(t-t_0)+n(t) \\ &= aE[s(t)s(t-t_0+\tau)] + E[s(t)n(t+\tau)] && \text{相互统计独立} \\ &= aE[s(t)s(t-t_0+\tau)] + E[s(t)]E[n(t+\tau)] && \text{确知信号 } s(t) \text{ 看作常数}, E[s(t)]=s(t) \\ &= aE[s(t)s(t-t_0+\tau)] + s(t)E[n(t+\tau)] && \text{by } E[n(t)]=0 \\ &= ar_s(\tau-t_0) \end{aligned}$$

平稳随机过程的功率谱密度

如果平稳过程 $x(t)$ 的自相关函数 $r_x(\tau)$ 绝对可积，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |r_x(\tau)| d\tau < \infty$$

则功率谱密度 $P_x(\omega)$ 与自相关函数 $r_x(\tau)$

$$P_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} r_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad -\infty < \omega < \infty$$

$$r_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega, \quad -\infty < \omega < \infty$$

$P_x(\omega)$ 与 $r_x(\tau)$ 构成傅里叶变换对

功率谱密度主要性质

1. $P_x(\omega)$ 非负

$$P_x(\omega) \geq 0$$

2. $P_x(\omega)$ 是 ω 的偶函数

$$P_x(\omega) = P_x(-\omega)$$

3. 当 $\omega = 0$ 或 $\tau = 0$ 时,$P_x(\omega)$ 与 $r_x(\tau)$ 的变换关系是

$$P_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} r_x(\tau) d\tau$$

$$r_x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_x(\omega) d\omega$$

第 3 条表明

$x(t)$ 的功率谱密度的零频率分量等于 $x(t)$ 的自相关函数曲线下的总面积。因为 $r_x(0) = E[x^2(t)]$, 所以,$x(t)$ 的功率谱密度曲线下的总面积等于 $x(t)$ 的平均功率。

高斯 (正态) 分布随机变量

均值 μ_x, 方差为 σ_x^2 的高斯分布随机变量 $x(\xi)$ 概率密度函数 $p(x)$ 表示为

$$p(x) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_x^2}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right]$$

特性

高斯分布随机变量 $x(\xi)$ 的概率密度函数 $p(x)$ 完全由它的均值 μ_x 和方差 σ_x^2 来表示。记为 $x(\xi) \sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$

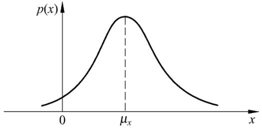


Figure 2: 高斯 (正态) 分布随机变量的 PDF 曲线 $\mu_x > 0$

PDF—概率密度函数 (Probability Density Function)

标准高斯 (正态) 分布随机变量

归一化处理 $x(\xi) \sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$ 为 $x(\xi) \sim \mathcal{N}(0,1)$, 令

$$u(\xi) = \frac{x(\xi) - \mu_x}{\sigma_x}$$

有

$$p(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$$

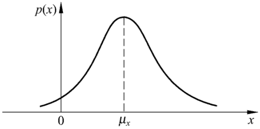


Figure 3: 高斯 (正态) 分布随机变量的 PDF 曲线 $\mu_x > 0$

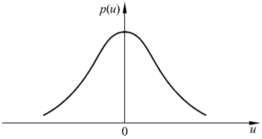


Figure 4: 标准高斯 (正态) 分布随机变量的 PDF 曲线 $\mu_x = 0$

标准高斯 (正态) 分布随机变量

标准高斯分布随机变量的一维累积分布函数 (正态概率积分) 定义为

$$\Phi(x) \overset{def}{=} \int_{-\infty}^{x} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

它的互补累积分布函数是标准高斯分布的右尾积分，即

$$Q(x) = 1 - \Phi(x) \overset{def}{=} \int_{x}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

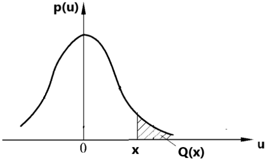


Figure 5: 标准高斯 (正态) 分布的右尾积分 $Q(x)$

高斯噪声的统计描述 (1)

Definition (高斯噪声)

噪声 $n(t)$, 对任意 $N \geq 1$ 和所有时刻 t_k, 随机变量 $n(t_k)$ 服从高斯分布, 则 $n(t)$ 为一个高斯噪声随机变量过程, 简称高斯噪声过程或高斯噪声。

高斯噪声一维概率密度函数

$$p(n_k; t_k) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_{n_k}^2}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{(n_k - \mu_{n_k})^2}{2\sigma_{n_k}^2}\right]$$

其中,μ_{n_k} 为 $n(t_k)$ 的均值, σ_{n_k} 为 $n(t_k)$ 的方差。

高斯噪声的统计描述 (2)

高斯噪声 N 维联合概率密度函数

高斯噪声的 N 维矢量记为

$$(\boldsymbol{n};\boldsymbol{t}) = (n(t_1), n(t_2), \cdots, n(t_N))^T$$

其 N 维联合概率密度函数为

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{n};\boldsymbol{t}) &= p(n_1, n_2, \cdots, n_N; t_1, t_2, \cdots, t_N) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}|\boldsymbol{C_n}|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\mu_n})^T\boldsymbol{C_n}^{-1}(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\mu_n})\right] \end{aligned}$$

其中,$\boldsymbol{\mu_n}$ 是高斯随机矢量 $(\boldsymbol{n};\boldsymbol{t})$ 的均值矢量,$\boldsymbol{C_n}$ 为协方差矩阵。即

$$\boldsymbol{\mu_n} = (\mu_{n_1}, \mu_{n_2}, \ldots, \mu_{n_N})^T$$

$$\mu_{n_k} = E[n(t_k)]$$

$\boldsymbol{C_n}$ 是高斯随机矢量 $(\boldsymbol{n};\boldsymbol{t})$ 的协方差

$$\boldsymbol{C_n} = \begin{bmatrix} C_{n_1n_1} & C_{n_1n_2} & \cdots & C_{n_1n_N} \\ C_{n_2n_1} & C_{n_2n_2} & \cdots & C_{n_2n_N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n_Nn_1} & C_{n_Nn_2} & \cdots & C_{n_Nn_N} \end{bmatrix}$$

其中 $C_{n_jn_k} = E[(n(t_j) - \mu_{n_j})(n(t_k) - \mu_{n_k})] = c_{n_k}c_(n_j)$

$|\boldsymbol{C_n}|$ 是 $\boldsymbol{C_n}$ 的行列式,$\boldsymbol{C_n^{-1}}$ 是 $\boldsymbol{C_n}$ 的逆矩阵。

高斯变量 $n(t_k)$ 互不相关 $\Leftrightarrow$ 相互统计独立

不相关性与统计独立性

互不相关 $\nLeftarrow$ 相互统计独立。但是若 $x(t)$ 服从联合高斯分布，则互不相关 $\Leftrightarrow$ 相互统计独立

证明: 设高斯随机矢量 $(\boldsymbol{n};\boldsymbol{t})$ 中的 $n(t_j)$ 与 $n(t_k)(j \neq k)$ 互不相关，即 $C_{n_j n_k} = C_{n_k n_j} = 0(j \neq k)$，若记 $\sigma_{n_k}^2 \overset{def}{=} C_{n_k n_k}$，则协方差矩阵 C_n 和 $\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{n}}^{-1}$ 分别为

$$\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{n}} = \begin{bmatrix} \sigma_{n_1}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{n_2}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{n_N}^2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{n}}^{-1} = \begin{bmatrix} (\sigma_{n_1}^2)^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (\sigma_{n_2}^2)^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (\sigma_{n_N}^2)^{-1} \end{bmatrix}$$

而 $|\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{n}}|^{1/2}$ 为: $|\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{n}}|^{1/2} = \prod_{k=1}^{N} \sigma_{n_k}$

因此,高斯噪声 $n(t)$ 的 N 维联合概率密度函数为

$$\begin{aligned}
p(\boldsymbol{n};\boldsymbol{t}) &= p(n_1,n_2,\cdots,n_N;t_1,t_2,\cdots,t_N) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}|\boldsymbol{C_n}|^{1/2}}\exp\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\mu_n})^T\boldsymbol{C_n}^{-1}(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\mu_n})\right] \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}|\prod\limits_{k=1}^{N}\sigma_{n_k}}\exp\left[-\sum_{k=1}^{N}\frac{(n_k-\mu_{n_k})^2}{2\sigma_{n_k}^2}\right] \\
&= \prod_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{2\pi\sigma_{n_k}}\right)^{1/2}\exp\left[-\frac{(n_k-\mu_{n_k})^2}{2\sigma_{n_k}^2}\right] \\
&= p(x_1;t_1)p(x_2;t_2)\cdots p(x_N;t_N)
\end{aligned}$$

表明 $n(t)$ 的 N 维联合概率密度函数表示成各自一维概率密度函数之积的形式,即是统计独立性的定义。因此,**N 个高斯随机变量** $n(t_k)(k=1,2,\ldots,t_N)$ **互不相关** $\Rightarrow$ **相互统计独立**; 结合之前的结论 “相互统计独立的随机变量 $\Rightarrow$ 互不相关”。所以, **N 个高斯随机变量** $n(t_k)(k=1,2,\ldots,t_N)$ **互不相关** $\Leftrightarrow$ **相互统计独立**。

高斯随机变量的线性组合仍然是高斯随机变量

1. 若 $x_k(\xi) \sim \mathcal{N}(\mu_{x_k}, \sigma_{x_k}^2)(k=1,2,\ldots,N)$, 且它们相互统计独立, 则它们的和

$$x(\xi) = \sum_{k=1}^{N} x_k(\xi)$$

是高斯随机变量, 且有 $x_k(\xi) \sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$, 其中 $\mu_x = \sum_{k=1}^{N} \mu_{x_k}, \sigma_x^2 = \sum_{k=1}^{N} \sigma_{x_k}^2$

2. 更一般地, 任意有限 N 个高斯随机变量 $x_k(\xi)(k=1,2,\ldots,N)$ 的线性组合

$$x(\xi) = \sum_{k=1}^{N} a_k x_k(\xi)$$

仍然是高斯随机变量, 且有 $x_k(\xi) \sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$, 其中

$$\mu_x = \sum_{k=1}^{N} a_k \mu_{x_k}, \sigma_x^2 = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} a_j a_k c_{x_k x_j}$$

式中, 协方差函数 $c_{x_j x_k} = E[(x_j(\xi) - \mu_{x_j})(x_k(\xi) - \mu_{x_k})] = c_{x_k x_j}, \mu_{x_k} = E[x_k(\xi)]$

Example

设随机变量 y 与 x 之间为线性关系 $y = ax + b, a, b$ 为常数, 且 $a \neq 0$。已知随机变量 x 服从高斯分布, 即

$$p(x) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_x^2}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right]$$

证明随机变量 y 是服从均值为 $a\mu_x + b$, 方差为 $a^2\sigma_x^2$ 的高斯分布。

Proof.

证法 I: 雅可比变换法

$$\text{因为} \quad y = ax + b$$

$$\text{所以, 反函数为} \quad x = \frac{y-b}{a}$$

$$\text{且有} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{a}$$

于是, 由一维雅可比变换, 得

$$p(y) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_x^2}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{(\frac{y-b}{a} - \mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right] \left|\frac{1}{a}\right|$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi a^2\sigma_x^2}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{(y-(a\mu_x+b))^2}{2a^2\sigma_x^2}\right]$$

所以, 随机变量 y 是服从均值为 $a\mu_x + b$, 方差为 $a^2\sigma_x^2$ 的高斯分布。 □

Proof.

证法 II: 利用高斯随机变量的特性来证明

因为 $y = ax + b$

是高斯随机变量 x 的线性变换,所以 y 仍然是高斯随机变量。

其均值 μ_y 和方差 σ_y^2 分别为

$$\begin{aligned}
\mu_y &= E(y) = E(ax+b) = aE(x) + b \\
&= a\mu_x + b \\
\sigma_y^2 &= E[(y-\mu_y)^2] = E[(ax+b-a\mu_x-b)^2] \\
&= a^2E[(x-\mu_x)^2] \\
&= a^2\sigma_x^2
\end{aligned}$$

所以,随机变量 y 是服从均值为 $a\mu_x + b$,方差为 $a^2\sigma_x^2$ 的高斯分布。 □

白噪声

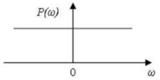
频域—白噪声的功率谱密度

功率谱密度均匀分布在整个频率轴上:

$p_n(\omega) = \frac{N_0}{2}, \quad -\infty < \omega < \infty, N_0$ 是常数

也可以按正半轴上的频域定义:

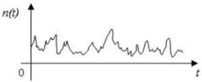
$p_n(\omega) = N_0, \quad 0 < \omega < \infty, N_0$ 是常数



时域—白噪声的自相关函数

均值为零、自相关函数 $r_n(\tau)$ 为 δ 的噪声随机过程:

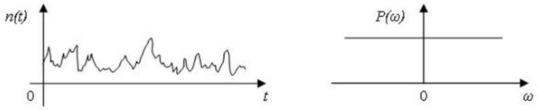
$r_n(\tau) = IFT[\frac{N_0}{2}] = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$



意义

白噪声是一种理想化的数学模型,由于其功率谱密度在整个频域上均匀分布,所以其能量是无限的,实际上是不存在的。但是由于我们所采用的系统相对于整个频率轴来说是窄带系统,只要认为频谱是均匀分布的,能够在数学上带来很大方便。

白噪声特性



白噪声

白噪声 $n(t)$ 重要特性

- 白噪声在频域上其功率谱密度是均匀分布的;
- 时域上自相关函数 $r_n(\tau)$ 是 δ 函数: $r_n(\tau) = IFT[\frac{N_0}{2}] = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$
- 任意两个不同时刻的随机变量 $n(t_j)$ 与 $n(t_k), (\tau = t_j - t_k \neq 0)$ 是不相关的: $r_n(t_j, t_k) = r_n(\tau) = E[n(t_j)n(t_k)] = 0, (\tau = t_j - t_k \neq 0)$。
- 由于 δ—函数的筛选性: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)f(t)dt = f(t_0)$, 有 $\int_{-\infty}^{\infty} r_n(t - t_0)f(t)dt = f(t_0) = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)f(t)dt = \frac{N_0}{2}f(t_0)$

高斯白噪声

高斯白噪声 $n(t)$ 重要特性—高斯随机变量 + 白噪声

- 高斯白噪声在频域上其功率谱密度是均匀分布的;
- **时域上概率密度函数是高斯分布的。(白噪声对此没有明确限制)**
- 时域上自相关函数 $r_n(\tau)$ 是 δ 函数: $r_n(\tau) = IFT[\frac{N_0}{2}] = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$
- 任意两个不同时刻的随机变量 $n(t_j)$ 与 $n(t_k)$, $(\tau = t_j - t_k \neq 0)$ 是不相关的, **并且是统计独立的**:

  $r_n(t_j, t_k) = r_n(\tau) = E[n(t_j)n(t_k)] = 0, (\tau = t_j - t_k \neq 0)$。
- 由 δ—函数的筛选性: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)f(t)dt = f(t_0)$, 有

  $\int_{-\infty}^{\infty} r_n(t - t_0)f(t)dt = f(t_0) = \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)f(t)dt = \frac{N_0}{2}f(t_0)$

有色噪声

如果噪声过程 $n(t)$ 的功率谱密度在频域上的分布是不均匀的，则称其为有色噪声。

有色噪声的功率谱密度

$$P_n(f) = P_0 \exp\left[-\frac{(f-f_0)^2}{2\sigma_f^2}\right]$$

均值 f_0 代表频谱的中心频率，方差 σ_f^2 反映噪声的谱宽度。$\omega = 2\pi f$

ch2. 信号检测与估计理论的基础知识

欢迎批评指正！