信号检测与估值

段江涛
机电工程学院

XIDIAN UNIVERSITY

2019 年 8 月

主要内容

Theorem

如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,则积分上限函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$$

在 $[a,b]$ 上具有导数,并且它的导数是

$$\Phi'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)\qquad (a\le x\le b)$$

Theorem

如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,则函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$$

就是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数。

Theorem

如果函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

术语

$H_j(j=0,1)$: 信源输出的信号, 称为假设 H_j

$P(H_j)(i=0)$: 假设 H_j 为真的先验概率 (先验: 先于试验)

$\lambda\ (x|H_j)(j=0,1)$: 观测信号是随机变量

$p(x|H_j)(j=0,1)$: 假设 H_j 下观测信号的概率密度函数

$(H_i|H_j)(i,j=0,1)$: 在假设 H_j 为真的条件下,判决假设 H_i 成立的结果。

$P(H_i|H_j)(i,j=0,1)$: 在假设 H_j 为真的条件下,判决假设 H_i 成立的概率。

c_{ij}: 在假设 H_j 为真的条件下,判决假设 H_i 成立所付出的代价。

M 元信号检测模型

$$\boldsymbol{R} = \bigcup_{i=0}^{M-1} R_i, \quad R_i \cap R_j = \emptyset, (i \neq j)$$

最佳信号检测 $\Leftarrow$ 正确划分观测空间 $\boldsymbol{R}$ 中的各个判决域 R_i $\Leftarrow$ 最佳检测准则

采样样本 $x_i (i = 1, 2, \ldots, N)$ 之间相互统计独立, 因此其 N 维联合概率密度能够表示成各自一维概率密度之积的形式, 即

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_N) = p(x_1)p(x_2)\cdots p(x_N) = \prod_{i=1}^{N} p(x_i)$$

思考

如果 n 是均值为零的, 方差为 σ_n^2 的高斯随机变量, 两个假设下的观测信号模型

$H_1 : r = 1 + n$

$H_0 : r = -1 + n$

观测信号 $p(r|H_1), p(r|H_0)$ 应服从何种分布?

因为高斯随机变量的特点:高斯随机变量的线性组合还是高斯随机变量。

习题 2.7: $x \sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$, 则 $(y = ax + b) \sim \mathcal{N}(a\mu_x + b, a^2\sigma_x^2)$。

所以, $p(r|H_1) \sim \mathcal{N}(1, \sigma_n^2), p(r|H_0) \sim \mathcal{N}(-1, \sigma_n^2)$

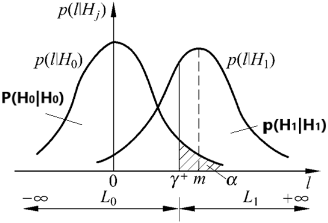
直接计算: $E(r|H_0) = E(1 + n) = 1 + E(n) = 1, Var(r|H_0) =$
$Var[(r|H_0 - E(r|H_0))^2] = E[n^2] = \sigma_n^2 \implies r|H_0 \sim \mathcal{N}(1, \sigma_n^2)$
$E(r|H_1) = E(-1 + n) = -1 + E(n) = -1, Var(r|H_1) = Var[(r|H_1 - E(r|H_1))^2] =$
$E[n^2] = \sigma_n^2 \implies r|H_1 \sim \mathcal{N}(1, \sigma_n^2)$

$$n \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$$

$$H_0: x = n \qquad x \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$$

$$H_1: x = m + n \quad x \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$$

判决表达式: $x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \dfrac{\sigma^2}{m}\ln\eta + \dfrac{m}{2}$

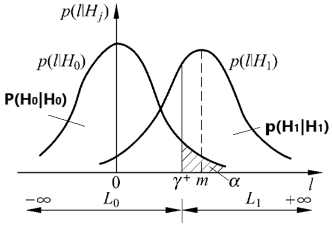


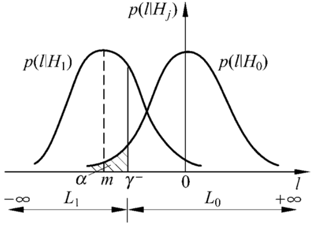
$p(l|H_j)(j=0,1)$: 假设 H_j 下观测信号的概率密度函数; $r^+ = \frac{\sigma^2}{m}\ln\eta + \frac{m}{2}$; $\alpha = P(H_1|H_0)$

思考

1. $\frac{m}{2}$ 是两个假设的中间值, $\frac{\sigma^2}{m}\ln\eta$ 为中间值的修正量, 其含义如何?
2. 考虑 $m>0, m<0, m=0$ 时, 如何构造判决表达式?

1. $m = 0$ 时: H_0, H_1 成为一样的信号。
2. m 值越大, $\frac{\sigma^2}{m}\ln\eta$ 中间值修正量越小,越接近于中间值。
3. m 值越大, 更易区分两种假设,检测性能越好。
4. $m > 0$ 和 $m < 0$ 下的判决表达式如下图。





$m > 0$; $x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma^2}{m}\ln\eta + \frac{m}{2}$

$m < 0$; $x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\lessgtr}} -\frac{\sigma^2}{|m|}\ln\eta - \frac{|m|}{2}$

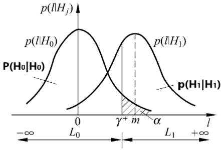
经过上述化简,信号检测的判决式由似然比检验的形式,简化为检验统计量 $l(x)$ 与检测门限 γ 相比较的形式,形成贝叶斯检测基本基本表达式:

$$l(x) \overset{def}{=} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma^2 \ln \eta}{Nm} + \frac{m}{2} \overset{def}{=} \gamma^+$$

检验统计量 $l(x) \overset{def}{=} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$ 是观测信号 $x_i(i = 1, 2, \ldots, N)$ 的求和取平均值的结果,即它是 $x_i(i = 1, 2, \ldots, N)$ 的函数,是一个随机变量。

而无论是在假设 H_0 下,还是在假设 H_1 下,$(x_i|H_0), (x_i|H_1)$ 均服从高斯分布,因为高斯随机变量的线性组合还是高斯随机变量,所以两种假设下的观测量 $(l|H_0), (l|H_1)$ 也是服从高斯分布的随机变量。

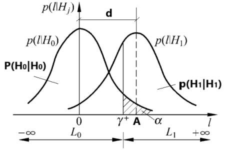
$$\begin{aligned} & & n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \\ H_0 : x = n & & x \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \\ H_1 : x = m + n & & x \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2) \end{aligned}$$



$p(l|H_j)(j = 0, 1)$: 假设 H_j 下观测信号的概率密度函数; $r^+ = \frac{\sigma^2 \ln \eta}{Nm} + \frac{m}{2}$; $\alpha = P(H_1|H_0)$

观测信号 ($\boldsymbol{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$)

$(\boldsymbol{x}|H_0) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, $(\boldsymbol{x}|H_1) \sim \mathcal{N}(A, \sigma^2)$



检验统计量 $l(x)$:

$(l|H_0) \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{N}\sigma^2)$, $(l|H_1) \sim \mathcal{N}(A, \frac{1}{N}\sigma^2)$

$p(l|H_j)(j=0,1)$: 假设 H_j 下观测信号的概率密度函数; $r^+ = \frac{\sigma^2 \ln \eta}{NA} + \frac{A}{2}$; $\alpha = P(H_1|H_0)$

判决表达式:

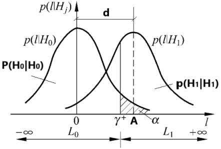
$$l(x) \overset{def}{=} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma^2 \ln \eta}{NA} + \frac{A}{2} \overset{def}{=} \gamma^+$$

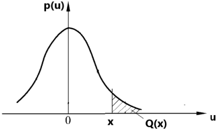
判决概率:(其中, 信噪比 $d^2 = \frac{NA^2}{\sigma^2}$)

$$P(H_1|H_0) = Q\left(\frac{\ln\eta}{d} + \frac{d}{2}\right), \qquad P(H_0|H_0) = 1 - Q\left(\frac{\ln\eta}{d} + \frac{d}{2}\right)$$

$$P(H_1|H_1) = Q\left(\frac{\ln\eta}{d} - \frac{d}{2}\right), \qquad P(H_0|H_1) = 1 - Q\left(\frac{\ln\eta}{d} - \frac{d}{2}\right)$$

贝叶斯检测性能分析小结





Q(x) 是单调递减函数, 其反函数用 $Q^{-1}[\bullet]$ 表示。因为

$$P(H_1|H_0) = Q(\ln\eta/d + d/2) \implies \ln\eta/d = Q^{-1}[P(H_1|H_0)] - d/2$$

这样有:

$$\begin{aligned} P(H_1|H_1) &= Q\left(\ln\eta/d - d/2\right) \\ &= Q[Q^{-1}[P(H_1|H_0)] - d/2 - d/2] = Q[Q^{-1}[P(H_1|H_0)] - d/2 - d] \end{aligned}$$

这说明, 当给定 $P(H_1|H_0)$ 时, $P(H_1|H_1)$ 随功率信噪比 $(d^2 = NA^2/\sigma^2)$ 单调增加。

似然比检验的判别式:

$$\lambda(x)=\frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\eta$$

判决概率:

$$P_F=P(H_1|H_0)=\int_\eta^\infty p(\lambda|H_0)d\lambda$$

$$P_D=P(H_1|H_1)=\int_\eta^\infty p(\lambda|H_1)d\lambda$$

$$P_D = P_D = P(H_1|H_1) = \int_{\eta}^{\infty} p(\lambda|H_1)d\lambda = P_D(\eta)$$

$$P_F = P(H_1|H_0) = \int_{\eta}^{\infty} p(\lambda|H_0)d\lambda = P_F(\eta)$$

$$\frac{dP_D(\eta)}{d\eta} = -p(\eta|H_1)$$

$$\frac{dP_F(\eta)}{d\eta} = -p(\eta|H_0)$$

$$\text{by } \Phi'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \qquad (a \leq x \leq b)$$

$$\frac{dP_D(\eta)}{dP_F(\eta)} = \frac{-p(\eta|H_1)}{-p(\eta|H_0)} = \frac{p(\eta|H_1)}{p(\eta|H_0)}$$

$$
\begin{aligned}
P_D(\eta) &= P[(\lambda|H_1) \geq \eta] \\
&= \int_{\eta}^{\infty} p(\lambda|H_1)d\lambda \\
&= \int_{R_1}^{\infty} p(x|H_1)dx \\
&= \int_{R_1}^{\infty} \lambda p(x|H_0)dx \qquad\qquad \text{by } \lambda(x) = \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta \\
&= \int_{\eta}^{\infty} \lambda p(\lambda|H_0)d\lambda
\end{aligned}
$$

$$
\frac{dP_D(\eta)}{d\eta} = -\eta p(\eta|H_0)
$$

$$
\frac{dP_D(\eta)}{dP_F(\eta)} = \frac{-p(\eta|H_1)}{-p(\eta|H_0)} = \frac{-\eta p(\eta|H_0)}{-p(\eta|H_0)} = \eta
$$

H_1 含随机变量 m 的似然比检验的判别式:

$$\lambda(x) = \frac{p(x|m;H_1)}{p(x|H_0)} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} p(x|m,H_1)p(m)dm}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

$p(m)$ 未知

$$p(x|H_0) = (\frac{1}{2\pi\sigma_n^2})^{1/2}\exp(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2})$$

$$p(x|m;H_1) = (\frac{1}{2\pi\sigma_n^2})^{1/2}\exp(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma_n^2})$$

$$\lambda(x) = \frac{p(x|m;H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

$$\exp(\frac{2mx}{2\sigma_n^2} - \frac{m^2}{2\sigma_n^2}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

$$mx \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \sigma_n^2 \ln\eta + \frac{m^2}{2}$$

$$m_0 \le m \le m_1, m_0 > 0$$

$$mx \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \sigma_n^2 \ln\eta + \frac{m^2}{2}$$

$$l(x) = x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma_n^2}{m} \ln\eta + \frac{m}{2} \overset{def}{=} \gamma^+$$

$$\int_{\gamma^+}^{\infty} (\frac{1}{2\pi\sigma_n^2})^{1/2} \exp(-\frac{l^2}{2\sigma_n^2}) dl = \alpha$$

$$m_0 \le m \le m_1, m_1 < 0$$

$$mx \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \sigma_n^2 \ln \eta + \frac{m^2}{2}$$

$$l(x) = x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\lessgtr}} -\frac{\sigma_n^2}{|m|} \ln \eta - \frac{|m|}{2} \overset{def}{=} \gamma^-$$

$$\int_{-\infty}^{\gamma^-} (\frac{1}{2\pi\sigma_n^2})^{1/2} \exp(-\frac{l^2}{2\sigma_n^2}) dl = \alpha$$

若 $m_0 > 0, m$ 仅取正值, 则在 $P(H_1|H_0) = \alpha$ 的约束下, $P^{(m)}(H_1|H_1)$ 是最大的, 其一致最大功效检验成立;

若 $m_1 < 0, m$ 仅取负值, 则在 $P(H_1|H_0) = \alpha$ 的约束下, $P^{(m)}(H_1|H_1)$ 也是最大的。

若 $m_0 < 0, m_1 > 0$, 即 m 取值可能为正或可能为负的情况下, 无论参量信号的统计检测, 按 m 仅取正值设计, 还是按 m 仅取负值设计, 都有可能在某些 m 值下, $P^{(m)}(H_1|H_1)$ 不满足最大的要求。

例如, 按 m 取正设计信号检测系统, 当 m 为正时, $P^{(m)}(H_1|H_1)$ 最大, 但当 m 为负时, $P^{(m)}(H_1|H_1)$ 可能最小。

因此, 这种情况下不能采用奈曼-皮尔逊准则来实际最佳检测系统。

若 $m_0 < 0, m_1 > 0$, 即 m 取值可能为正或可能为负, 奈曼-皮尔逊准则不能保证 $P^{(m)}(H_1|H_1)$ 最大要求。考虑把约束条件 $P(H_1|H_0) = \alpha$ 分成两个 $\alpha/2$, 假设 H_1 的判决域由两部分组成。判决表示式为

$$|x| \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \gamma$$

虽然双边检验比均值 m 假定为正确时的单边检验性能差,但是比均值 m 假定为错误时的单边检验性能要好的多。因此不失为一种好的折中方法。

广义似然比检验

似然函数

$$p(x|m;H_1)=(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2})^{1/2}\exp(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma_n^2})$$

对 m 求偏导, 令结果等于零, 即

$$\frac{\partial\ln p(x|m;H_1)}{\partial m}\Big|_{m=\widehat{m}_{ml}}=0$$

解得单次观测时,m 的最大似然估计量 $\widehat{m}_{ml}=x$, 于是有

$$p(x|\widehat{m}_{ml};H_1)=(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2})^{1/2}\exp(-\frac{(x-\widehat{m}_{ml})^2}{2\sigma_n^2})\Big|_{\widehat{m}_{ml}=x}=(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2})^{1/2}$$

广义似然比检验

$$p(x|H_0) = (\frac{1}{2\pi\sigma_n^2})^{1/2}\exp(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}) \qquad p(x|\widehat{m}_{ml};H_1) = (\frac{1}{2\pi\sigma_n^2})^{1/2}$$

代入广义似然比检验中, 有

$$\lambda(x) = \frac{p(x|m;H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

$$\lambda(x) = \frac{(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2})^{1/2}}{(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2})^{1/2}\exp(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2})} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

化简得判决表示式

$$x^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 2\sigma_n^2 \ln\eta \overset{def}{=} \gamma^2 \implies |x| \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \gamma$$

这正是前面讨论过的双边检验。只是前面是从奈曼-皮尔逊准则出发推导得到。而这里是从似然比检验的概念导出的, 似然函数 $p(x|m;H_1)$ 中的信号参量 m 由其最大似然估计量 $\widehat{m}_{ml}$ 代换, 所以是广义似然比检验。

欢迎批评指正！