

# 信号检测与估值

段江涛

机电工程学院



2019 年 7 月

# 主要内容

## ① 准备知识

## Theorem

如果函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 则积分上限函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$$

在  $[a, b]$  上具有导数, 并且它的导数是

$$\Phi'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

## Theorem

如果函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 则函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$$

就是  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的一个原函数。

## Theorem

如果函数  $F(x)$  是连续函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上的一个原函数, 则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

似然比检验的判别式：

$$\lambda(x) = \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

判决概率：

$$P_F = P(H_1|H_0) = \int_{\eta}^{\infty} p(\lambda|H_0)d\lambda$$

$$P_D = P(H_1|H_1) = \int_{\eta}^{\infty} p(\lambda|H_1)d\lambda$$

$$P_D = P_D = P(H_1|H_1) = \int_{\eta}^{\infty} p(\lambda|H_1)d\lambda = P_D(\eta)$$

$$P_F = P(H_1|H_0) = \int_{\eta}^{\infty} p(\lambda|H_0)d\lambda = P_F(\eta)$$

$$\frac{dP_D(\eta)}{d\eta} = -p(\eta|H_1)$$

$$\frac{dP_F(\eta)}{d\eta} = -p(\eta|H_0)$$

$$\text{by } \Phi'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

$$\frac{dP_D(\eta)}{dP_F(\eta)} = \frac{-p(\eta|H_1)}{-p(\eta|H_0)} = \frac{p(\eta|H_1)}{p(\eta|H_0)}$$

$$\begin{aligned}
P_D(\eta) &= P[(\lambda|H_1) \geq \eta] \\
&= \int_{\eta}^{\infty} p(\lambda|H_1) d\lambda \\
&= \int_{R_1}^{\infty} p(x|H_1) dx \\
&= \int_{R_1}^{\infty} \lambda p(x|H_0) dx && \text{by } \lambda(x) = \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\underset{H_1}{\gtrless}} \eta \\
&= \int_{\eta}^{\infty} \lambda p(\lambda|H_0) d\lambda
\end{aligned}$$

$$\frac{dP_D(\eta)}{d\eta} = -\eta p(\eta|H_0)$$

$$\frac{dP_D(\eta)}{dP_F(\eta)} = \frac{-p(\eta|H_1)}{-p(\eta|H_0)} = \frac{-\eta p(\eta|H_0)}{-p(\eta|H_0)} = \eta$$

$H_1$  含随机变量  $m$  的似然比检验的判别式:

$$\lambda(x) = \frac{p(x|m; H_1)}{p(x|H_0)} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} p(x|m, H_1)p(m)dm}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$



$p(m)$  未知

$$p(x|H_0) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

$$p(x|m; H_1) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

$$\lambda(x) = \frac{p(x|m; H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

$$\exp\left(\frac{2mx}{2\sigma_n^2} - \frac{m^2}{2\sigma_n^2}\right) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

$$mx \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \sigma_n^2 \ln \eta + \frac{m^2}{2}$$

$$m_0 \leq m \leq m_1, m_0 > 0$$

$$mx \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \sigma_n^2 \ln \eta + \frac{m^2}{2}$$

$$l(x) = x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma_n^2}{m} \ln \eta + \frac{m}{2} \stackrel{def}{=} \gamma^+$$

$$\int_{\gamma^+}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{l^2}{2\sigma_n^2}\right) dl = \alpha$$

$$m_0 \leq m \leq m_1, m_1 < \infty$$

$$mx \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \sigma_n^2 \ln \eta + \frac{m^2}{2}$$

$$l(x) = x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} - \frac{\sigma_n^2}{|m|} \ln \eta - \frac{|m|}{2} \stackrel{\text{def}}{=} \gamma^-$$

$$\int_{-\infty}^{\gamma^-} \left( \frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{l^2}{2\sigma_n^2}\right) dl = \alpha$$

若  $m_0 > 0$ ,  $m$  仅取正值, 则在  $P(H_1|H_0) = \alpha$  的约束下,  $P^{(m)}(H_1|H_1)$  是最大的, 其一致最大功效检验成立;

若  $m_1 < 0$ ,  $m$  仅取负值, 则在  $P(H_1|H_0) = \alpha$  的约束下,  $P^{(m)}(H_1|H_1)$  也是最大的。

若  $m_0 < 0, m_1 > 0$ , 即  $m$  取值可能为正或可能为负的情况下, 无论参量信号的统计检测, 按  $m$  仅取正值设计, 还是按  $m$  仅取负值设计, 都有可能在某些  $m$  值下,  $P^{(m)}(H_1|H_1)$  不满足最大的要求。

例如, 按  $m$  取正设计信号检测系统, 当  $m$  为正时,  $P^{(m)}(H_1|H_1)$  最大, 但当  $m$  为负时,  $P^{(m)}(H_1|H_1)$  可能最小。

因此, 这种情况下不能采用奈曼-皮尔逊准则来实际最佳检测系统。

若  $m_0 < 0, m_1 > 0$ , 即  $m$  取值可能为正或可能为负, 奈曼-皮尔逊准则不能保证  $P^{(m)}(H_1|H_1)$  最大要求。考虑把约束条件  $P(H_1|H_0) = \alpha$  分成两个  $\alpha/2$ , 假设  $H_1$  的判决域由两部分组成。判决表示式为

$$|x| \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \gamma$$

虽然双边检验比均值  $m$  假定为正确时的单边检验性能差, 但是比均值  $m$  假定为错误时的单边检验性能要好的多。因此不失为一种好的折中方法。

# 广义似然比检验

似然函数

$$p(x|m; H_1) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

对  $m$  求偏导, 令结果等于零, 即

$$\frac{\partial \ln p(x|m; H_1)}{\partial m} \Big|_{m=\hat{m}_{ml}} = 0$$

解得单次观测时,  $m$  的最大似然估计量  $\hat{m}_{ml} = x$ , 于是有

$$p(x|\hat{m}_{ml}; H_1) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{(x-\hat{m}_{ml})^2}{2\sigma_n^2}\right) \Big|_{\hat{m}_{ml}=x} = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2}$$

# 广义似然比检验

$$p(x|H_0) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

$$p(x|\hat{m}_{ml}; H_1) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2}$$

代入广义似然比检验中, 有

$$\lambda(x) = \frac{p(x|m; H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \eta$$

$$\lambda(x) = \frac{\left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2}}{\left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \eta$$

化简得判决表示式

$$x^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} 2\sigma_n^2 \ln \eta \stackrel{\text{def}}{=} \gamma^2 \implies |x| \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \gamma$$

这正是前面讨论过的双边检验。只是前面是从奈曼-皮尔逊准则出发推导得到。而这里是从似然比检验的概念导出的, 似然函数  $p(x|m; H_1)$  中的信号参量  $m$  由其最大似然估计量  $\hat{m}_{ml}$  代换, 所以是广义似然比检验。



$$\begin{aligned}
\text{Var}[x_k|H_0] &= E[n_k^2] = E\left[\int_0^T n(t)f_k(t)dt \int_0^T n(u)f_k(u)du\right] \\
&= \int_0^T f_k(t) \int_0^T E[n(t)n(u)]f_k(u)dudt && \text{by } E[n(t)n(u)] = r_n(t-u) \\
&= \int_0^T f_k(t) \int_0^T \frac{N_0}{2}\delta(t-u)f_k(u)dudt && \text{by } r_n(t-u) = \frac{N_0}{2}\delta(t-u) \\
&= \int_0^T f_k(t) \frac{N_0}{2}f_k(t)dt \\
&= \frac{N_0}{2}
\end{aligned}$$

欢迎批评指正！