

# 信号检测与估值

段江涛

机电工程学院



2019 年 9 月

# ch3. 信号检测与估计理论的基础知识

## ch3-1. 统计检测理论基本概念及贝叶斯准则

- 1 统计检测理论基本概念
- 2 二元信号检测
- 3 M 元信号检测
- 4 判决结果和判决概率
- 5 判决域的划分
- 6 贝叶斯准则

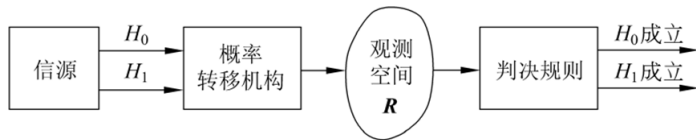
# 统计检测理论 (假设检验理论)

- 统计信号处理的理论基础之一
- 主要研究在受噪声干扰的随机信号中,信号的有/无或信号属于哪个状态的最佳判决的概念、方法和性能等问题。
- 数学基础——统计判决理论,又称假设检验理论

# 经典的信号统计检测理论

- 统计信号检测理论的基本概念
- 二元信号检测的最佳检测准则
- 信号状态的判决的方法和检测性能的分析
- M 元信号的最佳检测
- 参量信号的复合假设检验
- 序列检测

# 统计检测理论的基本模型: 二元信号检测的模型



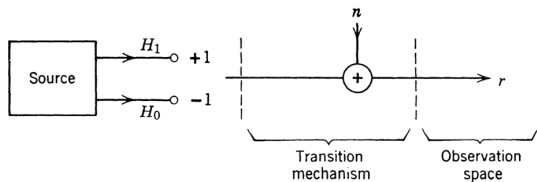
信源  $\Rightarrow$  信源的输出称为假设

概率转移机构  $\Rightarrow$  将信源的输出 (假设) 以一定的  
概率关系映射到整个观察空间中

观测空间  $\Rightarrow$  接收端所有可能观测量的集合

判决规则  $\Rightarrow$  将观测空间进行合理划分,  
使每个观测量对应一个假设判断的方法

# 统计检测理论的基本模型: 二元信号检测的模型示例 1



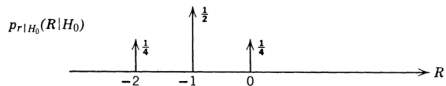
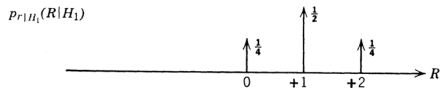
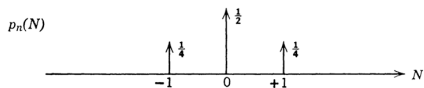
$$H_1 : r = 1 + n$$

$$H_0 : r = -1 + n$$

$n$  : 噪声是一随机变量

一维观测空间:

$$\mathbf{R} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$



# 统计检测理论的基本模型: 二元信号检测的模型示例 2

$$H_1 : r_1 = 1 + n_1$$

$$r_2 = 1 + n_2$$

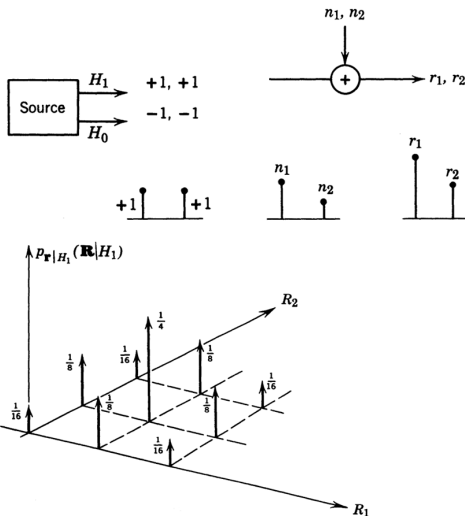
$$H_0 : r_1 = -1 + n_1$$

$$r_2 = -1 + n_2$$

$n_1, n_2$  : 噪声

二维观测空间:

$$\mathbf{R} = \{R_1, R_2\}$$

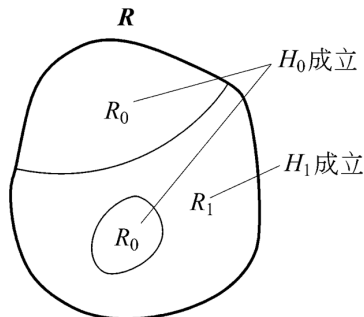


# 统计检测理论的基本模型: 二元信号检测的判决域

二元信号的检测问题,可归结为**对观察空间的划分问题**。

即按照一定的准则,将观测空间  $R$  分别划分为  $R_0$  和  $R_1$  两个子空间。

$$R = R_0 \cup R_1, \quad R_0 \cap R_1 = \emptyset$$





## 思考

如果  $n$  是均值为零的, 方差为  $\sigma_n^2$  的高斯随机变量, 两个假设下的观测信号模型

$$H_1 : r = 1 + n$$

$$H_0 : r = -1 + n$$

观测信号  $p(r|H_1), p(r|H_0)$  应服从何种分布?

## 思考

如果  $n$  是均值为零的, 方差为  $\sigma_n^2$  的高斯随机变量, 两个假设下的观测信号模型

$$H_1 : r = 1 + n$$

$$H_0 : r = -1 + n$$

观测信号  $p(r|H_1), p(r|H_0)$  应服从何种分布?

因为高斯随机变量的特点: 高斯随机变量的线性组合还是高斯随机变量。

习题 2.7:  $x \sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$ , 则  $(y = ax + b) \sim \mathcal{N}(a\mu_x + b, a^2\sigma_x^2)$ 。

所以,  $p(r|H_1) \sim \mathcal{N}(1, \sigma_n^2), p(r|H_0) \sim \mathcal{N}(-1, \sigma_n^2)$

$$E(r|H_0) = E(-1 + n) = -1 + E(n) = -1,$$

$$\text{Var}(r|H_0) = E[(r|H_0 - E(r|H_0))^2] = E[n^2] = \sigma_n^2 \implies r|H_0 \sim \mathcal{N}(-1, \sigma_n^2)$$

$$E(r|H_1) = E(1 + n) = 1 + E(n) = 1,$$

$$\text{Var}(r|H_1) = E[(r|H_1 - E(r|H_1))^2] = E[n^2] = \sigma_n^2 \implies r|H_1 \sim \mathcal{N}(1, \sigma_n^2)$$

# 统计检测理论的基本模型: 二元信号检测

考虑噪声  $n$  为高斯噪声时的概率转移机构  
观测模型为:

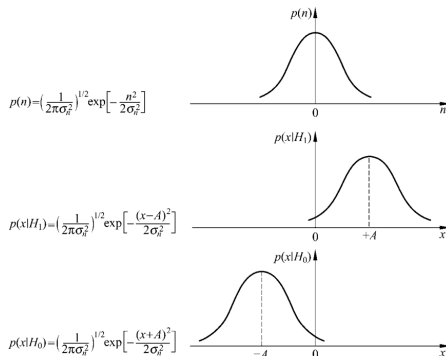
$$H_0: x = -A + n$$

$$H_1: x = A + n$$

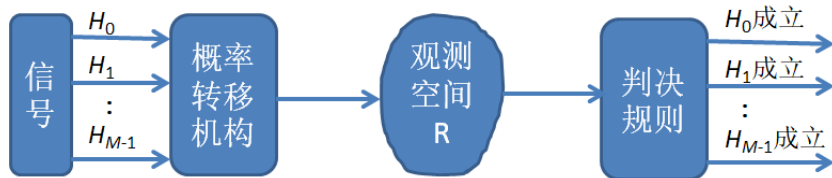
概率转移:

信源输出的某一种确知信号:

- 无噪声干扰时, 将映射到观测空间中的某一点;
- 有噪声干扰时, 将以一定的概率映射到观测空间。而映射到某一点附件的概率决定于概率密度函数  $p(x|H_j)(j = 1, 2)$ .

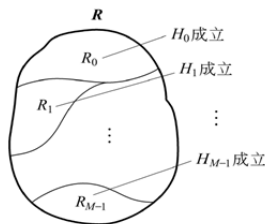


# 统计检测理论的基本模型: M 元信号检测



判决域划分:

$$\mathbf{R} = \bigcup_{i=0}^{M-1} R_i, R_i \cap R_j = \emptyset, (i \neq j)$$



## 二元信号检测—统计检测判决结果和判决概率

## 二元信号判决结果

判决	假设	
	$H_0$	$H_1$
$H_0$	$(H_0   H_0)$	$(H_0   H_1)$
$H_1$	$(H_1   H_0)$	$(H_1   H_1)$

$(H_i | H_j) (i, j = 0, 1)$ : 在假设  $H_j$  为真的条件下, 判决假设  $H_i$  成立的结果。

## 二元信号判决概率

判决	假设	
	$H_0$	$H_1$
$H_0$	$P(H_0   H_0)$	$P(H_0   H_1)$
$H_1$	$P(H_1   H_0)$	$P(H_1   H_1)$

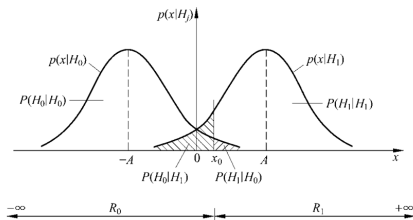
$P(H_i | H_j) (i, j = 0, 1)$ : 在假设  $H_j$  为真的条件下, 判决假设  $H_i$  成立的概率。

$$H_0 : x = -A + n, \quad H_1 : x = A + n$$

$$H_0 : x_k = -A + n_k, \quad H_1 : x_k = A + n_k$$

$$k = 1, 2, \dots, N, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$$

$$P(H_i|H_j) = \int_{R_i} p(\mathbf{x}|H_j) d\mathbf{x}$$



$$P(H_0|H_0) = \int_{R_0} p(\mathbf{x}|H_0) d\mathbf{x}, \quad P(H_1|H_0) = \int_{R_1} p(\mathbf{x}|H_0) d\mathbf{x}$$

$$P(H_0|H_1) = \int_{R_0} p(\mathbf{x}|H_1) d\mathbf{x}, \quad P(H_1|H_1) = \int_{R_1} p(\mathbf{x}|H_1) d\mathbf{x}$$

$$\mathbf{R} = R_0 \cup R_1, \quad R_0 \cap R_1 = \emptyset, \quad \int_{\mathbf{R}} p(\mathbf{x}|H_j) d\mathbf{x} = 1$$

$$P(H_0|H_0) + P(H_1|H_0) = \int_{R_0} p(\mathbf{x}|H_0) d\mathbf{x} + \int_{R_1} p(\mathbf{x}|H_0) d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{R}} p(\mathbf{x}|H_0) d\mathbf{x} = 1$$

$$P(H_0|H_1) + P(H_1|H_1) = \int_{R_0} p(\mathbf{x}|H_1) d\mathbf{x} + \int_{R_1} p(\mathbf{x}|H_1) d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{R}} p(\mathbf{x}|H_1) d\mathbf{x} = 1$$

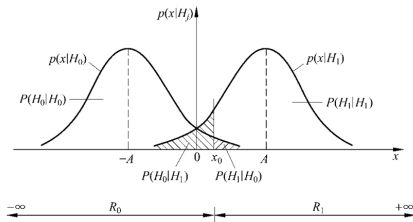
# 信号统计检测理论要研究的基本问题—判决域的划分

$$H_0 : x = -A + n, \quad H_1 : x = A + n$$

$$H_0 : x_k = -A + n_k, \quad H_1 : x_k = A + n_k$$

$$k = 1, 2, \dots, N, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$$

$$P(H_i|H_j) = \int_{R_i} p(\mathbf{x}|H_j) d\mathbf{x}$$



- 目标: 正确判决概率  $P(H_j|H_j)$  尽可能大, 错误判决概率  $P(H_i|H_j) (i \neq j)$  尽可能小。
- $x_0 \downarrow \implies$  正确判决概率  $P(H_1|H_1) \uparrow$ , 但另一个正确判决概率  $P(H_0|H_0) \downarrow$ 。
- $x_0 \downarrow \implies$  错误判决概率  $P(H_0|H_1) \downarrow$ , 但另一个错误判决概率  $P(H_1|H_0) \uparrow$ 。
- $x_0 \uparrow \implies$  正确判决概率  $P(H_0|H_0) \uparrow$ , 但另一个正确判决概率  $P(H_1|H_1) \downarrow$ 。
- $x_0 \uparrow \implies$  错误判决概率  $P(H_1|H_0) \downarrow$ , 但另一个错误判决概率  $P(H_0|H_1) \uparrow$ 。
- 判决域的划分影响判决概率  $P(H_i|H_j)$ , 因此需要最佳划分判决域。

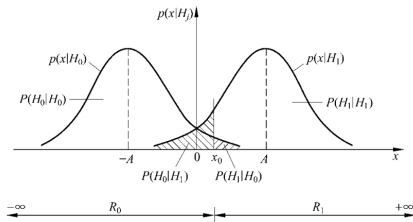
# 信号统计检测理论要研究的基本问题—判决域的划分

$$H_0 : x = -A + n, \quad H_1 : x = A + n$$

$$H_0 : x_k = -A + n_k, \quad H_1 : x_k = A + n_k$$

$$k = 1, 2, \dots, N, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$$

$$P(H_i|H_j) = \int_{R_i} p(\mathbf{x}|H_j) d\mathbf{x}$$



- 目标: 正确判决概率  $P(H_j|H_j)$  尽可能大, 错误判决概率  $P(H_i|H_j) (i \neq j)$  尽可能小。
- 判决域的划分影响判决概率  $P(H_i|H_j)$ , 因此需要最佳划分判决域。
- $p(\mathbf{x}|H_j) (j = 0, 1)$ : 假设  $H_j$  下观测信号的概率密度函数。它描述观测 (接收) 信号的统计特性。
- 按照一定的准则, 将观测空间  $\mathbf{R}$  分别划分为  $R_0$  和  $R_1$  两个子空间。计算判决概率  $P(H_i|H_j) (i, j = 0, 1)$ 。



# 二元信号检测—统计检测判决结果和判决概率计算


观测模型为:

$$H_0 : x = n$$

$$H_1 : x = A + n$$

考虑噪声  $n$  是均值为零, 方差为  $\sigma^2$  的高斯噪声, 且不同时刻的加性噪声之间是相互统计独立的。

接收端根据接收信号判决时, 会出现四种事件, 对应四个判决概率:

$(H_0   H_0)$		$P(H_0   H_0)$
$(H_1   H_0)$		$P(H_1   H_0)$
$(H_0   H_1)$		$P(H_0   H_1)$
$(H_1   H_1)$		$P(H_1   H_1)$

# 二元信号检测—统计检测判决结果和判决概率计算

观测模型为:

$$H_0 : x = -A + n$$

$$H_1 : x = A + n$$

考虑噪声  $n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ , 且不同时刻的加性噪声之间是相互统计独立的。

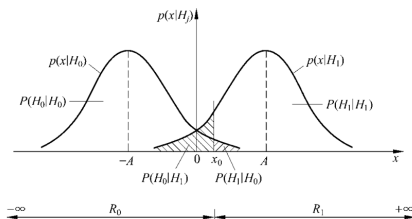
噪声  $n$  的概率密度:

$$p(n) = \left( \frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{1/2} \exp \left( -\frac{n^2}{2\sigma^2} \right)$$

接收信号  $\mathbf{x}$  的统计特性可以描述为:

$$p(\mathbf{x}|H_0) = \left( \frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{1/2} \exp \left[ -\frac{(x+A)^2}{2\sigma^2} \right]$$

$$p(\mathbf{x}|H_1) = \left( \frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{1/2} \exp \left[ -\frac{(x-A)^2}{2\sigma^2} \right]$$



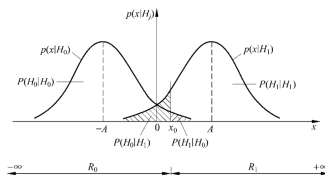
# 二元信号检测—统计检测判决结果和判决概率计算

观测模型为:

$$H_0 : x = -A + n$$

$$H_1 : x = A + n$$

考虑噪声  $n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ , 且不同时刻的  
加性噪声之间是相互统计独立的。



四种判决概率的计算:  $P(H_i|H_j) = \int_{R_i} p(\mathbf{x}|H_j) d\mathbf{x}$

$$P(H_0|H_0) = \int_{R_0} p(\mathbf{x}|H_0) d\mathbf{x}, \quad P(H_1|H_0) = \int_{R_1} p(\mathbf{x}|H_0) d\mathbf{x}$$

$$P(H_0|H_1) = \int_{R_0} p(\mathbf{x}|H_1) d\mathbf{x}, \quad P(H_1|H_1) = \int_{R_1} p(\mathbf{x}|H_1) d\mathbf{x}$$

$$\mathbf{R} = R_0 \cup R_1, \quad R_0 \cap R_1 = \emptyset, \quad \int_{\mathbf{R}} p(\mathbf{x}|H_j) d\mathbf{x} = 1$$

$$P(H_0|H_0) + P(H_1|H_0) = \int_{R_0} p(\mathbf{x}|H_0) d\mathbf{x} + \int_{R_1} p(\mathbf{x}|H_0) d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{R}} p(\mathbf{x}|H_0) d\mathbf{x} = 1$$

$$P(H_0|H_1) + P(H_1|H_1) = \int_{R_0} p(\mathbf{x}|H_1) d\mathbf{x} + \int_{R_1} p(\mathbf{x}|H_1) d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{R}} p(\mathbf{x}|H_1) d\mathbf{x} = 1$$

# 术语

$H_j(j = 0, 1)$ : 信源输出的信号, 称为假设  $H_j$

$P(H_j)(j = 0, 1)$ : 假设  $H_j$  为真的先验概率 (先验: 先于试验)

$(x|H_j)(j = 0, 1)$ : 假设  $H_j$  下的观测信号是随机变量

$p(x|H_j)(j = 0, 1)$ : 假设  $H_j$  下观测信号的概率密度函数

$(H_i|H_j)(i, j = 0, 1)$ : 在假设  $H_j$  为真的条件下, 判决假设  $H_i$  成立的结果。

$P(H_i|H_j)(i, j = 0, 1)$ : 在假设  $H_j$  为真的条件下, 判决假设  $H_i$  成立的概率。

# 贝叶斯准则—基本要求

- 充分理解平均代价 (Average risk) 的概念
- 贝叶斯准则 (Bayes criterion) 的判决表达式
- 判决性能分析

贝叶斯准则的基本原理:在划分观察空间时,使平均代价最小。

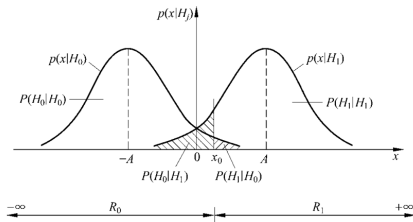
# 信号统计检测理论要研究的基本问题—判决域的划分

$$H_0 : x = -A + n, \quad H_1 : x = A + n$$

$$H_0 : x_k = -A + n_k, \quad H_1 : x_k = A + n_k$$

$$k = 1, 2, \dots, N, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$$

$$P(H_i|H_j) = \int_{R_i} p(\mathbf{x}|H_j) d\mathbf{x}$$



- 目标: 正确判决概率  $P(H_j|H_j)$  尽可能大, 错误判决概率  $P(H_i|H_j) (i \neq j)$  尽可能小。
- 判决域的划分影响判决概率  $P(H_i|H_j)$ , 因此需要**最佳划分判决域**。
- $p(\mathbf{x}|H_j) (j = 0, 1)$ : 假设  $H_j$  下观测信号的概率密度函数。它描述观测 (接收) 信号的统计特性。
- 按照一定的准则, 将观察空间  $\mathbf{R}$  分别划分为  $R_0$  和  $R_1$  两个子空间。计算判决概率  $P(H_i|H_j) (i, j = 0, 1)$ 。

# 贝叶斯检测的提出动机

通信系统中, 二元信号的平均解调错误概率 (由全概率公式得出):

$$P_e = P(0)P(1|0) + P(1)P(0|1)$$

可以看出, 检测性能不仅与两种错误判决概率  $[P(1|0), P(0|1)]$  有关, 还与信源发送的 0 和 1 的先验概率  $[P(0), P(1)]$  有关。

另外, 每做出一种判断, 人们要付出的代价也是不同的。

如何综合考虑上述因素来设计好的检测方法?

## 贝叶斯检测

给定各种判决代价因子, 且已知各假设的先验概率条件下, 使**平均代价最小**的检测准则。

# 问题

- ① 代价因子如何定义?
- ② 平均代价如何计算?
- ③ 如何获得最小的平均代价?



# 代价因子的定义

对于二元信号统计检测, 共有四种事件发生, 即

$(H_0|H_0)$     $(H_1|H_0)$     $(H_1|H_1)$     $(H_0|H_1)$

↓

↓

↓

↓

$c_{00}$

$c_{10}$

$c_{11}$

$c_{01}$

$c_{ij}$  表示假设  $H_j$  为真时, 判决假设  $H_i$  成立所付出的代价

## Notes

一般地,  $c_{10} > c_{00}, c_{01} > c_{11}$

# 平均代价的计算

平均代价  $C$  由两部分构成

- ① 信源发送  $H_0$  假设时, 判决所付出的代价  $C(H_0)$
- ② 信源发送  $H_1$  假设时, 判决所付出的代价  $C(H_1)$

$$C = P(H_0)C(H_0) + P(H_1)C(H_1)$$

参见:

$$P_e = P(0)P(1|0) + P(1)P(0|1)$$

# 平均代价的计算

对于二元信号统计检测, 共有四种事件发生, 即

$(H_0 H_0)$	$(H_1 H_0)$	$(H_1 H_1)$	$(H_0 H_1)$
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
$c_{00}$	$c_{10}$	$c_{11}$	$c_{01}$

$c_{ij}$  表示假设  $H_j$  为真时, 判决假设  $H_i$  成立所付出的代价

因此, 两种假设下, 判决所付出的代价:

$$C(H_0) = c_{00}P(H_0|H_0) + c_{10}P(H_1|H_0)$$

$$C(H_1) = c_{01}P(H_0|H_1) + c_{11}P(H_1|H_1)$$

平均代价:  $C = P(H_0)C(H_0) + P(H_1)C(H_1)$

# 平均代价的计算

$$C = P(H_0)C(H_0) + P(H_1)C(H_1)$$

$$C(H_0) = c_{00}P(H_0|H_0) + c_{10}P(H_1|H_0)$$

$$C(H_1) = c_{01}P(H_0|H_1) + c_{11}P(H_1|H_1)$$

$$\Downarrow$$

$$C = P(H_0)c_{00}P(H_0|H_0) + c_{10}P(H_1|H_0) + \\ P(H_1)c_{01}P(H_0|H_1) + c_{11}P(H_1|H_1)$$

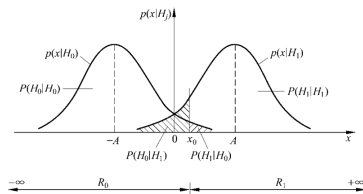
# 平均代价的计算

$$C = P(H_0)c_{00}P(H_0|H_0) + c_{10}P(H_1|H_0) + \\ P(H_1)c_{01}P(H_0|H_1) + c_{11}P(H_1|H_1)$$

$$P(H_i|H_j) = \int_{R_i} p(x|H_j)dx$$

⇓

$$C = P(H_0) \left( c_{00} \int_{R_0} p(x|H_0)dx + c_{10} \int_{R_1} p(x|H_0)dx \right) + \\ P(H_1) \left( c_{01} \int_{R_0} p(x|H_1)dx + c_{11} \int_{R_1} p(x|H_1)dx \right)$$



# 平均代价的计算

$$C = P(H_0) \left( c_{00} \int_{R_0} p(x|H_0) dx + c_{10} \int_{R_1} p(x|H_0) dx \right) +$$

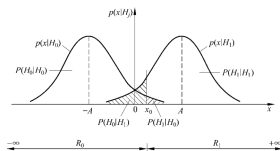
$$P(H_1) \left( c_{01} \int_{R_0} p(x|H_1) dx + c_{11} \int_{R_1} p(x|H_1) dx \right)$$

$$\int_R p(x|H_j) dx = 1 \implies \int_{R_1} p(x|H_j) dx = 1 - \int_{R_0} p(x|H_j) dx$$

⇓

$$C = P(H_0) \left( c_{00} \int_{R_0} p(x|H_0) dx + c_{10} \left( 1 - \int_{R_0} p(x|H_0) dx \right) \right) +$$

$$P(H_1) \left( c_{01} \int_{R_0} p(x|H_1) dx + c_{11} \left( 1 - \int_{R_0} p(x|H_1) dx \right) \right)$$



# 平均代价的计算

$$\begin{aligned}
 C &= P(H_0) \left( c_{00} \int_{R_0} p(x|H_0) dx + c_{10} \left( 1 - \int_{R_0} p(x|H_0) dx \right) \right) + \\
 &\quad P(H_1) \left( c_{01} \int_{R_0} p(x|H_1) dx + c_{11} \left( 1 - \int_{R_0} p(x|H_1) dx \right) \right) \\
 &= P(H_0) \left( c_{10} + c_{00} \int_{R_0} p(x|H_0) dx - c_{10} \int_{R_0} p(x|H_0) dx \right) + \\
 &\quad P(H_1) \left( c_{11} + c_{01} \int_{R_0} p(x|H_1) dx - c_{11} \int_{R_0} p(x|H_1) dx \right) \\
 &= c_{10} P(H_0) + c_{11} P(H_1) + \\
 &\quad \left( \int_{R_0} [P(H_1)(c_{01} - c_{11})p(x|H_1) - P(H_0)(c_{10} - c_{00})p(x|H_0)] dx \right)
 \end{aligned}$$

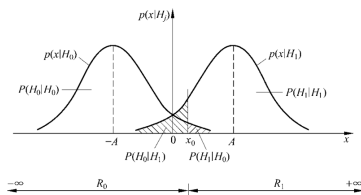
# 平均代价取最小的条件

$$C = c_{10}P(H_0) + c_{11}P(H_1) + \left( \int_{R_0} [P(H_1)(c_{01} - c_{11})p(x|H_1) - P(H_0)(c_{10} - c_{00})p(x|H_0)] dx \right)$$

$c_{10}P(H_0)$  和  $c_{11}P(H_1)$  是两项固定的值

$$P(H_1)(c_{01} - c_{11})p(x|H_1) \geq 0$$

$$P(H_0)(c_{10} - c_{00})p(x|H_0) \geq 0$$



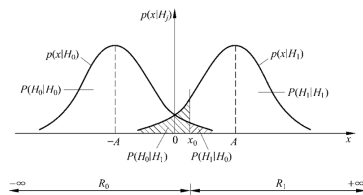
- 因此, 给定信道特性和先验信息, 平均代价  $C$  的大小完全由判决域  $R_0$  确定。
- 把被积函数取负值的观测值  $x$  划分给  $R_0$  区域, 而把其余的观测值  $x$  划分给  $R_1$ , 即可保证平均代价最小。



# 平均代价取最小的条件

$$C = c_{10}P(H_0) + c_{11}P(H_1) + \left( \int_{R_0} [P(H_1)(c_{01} - c_{11})p(x|H_1) - P(H_0)(c_{10} - c_{00})p(x|H_0)] dx \right)$$

把被积函数取负值的观测值  $x$  划分给  $R_0$  区域, 而把其余的观测值  $x$  划分给  $R_1$ , 即可保证平均代价最小。



$$P(H_1)(c_{01} - c_{11})p(x|H_1) < P(H_0)(c_{10} - c_{00})p(x|H_0)$$

判决  $H_0$  假设成立

$$P(H_1)(c_{01} - c_{11})p(x|H_1) \geq P(H_0)(c_{10} - c_{00})p(x|H_0)$$

判决  $H_1$  假设成立

# ch3. 信号检测与估计理论的基础知识

## ch3-1. 统计检测理论基本概念及贝叶斯准则

1 统计检测理论基本概念

2 二元信号检测

3 M 元信号检测

4 判决结果和判决概率

5 判决域的划分

6 贝叶斯准则

欢迎批评指正！