# 信号检测与估值

段江涛
机电工程学院

西安电子科技大学
XIDIAN UNIVERSITY

2019 年 7 月

# 主要内容

## 随机过程的均值 $\mu_x(t)$: 表示随机过程在 $t$ 时刻状态取值的理论平均值

$$\mu_x(t) \stackrel{def}{=} E[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x;t)dx$$

如果 $x(t)$ 是电压或电流，则 $\mu_x(t)$ 可以理解为在 $t$ 时刻的 "直流分量"。

## 随机过程的均方值 $\varphi_x^2(t)$

$$\varphi_x^2(t) \stackrel{def}{=} E[x^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2p(x;t)dx$$

如果 $x(t)$ 是电压或电流，则 $\varphi_x^2(t)$ 可以理解在 $t$ 时刻它在 $1\Omega$ 电阻上消耗的 "平均功率"。

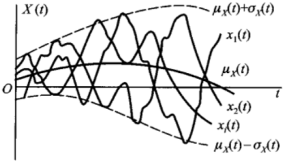
## 随机过程的方差/标准偏差 $\delta_x^2(t)$

$$\sigma_x^2(t) \stackrel{def}{=} E[(x(t)-\mu_x(t))^2] = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_x(t))^2 p(x;t)dx$$

方差 $\sigma_x^2(t)$ 表示随机过程在 $t$ 时刻取其值偏离其均值 $\mu_x(t)$ 的离散程度。如果 $x(t)$ 是电压或电流，则 $\delta_x^2(t)$ 可以理解在 $t$ 时刻它在 $1\Omega$ 电阻上消耗的“交流功率”。

## 均值 $\mu_x(t)$, 均方值 $\varphi_x^2(t)$, 方差 $\delta_x^2(t)$ 之间的关系

$$\sigma_x^2(t) = \varphi_x^2(t) - \mu_x^2(t)$$



### 随机过程的自相关函数 $r_x(t_j, t_k)$

$$\begin{aligned} r_x(t_j, t_k) &\overset{def}{=} E[x(t_j)x(t_k)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_j x_k p(x_j, x_k; t_j, t_k) dx_j dx_k \end{aligned}$$

随机过程的自相关函数 $r_x(t_j, t_k)$ 可以理解为它的两个随机变量 $x(t_j)$ 与 $x(t_k)$ 之间含有均值时的相关程度的度量。显然

$$r_x(t, t) = \varphi_x^2(t)$$

## 随机过程的自协方差函数 $c_x(t_j, t_k)$

$$
\begin{aligned}
c_x(t_j, t_k) &\overset{def}{=} E[((x(t_j) - \mu_x(t_j))(x(t_k) - \mu_x(t_k))] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_j - \mu_x(t_j))(x_k - \mu_x(t_k))p(x_j, x_k; t_j, t_k)dx_i dx_k
\end{aligned}
$$

随机过程的自协方差函数 $c_x(t_j, t_k)$ 可以理解为它的两个随机变量 $x(t_j)$ 与 $x(t_k)$ 之间的相关程度的度量。它们的自相关系数定义为

$$
\rho_x(t_j, t_k) \overset{def}{=} \frac{c_x(t_j, t_k)}{\sigma_x(t_j)\sigma_x(t_k)}
$$

易证

$$
c_x(t_j, t_k) = r_x(t_j, t_k) - \mu_x(t_j)\mu_x(t_k)
$$

$$
c_x(t, t) = \sigma_x^2(t)
$$

## 随机过程的互相关函数 $r_{xy}(t_j, t_k)$

$$
\begin{aligned}
r_{xy}(t_j, t_k) &\overset{def}{=} E[x(t_j)y(t_k)] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_j y_k p(x_j, t_j; y_k, t_k) dx_j dy_k
\end{aligned}
$$

式中, $p(x_j, t_j; y_k, t_k)$ 是 $x(t)$ 与 $y(t)$ 的二维混合概率密度函数。

## 随机过程的互协方差函数 $c_{xy}(t_j, t_k)$

$$c_{xy}(t_j, t_k) \overset{def}{=} E[(x(t_j) - \mu_x(t_j))(y(t_k) - \mu_x(t_k))]$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_j - \mu_x(t_j))(y_k - \mu_x(t_k))p(x_j, t_j; x_k, t_k)dx_j dy_k$$

随机过程 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的互协方差函数 $c_{xy}(t_j, t_k)$ 可以理解为它们各自的随机变量 $x(t_j)$ 与 $y(t_k)$ 之间的相关程度, 实际上表示两个随机过程 $x(t)$ 与 $y(t)$ 之间的相关程度。它们的互相关系数定义为

$$\rho_{xy}(t_j, t_k) \overset{def}{=} \frac{c_{xy}(t_j, t_k)}{\sigma_x(t_j)\sigma_x(t_k)}$$

易证

$$c_{xy}(t_j, t_k) = r_{xy}(t_j, t_k) - \mu_x(t_j)\mu_y(t_k)$$

**Definition (广义平稳随机过程, 简称平稳随机过程)**

随机过程 $x(t)$ 的平均统计量满足

1. $x(t)$ 的均值是与时间 $t$ 无关的常数, 即

$$E[x(t)] = \mu_x$$

2. $x(t)$ 的自相关函数只取决于时间间隔 $\tau = t_k - t_j$, 而与时间的起始时刻无关, 即

$$E[x(t_j)x(t_k)] = E[x(t_j)x(t_j + \tau)] = r_x(\tau)$$

平稳随机过程 $x(t)$ 自相关函数 $r_x(t_j - t_k)$ 仅取决于时间间隔 $(t_j - t_k)$, 而与时间的起始时刻无关。$E[x(t_j)x(t_k)] = r_x[t_j - t_k]$

# 平稳随机过程的统计平均量之间的关系

平稳随机过程 x(t) 的均值 $\mu_x$, 均方值 $\varphi_x^2$, 方差 $\sigma_x^2$, 自相关函数 $r_x(\tau)$, 自协方差函数 $c_x(\tau)$ 之间的关系

$$\sigma_x^2 = \varphi_x^2 - \mu_x^2$$

$$r_x(\tau) = r_x(-\tau)$$

$$c_x(\tau) = r_x(\tau) - \mu_x^2$$

$$c_x(\tau) = c_x(-\tau)$$

$$\varphi_x^2 = r_x(0)$$

$$\sigma_x^2 = c_x(0)$$

$$r_x(0) \geq |r_x(\tau)|, \tau \neq 0$$

$$c_x(0) \geq |c_x(\tau)|, \tau \neq 0$$

## Definition (联合平稳随机过程)

设 $x(t)$ 和 $y(t)$ 分别是两个平稳的随机过程, 如果对于任意的 $\Delta t$, 有 $r_{xy}(t_j+\Delta t, t_k+\Delta t) = r_{xy}(t_j, t_k)$, 即互相关函数 $r_{xy}(t_j, t_k) = r_{xy}(\tau), (\tau = t_k - t_j)$ 仅与时间间隔 $\tau$ 有关, 而与 $t_j$ 和 $t_k$ 无关, 则称过程 $x(t)$ 与 $y(t)$ 是联合平稳的随机过程。

## 联合平稳随机过程 $x(t)$ 与 $y(t)$ 的互协方差函数

$$c_{xy}(t_j, t_k) = c_{xy}(\tau) = r_{xy}(\tau) - \mu_x\mu_y, \tau = t_k - t_j$$

互相关系数:

$$\rho_{xy}(\tau) \overset{def}{=} \frac{c_{xy}(t_j, t_k)}{\sigma_x(t_j)\sigma_y(t_k)} = \frac{c_{xy}(\tau)}{\sigma_x\sigma_y}$$

$$r_{xy}(\tau) = r_{yx}(-\tau)$$

$$c_{xy}(\tau) = c_{yx}(-\tau)$$

### Definition

设 $x(t_j)$ 和 $x(t_k)$ 是随机过程 $x(t)$ 的任意两个不同时刻的随机变量,其均值分别为 $\mu_x(t_j)$ 和 $\mu_x(t_k)$, 自相关函数 $r_x(t_j,t_k)$, 自协方差函数为 $c_x(t_j,t_k)$。如果

$$r_x(t_j,t_k)=0, j\neq k$$

则称 $x(t)$ 是相互正交的随机变量过程。如果

$$c_x(t_j,t_k)=0, j\neq k$$

则称 $x(t)$ 是互不相关的随机变量过程。等价条件:

$$c_x(t_j,t_k)=r_x(t_j,t_k)-\mu_x(t_j)\mu_x(t_k), j\neq k \implies r_x(t_j,t_k)=\mu_x(t_j)\mu_x(t_k), j\neq k$$

## Definition

如果 $x(t)$ 是平稳随机过程,

相互正交:

$$r_x(\tau) = 0, \tau = t_k - t_j$$

互不相关:

$$c_x(\tau) = 0, \tau = t_k - t_j$$

互不相关的等价条件

$$r_x(\tau) = \mu_x^2, \tau = t_k - t_j$$

## Definition

设 $x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_N)$ 是随机过程 $x(t)$ 在不同时刻 $t_k(k=1,2,\ldots,t_N)$ 的随机变量, 如果其 N 维联合概率密度函数对于任意的 $N \geq 1$ 和所有时刻 $t_k(k=1,2,\ldots,N)$ 都能够表示成各自一维概率密度函数之积的形式, 即

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_N; t_1, t_2, \ldots, t_N)$$
$$= p(x_1; t_1)p(x_2; t_2)\cdots p(x_N; t_N)$$

则称 $x(t)$ 是相互统计独立的随机变量过程。

# 随机过程的正交性、不相关性和统计独立性

1. 均值 $\mu_x(t_j) = 0, \mu_x(t_k) = 0$ 则, 相互正交 $\Leftrightarrow$ 互不相关
2. 相互统计独立 $\Rightarrow$ 互不相关
3. 互不相关 $\nRightarrow$ 相互统计独立。但是若 $x(t)$ 服从联合高斯分布,则互不相关 $\Leftrightarrow$ 相互统计独立

### 中心极限定理

在一般条件下,$N$ 个相互统计独立的随机变量 $n_i$ 之和 $n = \sum_{k=1}^{N} n_k$, 在 $N \to \infty$ 的极限情况下,其概率密度趋于高斯分布,而不管每个变量 $n_k$ 的具体分布如何。

### 高斯噪声一维概率密度函数

$$p(n_k;t_k) = (\frac{1}{2\pi\sigma_{n_k}^2})^{1/2}\exp[-\frac{(n_k-\mu_{n_k})^2}{2\sigma_{n_k}^2}]$$

其中,$\mu_{n_k}$ 为 $n(t_k)$ 的均值, $\sigma_{n_k}$ 为 $n(t_k)$ 的方差。

## 高斯噪声 N 维联合概率密度函数

高斯噪声的 N 维矢量记为

$$(\mathbf{n};\mathbf{t}) = (n(t_1), n(t_2), \cdots, n(t_N))^T$$

其 N 维联合概率密度函数为

$$\begin{aligned} p(\mathbf{n};\mathbf{t}) &= p(n_1, n_2, \cdots, n_N; t_1, t_2, \cdots, t_N) \\ &= (\frac{1}{(2\pi)^{N/2}|\mathbf{C}_n|^{1/2}} \exp[-\frac{1}{2}(\mathbf{n}-\mu_{\mathbf{n}})^T \mathbf{C}_n^{-1}(\mathbf{n}-\mu_{\mathbf{n}})] \end{aligned}$$

其中,$\mu_{\mathbf{n}}$ 是高斯随机矢量 $(\mathbf{n};\mathbf{t})$ 的均值矢量,$\mathbf{C}_n$ 为协方差矩阵。

## 不相关性与统计独立性

互不相关 $\nRightarrow$ 相互统计独立。但是若 $x(t)$ 服从联合高斯分布,则互不相关 $\Leftrightarrow$ 相互统计独立

## 白噪声的功率谱密度

$$p_n(\omega) = \frac{N_0}{2}$$

功率谱密度均匀分布在整个频率轴上

## 白噪声的自相关函数

$$r_n(\tau) = IFT[\frac{N_0}{2}] = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$$

白噪声也可定义为均值为零、自相关函数 $r_n(\tau)$ 为 $\delta$ 的噪声随机过程。

## 重要特性

白噪声在频域上其功率谱密度是均匀分布的，时域上自相关函数 $r_n(\tau)$ 是 $\delta$ 函数。

任意两个不同时刻的随机变量 $n(t_j)$ 与 $n(t_k)$, $(\tau = t_j - t_k \neq 0)$ 是不相关的。

## 高斯白噪声

时域的随机变量的概率密度函数是高斯分布的，频域的功率谱密度是均匀分布的噪声过程称为高斯白噪声。高斯白噪声的重要特性：任意两个或两个以上不同时刻 $t_1, t_2, \ldots, t_N$ 的随机变量 $n(t_k)(k = 1, 2, \ldots, N)$ 是互不相关且统计独立的。

## 有色噪声的功率谱密度

$$P_n(f) = P_0 \exp[-\frac{(f - f_0)^2}{2\sigma_f^2}]$$

均值 $f_0$ 代表频谱的中心频率，方差 $\sigma_f^2$ 反映噪声的谱宽度。$\omega = 2\pi f$

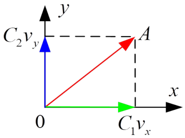
## 矢量正交

$V_x = (V_{x1}, V_{x2}, V_{x3})$ 与 $V_y = (V_{y1}, V_{y2}, V_{y3})$, 正交的定义: 其**内积**为 0。即

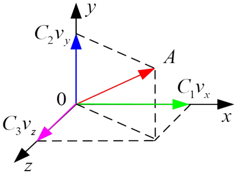
$$V_x V_y = \sum_{i=1}^{3} v_{xi} v_{yi} = 0$$

## 正交矢量集

由两两正交的矢量组成的矢量集合称为正交矢量集。




**(a)** 平面矢量分解



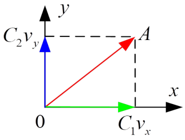

**(b)** 空间矢量分解

## Example

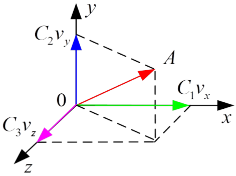
如三维空间中，以矢量 $\boldsymbol{v}_x = (2,0,0)$, $\boldsymbol{v}_y = (0,2,0)$, $\boldsymbol{v}_z = (0,0,2)$ 所组成的集合就是一个**正交矢量集**。

对于一个三维空间的矢量 $\boldsymbol{A} = (2,5,8)$, 可以用一个三维正交矢量集 $\{v_x, v_y, v_z\}$ 分量的线性组合表示。即

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{v}_x + \mathbf{2.5}\boldsymbol{v}_y + \mathbf{4}\boldsymbol{v}_z$$

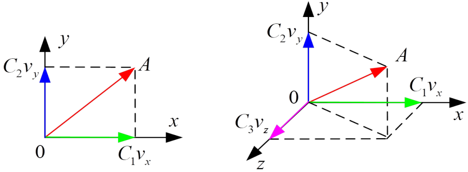


**(a)** 平面矢量分解



**(b)** 空间矢量分解

矢量空间正交分解的概念可推广到信号空间：在信号空间找到若干个**相互正交**的信号作为基本信号，使得信号空间中**任意信号均可表示成它们的线性组合**。




**(a)** 平面矢量分解

**(b)** 空间矢量分解

# 完备正交函数集

三角函数集 $\{1, \cos(n\omega t), \sin(n\omega t), \ldots\}, n = 1, 2, \ldots$。就是在区间 $(t_0, t_0, T), T = 2\pi/\omega$ 上的完备正交函数集。

**Example (傅里叶级数的三角形式)**

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

傅里叶系数: $a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega t)dt, \quad b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\omega t)dt$

# 正交级数展开

Table 1: 正交级数展开

| | 二维矢量 | 信号 $f(t)$ 傅里叶展开 | 信号 $x(t)$ 正交级数 |
|---|---|---|---|
| 正交集 | $\{\boldsymbol{v}_x, \boldsymbol{v}_y\}$ | $\{1, \cos(n\omega t), \sin(n\omega t)\}$ | $\{f_1(t), f_2(t), \ldots, f_k(t)\}$ |
| 展开系数 (正交投影) | $C_k =$ 矢量 $\boldsymbol{A}$ 在第 $k$ 个坐标的投影 | $a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega t)dt$ <br> $b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\omega t)dt$ | $x_k = \int_0^T f_k(t)x(t)dt$ |
| 线性表示 | $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{v}_x + \boldsymbol{C}_2\boldsymbol{v}_y$ | $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(n\omega t)$ | $x(t) = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N} x_k f_k(t)$ |

# 确知信号的正交级数展开

$s(t)$ 是定义在 (0,T) 时间内的确知信号

# 随机过程的正交级数展开

随机过程 $x(t)$ 展开的均方误差等于 0,

或者说 $\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{N} x_k f_k(t)$ 均方收敛于 $x(t)$

# 随机过程的正交级数展开

## Notes

随机过程: $x(t) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} x_k f_k(t)$

展开系数: $x_k = \int_0^T x(t) f_k(t) dt, k = 1, 2, \ldots$

随机过程 $x(t)$ 可以由上式求得的展开系数 $x_k$ 来恢复，就是说 $x(t)$ 完全由展开系数 $x_k$ 确定。注意，这里对随机过程 $x(t)$ 进行正交级数展开所用的正交函数集 $\{f_k(t)\}$ 并没有提出特别的要求，所以**展开系数** $x_k (k = 1, 2, \ldots)$ **之间可能是相关的随机变量**。

## 问题

如何根据噪声干扰的特性，正确选择随机过程展开的正交函数集 $\{f_k\}$，以使展开系数 $x_k$ 之间是互不相关的随机变量。

# 随机过程的卡亨南-洛维展开

$$
\begin{aligned}
E[x_k(t)] &= E\left[\int_0^T f_k(t)x(t)dt\right] \\
&= E\left[\int_0^T f_k(t)(s(t)+n(t))dt\right] \\
&= E\left[\int_0^T f_k(t)s(t)dt + \int_0^T f_k(t)n(t))dt\right] \\
&= E\left[\int_0^T f_k(t)s(t))dt\right] + \int_0^T f(t)E[n(t)]dt \\
&= E\left[\int_0^T f_k(t)s(t))dt\right] \qquad \text{(by } n(t) \text{ 均值为 } 0, E[n(t)]=0)
\end{aligned}
$$

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & (i = k) \\ 0, & (i \neq k) \end{cases}$$

$$\int_0^T a^2 \sin^2(\omega t) dt = \frac{a^2 T}{2}, T = 2\pi/\omega$$

$$s(t) = \lim_{N \to \infty} \sum_1^N s_k f_k(t)$$

$$\begin{aligned} E_s &= \int_0^T s^2(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (5\sin(t))^2 dt \\ &= 25\pi \end{aligned}$$

$$\mu_x(t) \overset{def}{=} E[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x;t)dx$$

$$\begin{aligned}
E[\int_0^T x(t)f_k(t)dt] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^T x(t)f_k(t)dtp(x;t)dx \\
&= \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} x(t)f_k(t)p(x;t)dxdt \\
&= \int_0^T \left( \int_{-\infty}^{\infty} x(t)p(x;t)dx \right) f_k(t)dt \\
&= \int_0^T E[x(t)]f_k(t)dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Var[x_k|H_0] &= E[n_k^2] = E[\int_0^T n(t)f_k(t)dt \int_0^T n(u)f_k(u)du] \\
&= \int_0^T f_k(t) \int_0^T E[n(t)n(u)]f_k(u)dudt && \text{by } E[n(t)n(u)] = r_n(t-u) \\
&= \int_0^T f_k(t) \int_0^T \frac{N_0}{2}\delta(t-u)f_k(u)dudt && \text{by } r_n(t-u) = \frac{N_0}{2}\delta(t-u) \\
&= \int_0^T f_k(t)\frac{N_0}{2}f_k(t)dt \\
&= \frac{N_0}{2}
\end{aligned}
$$

欢迎批评指正！