信号检测与估值

段江涛
机电工程学院

2019 年 7 月

主要内容

随机事件的特征是不确定性,但是我们可以通过重复观测,从不确定现象中寻找、观察特定事件发生的规律,为此需要让某一随机现象重复发生(不一定是人为控制的)并记录观测结果,称之为随机试验。

随机试验的三个特征:

- 可以在相同条件下重复进行;
- 试验的所有可能结果是明确可知的,并且不止一个;
- 每次试验总是恰好出现这些可能结果中的一个,但在一次试验之前却不能肯定这次试验会出现哪个结果。

概率论中的三个组成部分:

- 样本空间 Ω
- 事件域 $\mathcal{F}$
- 概率 P

- 样本空间 Ω:一个随机试验所有可能出现的结果的全体,称为随机事件的样本空间。
  每一个可能的结果称为基本事件,它们的全体就是样本空间。
- 样本点 ξ_k:随机试验的一个结果,就是某个基本事件,也就是 Ω 中的一个元素。
  $\Omega = \{\xi\} = \{\xi_k | k = 1, \ldots, n\}$
- 随机事件 A: 样本空间中的某个子集称为随机事件,简称事件 (事件是集合)。
- 事件域 $\mathcal{F}$: 样本空间中的某些子集构成的满足如下条件的集合,称为事件域 (又称 σ^- 域)。
  (1) $\Omega \in \mathcal{F}$
  (2) 若 $A \in \mathcal{F}$, 则 A 的补 $\overline{A} \in \mathcal{F}$
  (3) 若 $A_n \in \mathcal{F}$, 则 $\bigcap_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{F}$

Example

一个盒子中有 10 个相同的球,5 各白色,5 个黑色,搅匀后从中任意摸取一球。

$\xi_1 = \{$取得白球$\}, \xi_2 = \{$取得黑球$\}$

$\Omega = \{\xi_1, \xi_2\}$

Example

一个盒子中有 10 个相同的球,编号 1,2,...,10, 从中取一球。

$\Omega = \{1, 2, \ldots, 10\}$

$A = \{6$ 号球$\} = \{6\}, B = \{$偶数编号球$\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$,

$\overline{B} = \{$奇数编号球$\}$,$C = \{$编号小于等于 5 的球$\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

事件 A 是基本事件,而 B 和 C 则由多个基本事件所组成,并且 $A, B, C \subset \Omega$。

空集 $\emptyset$ 可以看作 Ω 的子集,在任意一次试验中不可能有此事件发生,称为不可能事件。

事件域中的元素就是随机事件。如果这些事件的随机性能够由定义在 $\mathcal{F}$ 上的具有非负性,归一性和可列加性的实函数 $P(A)$ 来确定,则称 P 是定义在二元组 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的概率,而称 $P(A)$ 为事件 A 的概率。

(1) 非负性。$P(A) \geq 0$

(2) 归一性。$P(\Omega) = 1$

(3) 可列加性。$A_1, A_2, ..., A_n$ 互不相容 $(A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j)$,则
$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$

非空的事件域 $\mathcal{F}$ 关于交、并、补、差元素是封闭的。

1. 若 $A \in \mathcal{F}$, 则 $\overline{A} \in \mathcal{F}$
2. 若 $A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{F}$, 则 $A \cup B \in \mathcal{F}$
3. 若 $A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{F}$, 则 $A \cap B \in \mathcal{F}$
4. 若 $A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{F}$, 则 $A - B \in \mathcal{F}$

Proof.

由于 $\mathcal{F}$ 为非空子集类,则若 $A \in \mathcal{F}$, 由 (1) 知,$\overline{A} \in \mathcal{F}$,又由 (2) 知 $A \cup \overline{A} = \Omega \in \mathcal{F}$. 故有 $\Omega \in \mathcal{F}$.

若 $A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{F}$, 则 $\overline{A} \in \mathcal{F}, \overline{B} \in \mathcal{F}$, 那么 $\overline{A} \cup \overline{B} \in \mathcal{F}$, 即有 $A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} \in \mathcal{F}$, 故 $\mathcal{F}$ 对交也封闭。

再若 $A, B \in \mathcal{F}$, 则有 $A - B = A\overline{B} \in \mathcal{F}$, 即 $\mathcal{F}$ 对交也封闭。

由数学归纳法可证,若 $A_i \in \mathcal{F}$, 则 $\bigcup_{i=1}^{n} \in \mathcal{F}$ $\square$

古典概型

- 样本空间的元素 (即基本事件) 只有有限个, 不妨设为 n 个, $\Omega = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$
- 每个基本事件出现的可能性是相等的, 即有 $P(\xi_1) = P(\xi_2) = \cdots = P(\xi_n)$
- 事件域 $\mathcal{F}$ 为 Ω 的所有子集的全体, 即是 $Pwr(\Omega)$, Ω 的 m 幂集, 共有 2^n 个事件, $\emptyset \in \mathcal{F}, \Omega \in \mathcal{F}$。
- 由概率的有限可加性知
  $1 = P(\Omega) = \Sigma_{i=1}^n P(\xi_i) \implies P(\xi_i) = \frac{1}{n}, (i = 1, \ldots, n)$
- 对任意一个随机事件 $A \subseteq \mathcal{F}$, 如果 A 是 k 个基本事件的和, 即 $A = \{\xi_{i_1}\} \cup \{\xi_{i_2}\} \cup \cdots \cup \{\xi_{i_k}\}$, 则

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{A \text{ 中所包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}$$

样本空间的选取

为求一个事件的概率，样本空间可以有不同的取法，但一定要认真，基本事件和求概事件数的计算都要在同一个样本空间中进行，否则会导致谬误！

Example

一个盒子中有 10 个相同的球，编号 1,2,...,10, 从中取一球，求此球的号码为偶数的概率。

$\Omega = \{1, 2, \ldots, 10\}$

$A = \{\text{偶数编号球}\} = \{2\} \cup \{4\} \cup \{6\} \cup \{8\} \cup \{10\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$。

$P(A) = \frac{|A|}{n} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

另外一种解法：

$\Omega = \{A, \overline{A}\}, A = \{\text{编号为偶数的球}\}, \overline{A} = \{\text{编号为奇数的球}\}, \mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, A, \overline{A}\}$, 由 $A, \bar{(}A)$ 的对称性, 即得 $P(A) = \frac{1}{2}$

样本空间的选取

Notes

两种解法的样本空间 Ω 不同 (从而事件域 $\mathcal{F}$ 是不同的)。严格地说,两者所描述的随机试验是不同的。例如对于第二种解法来说,$B=\{$号码为 4 的球$\}$ 并不属于事件域 $\mathcal{F}$, 就是说 B 不是一个事件,从而也就没有概率可言。但对第一种解法,B 是事件,而且 $P(B)=\frac{1}{10}$。

Example

甲、乙两人掷硬币，其中甲掷 $n+1$ 次，乙掷 n 次。求“甲掷出正面的次数大于乙指出正面的次数”这一事件的概率。

令

$A_1=$ 甲掷出正面的次数，$A_2=$ 甲掷出反面的次数，$B_1=$ 乙掷出正面的次数，$B_2=$ 乙掷出反面的次数。

$\Omega-\{A_1>B_1\}=\{A_2\le B_1\}=\{A_2>B_2\}$

由对称性知

$P(A_1>B_1)=P(A_2>B_2)$

由此即得

$P(A_1>B_1)=\frac{1}{2}$

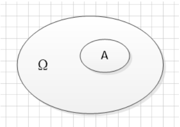
Notes

在古典概型中，所谓“等可能性”，正是“对称性”产生的结果，因为各个基本事件处在“对称”的位置上，所以才有“等可能性”。

几何概率

我们在一个面积为 S_Ω 的区域 Ω 中,等可能地任意投点,如果点落入小区域 S_A 中的可能性与 S_A 成正比,而与 A 的位置及形状无关。如果"点落入小区域 A"这个随机事件仍然记为 A, 则由 $P(\Omega)=1$ 可得

$$P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}$$

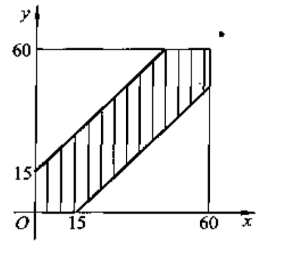


Example

(会面问题) 甲、乙两人约定在 6 时到 7 时之间在某处会面，并约定先到者应等候另一个人一刻钟，过时即可离去。求两人能会面的概率。

如图，以 x,y 表示甲乙两人，则两人能会面的充要条件是: $|x-y| \leq 15$

$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{60^2 - 45^2}{60^2} = \frac{7}{16}$$



条件概率

Definition

若 $\Omega, \mathcal{F}, P$ 是一个概率空间，$B \in \mathcal{F}$, 且 $P(B) > 0$, 则对任意的 $A \in \mathcal{F}$, 称

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

为在已知事件 B 发生的条件下，事件 A 发生的条件概率。

Corollary

概率的乘法公式: $P(AB = P(B)P(A|B)$

Corollary

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

Example

一个家庭中有两个小孩,乙指其中有一个是女孩,问这是另一个小孩也是女孩的概率有多大?

Ω ={(男, 男),(男, 女),(女, 男),(女 , 女)}

A ={已知有一个是女孩}={(男, 女),(女, 男),(女, 女)}

B ={另一个也是女孩}={(女, 女)}

于是所求概率为

$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$

Example

有外形相同的球分装在三个盒子,每盒 10 个。其中第一个盒子中 7 个球标有字母 A,3 个球标有字母 B; 第二个盒子中有红球和白球各 5 个; 第三个盒子中则有红球 8 个, 白球 2 个。试验按如下规则进行: 先在第一个盒子中任取一个球,若取得标有字母 A 的球,则在第二个盒子中任取一个球; 若第一次取得标有字母 B 的球,则在第三个盒子中任取一个球。如果第二次取出的是红球,则称试验成功。求试验成功的概率。

Solution

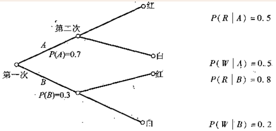
令 A ={从第一个盒子取得标有字母 A 的球},B ={从第一个盒子取得标有字母 B 的球},R ={第二次取出的球是红球},W ={第二次取出的球是白球}。

则容易球得:

$P(A)=\frac{7}{10}, P(B)=\frac{3}{10}, P(R|A)=\frac{1}{2}, P(W|A)=\frac{1}{2}, P(R|B)=\frac{4}{5}, P(W|B)=\frac{1}{5}$

于是,试验成功的概率为

$$\begin{aligned} P(R) = P(R\cap\Omega) &= P[R\cap(A\cup B)] \\ &= P(RA\cup RB) = P(RA)+P(RB) \\ &= P(R|A)\cdot P(A)+P(R|B)\cdot P(B) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{10}+\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{10} = 0.59 \end{aligned}$$



概率树/全概率公式

概率树思想:为了求解复杂事件的概率,往往可以先把它分解成两个(或若干个)互不相容的较简单的事件之并。求出这些较简单事件的概率,在利用加法公式即得所要求的复杂事件的概率。把这个方法一般化,便的到下述定理。

Theorem

设 $B_1, B_2, \cdots$ 是一列互不相容的事件,且有

$$\bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i = \Omega, P(B_i) > 0$$

则对任一事件 A, 有

$$P(A) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(B_i)P(A|B_i)$$

概率树/全概率公式

Proof.

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(A \cap \Omega) = P[A \cap (\bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i)] \\
&= P[\bigcup_{i=1}^{+\infty} (AB_i)] = \sum_{i=1}^{+\infty} P(AB_i) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} P(B_i)P(A|B_i)
\end{aligned}
$$

□

相互独立事件

Definition

对任意的两个事件 A,B, 若

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

成立, 则称事件 A,B 是相互独立的, 简称为独立的。

依这个定义, 不难验证:

若 A 与 B 相互独立, 则 $\{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\}$ 中的任意一个与 $\{\emptyset, B, \overline{B}, \Omega\}$ 中的任意一个仍相互独立。

Definition

设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是一概率空间,$x(\xi)|\xi \in \Omega$ 是定义在 Ω 上的单值实函数,如果对任一实数 x, 集合 $\{x(\xi) \le x\} \in \mathcal{F}$, 则称 $x(\xi)$ 为 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的一个**随机变量**。

随机变量 $x(\xi)$ 的定义域为样本空间 Ω, 它的值域是实数 R。所有随机变量 $x(\xi)$ 实际上是一个映射,这个映射为每个来自概率空间的结果 (样本点)ξ 赋予一个实数 x。这种映射必须满足条件:

(1) 对任一 x, 集合 $\{x(\xi) \le x\}$ 是这个概率空间中的一个事件,并有确定的概率 $P\{x(\xi) \le x\}$;

(2) $P\{x(\xi) = \infty\} = 0, P\{x(\xi) = -\infty\} = 0$

Notes

随机变量就是试验结果 (即样本点) 和实数之间的一一对应关系。

关于随机变量 (及向量) 的研究，是概率论的中心内容. 这是因为，对于一个随机试验，我们所关心的往往是与所研究的特定问题有关的某个或某些量，而这些量就是随机变量.

也可以说：**随机事件**是从静态的观点来研究随机现象，而**随机变量**则是一种动态的观点，一如数学分析中的常量与变量的区分那样. 变量概念是高等数学有别于初等数学的基础概念。同样，概率论能从计算一些孤立事件的概念发展为一个更高的理论体系，其基础概念是随机变量。

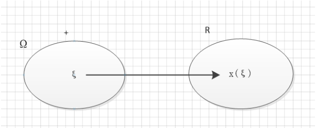
Example

抛硬币试验中,H 表示正面,T 表示反面,样本空间 $\Omega = \{H, T\}$,H 与 T 不是数量,不便于计算及理论的研究,因而引入以下变量 ξ,

$$x = x(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi = T \\ 1, & \xi = H \end{cases}$$

Definition

设随机试验 E 的样本空间是 $\Omega=\{\xi\}$, 若对于每一个 $\xi\in\Omega$, 有一个实数 $x(\xi)$ 与之对应, 即 $x(\xi)$ 是定义在 Ω 上的单值函数, 称为随机变量。



- 可用随机变量 $x(\xi)$ 描述事件。

  例掷一颗骰子 (色子), 设出现的点数记为随机事件 A, 表示 “掷出的点数大于 3” 的事件 A, 可表示为 “$x(\xi)>3$”。反过来, A 的一个变化范围表示一个随机事件:“$2<x(\xi)<5$” 表示事件 “掷出的点数大于 2 且小于 5”。
- 随机变量随着试验的结果而取不同的值, 在试验之前不能确切知道它取什么值, 但是随机变量的取值有一定的统计规律性—概率分布。

研究随机变量的意义

虽然在试验之前不能肯定随机变量 $x(\xi)$ 会取哪一个数值，但是对于任一实数 a，我们可以研究 $\{x(\xi)=a\}$ 发生的概率，也就是 $x(\xi)$ 取值的统计规律。

离散型随机变量

Definition

定义在样本空间 Ω 上,取值于实数域 R, 且只取有限个或可列个值的变量 $x = x(\xi)$, 称作是一维离散型随机变量。

Example

设 Ω ={某公司 2018 年对某险种售出的保单}, 对 $\xi \in \Omega$, 令

$$x(\xi) = \xi\text{在一年中的索赔次数}$$

则 $x(\xi)$ 是 Ω 上的一个一位离散型随机变量, $x(\xi)$ 的可能取值范围为 $\{0, 1, 2, \ldots\}$。在试验 (即签定某一份保单) 之前,并不能断定 ξ 会取哪一个值,但是我们可以知道 $(\xi = 0), (\xi = 1), \ldots$ 这些事件发生的概率 (也就是在总体中所占的比例)。制表称为随机变量 $x(\xi)$ 的分布。

ξ	0	1	$\cdots$
$P(\xi)$	p_1	p_2	$\cdots$

Example

某射手命中率为 $p,(0<p<1)$，现有五发子弹。射击一发，如果命中，即停止射击，否则再射击一次，依次类推，如用 η 表示他射击所用去的子弹数，求 η 的分布。当 $(\eta=k),1\leq k\leq 4$ 时表示前 $(k-1)$ 次射击均未命中。第 k 次才首次命中，依题意，每次射击是相互独立的。故 $P(\eta=k|1\leq k\leq 4)=(1-p)^{k-1}p$。而 $(\eta=5)$ 时表示前 4 次射击均为命中，第 5 次射击后不管是否命中均要停止。故

$P(\eta=k|k=5)=(1-p)^{k-1}p$。

η	1	2	3	4	5
$P(\eta)$	p	$p(1-p)$	$p(1-p)^2$	$p(1-p)^3$	$(1-p)^4$

离散型随机变量 ξ 的分布列的性质

离散型随机变量 ξ 的分布列

ξ	0	1	$\cdots$
$P(\xi)$	p_1	p_2	$\cdots$

由概率的性质可知，任一离散型随机变量的分布 $\{p_i\}$ 都有下述两个性质：

1. $p_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots$
2. $\sum_{i=1}^{+\infty} p_i = 1.$

反过来，任意一个具有以上两个性质的数列 $\{p_i\}$，都有资格作为某一个随机变量的分布列。

分布列不仅明确地给出了 $(\xi = a_i)$ 的概率，而且对于任意一个的实数 a,b, 事件 $(a \leq \xi \leq b)$ 发生的概率均可由分布列算出，因为

$$(a \leq \xi \leq b) = \bigcup_{a \leq \xi \leq b} (\xi = a_i)$$

于是由概率的可列加性有

$$P(a \leq \xi \leq b) = \sum_{i \in I_{a,b}} P(\xi = a_i) = \sum_{i \in I_{a,b}} p_i$$

其中 $I_{a,b} = \{i : a \leq a_i \leq b\}$, 即使对 $\mathbb{R}$ 中更复杂可列的集合 B, 也有

$$P(\xi \in B) = \sum_{i \in I(B)} P(\xi = a_i) = \sum_{i \in I(B)} p_i$$

其中 $I(B) = \{i : a_i \in B\}$

由知此可 ,$x(\xi)$ 取各种值的概率都可以由它的分布列通过计算而得到。

分布列全面地描述了离散型随机变量 $x(\xi)$ 的统计规律。

Definition (0–1 分布)

若 $x(\xi)$ 的概率分布是

ξ	0	1
$P(\xi)$	$1-p$	p

则称 $x(\xi)$ 服从参数 p 的 0–1 分布。

Example

一批产品的废品率为 5%, 从中任取一个进行检查, 若令 ξ 表示取得废品的数量, 写出 ξ 的概率分布。

ξ	0	1
$P(\xi)$	0.95	0.05

Definition (几何分布)

若 $x(\xi)$ 的概率分布是

$$P(\xi = k) = (1-p)^{k-1}p, \qquad (0 < p < 1, k = 1, 2, \ldots)$$

则称 $x(\xi)$ 服从参数为 p 的几何分布，记作 $\xi \sim G(p)$

Example

社会上定期发行某种奖券,每券一元, 中奖率为 p, 某人每次购买 1 张奖券, 如果没有中奖,下次继续购买一张,直到中奖为止。求该人购买奖券次数 ξ 的概率分布。

令 A_k ={第 k 次购买的奖券中奖}, $k = 1, 2, 3, ...,$

则 $P(A_k) = p, \quad P(\overline{A_k}) = 1 - p,$

由于 $A_1, A_2, A_3, \ldots$ 相互独立,于是:

$$
\begin{aligned}
&P(\xi = 1) = P(A_1) = p \\
&P(\xi = 2) = P(\overline{A_1}A_1) = P(\overline{A_1})P(A_2) = (1-p)p \\
&P(\xi = 3) = P(\overline{A_1}\overline{A_2}A_3) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(A_3) = (1-p)^2 p \\
&\qquad \ldots \\
&P(\xi = k) = P(\overline{A_1}\overline{A_2}\cdots\overline{A_{k-1}}A_k) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})\cdots P(\overline{A_{k-1}})P(A_k) = (1-p)^{k-1}p
\end{aligned}
$$

二项分布

若试验 E 只有两种可能结果,一种是事件 A 出现,另一种是事件 $\overline{A}$ 出现, $P(A)=p$, 称试验 E 为伯努利 (Bernoulli) 试验。现将试验 E 独立重复 n 次,若用 ξ 表示事件 A 出现的次数,在这 n 重伯努利试验中,事件 A 恰好出现 k 次的概率为

$$P\{\xi=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, \qquad k=0,1,2,\ldots,n$$

Definition (二项分布)

若 ξ 的概率分布是

$$P\{\xi=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, \qquad k=0,1,2,\ldots,n$$

则称 ξ 服从参数为 n,p 的二项分布,记作 $\xi\sim B(n,p)$。

Example

一批产品的废品率为 0.03，进行 20 次独立重复抽样，求出现废品的频率为 0.1 的概率。

令 ξ 表示在这 20 次独立重复抽样中出现的废品数，则 $\xi \sim B(20, 0.03)$。于是

$$P\{\frac{\xi}{20} = 0.1\} = P\{\xi = 2\} = C_{20}^{2} 0.03^{2} (0.97)^{18} \approx 0.0988$$

一些内容

一些内容

欢迎批评指正！