信号检测与估值

段江涛
机电工程学院

西安電子科技大學 XIDIAN UNIVERSITY

2019 年 9 月

ch3. 信号检测与估计理论的基础知识

ch3-3. 贝叶斯准则—例题 (续) 及性能分析

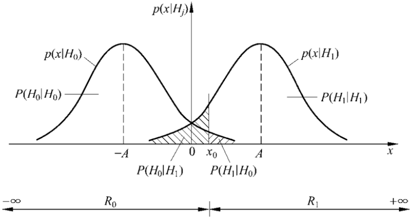
1. 贝叶斯检测步骤回顾
2. 贝叶斯准则例题
3. 贝叶斯检测性能分析

$$H_0 : x = -A + n, \quad H_1 : x = A + n$$

$$H_0 : x_k = -A + n_k, \quad H_1 : x_k = A + n_k$$

$$k = 1, 2, \ldots, N, \quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)^T$$

$$P(H_i|H_j) = \int_{R_i} p(\boldsymbol{x}|H_j) d\boldsymbol{x}$$



$$P(H_0|H_0) = \int_{R_0} p(\boldsymbol{x}|H_0) d\boldsymbol{x}, \qquad P(H_1|H_0) = \int_{R_1} p(\boldsymbol{x}|H_0) d\boldsymbol{x}$$

$$P(H_0|H_1) = \int_{R_0} p(\boldsymbol{x}|H_1) d\boldsymbol{x}, \qquad P(H_1|H_1) = \int_{R_1} p(\boldsymbol{x}|H_1) d\boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{R} = R_0 \cup R_1, \quad R_0 \cap R_1 = \emptyset, \quad \int_{\boldsymbol{R}} p(\boldsymbol{x}|H_j) d\boldsymbol{x} = 1$$

$$P(H_0|H_0) + P(H_1|H_0) = \int_{R_0} p(\boldsymbol{x}|H_0) d\boldsymbol{x} + \int_{R_1} p(\boldsymbol{x}|H_0) d\boldsymbol{x} = \int_{\boldsymbol{R}} p(\boldsymbol{x}|H_0) d\boldsymbol{x} = 1$$

$$P(H_0|H_1) + P(H_1|H_1) = \int_{R_0} p(\boldsymbol{x}|H_1) d\boldsymbol{x} + \int_{R_1} p(\boldsymbol{x}|H_1) d\boldsymbol{x} = \int_{\boldsymbol{R}} p(\boldsymbol{x}|H_1) d\boldsymbol{x} = 1$$

贝叶斯检测步骤

贝叶斯判决准则

$$\frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)(c_{10}-c_{00})}{P(H_1)(c_{01}-c_{11})} \Longrightarrow \lambda(x) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

利用贝叶斯判决准则进行检测的基本步骤:

1. 计算两个似然函数, 构建似然比 $\lambda(x) \overset{def}{=} \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)}$
2. 根据两个假设的先验概率和代价因子, 计算判决门限 $\eta \overset{def}{=} \frac{P(H_0)(c_{10}-c_{00})}{P(H_1)(c_{01}-c_{11})}$
3. 利用上式, 形成贝叶斯检测基本表达式 $\lambda(x) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$
4. 化简, 形成贝叶斯检测判决表达式。如对数似然比检验
$$\ln\lambda(x) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \ln\eta \Longrightarrow l(x) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \gamma$$

贝叶斯准则例题 2

考虑以下信号检测问题:

$$H_0 : x_k = n_{0k}, \qquad k = 1, 2, \ldots, N$$

$$H_1 : x_k = n_{1k}, \qquad k = 1, 2, \ldots, N$$

其中 n_{0k} 是均值为零, 方差为 σ_0^2 的高斯随机变量, n_{1k} 是均值为零, 方差为 σ_1^2 的高斯随机变量, 且不同采样时刻的加性噪声之间是相互统计独立的。

求: 请给出上述问题的贝叶斯检测准则。

贝叶斯准则例题 2: 解

解: N 次独立采样, 样本为 $x_k(k=1,2,\cdots,N)$:

$$\begin{aligned} H_0 : x_k &= n_{0k} \qquad & k=1,2,\cdots,N \\ H_1 : x_k &= n_{1k} \qquad & k=1,2,\cdots,N \end{aligned}$$

步骤 1: 计算两个似然函数, 构建似然比

由于 n 是高斯分布随机变量, 因此在 H_0 假设下, 第 k 次采样值 x_k 服从高斯分布, 且均值为 0, 方差为 σ_0^2; 在 H_1 假设下, 第 k 次采样值 x_k 服从均值为 0, 方差为 σ_1^2 的高斯分布。

$$p(x_k|H_0) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_0^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x_k^2}{2\sigma_0^2}\right) \Longrightarrow p(\boldsymbol{x}|H_0) = \prod_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{2\pi\sigma_0^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x_k^2}{2\sigma_0^2}\right)$$

$$p(x_k|H_1) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_1^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x_k^2}{2\sigma_1^2}\right) \Longrightarrow p(\boldsymbol{x}|H_1) = \prod_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{2\pi\sigma_1^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x_k^2}{2\sigma_1^2}\right)$$

$$\lambda(\boldsymbol{x}) = \frac{p(\boldsymbol{x}|H_1)}{p(\boldsymbol{x}|H_0)} = \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^N \exp\left(\left(\frac{1}{2\sigma_0} - \frac{1}{2\sigma_1}\right)\sum_{k=1}^{N} x_k^2\right)$$

贝叶斯准则例题 2: 解续 (1)

步骤 2: 根据两个假设的先验概率和代价因子, 计算判决门限

$$\eta \overset{def}{=} \frac{P(H_0)(c_{10} - c_{00})}{P(H_1)(c_{01} - c_{11})}$$

步骤 3: 形成贝叶斯检测基本表达式

$$\lambda(\boldsymbol{x}) = \frac{p(\boldsymbol{x}|H_1)}{p(\boldsymbol{x}|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

$$\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^N \exp\left(\left(\frac{1}{2\sigma_0} - \frac{1}{2\sigma_1}\right)\sum_{k=1}^{N} x_k^2\right) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

步骤 4: 化简, 形成贝叶斯检测判决表达式

$$\left(\frac{1}{2\sigma_0} - \frac{1}{2\sigma_1}\right)\sum_{k=1}^{N} x_k^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \ln\eta - N\ln\frac{\sigma_0}{\sigma_1} \implies \frac{\sigma_1^2 - \sigma_0^2}{2\sigma_1^2\sigma_0^2}\sum_{k=1}^{N} x_k^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \ln\eta - N\ln\frac{\sigma_0}{\sigma_1}$$

贝叶斯准则例题 2: 解续 (2)

步骤 4: 化简, 形成贝叶斯检测判决表达式

$$\frac{\sigma_1^2-\sigma_0^2}{2\sigma_1^2\sigma_0^2}\sum_{k=1}^{N}x_k^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \ln\eta - N\ln\frac{\sigma_0}{\sigma_1}$$

经过上述化简, 信号检测的判决式由似然比检验的形式, 简化为检验统计量 $l(x)$ 与检测门限 γ 相比较的形式, 形成贝叶斯检测判决表达式:

如果 $\sigma_1^2>\sigma_0^2$ $\quad l(\boldsymbol{x}) \overset{def}{=} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x_k \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{2\sigma_1^2\sigma_0^2}{\sigma_1^2-\sigma_0^2}\left(\frac{1}{N}\ln\eta-\ln\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right) \overset{def}{=} \gamma$

如果 $\sigma_1^2<\sigma_0^2$ $\quad l(\boldsymbol{x}) \overset{def}{=} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x_k \underset{H_1}{\overset{H_0}{\gtrless}} \frac{2\sigma_1^2\sigma_0^2}{\sigma_1^2-\sigma_0^2}\left(\frac{1}{N}\ln\eta-\ln\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right) \overset{def}{=} \gamma$

检验统计量 $l(x) \overset{def}{=} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x_k$ 是观测信号 $x_k(k=1,2,\ldots,N)$ 的求和取平均值的结果, 即它是 $x_k(k=1,2,\ldots,N)$ 的函数, 是一个随机变量。

两种假设下的观测量 $(l|H_0),(l|H_1)$ 也是服从高斯分布的随机变量。

贝叶斯检测性能分析

问题

问题 1: 贝叶斯检测准则是一种平均代价最小的判决准则,按照贝叶斯检测准则,能获得平均代价到底等于多少?

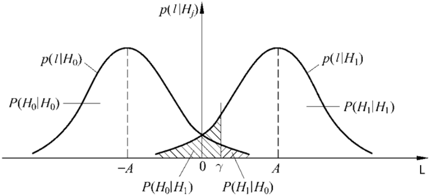
$$C = P(H_0)c_{00}P(H_0|H_0) + c_{10}P(H_1|H_0) + \\ P(H_1)c_{01}P(H_0|H_1) + c_{11}P(H_1|H_1)$$

问题 2: 利用贝叶斯检测准则进行检测,平均检测错误概率如何计算?

上述两个问题的关键在于,如何计算四种事件的检测概率?

正确判决概率 ↑: $P(H_1|H_1), P(H_0|H_0)$

错误判决概率 ↓: $P(H_0|H_1), P(H_1|H_0)$



判决概率的计算

$$\lambda(\boldsymbol{x}) = \frac{p(\boldsymbol{x}|H_1)}{p(\boldsymbol{x}|H_0)} \qquad \text{or} \qquad \lambda(\overline{\boldsymbol{x}}) = \frac{p(\overline{\boldsymbol{x}}|H_1)}{p(\overline{\boldsymbol{x}}|H_0)}$$

$$\Downarrow$$

$$\ln(\lambda(\boldsymbol{x})) = \ln\left(\frac{p(\boldsymbol{x}|H_1)}{p(\boldsymbol{x}|H_0)}\right) \qquad \text{or} \qquad \ln(\lambda(\overline{\boldsymbol{x}})) = \ln\left(\frac{p(\overline{\boldsymbol{x}}|H_1)}{p(\overline{\boldsymbol{x}}|H_0)}\right)$$

$$\Downarrow$$

最终统计量 $l(\boldsymbol{x})$ or $l(\overline{\boldsymbol{x}})$

根据最终的统计量来计算各种判决概率

判决概率的计算步骤

计算基本原则: 根据化简后的最简判决表达式进行计算。 计算步骤如下:

1. 推导贝叶斯检测准则的最简判决表达式。

$$l(\boldsymbol{x}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \gamma$$

2. 根据最简判决表达式, 计算各种假设下, 统计量的概率密度函数。

$$p(l|H_0) \qquad p(l|H_1)$$

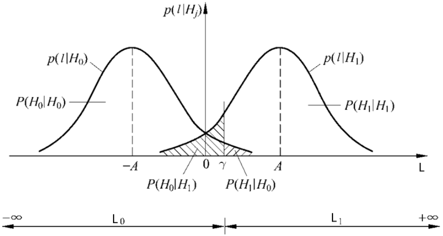
3. 计算判决概率

$$P(H_0|H_1) = \int_{-\infty}^{\gamma} p(l|H_1)dl$$

$$P(H_1|H_0) = \int_{\gamma}^{\infty} p(l|H_0)dl$$

$$P(H_1|H_1) = 1 - P(H_0|H_1)$$

$$P(H_0|H_0) = 1 - P(H_1|H_0)$$



贝叶斯准则例题 3

考虑以下信号检测问题:

$$
\begin{aligned}
H_0 &: x_k = n_k, & k &= 1, 2, \ldots, N \\
H_1 &: x_k = A + n_k, & k &= 1, 2, \ldots, N
\end{aligned}
$$

其中 n_k 是均值为零, 方差为 σ_n^2 的高斯随机变量, 且不同采样时刻的加性噪声之间是相互统计独立的。请

1. 请给出上述问题的贝叶斯检测准则。
2. 当 $N = 1$ 时, 计算判决概率 $P(H_1|H_1)$ 和 $P(H_1|H_0)$。
3. 当 $N > 1$ 时, 计算判决概率 $P(H_1|H_1)$ 和 $P(H_1|H_0)$。

贝叶斯准则例题 3: 解

解: N 次独立采样, 样本为 $x_k(k=1,2,\cdots,N)$:

$$
\begin{aligned}
H_0 &: x_k = n_k & k &= 1,2,\cdots,N \\
H_1 &: x_k = A + n_k & k &= 1,2,\cdots,N
\end{aligned}
$$

步骤 1: 计算两个似然函数, 构建似然比

由于 n 是高斯分布随机变量, 因此在 H_0 假设下, 第 k 次采样值 x_k 服从高斯分布, 且均值为 0, 方差为 σ_n^2; 在 H_1 假设下, 第 k 次采样值 x_k 服从均值为 A, 方差为 σ_n^2 的高斯分布。

$$
p(x_k|H_0) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x_k^2}{2\sigma_n^2}\right) \implies p(\boldsymbol{x}|H_0) = \prod_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x_k^2}{2\sigma_n^2}\right)
$$

$$
p(x_k|H_1) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{(x_k-A)^2}{2\sigma_n^2}\right) \implies p(\boldsymbol{x}|H_1) = \prod_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{(x_k-A)^2}{2\sigma_n^2}\right)
$$

$$
\lambda(\boldsymbol{x}) = \frac{p(\boldsymbol{x}|H_1)}{p(\boldsymbol{x}|H_0)} = \exp\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{N}(x_k^2 - (x_k - A)^2)}{2\sigma_n^2}\right)
$$

贝叶斯准则例题 3: 解续 (1)

步骤 2: 根据两个假设的先验概率和代价因子, 计算判决门限

$$\eta \overset{def}{=} \frac{P(H_0)(c_{10}-c_{00})}{P(H_1)(c_{01}-c_{11})}$$

步骤 3: 形成贝叶斯检测基本表达式

$$\lambda(\boldsymbol{x}) = \frac{p(\boldsymbol{x}|H_1)}{p(\boldsymbol{x}|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

$$\exp\left(\frac{\sum_{k=1}^{N}(x_k^2-(x_k-A)^2)}{2\sigma_n^2}\right) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

步骤 4: 化简, 形成贝叶斯检测判决表达式

$$-NA^2 + \sum_{k=1}^{N} 2Ax_k \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 2\sigma_n^2 \ln\eta \implies \sum_{k=1}^{N} x_k \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma_n^2\ln\eta}{A} + \frac{NA}{2}$$

$$l(\boldsymbol{x}) \overset{def}{=} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma_n^2\ln\eta}{NA} + \frac{A}{2} \overset{def}{=} \gamma$$

贝叶斯准则例题 3: 解续 (2)

经过上述化简, 信号检测的判决式由似然比检验的形式, 简化为检验统计量 $l(x)$ 与检测门限 γ 相比较的形式, 形成贝叶斯检测判决表达式:

$$l(\boldsymbol{x}) \overset{def}{=} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma_n^2 \ln \eta}{NA} + \frac{A}{2} \overset{def}{=} \gamma$$

检验统计量 $l(x) \overset{def}{=} \frac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N} x_k$ 是观测信号 $x_k(k=1,2,\ldots,N)$ 的求和取平均值的结果, 即它是 $x_k(k=1,2,\ldots,N)$ 的函数, 是一个随机变量。

因为高斯随机变量的线性组合还是高斯随机变量, 所以两种假设下的观测量 $(l|H_0), (l|H_1)$ 也是服从高斯分布的随机变量。

贝叶斯准则例题 3: 解续 (3)

N 次独立采样, 样本为 $x_k(k=1,2,\ldots,N)$

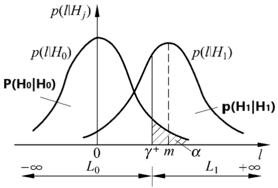
$$n_k \sim \mathcal{N}(0,\sigma_n^2)$$

$$H_0: x_k = n_k \qquad (l|H_0) \sim \mathcal{N}(0, \frac{\sigma_n^2}{N})$$

$$H_1: x_k = A + n_k \qquad (l|H_1) \sim \mathcal{N}(A, \frac{\sigma_n^2}{N})$$

贝叶斯检测判决表达式:

$$l(\boldsymbol{x}) \overset{def}{=} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma_n^2 \ln\eta}{NA} + \frac{A}{2} \overset{def}{=} \gamma$$



$p(l|H_j)(j=0,1)$: 假设 H_j 下观测信号的概率密度函数; $r^+ = \frac{\sigma^2 \ln\eta}{Nm} + \frac{m}{2}$; $\alpha = P(H_1|H_0)$

贝叶斯准则例题 3: 性能分析—观测量 $(l|H_0)$

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x_k \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma_n^2\ln\eta}{NA}+\frac{A}{2}\overset{def}{=}\gamma \qquad \textbf{统计量:}\ l(\boldsymbol{x})\overset{def}{=}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x_k$$

假设 H_0 条件下, 统计量 $l(x)$ 为高斯分布, 均值和方差分别为

$$E[l|H_0]=E\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k|H_0)\right]=E\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}n_k\right]=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}E[n_k]=0$$

$$Var[l|H_0]=E\left[(l|H_0-E(l|H_0))^2\right]=E\left[\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}n_k\right)^2\right]$$

$$=\frac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{N}E[n_k^2]=\frac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{N}\sigma_n^2=\frac{\sigma_n^2}{N}$$

因此, $(l|H_0)\sim\mathcal{N}(0,\frac{\sigma_n^2}{N})$

$$p(l|H_0)=\left(\frac{1}{2\pi Var[l|H_0]}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{(l-E[l|H_0])^2}{2Var[l|H_0]}\right)=\left(\frac{N}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{Nl^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

贝叶斯准则例题 3: 性能分析—观测量 $(l|H_0)$

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k \overset{H_1}{\underset{H_0}{\gtrless}} \frac{\sigma_n^2 \ln\eta}{NA} + \frac{A}{2} \overset{def}{=} \gamma \qquad \textbf{统计量:}\ l(\boldsymbol{x}) \overset{def}{=} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k$$

$$p(l|H_0) = \left(\frac{N}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{Nl^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

$$P(H_1|H_0) = \int_{\gamma}^{\infty} p(l|H_0)dl \implies Q(u) = \int_{x}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

$$= \int_{\gamma}^{\infty} \left(\frac{N}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{Nl^2}{2\sigma_n^2}\right) dl \qquad \text{by } l = \frac{\sigma_n u}{\sqrt{N}}$$

$$= \int_{\frac{\sqrt{N}\gamma}{\sigma_n}}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

$$= Q\left(\frac{\sqrt{N}\gamma}{\sigma_n}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{N}\left(\frac{\sigma_n^2 \ln\eta}{NA} + \frac{A}{2}\right)}{\sigma_n}\right)$$

贝叶斯准则例题 3: 性能分析—观测量 $(l|H_0)$

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k \mathop{\gtrless}_{H_0}^{H_1} \frac{\sigma_n^2 \ln\eta}{NA} + \frac{A}{2} \stackrel{def}{=} \gamma \qquad \textbf{统计量:}\ l(\boldsymbol{x}) \stackrel{def}{=} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k$$

$$\begin{aligned} P(H_1|H_0) &= Q\left(\frac{\sqrt{N}\left(\frac{\sigma_n^2 \ln\eta}{NA} + \frac{A}{2}\right)}{\sigma_n}\right) \\ &= Q\left(\frac{\sigma_n \ln\eta}{\sqrt{NA}} + \frac{\sqrt{N}A}{2\sigma_n}\right) \qquad \text{by } d^2 = \frac{NA^2}{\sigma_n^2} \\ &= Q\left(\frac{\ln\eta}{d} + \frac{d}{2}\right) \end{aligned}$$

贝叶斯准则例题 3: 性能分析—观测量 $(l|H_1)$

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma_n^2 \ln \eta}{NA} + \frac{A}{2} \overset{def}{=} \gamma \qquad \textbf{统计量: } l(\mathbf{x}) \overset{def}{=} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k$$

假设 H_1 条件下, 统计量 $l(x)$ 为高斯分布, 均值和方差分别为

$$E[l|H_1] = E\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k|H_1)\right] = E\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(A+n_k)\right] = A + \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}E[n_k] = A$$

$$Var[l|H_1] = E\left[(l|H_1 - E(l|H_1))^2\right] = E\left[\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(A+n_k) - A\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{N}E[n_k^2] = \frac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{N}\sigma_n^2 = \frac{\sigma_n^2}{N}$$

因此, $(l|H_1) \sim \mathcal{N}(A, \frac{\sigma_n^2}{N})$

$$p(l|H_1) = \left(\frac{1}{2\pi Var[l|H_1]}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{(l-E[l|H_1])^2}{2Var[l|H_1]}\right) = \left(\frac{N}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{N(l-A)^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

贝叶斯准则例题 3: 性能分析—观测量 $(l|H_1)$

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x_k \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma_n^2\ln\eta}{NA}+\frac{A}{2}\overset{def}{=}\gamma \qquad \textbf{统计量:}\ l(\boldsymbol{x})\overset{def}{=}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x_k$$

$$p(l|H_1)=\left(\frac{N}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{N(l-A)^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

$$P(H_1|H_1)=\int_\gamma^\infty p(l|H_1)dl \implies Q(u)=\int_x^\infty\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)du$$

$$=\int_\gamma^\infty\left(\frac{N}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{N(l-A)^2}{2\sigma_n^2}\right)dl \qquad \text{by } l=\frac{\sigma_n u}{\sqrt{N}}+A$$

$$=\int_{\frac{\sqrt{N}(\gamma-A)}{\sigma_n}}^\infty\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)du$$

$$=Q\left(\frac{\sqrt{N}(\gamma-A)}{\sigma_n}\right)=Q\left(\frac{\sqrt{N}\left(\frac{\sigma_n^2\ln\eta}{NA}-\frac{A}{2}\right)}{\sigma_n}\right)$$

贝叶斯准则例题 3: 性能分析—观测量 $(l|H_1)$

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma_n^2 \ln\eta}{NA} + \frac{A}{2} \overset{def}{=} \gamma \qquad \textbf{统计量: } l(\boldsymbol{x}) \overset{def}{=} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k$$

$$\begin{aligned} P(H_1|H_1) &= Q\left(\frac{\sqrt{N}\left(\frac{\sigma_n^2\ln\eta}{NA} - \frac{A}{2}\right)}{\sigma_n}\right) \\ &= Q\left(\frac{\sigma_n \ln\eta}{\sqrt{NA}} - \frac{\sqrt{NA}}{2\sigma_n}\right) \qquad \text{by } d^2 = \frac{NA^2}{\sigma_n^2} \\ &= Q\left(\frac{\ln\eta}{d} - \frac{d}{2}\right) \end{aligned}$$

贝叶斯准则例题 3(小结 1)

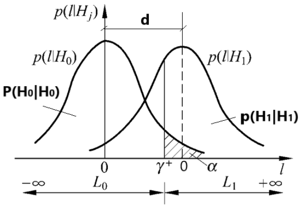
N 次独立采样, 样本为 $x_k(k=1,2,\ldots,N)$

$$n_k \sim \mathcal{N}(0,\sigma_n^2)$$

$$H_0: x_k = n_k \qquad (l|H_0) \sim \mathcal{N}(0,\frac{\sigma_n^2}{N})$$

$$H_1: x_k = A + n_k \qquad (l|H_1) \sim \mathcal{N}(A,\frac{\sigma_n^2}{N})$$

检验统计量 $l(\boldsymbol{x})$, 归一化后, $(l|H_j) \sim \mathcal{N}(0,1)$



$p(l|H_j)(j=0,1)$: 假设 H_j 下观测信号的概率密度函数; $r^+ = \frac{\ln\eta}{d} + \frac{d}{2}$; $\alpha = P(H_1|H_0)$

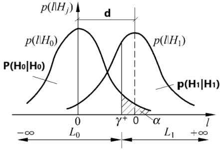
判决表达式: $$l(\boldsymbol{x}) \overset{def}{=} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k \mathop{\gtrless}_{H_0}^{H_1} \frac{\sigma^2 \ln\eta}{NA} + \frac{A}{2} \overset{def}{=} \gamma$$

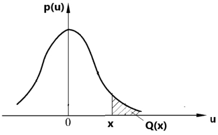
判决概率: (式中, 信噪比 $d^2 = \frac{NA^2}{\sigma^2}$)

$$P(H_1|H_0) = Q\left(\frac{\ln\eta}{d} + \frac{d}{2}\right), \qquad P(H_0|H_0) = 1 - Q\left(\frac{\ln\eta}{d} + \frac{d}{2}\right)$$

$$P(H_1|H_1) = Q\left(\frac{\ln\eta}{d} - \frac{d}{2}\right), \qquad P(H_0|H_1) = 1 - Q\left(\frac{\ln\eta}{d} - \frac{d}{2}\right)$$

贝叶斯准则例题 3(小结 2)





$p(l|H_j)(j=0,1)$: 假设 H_j 下观测信号的概率密度函数; $r^+ = \frac{\ln\eta}{d} + \frac{d}{2}$; $\alpha = P(H_1|H_0)$

$Q(x) = \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{u^2}{2})du.$
$Q(x)$ 是单调递减函数, 其反函数: $Q^{-1}[\bullet]$

因为 $P(H_1|H_0) = Q(\ln\eta/d + d/2) \implies \ln\eta/d = Q^{-1}[P(H_1|H_0)] - d/2$

这样有:

$$\begin{aligned} P(H_1|H_1) &= Q\left(\ln\eta/d - d/2\right) \\ &= Q[Q^{-1}[P(H_1|H_0)] - d/2 - d/2] = Q[Q^{-1}[P(H_1|H_0)] - d] \end{aligned}$$

这说明, 当给定 $P(H_1|H_0)$ 时, $P(H_1|H_1)$ 随功率信噪比 $(d^2 = NA^2/\sigma^2)$ 单调增加。

另一方面, 采样次数 $N\uparrow \implies d\uparrow, p(l|H_0), p(l|H_1)$ 的间距 $d\uparrow$, 检测性能 $\uparrow$。

欢迎批评指正！