



## 随机过程

- 1 随机过程的定义
- 2 随机过程的统计描述
- 3 随机过程的平稳性
- 4 随机过程的正交性、不相关性和统计独立性
- 5 平稳随机过程的功率谱密度
- 6 高斯噪声、白噪声、高斯白噪声和有色噪声

## 随机过程引例 (1)

## Example

考察  $[0, t_0]$  时间内某网站收到的访问次数  $X(t_0)$ ,  $X(t_0)$  则是一个随机变量。

- 如果要长时间内该网站的访问次数,则需要让  $t$  变化起来,即  $t$  趋于无穷大,则  $X(t)$  是一簇随机变量.
- 此时  $X(t)$  是与时间有关系的随机变量,称  $\{X(t), t \in [0, \infty]\}$  是随机过程.

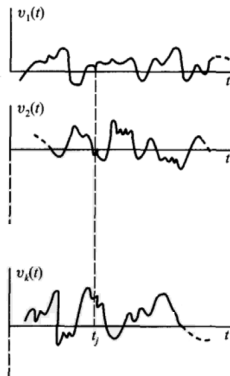


# 随机过程引例 (3)

## Example

每次热噪声电压测量结果：固定  $t$  时刻电压，对应一个随机变量  $v(t)$ ；

无限个  $t$ ，则无限个电压—时间的函数族构成一随机过程。



# 随机过程引例 (4)

## Example

生物群体的增长问题. 以  $X_t$  表示在时刻  $t$  某种生物群体的个数, 则对每一个固定的  $t$ ,  $X_t$  是一个随机变量。

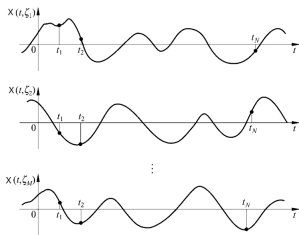
- 如果从  $t = 0$  开始, 每隔 24 小时对群体的个数观察一次, 则对每一个  $t$ ,  $X_t$  是一簇随机变量。记为  $X_n, n = 0, 1, \dots$
- 若要观察任一时刻  $t$  的波形, 则需要用一族随机变量  $X(t)$  描述。
- 称  $\{X_t, t = 0, 1, 2, \dots\}$  是随机过程。

# 随机过程引例特点

以上例子的共同特点—随机现象在时间上的延展  $\Rightarrow$  随机过程

$\{X(t, \xi), t \in T, \xi \in \Omega\}$

- 给定一个  $t$ , 就有一个随机变量  $X(t)$  与之对应。
- 概率论主要是以一个或有限个随机变量为研究对象的。
- 随机过程是概率论的“动力学”部分, 研究对象为随时间演变的随机现象, 通常会有无穷多个随机变量。



$$X(t_1) = \{X(t_1, \xi_1), X(t_1, \xi_2), \dots, X(t_1, \xi_M)\}$$

$$X(t_2) = \{X(t_2, \xi_1), X(t_2, \xi_2), \dots, X(t_2, \xi_M)\}$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$X(t_N) = \{X(t_N, \xi_1), X(t_N, \xi_2), \dots, X(t_N, \xi_M)\}$$

$M$  次试验, 每次进行  $N$  次采样,  $N$  个随机变量  $X_t$ 。





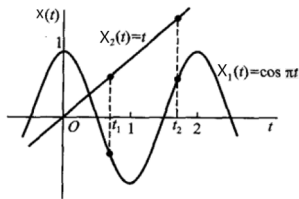


## Example (随机过程示例)

抛掷硬币的试验, 样本空间  $\Omega = \{H, T\}$ , 定义

$$X(t) = \begin{cases} \cos \pi t, & \text{当出现 } H \\ t, & \text{当出现 } T \end{cases}, t \in (-\infty, \infty)$$

其中  $P(H) = P(T) = 1/2$ , 则  $\{X(t), t \in (-\infty, +\infty)\}$  是一随机过程。试考察其样本函数和状态空间。



样本函数:  $X(\bullet, \xi) = \{\cos \pi t, t\}, \xi \in \Omega$

状态空间:  $S = \{\cos \pi t_0, t_0\}, \forall t_0 \in (-\infty, +\infty)$

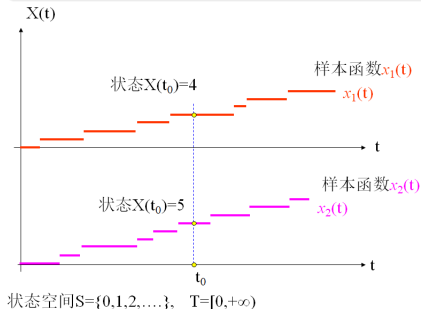
每次试验的结果是下列事件集合之一:

$$\{(H, T), (T, H), (H, H), (T, T)\}$$

## Example

考察  $[0, t_0]$  时间内某网站收到的访问次数  $X(t_0)$ ,  $X(t_0)$  则是一个随机变量。

- 如果要长时间内该网站的访问次数, 则需要让  $t$  变化起来, 即  $t$  趋于无穷大, 则  $X(t)$  是一簇随机变量.
- 此时  $X(t)$  是与时间有关系的随机变量, 称  $\{X(t), t \in [0, \infty)\}$  是随机过程。





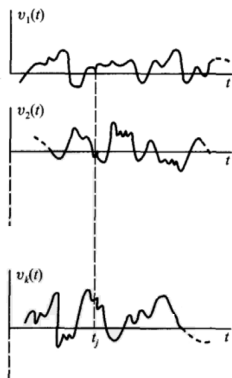
每次热噪声电压测量结果: 固定  $t$  时刻电压, 对应一个随机变量  $v(t)$ ;

无限个  $t$ , 则无限个电压—时间的函数族  $\{v(t), t \in [0, \infty)\}$  构成一随机过程。

对某种装置做一次试验,便得到一个电压—时间函数  $v_1(t)$ 。这个电压—时间函数是不可能预先确知的,只有通过测量才能得到,如果在相同的条件下独立地再进行一次测量,则得到的记录是不同的。

样本函数:  $X(\bullet, \xi) = \{v_k(t)\}, k = 1, 2, \dots, \xi \in \Omega$

状态空间:  $S = \{v_k(t_0)\}, k = 1, 2, \dots, \forall t_0 \in (-\infty, +\infty)$





设随机相位正弦信号  $s(t; \theta) = a \cos(\omega_0 t + \theta)$ , 其中振幅  $a$  和  $\omega_0$  为常数, 相位  $\theta$  是一随机变量, 它服从  $[-\pi, \pi]$  上的均匀分布。写出  $s(t; \theta)$  的样本函数。

解:

当  $\theta$  在  $[-\pi, \pi]$  内任取定值时, 如

当  $\theta = 0$ , 则样本函数为

$$s_1(t; \theta = 0) = a \cos \omega_0 t$$

当  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , 则样本函数为

$$s_2(t; \theta = \frac{\pi}{2}) = a \cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}) = -a \sin \omega_0 t$$







## N 维联合概率密度函数

### 推广至 N 维随机矢量的情况

## 随机过程的 N 维累积分布函数

$$F(x_1, x_2, \dots, x_N; t_1, t_2, \dots, t_N) = \\ P\{X(t_1, \xi) \leq x_1, X(t_2, \xi) \leq x_2, \dots, X(t_N, \xi) \leq x_N\}, \\ x_1, x_2, \dots, x_N \in \mathbb{R}, t_1, t_2, \dots, t_N \in T$$

## 随机过程的 N 维联合概率密度函数

$$p(x_1, x_2, \dots, x_N; t_1, t_2, \dots, t_N) = \frac{\partial^N F(x_1, x_2, \dots, x_N; t_1, t_2, \dots, t_N)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_N}$$

## 一维雅可比变换法

设一维随机变量为  $X(\xi)$ , 它的概率密度函数为  $p_x(x)$  已知, 若  $X(\xi)$  的一个函数为

$$Y(\xi) = g(X(\xi))$$

该函数也是一维随机变量。若它的反函数存在, 即有

$$X(\xi) = h(Y(\xi))$$

且连续可导, 则  $Y(\xi)$  的概率密度函数为

$$p_y(y) = p_x[x = h(y)]|J|$$

这种变换称为**一维雅可比变换**,其中雅可比  $J = \frac{dh(Y)}{dY}$ ,  $|\bullet|$  是绝对值符号。

## Notes

$Y(\xi)$  的概率密度函数  $p_y(y)$  可以通过它的反函数  $X(\xi)$  的概率密度函数  $p_x(x)$  与雅可比的乘积得到。

设随机过程  $X(t) = V \cos \omega t, t \in (-\infty, +\infty)$ , 其中  $\omega$  为常数,  $V$  服从  $[0, 1]$  上的均匀分布。

- ① 确定  $\{X(t), t \in (-\infty, +\infty)\}$  的两个样本函数。
- ② 求  $t = 0, t = 3\pi/4\omega$  时, 随机变量  $X(t)$  的概率密度函数。
- ③ 求  $t = \pi/2\omega$  时,  $X(t)$  的分布函数。

设随机过程  $X(t) = V \cos \omega t, t \in (-\infty, +\infty)$ , 其中  $\omega$  为常数,  $V$  服从  $[0, 1]$  上的均匀分布。

解:

- ①  $V \sim U(0, 1)$ , 取  $V = 1/2, 1/3$  分别得到两个样本函数

$$X_1(t) = \frac{1}{2} \cos \omega t, \quad X_2(t) = \frac{1}{3} \cos \omega t$$

- ②  $t = 0$  时,  $X(t) = V \cos \omega 0 = V$ , 而  $V$  为  $[0, 1]$  上的均匀分布, 则

$$p(x; t = 0) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

解(续):

② (续) 当  $t = \frac{3\pi}{4\omega}$  时,  $X(t) = V \cos \omega \frac{3\pi}{4\omega} = -\frac{\sqrt{2}}{2}V$

由于函数  $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}V$  的反函数为  $V = h(x) = -\sqrt{2}x$ , 其导数为  $h'(x) = -\sqrt{2}$ , 则利用一维雅可比变换公式, 求得

$$\begin{aligned} p(x, t = \frac{3\pi}{4\omega}) &= \begin{cases} p_V(h(x))|h'(x)| & 0 \leq h(x) \leq 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sqrt{2} & 0 \leq -\sqrt{2}x \leq 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \end{aligned}$$

解(续):

③  $t = \frac{\pi}{2\omega}$  时,  $X(t) = V \cos \omega \frac{\pi}{2\omega} = 0$ , 此时  $X(t = \frac{\pi}{2\omega})$  是单点分布, 则

$$F(x, t = \frac{\pi}{2\omega}) = P\{X(t) \leq x\}$$

$$= \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$





## Example (解)

因为脉冲的重复周期为  $T$ , 所以只需求出一个周期的概率密度函数。

在一个周期内, 随机信号为

$$X(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t \leq \tau \\ 0, & \tau < t \leq T \end{cases}$$

$X(t)$  的分布函数为

$$F(x; t) = P\{X(t) \leq x\} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{t}{T}, & 0 \leq x < A \\ 1, & x \geq A \end{cases}$$

所以, 它的一维概率密度函数为:

$$p(x; t) = \frac{t}{T}\delta(x) + (1 - \frac{t}{T})\delta(x - A)$$

由  $\delta$  函数性质, 当  $x = 0$  时,  $\delta(x) = \infty$ ; 其它,  $\delta(x) = 0$ . 并且  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$

可以验证以上分布函数的正确性.  $F(x; t) = P\{X(t) \leq x\} = \int_{-\infty}^x p(u)du$

连续函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  的均值:

$$\bar{y} = \frac{1}{b-a} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \Delta x = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

交流电  $I(t) = I_m \sin \omega t$ , 其平均值表示它的直流分量:  $\bar{I} = \frac{1}{T} \int_0^T I(t) dt$

电压  $U(t) = iR = I_m R \sin \omega t$ , 其平均值表示它的直流分量:  $\bar{U} = \frac{1}{T} \int_0^T U(t) dt$

功率  $p = U(t)I(t) = I_m^2 R \sin^2 \omega t$

此功率在长度为一个周期的区间  $[0, \frac{2\pi}{\omega}]$  上的平均值:

$$\bar{p} = \frac{1}{\frac{2\pi}{\omega}} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} I_m^2 R \sin^2 \omega t dt = \frac{I_m^2 R}{2} = \frac{I_m U_m}{2}, (U_m = I_m R)$$

$I_m, U_m$  为交流电电流、电压的最大值,  $\omega$  为交流电的角频率。

以下用记号  $\{x(t), t \in T\}$  表示随机过程, 固定  $t \in T$ ,  $x(t)$  是一随机变量。

随机过程的均值  $\mu_x(t)$ : 表示随机过程在  $t$  时刻状态取值的理论平均值

$$\mu_x(t) \stackrel{\text{def}}{=} E[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x; t)dx$$

如果  $x(t)$  是电压或电流, 则  $\mu_x(t)$  可以理解为在  $t$  时刻的“直流分量”。

随机过程  $x(t)$  的均值又称作数学期望 (Expectation)。 $\mu_x(t)$  是随机过程的所有样本函数在时刻  $t$  的函数值的统计平均值。 $\mu_x(t)$  表示了随机过程  $x(t)$  在各个时刻的摆动中心。

## Notes

- 如果  $y(t) = g(x(t))$ , 则  $\mu_y(t) = E[g(x(t))] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)p_x(x)dx$
- 均值的线性特性:  $y(t) = ax(t) + b$ ,  $a, b$  为常数, 则  

$$\mu_y(t) = E[y(t)] = E[ax(t) + b] = aE[x(t)] + b = a\mu_x(t) + b$$

## 随机过程的均方值 $\varphi_x^2(t)$

$$\varphi_x^2(t) \stackrel{\text{def}}{=} E[x^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x; t) dx$$

如果  $x(t)$  是电压或电流, 则  $\varphi_x^2(t)$  可以理解在  $t$  时刻它在  $1\Omega$  电阻上消耗的“平均功率”。

## 随机过程的方差/标准偏差 $\delta_x^2(t)$

$$\sigma_x^2(t) \stackrel{\text{def}}{=} E[(x(t) - \mu_x(t))^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x(t))^2 p(x; t) dx$$

方差  $\sigma_x^2(t)$  表示随机过程在  $t$  时刻取其值**偏离其均值**  $\mu_x(t)$  的离散程度。

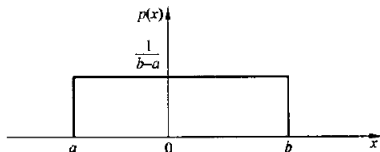
如果  $x(t)$  是电压或电流,  $\delta_x^2(t)$  表示在  $t$  时刻它在  $1\Omega$  电阻上消耗的“交流功率”。

随机过程  $x(t)$  的方差 (Variance) 有时用  $\text{Var}[x(t)]$  表示。

# 均匀分布随机变量 $x$ 的均值 $\mu_x$ 和方差 $\sigma_x^2$

## Example

求如图均匀分布随机变量  $x$  的均值  $\mu_x$  和方差  $\sigma_x^2$ 。



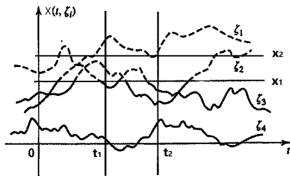


## 随机过程的自相关函数 $r_x(t_j, t_k)$

$$\begin{aligned} r_x(t_j, t_k) &\stackrel{\text{def}}{=} E[x(t_j)x(t_k)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_j x_k p(x_j, x_k; t_j, t_k) dx_j dx_k \end{aligned}$$

随机过程的自相关函数  $r_x(t_j, t_k)$  可以理解为它的两个随机变量  $x(t_j)$  与  $x(t_k)$  之间含有均值时的相关程度的度量。显然

$$r_x(t, t) = \varphi_x^2(t)$$



## Example

设随机过程  $x(t)$  的均值为  $\mu_x(t)$ , 自相关函数为  $r_x(t_j, t_k)$ 。若有随机过程  $y(t) = a(t)x(t) + b(t)$ , 其中  $a(t), b(t)$  是确知函数。求随机过程  $y(t)$  的均值和自相关函数。



解：

由均值定义  $E[x(\xi)] \stackrel{\text{def}}{=} \mu_x = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$  知：

确知函数  $a(t)$  的均值：

$$E[a(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} a(t)p(x)dx$$

$$= a(t) \int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx$$

$$= a(t) \cdot 1$$

$$= a(t)$$

by 确知函数  $a(t)$  看作常数

$$\text{by } \int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$$

结论：确知函数  $a(t)$  的均值  $E[a(t)] = a(t)$

解 (续): 随机过程  $y(t)$  的均值为:

$$\begin{aligned}\mu_y &= E[y(t)] = E[a(t)x(t) + b(t)] = E[a(t)x(t)] + E[b(t)] \\ &= a(t)E[x(t)] + b(t) = a(t)\mu_x + b(t)\end{aligned}$$

随机过程  $y(t)$  的自相关函数为:

$$\begin{aligned}r_y(t_j, t_k) &= E[y(t_j)y(t_k)] \\ &= E[(a(t_j)x(t_j) + b(t_j))(a(t_k)x(t_k) + b(t_k))] \\ &= a(t_j)a(t_k)E[x(t_j)x(t_k)] + a(t_j)b(t_k)E[x(t_j)] \\ &\quad + b(t_j)a(t_k)E[x(t_k)] + b(t_j)b(t_k) \\ &= a(t_j)a(t_k)r_x(t_j, t_k) + a(t_j)b(t_k)\mu_x(t_j) + b(t_j)a(t_k)\mu_x(t_k) + b(t_j)b(t_k)\end{aligned}$$

其中:  $r_x(t_j, t_k) = E[x(t_j)x(t_k)]$ ,  $\mu_x(t_j) = E[x(t_j)]$ ,  $\mu_x(t_k) = E[x(t_k)]$

## Example

设随机相位正弦信号  $s(t; \theta) = a \cos(\omega_0 t + \theta)$ , 其中振幅  $a$  和  $\omega_0$  为常数, 相位  $\theta$  是一随机变量, 它服从  $[-\pi, \pi]$  上的均匀分布。

- ① 求该随机过程的均值  $E[s(t; \theta)]$ ;
- ② 求该随机过程的自相关函数  $E[s(t_j; \theta)s(t_k; \theta)]$ 。

解:

① 因为相位  $\theta \sim U(-\pi, \pi)$ , 所以,

$$p(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & -\pi \leq \theta \leq \pi \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

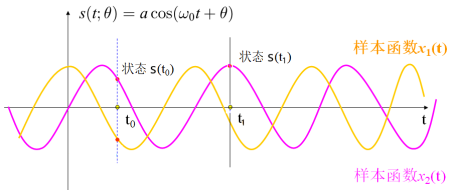
该随机过程的均值为:

$$\begin{aligned}\mu_x(t) &= E[s(t; \theta)] = E[a \cos(\omega_0 t + \theta)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} a \cos(\omega_0 t + \theta) p(\theta) d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} a \cos(\omega_0 t + \theta) \frac{1}{2\pi} d\theta \\ &= \frac{a}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega_0 t + \theta) d\theta \\ &= 0\end{aligned}$$

解 (续): <sup>1</sup>

② 该随机过程的自相关函数为:

$$\begin{aligned} r_x(t_j, t_k) &= E[s(t_j)s(t_k)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} a \cos(\omega_0 t_j + \theta) a \cos(\omega_0 t_k + \theta) p(\theta) d\theta \\ &= \frac{a^2}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(\omega_0 t_j + \omega_0 t_k + 2\theta) + \cos \omega_0(t_k - t_j)] d\theta \\ &= \frac{a^2}{2} \cos \omega_0 \tau, \quad (\tau = t_k - t_j) \end{aligned}$$



由于  $a, \omega_0$  为常数, 因此  $r_x(t_j, t_k)$  仅与采样间隔  $\tau = t_j - t_k$  有关, 与  $\theta$  无关。 $\tau = 0$  时, 自相关函数值达到最大  $\frac{a^2}{2}$ 。

$$^1\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A + B) + \cos(A - B)]$$

## 随机过程的自协方差函数 $c_x(t_j, t_k)$

$$\begin{aligned} c_x(t_j, t_k) &\stackrel{\text{def}}{=} E[(x(t_j) - \mu_x(t_j))(x(t_k) - \mu_x(t_k))] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_j - \mu_x(t_j))(x_k - \mu_x(t_k))p(x_j, x_k; t_j, t_k)dx_j dx_k \end{aligned}$$

随机过程的自协方差函数  $c_x(t_j, t_k)$  可以理解为它的两个随机变量  $x(t_j)$  与  $x(t_k)$  之间的相关程度的度量。

而随机过程的自相关函数  $r_x(t_j, t_k)$  可以理解为它的两个随机变量  $x(t_j)$  与  $x(t_k)$  之间**含有均值**时的相关程度的度量。

它们的自相关系数定义为

$$\rho_x(t_j, t_k) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c_x(t_j, t_k)}{\sigma_x(t_j)\sigma_x(t_k)}$$

易证

$$c_x(t_j, t_k) = r_x(t_j, t_k) - \mu_x(t_j)\mu_x(t_k), \quad c_x(t, t) = \sigma_x^2(t)$$

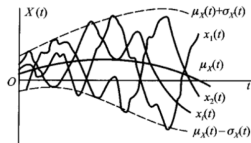
# 随机过程的统计平均量之间的关系

- 随机过程的均值  $\mu_x(t)$ : 是随机过程的**所有样本函数**在时刻  $t$  的函数值的统计平均值。  
 $\mu_x(t)$  表示了随机过程  $x(t)$  在各个时刻的摆动中心。
- 方差  $\sigma_x^2(t)$  表示随机过程在  $t$  时刻取其值**偏离其均值**  $\mu_x(t)$  的离散程度。
- 随机过程的自相关函数  $r_x(t_j, t_k)$  可以理解为它的两个随机变量  $x(t_j)$  与  $x(t_k)$  之间**含有均值**时的相关程度的度量。
- 随机过程的自协方差函数  $c_x(t_j, t_k)$  可以理解为它的两个随机变量  $x(t_j)$  与  $x(t_k)$  之间的相关程度的度量。

$$c_x(t_j, t_k) = r_x(t_j, t_k) - \mu_x(t_j)\mu_x(t_k), \quad c_x(t, t) = \sigma_x^2(t)$$

均值  $\mu_x(t)$ , 均方值  $\varphi_x^2(t)$ , 方差  $\delta_x^2(t)$  之间的关系:

$$\sigma_x^2(t) = \varphi_x^2(t) - \mu_x^2(t)$$



## 随机过程的互相关函数 $r_{xy}(t_j, t_k)$

对于两个随机过程  $x(t)$  和  $y(t)$ , 其互相关函数定义为

$$\begin{aligned} r_{xy}(t_j, t_k) &\stackrel{\text{def}}{=} E[x(t_j)y(t_k)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_j y_k p(x_j, t_j; y_k, t_k) dx_j dy_k \end{aligned}$$

式中,  $p(x_j, t_j; y_k, t_k)$  是  $x(t)$  与  $y(t)$  的二维混合概率密度函数。



## 随机过程的互协方差函数 $c_{xy}(t_j, t_k)$

$$\begin{aligned} c_{xy}(t_j, t_k) &\stackrel{\text{def}}{=} E[(x(t_j) - \mu_x(t_j))(y(t_k) - \mu_y(t_k))] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_j - \mu_x(t_j))(y_k - \mu_y(t_k))p(x_j, t_j; x_k, t_k)dx_jdy_k \end{aligned}$$

随机过程  $x(t)$  和  $y(t)$  的互协方差函数  $c_{xy}(t_j, t_k)$  可以理解为它们各自的随机变量  $x(t_j)$  与  $y(t_k)$  之间的相关程度, 实际上表示两个随机过程  $x(t)$  与  $y(t)$  之间的相关程度。它们的互相关系数定义为

$$\rho_{xy}(t_j, t_k) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c_{xy}(t_j, t_k)}{\sigma_x(t_j)\sigma_y(t_k)}$$

易证

$$c_{xy}(t_j, t_k) = r_{xy}(t_j, t_k) - \mu_x(t_j)\mu_y(t_k)$$

### Definition (广义平稳随机过程, 简称平稳随机过程)

随机过程  $x(t)$  的平均统计量满足

- ①  $x(t)$  的均值是与时间  $t$  无关的常数, 即

$$E[x(t)] = \mu_x$$

- ②  $x(t)$  的自相关函数只取决于时间间隔  $\tau = t_k - t_j$ , 而与时间的起始时刻无关, 即

$$E[x(t_j)x(t_k)] = E[x(t_j)x(t_j + \tau)] = r_x(\tau)$$

平稳随机过程  $x(t)$  自相关函数  $r_x(t_k - t_j)$  仅取决于时间间隔  $(t_k - t_j)$ , 而与时间的起始时刻无关。  $E[x(t_j)x(t_k)] = r_x[t_k - t_j]$

# 平稳随机过程的统计平均量之间的关系

平稳随机过程  $x(t)$  的均值  $\mu_x$ , 均方值  $\varphi_x^2$ , 方差  $\sigma_x^2$ , 自相关函数  $r_x(\tau)$ , 自协方差函数  $c_x(\tau)$  之间的关系

$$\sigma_x^2 = \varphi_x^2 - \mu_x^2$$

$$r_x(\tau) = r_x(-\tau)$$

$$c_x(\tau) = r_x(\tau) - \mu_x^2$$

$$c_x(\tau) = c_x(-\tau)$$

$$\varphi_x^2 = r_x(\mathbf{0})$$

$$\sigma_x^2 = c_x(0)$$

$$r_x(0) \geq |r_x(\tau)|, \tau \neq 0$$

$$c_x(0) \geq |c_x(\tau)|, \tau \neq 0$$

假定平稳随机过程  $x(t)$  是周期的, 周期为  $T$ , 即

证明其自相关函数  $r_x(\tau)$  也是以  $T$  为周期的, 即

Proof.

因为

$$\begin{aligned} r_x(\tau) &= E[x(t)x(t+\tau)] \\ &= E[x(t)x(t+\tau+T)] && \text{by } x(t+\tau) = x(t+\tau+T) \\ &= r_x(\tau+T) \end{aligned}$$

所以, 自相关函数  $r_x(\tau)$  也是以  $T$  为周期的。

### Definition (联合平稳随机过程)

设  $x(t)$  和  $y(t)$  分别是两个平稳的随机过程, 如果对于任意的  $\Delta t$ , 有

$r_{xy}(t_j + \Delta t, t_k + \Delta t) = r_{xy}(t_j, t_k)$ , 即互相关函数  $r_{xy}(t_j, t_k) = r_{xy}(\tau)$ , ( $\tau = t_k - t_j$ ) 仅与时间间隔  $\tau$  有关, 而与  $t_j$  和  $t_k$  无关, 则称过程  $x(t)$  与  $y(t)$  是联合平稳的随机过程。

### 联合平稳随机过程 $x(t)$ 与 $y(t)$ 的互协方差函数

$$c_{xy}(t_j, t_k) = c_{xy}(\tau) = r_{xy}(\tau) - \mu_x \mu_y, \tau = t_k - t_j$$

互相关系数:

$$\rho_{xy}(\tau) \stackrel{def}{=} \frac{c_{xy}(t_j, t_k)}{\sigma_x(t_j)\sigma_y(t_k)} = \frac{c_{xy}(\tau)}{\sigma_x\sigma_y}$$

$$r_{xv}(\tau) = r_{vx}(-\tau)$$

$$c_{xy}(\tau) = c_{yx}(-\tau)$$



## 平稳随机过程 $x(t)$ 的正交性与互相关性

## Definition

如果  $x(t)$  是平稳随机过程,

- ① 相互正交:

$$r_x(\tau) = 0, \tau = t_k - t_j$$

- ② 互不相关:

$$c_x(\tau) = 0, \tau = t_k - t_j$$

- ### ③ 互不相关的等价条件

$$r_x(\tau) = \mu_x^2, \tau = t_k - t_j$$





### 平稳随机过程的功率谱密度

- ### 平稳随机过程的功率谱密度

### 平稳随机过程的功率谱密度



## 两个随机过程 $x(t), y(t)$ 的正交性与互不相关性

设  $x(t_j)$  是  $x(t)$  在  $t_j$  时刻的随机变量,  $y(t_k)$  是  $y(t)$  在  $t_k$  时刻的随机变量。

## Definition

$x(t)$  在  $t_j$ ,  $y(t)$  在  $t_k$  的均值分别为  $\mu_x(t_j)$  和  $\mu_y(t_k)$ , 互相关函数为  $r_{xy}(t_j, t_k)$ , 互协方差函数为  $c_{xy}(t_j, t_k)$ 。

### ① 相互正交

$$r_{xy}(t_j, t_k) \stackrel{\text{def}}{=} E[x(t_j)y(t_k)] = 0, \quad j \neq k$$

## ② 互不相关

$$c_{xy}(t_j, t_k) \stackrel{\text{def}}{=} E[(x(t_j) - \mu_x(t_j))(y(t_k) - \mu_y(t_k))] = 0, \quad j \neq k$$

### ③ 互不相关的等价条件

$$c_{xy}(t_j, t_k) = r_{xy}(t_j, t_k) - \mu_x(t_j)\mu_y(t_k), j \neq k \implies r_{xy}(t_j, t_k) = \mu_x(t_j)\mu_y(t_k), j \neq k$$

## 两个平稳随机过程 $x(t), y(t)$ 的正交性与互相关性

## Definition

如果  $x(t), y(t)$  是联合平稳的随机过程,

- ① 相互正交:

$$r_{xv}(\tau) = \mathbf{0}, \tau = t_k - t_j$$

- ② 互不相关:

$$c_{xy}(\tau) = 0, \tau = t_k - t_j$$

- ### ③ 互不相关的等价条件

$$r_{xv}(\tau) = \mu_x \mu_v, \tau = t_k - t_j$$

## 两个随机过程 $x(t), y(t)$ 的统计独立性

## Definition

如果随机过程  $x(t)$  和  $y(t)$  对任意的  $N \geq 1, M \geq 1$  和所有时刻  $t_k (k = 1, 2, \dots, t_N)$  与  $t'_k (k = 1, 2, \dots, M)$ , 其  $N + M$  维联合概率密度表示为

$$p(x_1, x_2, \dots, x_N; t_1, t_2, \dots, t_N; y_1, y_2, \dots, y_N; t'_1, t'_2, \dots, t'_M) \\ = p(x_1, x_2, \dots, x_N; t_1, t_2, \dots, t_N) p(y_1, y_2, \dots, y_N; t'_1, t'_2, \dots, t'_M)$$

则称  $x(t)$  与  $y(t)$  是相互统计独立的两个随机变量过程。

54/77

# $x(t), y(t)$ 的正交性, 不相关性以及统计独立性之间的关系

- ① 均值之一或同时为零, 则  $x(t), y(t)$  相互正交  $\Leftrightarrow$  互不相关
- ②  $x(t), y(t)$  相互统计独立  $\Rightarrow$  互不相关
- ③  $x(t), y(t)$  互不相关  $\nRightarrow$  相互统计独立。但是若  $x(t), y(t)$  服从联合高斯分布, 则  
互不相关  $\Leftrightarrow$  相互统计独立

## 雷达回波信号

### Example

设  $s(t)$  是雷达的发射信号, 遇到目标后的反射信号为  $as(t - t_0)$ ,  $t_0$  是信号返回的延迟时间。如果回波信号中伴有加性噪声  $n(t)$ , 则接收到的信号为

$$x(t) = as(t - t_0) + n(t)$$

- ① 假定  $s(t)$  和  $n(t)$  是平稳相关的, 试求互相关函数  $r_{sx}(\tau)$ 。
- ② 如果噪声  $n(t)$  的均值为零, 且与  $s(t)$  相互统计独立, 试求互相关函数  $r_{sx}(\tau)$ 。



$$\begin{aligned}
 r_{sx}(\tau) &= E[s(t)x(t+\tau)] \\
 &= E[s(t)(as(t-t_0+\tau) + n(t+\tau)))] && \text{by } x(t) = as(t-t_0) + n(t) \\
 &= aE[s(t)s(t-t_0+\tau)] + E[s(t)n(t+\tau)] && \text{相互统计独立 } E[XY]=E[X]E[Y] \\
 &= aE[s(t)s(t-t_0+\tau)] + E[s(t)]E[n(t+\tau)] && \text{确知信号 } s(t) \text{ 看作常数, } E[s(t)] = s(t) \\
 &= aE[s(t)s(t-t_0+\tau)] + s(t)E[n(t+\tau)] && \text{by } E[n(t)] = 0 \\
 &= ar_s(\tau - t_0)
 \end{aligned}$$

# 平稳随机过程的功率谱密度

如果平稳过程  $x(t)$  的自相关函数  $r_x(\tau)$  绝对可积, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |r_x(\tau)| d\tau < \infty$$

则功率谱密度  $P_x(\omega)$  与自相关函数  $r_x(\tau)$

$$P_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} r_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad -\infty < \omega < \infty$$

$$r_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega, \quad -\infty < \omega < \infty$$

### $P_x(\omega)$ 与 $r_x(\tau)$ 构成傅里叶变换对



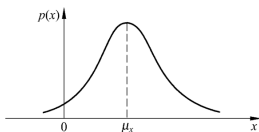
## 60 / 77

有

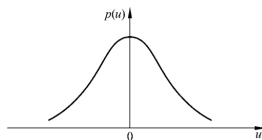
$$u(\xi) = \frac{x(\xi) - \mu_x}{\sigma_x}$$

有

$$p(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$$



段江涛



信号检测与估值





## 高斯噪声的统计描述 (2)

## 高斯噪声 N 维联合概率密度函数

高斯噪声的  $N$  维矢量记为

$$(\mathbf{n}; \mathbf{t}) = (n(t_1), n(t_2), \dots, n(t_N))^T$$

其  $N$  维联合概率密度函数为

$$p(\mathbf{n}; \mathbf{t}) = p(n_1, n_2, \dots, n_N; t_1, t_2, \dots, t_N)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{N/2} |\mathbf{C}_n|^{1/2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{n} - \boldsymbol{\mu}_n)^T \mathbf{C}_n^{-1} (\mathbf{n} - \boldsymbol{\mu}_n) \right]$$

其中,  $\mu_n$  是高斯随机矢量  $(n; t)$  的均值矢量,  $C_n$  为协方差矩阵。即

$$\mu_n = (\mu_{n_1}, \mu_{n_2}, \dots, \mu_{n_N})^T$$

$$\mu_{n_k} = E[n(t_k)]$$



$C_n$  是高斯随机矢量  $(n; t)$  的协方差矩阵

$$\mathbf{C}_n = \begin{bmatrix} C_{n_1 n_1} & C_{n_1 n_2} & \cdots & C_{n_1 n_N} \\ C_{n_2 n_1} & C_{n_2 n_2} & \cdots & C_{n_2 n_N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n_N n_1} & C_{n_N n_2} & \cdots & C_{n_N n_N} \end{bmatrix}$$

其中,

$$C_{n_j n_k} = E[(n(t_j) - \mu_{n_j})(n(t_k) - \mu_{n_k})] = c_{n_k} c_{n_j}$$

$|C_n|$  是  $C_n$  的行列式,  $C_n^{-1}$  是  $C_n$  的逆矩阵。



$$p(\mathbf{n}; \mathbf{t}) = p(n_1, n_2, \dots, n_N; t_1, t_2, \dots, t_N)$$

表明  $n(t)$  的  $N$  维联合概率密度函数表示成各自一维概率密度函数之积的形式, 即是统计独立性的定义。因此,  **$N$  个高斯随机变量  $n(t_k)(k = 1, 2, \dots, t_N)$  互不相关  $\Rightarrow$  相互统计独立**; 结合之前的结论“相互统计独立的随机变量  $\Rightarrow$  互不相关”。所以,  **$N$  个高斯随机变量  $n(t_k)(k = 1, 2, \dots, t_N)$  互不相关  $\Leftrightarrow$  相互统计独立**。

## 高斯随机变量的线性组合仍然是高斯随机变量

- ① 若  $x_k(\xi) \sim \mathcal{N}(\mu_{x_k}, \sigma_{x_k}^2) (k = 1, 2, \dots, N)$ , 且它们相互统计独立, 则它们的和

$$x(\xi) = \sum_{k=1}^N x_k(\xi)$$

是高斯随机变量, 且有  $x_k(\xi) \sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$ , 其中  $\mu_x = \sum_{k=1}^N \mu_{x_k}$ ,  $\sigma_x^2 = \sum_{k=1}^N \sigma_{x_k}^2$

- ② 更一般地,任意有限  $N$  个高斯随机变量  $x_k(\xi)(k=1,2,\dots,N)$  的线性组合

$$x(\xi) = \sum_{k=1}^N a_k x_k(\xi)$$

仍然是高斯随机变量, 且有  $x_k(\xi) \sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$ , 其中

$$\mu_x = \sum_{k=1}^N a_k \mu_{x_k}, \sigma_x^2 = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N a_j a_k c_{x_k x_j}$$

式中, 协方差函数  $c_{x_j, x_k} = E[(x_j(\xi) - \mu_{x_j})(x_k(\xi) - \mu_{x_k})] = c_{x_k, x_j}$ ,  $\mu_{x_k} = E[x_k(\xi)]$



Proof.

### 证法 I: 雅可比变换法

因为  $y = ax + b$

所以,反函数为  $x = \frac{y-b}{a}$

且有  $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{a}$

于是,由一维雅可比变换,得

$$\begin{aligned} p(y) &= \left( \frac{1}{2\pi\sigma_x^2} \right)^{1/2} \exp \left[ -\frac{(\frac{y-b}{a} - \mu_x)^2}{2\sigma_x^2} \right] \left| \frac{1}{a} \right| \\ &= \left( \frac{1}{2\pi a^2 \sigma_x^2} \right)^{1/2} \exp \left[ -\frac{(y - (a\mu_x + b))^2}{2a^2 \sigma_x^2} \right] \end{aligned}$$

所以, 随机变量  $y$  是服从均值为  $a\mu_x + b$ , 方差为  $a^2\sigma_x^2$  的高斯分布。

Proof.

### 证法 II: 利用高斯随机变量的特性来证明

因为  $y = ax + b$

是高斯随机变量  $x$  的线性变换, 所以  $y$  仍然是高斯随机变量。

其均值  $\mu_y$  和方差  $\sigma_y^2$  分别为

$$\mu_y = E(y) = E(ax + b) = aE(x) + b$$

$$= a\mu_x + b$$

$$\sigma_y^2 = E[(y - \mu_y)^2] = E[(ax + b - a\mu_x - b)^2]$$

$$= a^2 E[(x - \mu_x)^2]$$

$$= a^2 \sigma_x^2$$

所以, 随机变量  $y$  是服从均值为  $a\mu_x + b$ , 方差为  $a^2\sigma_x^2$  的高斯分布。





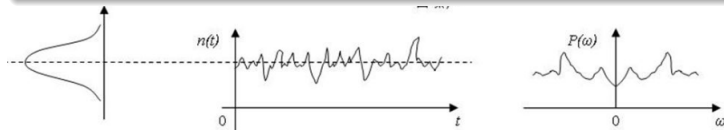
- 白噪声在频域上其功率谱密度是均匀分布的;
- 时域上自相关函数  $r_n(\tau)$  是  $\delta$  函数:  $r_n(\tau) = IFT[\frac{N_0}{2}] = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$
- 任意两个不同时刻的随机变量  $n(t_j)$  与  $n(t_k)$ , ( $\tau = t_j - t_k \neq 0$ ) 是不相关的:
- 由于  $\delta$ -函数的筛选性:  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)f(t)dt = f(t_0)$ , 有  

$$\int_{-\infty}^{\infty} r_n(t - t_0)f(t)dt = f(t_0) = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)f(t)dt = \frac{N_0}{2}f(t_0)$$

## 高斯白噪声 $n(t)$ 重要特性—高斯随机变量 + 白噪声

- 高斯白噪声在频域上其功率谱密度是均匀分布的;
- **时域上概率密度函数是高斯分布的。(白噪声对此没有明确限制)**
- 时域上自相关函数  $r_n(\tau)$  是  $\delta$  函数:  $r_n(\tau) = IFT[\frac{N_0}{2}] = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$
- 任意两个不同时刻的随机变量  $n(t_j)$  与  $n(t_k)$ , ( $\tau = t_j - t_k \neq 0$ ) 是不相关的, 并且是统计独立的:
- 由  $\delta$ —函数的筛选性:  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = f(t_0)$ , 有  

$$\int_{-\infty}^{\infty} r_n(t - t_0) f(t) dt = f(t_0) = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = \frac{N_0}{2} f(t_0)$$



信号检测与估值

\_\_\_\_\_

$$P_n(f) = P_0 \exp \left[ -\frac{(f-f_0)^2}{2\sigma_f^2} \right]$$

---



欢迎批评指正！