

# 信号检测与估值

段江涛

机电工程学院



2019 年 7 月

# 主要内容

- 1 随机过程的统计平均量 (from ch2)
- 2 随机过程的平稳性
- 3 随机过程的正交性、不相关性和统计独立性
- 4 高斯噪声
- 5 课件公式

随机过程的均值  $\mu_x(t)$ : 表示随机过程在  $t$  时刻状态取值的理论平均值

$$\mu_x(t) \stackrel{\text{def}}{=} E[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x; t)dx$$

如果  $x(t)$  是电压或电流, 则  $\mu_x(t)$  可以理解为在  $t$  时刻的“直流分量”。

随机过程的均方值  $\varphi_x^2(t)$

$$\varphi_x^2(t) \stackrel{\text{def}}{=} E[x^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x; t)dx$$

如果  $x(t)$  是电压或电流, 则  $\varphi_x^2(t)$  可以理解在  $t$  时刻它在  $1\Omega$  电阻上消耗的“平均功率”。

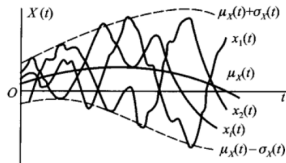
## 随机过程的方差/标准偏差 $\delta_x^2(t)$

$$\sigma_x^2(t) \stackrel{\text{def}}{=} E[(x(t) - \mu_x(t))^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x(t))^2 p(x; t) dx$$

方差  $\sigma_x^2(t)$  表示随机过程在  $t$  时刻取其值偏离其均值  $\mu_x(t)$  的离散程度。如果  $x(t)$  是电压或电流, 则  $\delta_x^2(t)$  可以理解在  $t$  时刻它在  $1\Omega$  电阻上消耗的“交流功率”。

## 均值 $\mu_x(t)$ , 均方值 $\varphi_x^2(t)$ , 方差 $\delta_x^2(t)$ 之间的关系

$$\sigma_x^2(t) = \varphi_x^2(t) - \mu_x^2(t)$$



## 随机过程的自相关函数 $r_x(t_j, t_k)$

$$\begin{aligned} r_x(t_j, t_k) &\stackrel{\text{def}}{=} E[x(t_j)x(t_k)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_j x_k p(x_j, x_k; t_j, t_k) dx_j dx_k \end{aligned}$$

随机过程的自相关函数  $r_x(t_j, t_k)$  可以理解为它的两个随机变量  $x(t_j)$  与  $x(t_k)$  之间含有均值时的相关程度的度量。显然

$$r_x(t, t) = \varphi_x^2(t)$$

## 随机过程的自协方差函数 $c_x(t_j, t_k)$

$$\begin{aligned} c_x(t_j, t_k) &\stackrel{\text{def}}{=} E[(x(t_j) - \mu_x(t_j))(x(t_k) - \mu_x(t_k))] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_j - \mu_x(t_j))(x_k - \mu_x(t_k)) p(x_j, x_k; t_j, t_k) dx_j dx_k \end{aligned}$$

随机过程的自协方差函数  $c_x(t_j, t_k)$  可以理解为它的两个随机变量  $x(t_j)$  与  $x(t_k)$  之间的相关程度的度量。它们的自相关系数定义为

$$\rho_x(t_j, t_k) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c_x(t_j, t_k)}{\sigma_x(t_j)\sigma_x(t_k)}$$

易证

$$c_x(t_j, t_k) = r_x(t_j, t_k) - \mu_x(t_j)\mu_x(t_k)$$

$$c_x(t, t) = \sigma_x^2(t)$$

## 随机过程的互相关函数 $r_{xy}(t_j, t_k)$

$$\begin{aligned} r_{xy}(t_j, t_k) &\stackrel{\text{def}}{=} E[x(t_j)y(t_k)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_j y_k p(x_j, t_j; y_k, t_k) dx_j dy_k \end{aligned}$$

式中,  $p(x_j, t_j; y_k, t_k)$  是  $x(t)$  与  $y(t)$  的二维混合概率密度函数。

## 随机过程的互协方差函数 $c_{xy}(t_j, t_k)$

$$\begin{aligned} c_{xy}(t_j, t_k) &\stackrel{\text{def}}{=} E[(x(t_j) - \mu_x(t_j))(y(t_k) - \mu_x(t_k))] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_j - \mu_x(t_j))(y_k - \mu_x(t_k)) p(x_j, t_j; x_k, t_k) dx_j dy_k \end{aligned}$$

随机过程  $x(t)$  和  $y(t)$  的互协方差函数  $c_{xy}(t_j, t_k)$  可以理解为它们各自的随机变量  $x(t_j)$  与  $y(t_k)$  之间的相关程度, 实际上表示两个随机过程  $x(t)$  与  $y(t)$  之间的相关程度。它们的互相关系数定义为

$$\rho_{xy}(t_j, t_k) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c_{xy}(t_j, t_k)}{\sigma_x(t_j)\sigma_x(t_k)}$$

易证

$$c_{xy}(t_j, t_k) = r_{xy}(t_j, t_k) - \mu_x(t_j)\mu_y(t_k)$$



## Definition (广义平稳随机过程, 简称平稳随机过程)

随机过程  $x(t)$  的平均统计量满足

- ①  $x(t)$  的均值是与时间  $t$  无关的常数, 即

$$E[x(t)] = \mu_x$$

- ②  $x(t)$  的自相关函数只取决于时间间隔  $\tau = t_k - t_j$ , 而与时间的起始时刻无关, 即

$$E[x(t_j)x(t_k)] = E[x(t_j)x(t_j + \tau)] = r_x(\tau)$$

# 平稳随机过程的统计平均量之间的关系

平稳随机过程  $x(t)$  的均值  $\mu_x$ , 均方值  $\varphi_x^2$ , 方差  $\sigma_x^2$ , 自相关函数  $r_x(\tau)$ , 自协方差函数  $c_x(\tau)$  之间的关系

$$\sigma_x^2 = \varphi_x^2 - \mu_x^2$$

$$r_x(\tau) = r_x(-\tau)$$

$$c_x(\tau) = r_x(\tau) - \mu_x^2$$

$$c_x(\tau) = c_x(-\tau)$$

$$\varphi_x^2 = r_x(0)$$

$$\sigma_x^2 = c_x(0)$$

$$r_x(0) \geq |r_x(\tau)|, \tau \neq 0$$

$$c_x(0) \geq |c_x(\tau)|, \tau \neq 0$$

## Definition (联合平稳随机过程)

设  $x(t)$  和  $y(t)$  分别是两个平稳的随机过程, 如果对于任意的  $\Delta t$ , 有

$r_{xy}(t_j + \Delta t, t_k + \Delta t) = r_{xy}(t_j, t_k)$ , 即互相关函数  $r_{xy}(t_j, t_k) = r_{xy}(\tau)$ , ( $\tau = t_k - t_j$ ) 仅与时间间隔  $\tau$  有关, 而与  $t_j$  和  $t_k$  无关, 则称过程  $x(t)$  与  $y(t)$  是联合平稳的随机过程。

## 联合平稳随机过程 $x(t)$ 与 $y(t)$ 的互协方差函数

$$c_{xy}(t_j, t_k) = c_{xy}(\tau) = r_{xy}(\tau) - \mu_x \mu_y, \tau = t_k - t_j$$

互相关系数:

$$\rho_{xy}(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c_{xy}(t_j, t_k)}{\sigma_x(t_j)\sigma_y(t_k)} = \frac{c_{xy}(\tau)}{\sigma_x \sigma_y}$$

$$r_{xy}(\tau) = r_{yx}(-\tau)$$

$$c_{xy}(\tau) = c_{yx}(-\tau)$$

## Definition

设  $x(t_j)$  和  $x(t_k)$  是随机过程  $x(t)$  的任意两个不同时刻的随机变量, 其均值分别为  $\mu_x(t_j)$  和  $\mu_x(t_k)$ , 自相关函数  $r_x(t_j, t_k)$ , 自协方差函数为  $c_x(t_j, t_k)$ 。如果

$$r_x(t_j, t_k) = 0, j \neq k$$

则称  $x(t)$  是相互正交的随机变量过程。如果

$$c_x(t_j, t_k) = 0, j \neq k$$

则称  $x(t)$  是互不相关的随机变量过程。等价条件:

$$c_x(t_j, t_k) = r_x(t_j, t_k) - \mu_x(t_j)\mu_x(t_k), j \neq k \implies r_x(t_j, t_k) = \mu_x(t_j)\mu_x(t_k), j \neq k$$

## Definition

如果  $x(t)$  是平稳随机过程,  
相互正交:

$$r_x(\tau) = 0, \tau = t_k - t_j$$

互不相关:

$$c_x(\tau) = 0, \tau = t_k - t_j$$

互不相关的等价条件

$$r_x(\tau) = \mu_x^2, \tau = t_k - t_j$$

## Definition

设  $x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_N)$  是随机过程  $x(t)$  在不同时刻  $t_k (k = 1, 2, \dots, t_N)$  的随机变量, 如果其  $N$  维联合概率密度函数对于任意的  $N \geq 1$  和所有时刻  $t_k (k = 1, 2, \dots, N)$  都能够表示成各自一维概率密度函数之积的形式, 即

$$\begin{aligned} & p(x_1, x_2, \dots, x_N; t_1, t_2, \dots, t_N) \\ &= p(x_1; t_1) p(x_2; t_2) \cdots p(x_N; t_N) \end{aligned}$$

则称  $x(t)$  是相互统计独立的随机变量过程。

# 随机过程的正交性、不相关性和统计独立性

- ① 均值  $\mu_x(t_j) = 0, \mu_x(t_k) = 0$  则, 相互正交  $\Leftrightarrow$  互不相关
- ② 相互统计独立  $\Rightarrow$  互不相关
- ③ 互不相关  $\nRightarrow$  相互统计独立。但是若  $x(t)$  服从联合高斯分布, 则互不相关  $\Leftrightarrow$  相互统计独立

## 中心极限定理

在一般条件下,  $N$  个相互统计独立的随机变量  $n_i$  之和  $n = \sum_{k=1}^N n_k$ , 在  $N \rightarrow \infty$  的极限情况下, 其概率密度趋于高斯分布, 而不管每个变量  $n_k$  的具体分布如何。

## 高斯噪声一维概率密度函数

$$p(n_k; t_k) = \left( \frac{1}{2\pi\sigma_{n_k}^2} \right)^{1/2} \exp\left[ -\frac{(n_k - \mu_{n_k})^2}{2\sigma_{n_k}^2} \right]$$

其中,  $\mu_{n_k}$  为  $n(t_k)$  的均值,  $\sigma_{n_k}$  为  $n(t_k)$  的方差。



## 高斯噪声 N 维联合概率密度函数

高斯噪声的 N 维矢量记为

$$(\mathbf{n}; \mathbf{t}) = (n(t_1), n(t_2), \dots, n(t_N))^T$$

其 N 维联合概率密度函数为

$$\begin{aligned} p(\mathbf{n}; \mathbf{t}) &= p(n_1, n_2, \dots, n_N; t_1, t_2, \dots, t_N) \\ &= \left( \frac{1}{(2\pi)^{N/2} |\mathbf{C}_n|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{n} - \boldsymbol{\mu}_n)^T \mathbf{C}_n^{-1} (\mathbf{n} - \boldsymbol{\mu}_n)\right] \right) \end{aligned}$$

其中,  $\boldsymbol{\mu}_n$  是高斯随机矢量  $(\mathbf{n}; \mathbf{t})$  的均值矢量,  $\mathbf{C}_n$  为协方差矩阵。

## 不相关性与统计独立性

互不相关  $\nRightarrow$  相互统计独立。但是若  $x(t)$  服从联合高斯分布, 则互不相关  $\Leftrightarrow$  相互统计独立

## 白噪声的功率谱密度

$$p_n(\omega) = \frac{N_0}{2}$$

功率谱密度均匀分布在整个频率轴上

## 白噪声的自相关函数

$$r_n(\tau) = IFT\left[\frac{N_0}{2}\right] = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$$

白噪声也可定义为均值为零、自相关函数  $r_n(\tau)$  为  $\delta$  的噪声随机过程。

## 重要特性

白噪声在频域上其功率谱密度是均匀分布的, 时域上自相关函数  $r_n(\tau)$  是  $\delta$  函数。任意两个不同时刻的随机变量  $n(t_j)$  与  $n(t_k)$ , ( $\tau = t_j - t_k \neq 0$ ) 是不相关的。

## 高斯白噪声

时域的随机变量的概率密度函数是高斯分布的,频域功率谱密度是均匀分布的噪声过程称为高斯白噪声。高斯白噪声的重要特性:任意两个或两个以上不同时刻  $t_1, t_2, \dots, t_N$  的随机变量  $n(t_k) (k = 1, 2, \dots, N)$  是互不相关且统计独立的。

## 有色噪声的功率谱密度

$$P_n(f) = P_0 \exp\left[-\frac{(f-f_0)^2}{2\sigma_f^2}\right]$$

均值  $f_0$  代表频谱的中心频率,方差  $\sigma_f^2$  反映噪声的谱宽度。 $\omega = 2\pi f$

$$\begin{aligned}
 \text{Var}[x_k|H_0] &= E[n_k^2] = E\left[\int_0^T n(t)f_k(t)dt \int_0^T n(u)f_k(u)du\right] \\
 &= \int_0^T f_k(t) \int_0^T E[n(t)n(u)]f_k(u)dudt && \text{by } E[n(t)n(u)] = r_n(t-u) \\
 &= \int_0^T f_k(t) \int_0^T \frac{N_0}{2}\delta(t-u)f_k(u)dudt && \text{by } r_n(t-u) = \frac{N_0}{2}\delta(t-u) \\
 &= \int_0^T f_k(t) \frac{N_0}{2}f_k(t)dt \\
 &= \frac{N_0}{2}
 \end{aligned}$$

欢迎批评指正！