

信号检测与估值

段江涛

机电工程学院



2019 年 10 月

ch4. 信号波形的检测

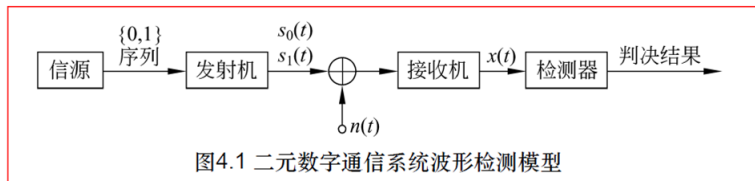
ch4-1. 统计检测理论基本概念及贝叶斯准则

- 1 信号波形检测基本概念
- 2 随机过程的正交级数展开
- 3 信号分解为正交函数
- 4 随机过程的卡亨南—洛维展开
- 5 白噪声条件下正交函数集的任意性
- 6 参量随机信号时随机过程的正交级数展开

信号波形的检测基本内容

- 掌握随机过程正交级数展开的目的和方法；
- 掌握高斯白噪声中二元确知信号波形的检测；
- 了解 M 元确知信号波形的检测；
- 将第三章有关统计检测的理论,推广至噪声中信号波形的最佳检测问题；
- 基本任务:根据性能要求,设计与环境相匹配的接收机；
- 主要问题:最佳检测的判决表达式,检测性能分析以及最佳波形设计等。

二元数字通信系统波形检测模型



信源输出

发射信号

$$0 \quad s_0(t), nT \leq t \leq (n+1)T$$

$$1 \quad s_1(t), nT \leq t \leq (n+1)T$$

信号在信道传输中受到加性干扰

$$H_0: \quad x(t) = s_0(t) + n(t), \quad nT + t_0 \leq t \leq (n+1)T + t_0$$

$$H_1: \quad x(t) = s_1(t) + n(t), \quad nT + t_0 \leq t \leq (n+1)T + t_0$$

问题的提出

- 第3章,统计检测理论处理的观测信号是 N 维矢量
- 第4章,波形信号检测处理的是随机过程 $x(t)$

如何在两者之间建立联系?

能否利用第三章的方法,解决波形信号检测的问题?

比较上述两种不同的信号发现,如果能用一组随机变量来表示随机过程 $x(t)$,或者说将随机过程 $x(t)$ 与一组随机变量之间建立联系,则可直接应用第三章的结果解决波形信号检测的问题。

- 如何用一组随机变量来表示一个随机过程?

信号由正交级数展开,可用展开系数和正交集来表示该信号。

随机过程的正交级数展开

基本要求

- 掌握随机过程的卡亨南—洛维展开
- 理解白噪声条件下, 正交函数集的任意性
- 理解参量信号随机过程的正交级数展开

矢量正交与正交矢量集

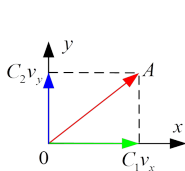
矢量正交

$V_x = (V_{x1}, V_{x2}, V_{x3})$ 与 $V_y = (V_{y1}, V_{y2}, V_{y3})$, 正交的定义: 其内积为 0。即

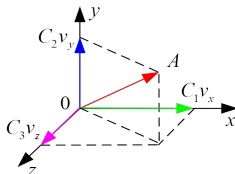
$$V_x V_y = \sum_{i=1}^3 v_{xi} v_{yi} = 0$$

正交矢量集

由两两正交的矢量组成的矢量集合称为正交矢量集。



(a) 平面矢量分解



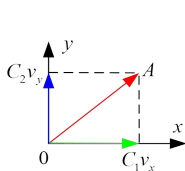
(b) 空间矢量分解

Example

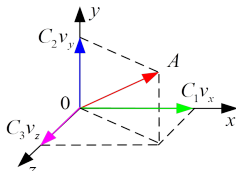
如三维空间中,以矢量 $\mathbf{v}_x = (2, 0, 0)$, $\mathbf{v}_y = (0, 2, 0)$, $\mathbf{v}_z = (0, 0, 2)$ 所组成的集合就是一个正交矢量集。

对于一个三维空间的矢量 $\mathbf{A} = (2, 5, 8)$, 可以用一个三维正交矢量集 $\{\mathbf{v}_x, \mathbf{v}_y, \mathbf{v}_z\}$ 分量的线性组合表示。即

$$\mathbf{A} = \mathbf{v}_x + 2.5\mathbf{v}_y + 4\mathbf{v}_z$$



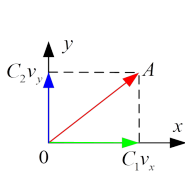
(a) 平面矢量分解



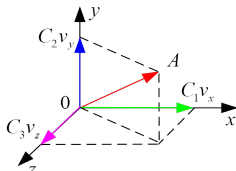
(b) 空间矢量分解

矢量空间正交分解的概念可推广到信号空间

- ① 在信号空间找到若干个**相互正交**的信号作为基本信号；
- ② 使得信号空间中**任意信号**均可表示成它们的线性组合。



(a) 平面矢量分解



(b) 空间矢量分解

完备正交函数集

三角函数集

$$\{1, \cos(n\omega t), \sin(n\omega t), \dots\}, n = 1, 2, \dots$$

就是在区间 $(t_0, t_0 + T)$, $T = 2\pi/\omega$ 上的完备正交函数集。

Example (傅里叶级数的三角形式)

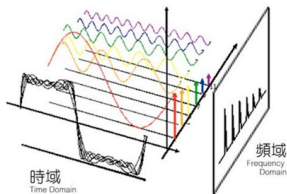
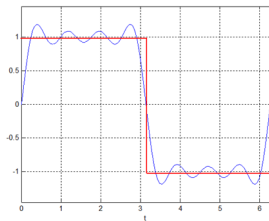
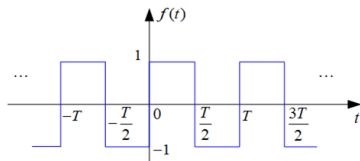
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

傅里叶系数:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega t) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega t) dt$$

信号分解

- ① 在信号空间找到若干个**相互正交**的信号作为基本信号;
- ② 使得信号空间中**任意信号**均可表示成它们的**线性组合**。



正交级数展开

Table 1: 正交级数展开

	二维矢量	信号 $f(t)$ 傅里叶展开	信号 $x(t)$ 正交级数
正交集	$\{\mathbf{v}_x, \mathbf{v}_y\}$	$\{1, \cos(n\omega t), \sin(n\omega t)\}$	$\{f_1(t), f_2(t), \dots, f_k(t)\}$
展开系数 (正交投影)	$C_k =$ 矢量 \mathbf{A} 在第 k 个坐标的投影	$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega t) dt$ $b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega t) dt$	$x_k = \int_0^T f_k(t) x(t) dt$
线性表示	$\mathbf{A} = C_1 \mathbf{v}_x + C_2 \mathbf{v}_y$	$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t)$ $+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$	$x(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N x_k f_k(t)$

完备正交函数集

若实函数集 $\{f_k(t)\}(k=1,2,\dots)$, 在 $(0, T)$ 时间内满足

$$\int_0^T f_k(t)f_j(t)dt = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

不存在函数 $g(t)$, 满足

$$\int_0^T f_k(t)g(t)dt = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

则称函数集 $\{f_k(t)\}(k=1,2,\dots)$, 是**完备正交函数集**。

确知信号的正交级数展开

$s(t)$ 是定义在 $(0, T)$ 时间内的确知信号, 且信号能量有限, 即

$$E_s = \int_0^T s^2(t) dt < \infty$$

该信号可用正交级数展开表示为:

$$s(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N s_k f_k(t)$$

其中, $f_k(t)$ 是正交函数集的第 k 个坐标函数, s_k 是信号 $s(t)$ 在第 k 个坐标函数上的正交投影, 成为信号 $s(t)$ 的第 k 个展开系数, 且

$$s_k = \int_0^T s(t) f_k(t) dt, \quad k = 1, 2, \dots$$

确知信号的展开系数 $s_k (k = 1, 2, \dots)$ 是确定的量, 而不是随机变量。

随机过程的正交级数展开

假设接收为信号: $x(t) = s(t) + n(t)$

其中 $s(t)$ 是确知信号, $n(t)$ 是零均值的平稳随机过程, 则接收信号 $x(t)$ 也是平稳随机过程。由于随机过程是由很多样本函数构成的集合, 而每个样本函数是时间的函数, 所以对给定的样本函数 $x(t)$, 可以进行正交级数展开

$$x(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N x_k f_k(t), \text{ 而展开系数为: } x_k = \int_0^T x(t) f_k(t) dt, \quad k = 1, 2, \dots$$

展开系数 x_k 为一组随机变量, 在平均意义上随机过程 $x(t)$ 展开的均方误差等于 0, 或者说 $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N x_k f_k(t)$ 均方收敛于 $x(t)$, 即 x_k 满足

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E \left[\left(x(t) - \sum_{k=1}^N x_k f_k(t) \right)^2 \right] = 0$$

随机过程的正交级数展开

Notes

$$\text{随机过程: } x(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N x_k f_k(t)$$

$$\text{展开系数: } x_k = \int_0^T x(t) f_k(t) dt, \quad k = 1, 2, \dots$$

随机过程 $x(t)$ 可以由上式求得的展开系数 x_k 来恢复, 就是说 $x(t)$ 完全由展开系数 x_k 确定。注意, 这里对随机过程 $x(t)$ 进行正交级数展开所用的正交函数集 $\{f_k(t)\}$ 并没有提出特别的要求, 所以展开系数 $x_k (k = 1, 2, \dots)$ 之间可能是相关的随机变量。

问题: 如何根据噪声干扰的特性, 正确选择随机过程展开的正交函数集 $\{f_k\}$, 以使展开系数 x_k 之间是互不相关的随机变量。

随机过程的卡亨南—洛维展开: 预备公式

- 随机过程: $x(t) = s(t) + n(t)$
- $\{f_k(t)\}$ 是一组正交函数集, $k = 1, 2, \dots$
- 随机过程 $x(t)$ 正交展开系数 x_k 是一个随机变量: $x_k = \int_0^T x(t)f_k(t)dt$
- 确知信号 $s(t)$ 正交展开系数 s_k 是一个确定的量: $s_k = \int_0^T s(t)f_k(t)dt$
- 确知信号 $s(t)$ 的展开系数 s_k 为确定的量, 其均值就是本身:

$$E(s_k) = E \left[\int_0^T s(t)f_k(t)dt \right] = \int_0^T E[s(t)]f_k(t)dt = \int_0^T s(t)f_k(t)dt = s_k$$
- 噪声 $n(t)$ 是一个零均值的平稳随机过程:
 - $E[n(t)] = 0$
 - $n(t)$ 的自相关函数只取决于时间间隔 $(t_k - t_j)$, 而与时间的起始时刻无关,

$$E[n(t_j)n(t_k)] = r_n(t_k - t_j)$$

随机过程的卡亨南—洛维展开

目的:给出一种正交函数集的选择方法,以保证展开系数之间是互不相关的随机变量。随机过程: $x(t) = s(t) + n(t)$, 正交函数集 $\{f_k(t)\}$, $x(t)$ 的各展开系数 x_k 是随机变量, 当随机过程 $x(t)$ 满足

$$\int_0^T x^2(t)dt < \infty$$

时, 其展开系数 x_k 的均值为

$$\begin{aligned} E[x_k] &= E \left[\int_0^T x(t)f_k(t)dt \right] = E \left[\int_0^T (s(t) + n(t))f_k(t)dt \right] \\ &= E \left[\int_0^T s(t)f_k(t)dt + \int_0^T n(t)f_k(t)dt \right] = E \left[\int_0^T s(t)f_k(t)dt \right] + E \left[\int_0^T n(t)f_k(t)dt \right] \\ &= E \left[\int_0^T s(t)f_k(t)dt \right] + \int_0^T E[n(t)]f_k(t)dt \quad (\text{by } E[n(t)] = 0) \\ &= E \left[\int_0^T s(t)f_k(t)dt \right] = E[s_k] = s_k \quad (\text{确知展开系数的均值就是本身}) \end{aligned}$$

随机过程的卡亨南—洛维展开

展开系数 x_j 与 x_k 协方差是在 t 时刻两个随机变量减去各自的均值后的乘积。

$$\begin{aligned}
 E[(x_j - E(x_j))(x_k - E(x_k))] &= E[(x_j - s_j)(x_k - s_k)] \\
 &= E\left[\left(\int_0^T x(t)f_j(t)dt - s_j\right)\left(\int_0^T x(t)f_k(t)dt - s_k\right)\right] \\
 &= E\left[\left(\int_0^T (s(t) + n(t))f_j(t)dt - s_j\right)\left(\int_0^T (s(t) + n(t))f_k(t)dt - s_k\right)\right] \\
 &= E\left[\left(\int_0^T n(t)f_j(t)dt\right)\left(\int_0^T n(t)f_k(t)dt\right)\right] = E\left[\left(\int_0^T n(t)f_j(t)dt\right)\left(\int_0^T n(t)f_k(u)du\right)\right] \\
 &= E\left[\int_0^T f_j(t)\left[\int_0^T n(t)n(u)f_k(u)du\right]dt\right] = \int_0^T f_j(t)\left[\int_0^T E[n(t)n(u)]f_k(u)du\right]dt \\
 &= \int_0^T f_j(t)\left[\int_0^T r_n(t-u)f_k(u)du\right]dt \quad (\text{by } E[n(t_j)n(t_k)] = r_n(t_k - t_j))
 \end{aligned}$$

随机过程的卡亨南—洛维展开

希望 $x(t)$ 各展开系数 x_j 与 x_k 的协方差满足:

$$E[(x_j - E(x_j))(x_k - E(x_k))] = E[(x_j - s_j)(x_k - s_k)] = \lambda_k \delta_{jk}$$

$$\text{式中 } \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & (j = k) \\ 0, & (j \neq k) \end{cases}, \quad \lambda_k \text{ 是展开系数 } x_k \text{ 的方差, } k = 1, 2, \dots$$

这样,

当 $j \neq k$ 时, $E[(x_j - s_j)(x_k - s_k)] = 0$, 即展开式的各展开系数之间互不相关;

当 $j = k$ 时, $E[(x_j - s_j)(x_k - s_k)] = E[(x_j - s_k)^2] = \lambda_k$, 是展开系数 x_k 的方差。

随机过程的卡亨南-洛维展开

展开系数 x_j 与 x_k 协方差:

$$E[(x_j - s_j)(x_k - s_k)] = \int_0^T f_j(t) \left[\int_0^T r_n(t-u) f_k(u) du \right] dt$$

其中, $x(t) = s(t) + n(t)$ ($0 \leq t \leq T$), $r_n(t-u) = E[n(t)n(u)]$ 是零均值平稳噪声过程 $n(t)$ 的自相关函数。

为保证 $E[(x_j - s_j)(x_k - s_k)] = \lambda_k \delta_{jk}$

$$\int_0^T r_n(t-u) f_k(u) du = \lambda_k f_k(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

该式是齐次积分方程。该方程的解 $f_k(t)$ 就是正交函数集 $\{f_k(t)\}$ 的第 k 个坐标函数。

$$E[(x_j - s_j)(x_k - s_k)] = \lambda_k \int_0^T f_j(t) f_k(t) dt = \lambda_k \delta_{jk} \implies f_j(t) \text{ 与 } f_k(t) \text{ 正交。}$$

白噪声条件下正交函数集的任意性 (1)

假设接收信号为 $x(t) = s(t) + n(t)$, $n(t)$ 是零均值, 功率谱密度为 $P_n(\omega) = N_0/2$ 的白噪声, 其自相关函数为: $r_n(t-u) = \frac{N_0}{2} \delta(t-u)$, (说明噪声自相关函数在 $t = u$ 时不为 0, 其他时刻都为 0, 自相关性最强)

对于任意正交函数集 $\{f_k(t)\}$, 展开系数 x_j 与 x_k 协方差:

$$\begin{aligned} E[(x_j - s_j)(x_k - s_k)] &= \int_0^T f_j(t) \left[\int_0^T r_n(t-u) f_k(u) du \right] dt \\ &= \frac{N_0}{2} \int_0^T f_j(t) \left[\int_0^T \delta(t-u) f_k(u) du \right] dt \\ &= \frac{N_0}{2} \int_0^T f_j(t) f_k(t) dt = \frac{N_0}{2} \delta_{jk} \end{aligned}$$

$$\text{式中 } \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & (j = k) \\ 0, & (j \neq k) \end{cases}, \quad \delta(t-u) = \begin{cases} 1, & (t = u) \\ 0, & (t \neq u) \end{cases}$$

白噪声条件下正交函数集的任意性 (2)

假设接收信号为 $x(t) = s(t) + n(t)$, $n(t)$ 是零均值, 功率谱密度为 $P_n(\omega) = N_0/2$ 的白噪声, 其自相关函数为:

$$r_n(t-u) = \frac{N_0}{2} \delta(t-u)$$

对于任意正交函数集 $\{f_k(t)\}$, 展开系数 x_j 与 x_k 协方差:

$$E[(x_j - s_j)(x_k - s_k)] = \int_0^T f_j(t) \left[\int_0^T r_n(t-u) f_k(u) du \right] dt = \frac{N_0}{2} \delta_{jk}$$

重要结论

当 $j \neq k$ 时, 展开系数 x_j 与 x_k 协方差 = 0。这说明, 在 $n(t)$ 是白噪声的条件下, 取任意正交函数集 $\{f_k(t)\}$ 对平稳随机过程 $x(t)$ 进行展开, 其展开系数 $x_k (k = 1, 2, \dots)$ 之间都是互不相关的。这就是**白噪声条件下正交函数集的任意性**。

参量随机信号时随机过程的正交级数展开

接收为含有参量 θ 的平稳随机过程信号

$$x(t) = s(t; \theta) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

把参量信号 $s(t; \theta)$ 看作以 θ 为条件的信号, 正交函数集为 $\{f_k(t)\}$, 则 $x(t)$ 展开为

$$x(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N x_k f_k(t)$$

展开系数为

$$x_k = \int_0^T x(t) f_k(t) dt = \int_0^T [s(t; \theta) + n(t)] f_k(t) dt = s_{k|\theta} + n_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

$s_{k|\theta}$ 是信号 $s(t; \theta)$ 以 θ 为条件的展开系数, 即

$$s_{k|\theta} = \int_0^T s(t; \theta) f_k(t) dt, \quad k = 1, 2, \dots$$

参量随机信号时随机过程的正交级数展开

$x(t)$ 展开系数的条件均值为

$$E[x_k] = E[s_{k|\theta} + n_k] = E[s_{k|\theta}] = s_{k|\theta}$$

为使展开系数互不相关,则

$$E[(x_j - s_{j|\theta})(x_k - s_{k|\theta})] = \lambda_k \delta_{jk}$$

若 $n(t)$ 的自相关函数为 $r_n(t-u)$ 时, x_k 互不相关的正交函数集 $\{f_k(t)\}$ 满足齐次方程

$$\int_0^T r_n(t-u)f_k(u)du = \lambda_k f_k(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

在白噪声条件下,正交函数集仍具有任意性。

x_k, s_k, n_k 之间的关系

x_k, s_k, n_k 之间的关系

$$x(t) = s(t) + n(t); \quad x_k = s_k + n_k$$

随机变量 $x(t)$ 展开系数 x_k = 确知信号 $s(t)$ 展开系数 s_k + 噪声 $n(t)$ 展开系数 n_k

$$\begin{aligned} x_k &= \int_0^T f_k(t)x(t)dt \\ &= \int_0^T f_k(t)(s(t) + n(t))dt \\ &= \int_0^T f_k(t)s(t)dt + \int_0^T f_k(t)n(t))dt \\ &= s_k + n_k \end{aligned}$$

展开系数 x_k 均值 (推导一)

$$\begin{aligned}
 E[x_k] &= E \left[\int_0^T f_k(t) x(t) dt \right] = E \left[\int_0^T f_k(t) (s(t) + n(t)) dt \right] \\
 &= E \left[\int_0^T f_k(t) s(t) dt + \int_0^T f_k(t) n(t) dt \right] \\
 &= E[s_k + n_k] \\
 &= E[s_k] + E[n_k] \quad (\text{by } E[n(t)] = 0 \implies E[n_k] = 0) \\
 &= E[s_k] = s_k \quad (\text{确知信号的展开系数为确定的量, 其均值就是本身})
 \end{aligned}$$

展开系数 x_k 均值 (推导二), 课件采用

$$\begin{aligned}
 E[x_k] &= E \left[\int_0^T f_k(t) x(t) dt \right] = E \left[\int_0^T f_k(t) (s(t) + n(t)) dt \right] \\
 &= E \left[\int_0^T f_k(t) s(t) dt + \int_0^T f_k(t) n(t) dt \right] \\
 &= E \left[\int_0^T f_k(t) s(t) dt \right] + E \left[\int_0^T f_k(t) n(t) dt \right] \\
 &= E \left[\int_0^T f_k(t) s(t) dt \right] + \int_0^T f_k(t) E[n(t)] dt \quad (\text{by } E[n(t)] = 0) \\
 &= E \left[\int_0^T f_k(t) s(t) dt \right] \\
 &= E[s_k] = s_k \quad (\text{确知信号的展开系数为确定的量, 其均值就是本身})
 \end{aligned}$$

欢迎批评指正！