信号检测与估值

段江涛
机电工程学院

2019 年 10 月

ch4. 信号波形的检测

ch4-4. 一般二元信号波形的检测—正交级数展开法

一般二元信号波形的检测—信号模型

在简单二元信号的波形检测中,假设 H_0 下和假设 H_1 的接收信号分别为:

$$
\begin{aligned}
H_0 : x(t) &= s_0(t) + n(t), \qquad & 0 \le t \le T \\
H_1 : x(t) &= s_1(t) + n(t), \qquad & 0 \le t \le T
\end{aligned}
$$

其中, $s_0(t)$ 是能量为 E_0 的确知信号, $s_1(t)$ 是能量为 E_1 的确知信号, $n(t)$ 是均值为零, 功率谱密度为 $N_0/2$ 的**高斯白噪声**。

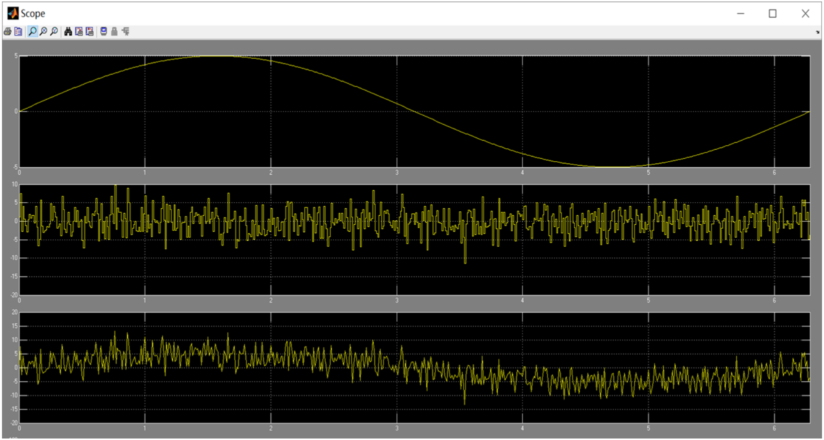
接收信号 MATLAB 仿真 H_1

$$H_1 : x(t) = 5\sin(t) + n(t), \quad 0 \le t \le 2\pi$$

$s_1(t)$

$n(t)$

$x(t)$



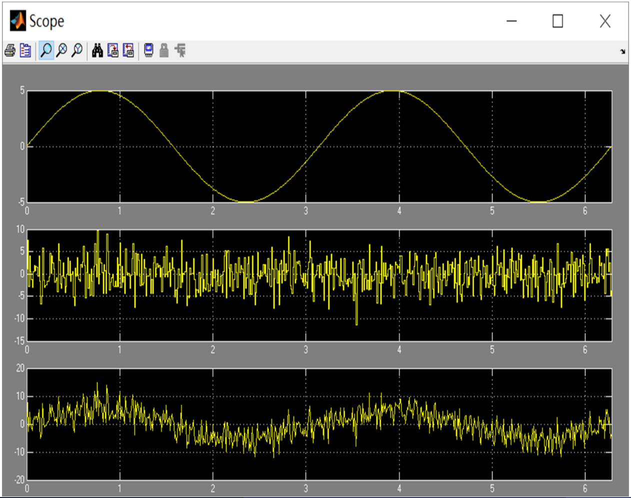
接收信号 MATLAB 仿真 H_0

$$H_0 : x(t) = 5\sin(2t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$s_0(t)$

$n(t)$

$x(t)$



检测步骤

1. 首先,利用随机过程的正交级数展开,将随机过程用一组随机变量来表示;
2. 然后,针对展开得到的随机变量,利用第三章的统计检测方法,构建贝叶斯检测表达式;
3. 最后,令 N 趋向于无穷大, 利用展开系数与随机过程之间的表示关系,构建波形信号的检测表达式。

Notes

- 确知信号的正交级数展开的展开系数是一组确定的值。
- 随机过程的正交级数展开的展开系数是一组随机变量,卡亨南-洛维展开可保证展开系数之间不相关。

判决表达式—步骤 1

$H_0 : x(t) = s_0(t) + n(t), \quad 0 \le t \le T$

$H_1 : x(t) = s_1(t) + n(t), \quad 0 \le t \le T$

步骤 1, 选一组完备的正交函数集 $\{f_k(t), k = 1, 2, \cdots\}$, 对接收信号进行正交级数展开, 得到一组随机变量 x_k

因为信号 $s_0(t)$ 和 $s_1(t)$ 是确知信号, $n(t)$ 是均值为 0 的高斯白噪声, 所以可以任选正交函数集 $\{f_k(t)\}$

$$x(t) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} x_k f_k(t) \qquad x_k = \int_0^T x(t) f_k(t) dt$$

$$H_0 : x_k = s_{0k} + n_k, k = 1, 2, \ldots \qquad n_k = \int_0^T n(t) f_k(t) dt$$

$$H_1 : x_k = s_{1k} + n_k, k = 1, 2, \ldots \qquad s_{ik} = \int_0^T s_i(t) f_k(t) dt, \quad i = 0, 1$$

判决表达式—步骤 1

$$x(t) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} x_k f_k(t) \qquad x_k = \int_0^T x(t) f_k(t) dt$$

$$H_0 : x_k = s_{0k} + n_k, k = 1, 2, \dots \qquad n_k = \int_0^T n(t) f_k(t) dt$$

$$H_1 : x_k = s_{1k} + n_k, k = 1, 2, \dots \qquad s_{ik} = \int_0^T s_i(t) f_k(t) dt, \quad i = 0, 1$$

- 信号 $s_0(t)$ 和 $s_1(t)$ 是确知信号, $n(t)$ 是均值为 0, 功率谱密度为 $P_n(\omega) = N_0/2$ 的高斯白噪声;
- 无论在假设 H_1 下还是在假设 H_2 下,接收信号的 $x(t)$ 都是高斯随机过程;
- 展开系数 x_k 是高斯随机过程的积分结果, 因而 x_k 是高斯随机变量;
- 展开系数 x_k 之间是互不相关的, 也是相互统计独立的;
- 高斯随机变量由均值和方差决定。由此求出两个假设下的概率密度函数 $p(x_k|H_j), k = 1, 2, \dots; j = 0, 1$。

判决表达式—步骤 1: 假设 H_0 下 x_k 的均值和方差

$H_0: x_k = s_{0k} + n_k, \quad n_k = \int_0^T n(t) f_k(t) dt,$ 由于 $n(t)$ 是均值为零的高斯白噪声, $E[n(t)] = 0,$

$E[n(t)n(u)] = r_n(t-u) = \frac{N_0}{2}\delta(t-u), \quad \int_0^T \delta(t-u) f(t) dt = \begin{cases} f(u), & (t = u) \\ 0, & (t \neq u) \end{cases}$

$f_k(t)$ 是一组正交函数集, $\int_0^T f_j(t) f_k(t) dt = 1, (j = k)$

$$\begin{aligned}
E[x_k|H_0] &= E\left[\int_0^T x(t) f_k(t) dt\right] = E\left[\int_0^T (s_0(t) + n(t)) f_k(t) dt\right] \\
&= E\left[\int_0^T s_0(t) f_k(t) dt\right] + \int_0^T E[n(t)] f_k(t) dt = s_{0k} \quad (\text{by } s_{0k} = \int_0^T s_0(t) f_k(t) dt) \\
Var[x_k|H_0] &= E[(x_k - E[x_k])^2] = E[n_k^2] = E\left[\int_0^T n(t) f_k(t) dt \int_0^T n(u) f_k(u) du\right] \\
&= \int_0^T f_k(t) \left\{\int_0^T E[n(t)n(u)] f_k(u) du\right\} dt = \int_0^T f_k(t) \left[\int_0^T \frac{N_0}{2}\delta(t-u) f_k(u) du\right] dt \\
&= \int_0^T f_k(t) \frac{N_0}{2} f_k(t) dt = \frac{N_0}{2}
\end{aligned}$$

判决表达式—步骤 1: 假设 H_1 下 x_k 的均值和方差

$$H_1: x_k = s_{1k} + n_k, \quad s_{1k} = \int_0^T s_1(t) f_k(t) dt, \quad n_k = \int_0^T n(t) f_k(t) dt$$

$$\begin{aligned}
E[x_k|H_1] &= E[s_{1k} + n_k] && \text{by } x_k = s_{1k} + n_k \\
&= E(s_{1k}) + E(n_k) && \text{by } E(n_k) = 0 \\
&= E(s_{1k}) = s_{1k} && \text{(确知信号展开系数为确定量, 其均值就是本身)} \\
Var[x_k|H_1] &= E[(x_k - E[x_k])^2] && \text{by } x_k = s_{1k} + n_k, E[x_k] = s_{1k} \\
&= E[(s_{1k} + n_k - s_{1k})^2] \\
&= E[n_k^2] = \frac{N_0}{2}
\end{aligned}$$

判决表达式—步骤 1: 假设 H_0, H_1 下 x_k 的概率密度

$$E[x_k|H_0] = s_{0k}, \quad Var[x_k|H_1] = \frac{N_0}{2}$$

$$E[x_k|H_1] = s_{1k}, \quad Var[x_k|H_1] = \frac{N_0}{2}$$

$$p(x_k|H_0) = \left(\frac{1}{\pi N_0}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{(x_k - s_{0k})^2}{N_0}\right), k = 1, 2, \cdots$$

$$p(x_k|H_1) = \left(\frac{1}{\pi N_0}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{(x_k^2 - s_{1k})^2}{N_0}\right), k = 1, 2, \cdots$$

判决表达式—步骤 2: 假设 H_0, H_1 下 $\boldsymbol{x}_N$ 的概率密度

步骤 2, 利用前 N 项展开系数, 构建似然比检验。由于信道是加性高斯白噪声, 由卡亨南—洛维展开可知, 各展开系数是不相关的, 因而也是相互独立的。

$$p(\boldsymbol{x}_N|H_0) = \prod_{k=1}^{N} p(x_k|H_0) = \prod_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{\pi N_0}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{(x_k - s_{0k})^2}{N_0}\right)$$

$$p(\boldsymbol{x}_N|H_1) = \prod_{k=1}^{N} p(x_k|H_1) = \prod_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{\pi N_0}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{(x_k - s_{1k})^2}{N_0}\right)$$

$$\boldsymbol{x}_N = (x_1, x_2, \cdots)^T$$

判决表达式—步骤 2: 似然比

$$\lambda(\boldsymbol{x}_N) = \frac{p(\boldsymbol{x}_N|H_1)}{p(\boldsymbol{x}_N|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

$$\frac{\prod\limits_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{\pi N_0}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{(x_k-s_{1k})^2}{N_0}\right)}{\prod\limits_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{\pi N_0}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{(x_k-s_{0k})^2}{N_0}\right)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

化简,得到

$$\ln\lambda(\boldsymbol{x}_N) = \frac{p(\boldsymbol{x}_N|H_1)}{p(\boldsymbol{x}_N|H_0)} = \frac{2}{N_0}\sum_{k=1}^{N}x_k s_{1k} - \frac{2}{N_0}\sum_{k=1}^{N}x_k s_{0k} + \frac{1}{N_0}\sum_{k=1}^{N}s_{0k}^2 - \frac{1}{N_0}\sum_{k=1}^{N}s_{1k}^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \ln\eta$$

判决表达式—步骤 3: 将离散判决式变成连续形式

$$\ln\lambda(\boldsymbol{x}_N)=\frac{p(\boldsymbol{x}_N|H_1)}{p(\boldsymbol{x}_N|H_0)}=\frac{2}{N_0}\sum_{k=1}^{N}x_ks_{1k}-\frac{2}{N_0}\sum_{k=1}^{N}x_ks_{0k}+\frac{1}{N_0}\sum_{k=1}^{N}s_{0k}^2-\frac{1}{N_0}\sum_{k=1}^{N}s_{1k}^2\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\ln\eta$$

步骤 3, 令 $N\to\infty$, 将离散判决式变成连续形式 因为在两个假设下接收信号 $x(t)(0\le t\le T)$ 的展开系数 $x_k(k=1,2,\cdots)$ 是无穷多个,而离散形式判决式只是取前有限 N 项的结果,因此应对上式取 $N\to\infty$ 的极限。

$$\ln\lambda(x(t))\overset{def}{=}\lim_{N\to\infty}[\ln\lambda(\boldsymbol{x}_N)]\qquad\text{(推导见简单二元信号波形检测)}$$

$$=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{2}{N_0}\sum_{k=1}^{N}x_ks_{1k}-\frac{2}{N_0}\sum_{k=1}^{N}x_ks_{0k}+\frac{1}{N_0}\sum_{k=1}^{N}s_{0k}^2-\frac{1}{N_0}\sum_{k=1}^{N}s_{1k}^2\right)$$

$$=\frac{2}{N_0}\int_0^T x(t)s_1(t)dt-\frac{2}{N_0}\int_0^T x(t)s_0(t)dt+\frac{E_0}{N_0}-\frac{E_1}{N_0}$$

$$l[x(t)]\overset{def}{=}\int_0^T x(t)s_1(t)dt-\int_0^T x(t)s_0(t)dt\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\frac{N_0}{2}\ln\eta+\frac{E_1}{2}-\frac{E_0}{2}\overset{def}{=}\gamma$$

一般二元信号波形的检测—检测系统结构

$$l[x(t)] \overset{def}{=} \int_0^T x(t)s_1(t)dt - \int_0^T x(t)s_0(t)dt \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{N_0}{2}\ln\eta + \frac{E_1}{2} - \frac{E_0}{2} \overset{def}{=} \gamma$$

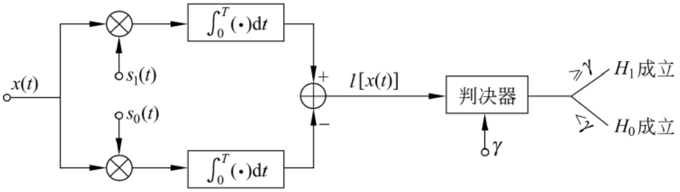
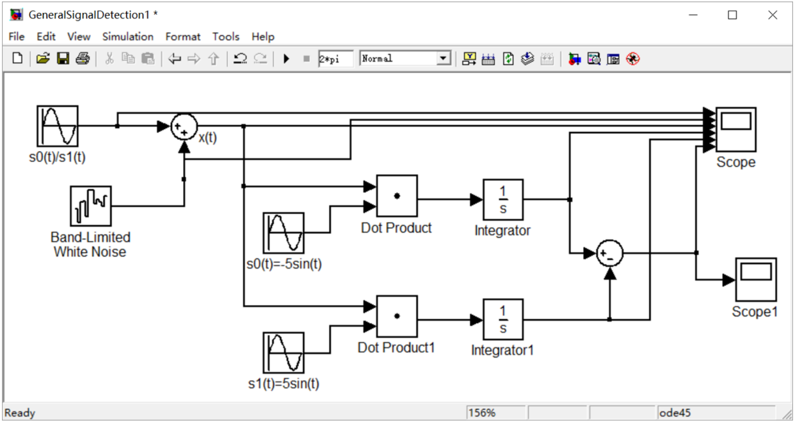


图4.12双路相关检测系统结构

检测统计量 $l[x(t)]$ 由接收信号 $x(t)$ 与确知信号 $s_0(t)$ 和 $s_1(t)$ 经相关运算得到。由互相关器和判决器实现。

检测系统 MATLAB 仿真

$$H_0 : x(t) = 5\sin(t) + n(t), \quad 0 \le t \le 2\pi$$
$$H_1 : x(t) = 5\sin(2t) + n(t), \quad 0 \le t \le 2\pi$$



接收信号 MATLAB 仿真 H_1

$$H_1 : x(t) = 5\sin(t) + n(t), \quad 0 \le t \le 2\pi$$

$5\sin(t)$

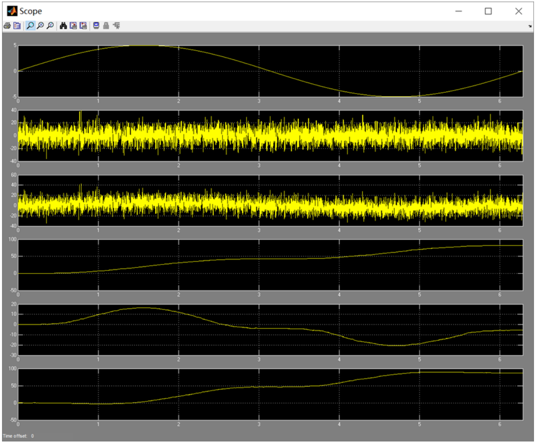
$n(t)$

$x(t)$

$\int_0^T x(t)s_1(t)dt$

$\int_0^T x(t)s_0(t)dt$

$l(x(t)]$



接收信号 MATLAB 仿真 H_0

$$H_0 : x(t) = 5\sin(2t) + n(t), \quad 0 \le t \le 2\pi$$

$5\sin(2t)$

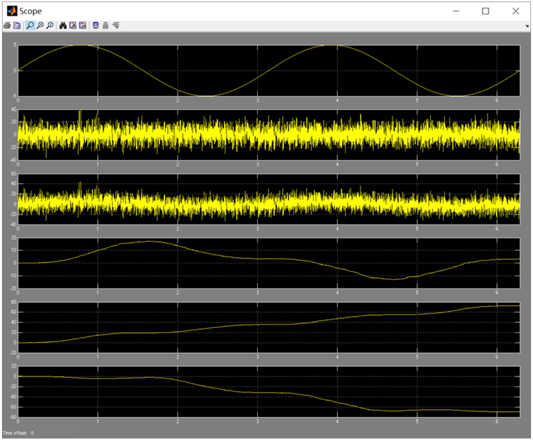
$n(t)$

$x(t)$

$\int_0^T x(t)s_1(t)dt$

$\int_0^T x(t)s_0(t)dt$

$l(x(t))$



一般二元信号波形检测—步骤归纳

1. 首先,利用随机过程的正交级数展开,将随机过程用一组随机变量来表示;
2. 然后,针对展开得到的随机变量,利用第三章的统计检测方法,构建贝叶斯检测表达式;
3. 最后,令 N 趋向于无穷大,利用展开系数与随机过程之间的表示关系,构建波形信号的检测表达式。

$$l[x(t)] \overset{def}{=} \int_0^T x(t)s_1(t)dt - \int_0^T x(t)s_0(t)dt \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{N_0}{2}\ln\eta + \frac{E_1}{2} - \frac{E_0}{2} \overset{def}{=} \gamma$$

检测系统性能分析

$$l[x(t)] \overset{def}{=} \int_0^T x(t)s_1(t)dt - \int_0^T x(t)s_0(t)dt \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{N_0}{2}\ln\eta + \frac{E_1}{2} - \frac{E_0}{2} \overset{def}{=} \gamma$$

统计量

$$l[x(t)] \overset{def}{=} \int_0^T x(t)s_1(t)dt - \int_0^T x(t)s_0(t)dt$$

两个判决概率

$$P(H_1|H_0) = \int_\gamma^\infty p(l|H_0)dl \quad P(H_1|H_1) = \int_\gamma^\infty p(l|H_1)dl$$

由于接收信号 $x(t)$ 是以高斯随机过程,所以统计量 l 为服从高斯分布的随机变量。

检测系统性能分析

统计量

$$l[x(t)] \overset{def}{=} \int_0^T x(t)s_1(t)dt - \int_0^T x(t)s_0(t)dt$$

假设 H_0 下, l 的均值和方差为 (推到见下节例题 2)

$$E[l|H_0] = E\left[\int_0^T x(t)s_1(t)dt|H_0 - \int_0^T x(t)s_0(t)dt|H_0\right] = \rho\sqrt{E_0E_1} - E_0$$

$$Var[l|H_0] = E\left\{[(l|H_0) - E[l|H_0]]^2\right\} = \frac{N_0}{2}(E_1 + E_0 - 2\rho\sqrt{E_0E_1})$$

式中, 信号 $s_0(t)$ 和 $s_1(t)$ 之间的波形相关系数 ρ 为

$$\rho \overset{def}{=} \frac{1}{\sqrt{E_0E_1}}\int_0^T s_0(t)s_1(t)dt, \quad (|\rho| \le 1)$$

检测系统性能分析

统计量

$$l[x(t)] \overset{def}{=} \int_0^T x(t)s_1(t)dt - \int_0^T x(t)s_0(t)dt$$

类似地, 假设 H_1 下, l 的均值和方差为

$$E[l|H_1] = E_1 - \rho\sqrt{E_0E_1}$$

$$Var[l|H_1] = \frac{N_0}{2}(E_1 + E_0 - 2\rho\sqrt{E_0E_1})$$

式中, 信号 $s_0(t)$ 和 $s_1(t)$ 之间的波形相关系数 ρ 为

$$\rho \overset{def}{=} \frac{1}{\sqrt{E_0E_1}} \int_0^T s_0(t)s_1(t)dt, \quad (|\rho| \le 1)$$

检测系统性能分析

定义偏移系数 d^2 为

$$d^2 \overset{def}{=} \frac{(E(l|H_1) - E(l|H_0))^2}{Var(l|H_0)} = \frac{2}{N_0}(E_1 + E_0 - 2\rho\sqrt{E_0 E_1})$$

判决概率为

$$P(H_1|H_0) \overset{def}{=} P_F = \int_{\gamma}^{\infty} p(l|H_0)dl = Q\left(\frac{\ln\eta}{d} + \frac{d}{2}\right)$$

$$P(H_1|H_1) \overset{def}{=} P_D = \int_{\gamma}^{\infty} p(l|H_1)dl = Q\left(\frac{\ln\eta}{d} - \frac{d}{2}\right)$$

最佳信号波形设计 (1)

偏移系数 d^2 和波形相关系数 ρ:

$$d^2 = \frac{2}{N_0}(E_1 + E_0 - 2\rho\sqrt{E_0E_1}), \quad \rho = \frac{1}{\sqrt{E_0E_1}}\int_0^T s_0(t)s_1(t)dt, \quad (|\rho| \le 1)$$

因为 $|\rho| \le 1$, 所以当 $\rho = -1$ 时, d^2 可取最大值。令 E_0 与 E_1 之和为常数, 则 $E_0 = E_1$ 时, E_0E_1 最大。

所以, **在高斯白噪声条件下, 对于确知一般二元信号的波形检测, 当两个信号设计成互反信号时, 可在信号能量给定的约束下获得最好的检测性能, 而与信号的波形无关**。

$$\textbf{设} \quad E_0 = E_1 = E_s, \implies \sqrt{E_0E_1} = E_s$$

如果信号设计成 $s_0(t)$ **和** $s_1(t)$ **互反:** $\quad s_0(t) = -s_1(t)$,

$$\int_0^T s_0(t)s_1(t)dt = -E_s \implies |\rho| = -1$$

$$d^2 = \frac{8}{N_0}E_s \quad \textbf{取得最大值} \implies \textbf{最佳波形设计}$$

最佳信号波形设计 (2)

偏移系数 d^2 和波形相关系数 ρ:

$$d^2 = \frac{2}{N_0}(E_1 + E_0 - 2\rho\sqrt{E_0E_1}), \quad \rho = \frac{1}{\sqrt{E_0E_1}}\int_0^T s_0(t)s_1(t)dt, \quad (|\rho| \leq 1)$$

设 $E_0 = E_1 = E_s, \implies \sqrt{E_0E_1} = E_s$

如果信号设计成 $s_0(t)$ 和 $s_1(t)$ 正交:

$$\int_0^T s_0(t)s_1(t)dt = 0 \implies \rho = 0$$

$$d^2 = \frac{4}{N_0}E_s$$

检测性能差于信号互反时的波形设计

最佳信号波形设计 (3)

偏移系数 d^2 和波形相关系数 ρ:

$$d^2 = \frac{2}{N_0}(E_1 + E_0 - 2\rho\sqrt{E_0E_1}), \quad \rho = \frac{1}{\sqrt{E_0E_1}}\int_0^T s_0(t)s_1(t)dt, \quad (|\rho| \le 1)$$

设 $E_0 = E_1 = E_s, \implies \sqrt{E_0E_1} = E_s$

如果信号设计成:

$$0 < \int_0^T s_0(t)s_1(t)dt \le E_s \implies 0 < \rho \le 1$$

$$\frac{4}{N_0}E_s > d^2 \ge 0$$

$\rho \to 1, d^2 \to 0$ **检测性能** $\downarrow$, **信号波形设计不合理!**

最佳信号波形设计

最佳波形设计 $\rho = -1, s_0(t) = -s_1(t), d^2 = \frac{8}{N_0}E_s, E_0 = E_1 = E_s$

在高斯白噪声条件下,对于确知一般二元信号的波形检测,当两个信号设计成互反信号时,可在信号能量给定的约束下获得最好的检测性能。

$s_0(t), s_1(t)$ 正交波形设计 $\rho = 0, d^2 = \frac{4}{N_0}E_s, E_0 = E_1 = E_s$

信号的检测性能差于同信号能量的反相信号。

不合理波形设计 $0 < \rho \le 1, E_0 = E_1 = E_s$

$\frac{4}{N_0}E_s > d^2 \ge 0 \implies \rho \to 1, d^2 \to 0$, 检测性能逐步变差。

检测步骤

1. 首先，利用随机过程的正交级数展开，将随机过程用一组随机变量来表示；
2. 然后，针对展开得到的随机变量，利用第三章的统计检测方法，构建贝叶斯检测表达式；
3. 最后，令 N 趋向于无穷大，利用展开系数与随机过程之间的表示关系，构建波形信号的检测表达式。

Notes

- 确知信号的正交级数展开的展开系数是一组确定的值。
- 随机过程的正交级数展开的展开系数是一组随机变量，卡亨南-洛维展开可保证展开系数之间不相关。

附：证明

证明：若 a, b 为任意两正数，当 $a+b=2\alpha$ 时，证明使 a, b 乘积最大的 a 和 b 应满足 $a=b=\alpha$。

Proof.

因为

$$(a-b)^2>0$$

所以

$$a^2-2ab+b^2\geq 0$$

即

$$ab\leq\frac{a^2+b^2}{2}$$

a, b 乘积最大为

$$ab=\frac{a^2+b^2}{2}$$

于是有联立方程

$$\begin{cases} a+b=2\alpha \\ ab=\frac{a^2+b^2}{2} \end{cases}$$

从而解得当满足 $a=b=\alpha$ 时，乘积 ab 最大。 □

欢迎批评指正！