

信号检测与估值

段江涛

机电工程学院



2019 年 7 月

主要内容

- 1 随机过程的统计平均量 (from ch2)
- 2 随机过程的平稳性
- 3 随机过程的正交性、不相关性和统计独立性
- 4 高斯噪声
- 5 课件公式

随机过程的均值 $\mu_x(t)$: 表示随机过程在 t 时刻状态取值的理论平均值

$$\mu_x(t) \stackrel{\text{def}}{=} E[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x; t)dx$$

如果 $x(t)$ 是电压或电流, 则 $\mu_x(t)$ 可以理解为在 t 时刻的“直流分量”。

随机过程的均方值 $\varphi_x^2(t)$

$$\varphi_x^2(t) \stackrel{\text{def}}{=} E[x^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x; t)dx$$

如果 $x(t)$ 是电压或电流, 则 $\varphi_x^2(t)$ 可以理解在 t 时刻它在 1Ω 电阻上消耗的“平均功率”。

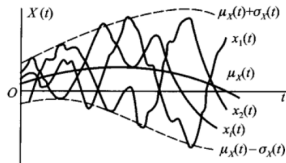
随机过程的方差/标准偏差 $\delta_x^2(t)$

$$\sigma_x^2(t) \stackrel{\text{def}}{=} E[(x(t) - \mu_x(t))^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x(t))^2 p(x; t) dx$$

方差 $\sigma_x^2(t)$ 表示随机过程在 t 时刻取其值偏离其均值 $\mu_x(t)$ 的离散程度。如果 $x(t)$ 是电压或电流, 则 $\delta_x^2(t)$ 可以理解在 t 时刻它在 1Ω 电阻上消耗的“交流功率”。

均值 $\mu_x(t)$, 均方值 $\varphi_x^2(t)$, 方差 $\delta_x^2(t)$ 之间的关系

$$\sigma_x^2(t) = \varphi_x^2(t) - \mu_x^2(t)$$



随机过程的自相关函数 $r_x(t_j, t_k)$

$$\begin{aligned} r_x(t_j, t_k) &\stackrel{\text{def}}{=} E[x(t_j)x(t_k)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_j x_k p(x_j, x_k; t_j, t_k) dx_j dx_k \end{aligned}$$

随机过程的自相关函数 $r_x(t_j, t_k)$ 可以理解为它的两个随机变量 $x(t_j)$ 与 $x(t_k)$ 之间含有均值时的相关程度的度量。显然

$$r_x(t, t) = \varphi_x^2(t)$$

随机过程的自协方差函数 $c_x(t_j, t_k)$

$$\begin{aligned} c_x(t_j, t_k) &\stackrel{\text{def}}{=} E[(x(t_j) - \mu_x(t_j))(x(t_k) - \mu_x(t_k))] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_j - \mu_x(t_j))(x_k - \mu_x(t_k)) p(x_j, x_k; t_j, t_k) dx_j dx_k \end{aligned}$$

随机过程的自协方差函数 $c_x(t_j, t_k)$ 可以理解为它的两个随机变量 $x(t_j)$ 与 $x(t_k)$ 之间的相关程度的度量。它们的自相关系数定义为

$$\rho_x(t_j, t_k) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c_x(t_j, t_k)}{\sigma_x(t_j)\sigma_x(t_k)}$$

易证

$$c_x(t_j, t_k) = r_x(t_j, t_k) - \mu_x(t_j)\mu_x(t_k)$$

$$c_x(t, t) = \sigma_x^2(t)$$

随机过程的互相关函数 $r_{xy}(t_j, t_k)$

$$\begin{aligned} r_{xy}(t_j, t_k) &\stackrel{\text{def}}{=} E[x(t_j)y(t_k)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_j y_k p(x_j, t_j; y_k, t_k) dx_j dy_k \end{aligned}$$

式中, $p(x_j, t_j; y_k, t_k)$ 是 $x(t)$ 与 $y(t)$ 的二维混合概率密度函数。

随机过程的互协方差函数 $c_{xy}(t_j, t_k)$

$$\begin{aligned} c_{xy}(t_j, t_k) &\stackrel{\text{def}}{=} E[(x(t_j) - \mu_x(t_j))(y(t_k) - \mu_x(t_k))] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_j - \mu_x(t_j))(y_k - \mu_x(t_k)) p(x_j, t_j; x_k, t_k) dx_j dy_k \end{aligned}$$

随机过程 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的互协方差函数 $c_{xy}(t_j, t_k)$ 可以理解为它们各自的随机变量 $x(t_j)$ 与 $y(t_k)$ 之间的相关程度, 实际上表示两个随机过程 $x(t)$ 与 $y(t)$ 之间的相关程度。它们的互相关系数定义为

$$\rho_{xy}(t_j, t_k) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c_{xy}(t_j, t_k)}{\sigma_x(t_j)\sigma_x(t_k)}$$

易证

$$c_{xy}(t_j, t_k) = r_{xy}(t_j, t_k) - \mu_x(t_j)\mu_y(t_k)$$

Definition (广义平稳随机过程, 简称平稳随机过程)

随机过程 $x(t)$ 的平均统计量满足

- ① $x(t)$ 的均值是与时间 t 无关的常数, 即

$$E[x(t)] = \mu_x$$

- ② $x(t)$ 的自相关函数只取决于时间间隔 $\tau = t_k - t_j$, 而与时间的起始时刻无关, 即

$$E[x(t_j)x(t_k)] = E[x(t_j)x(t_j + \tau)] = r_x(\tau)$$

平稳随机过程的统计平均量之间的关系

平稳随机过程 $x(t)$ 的均值 μ_x , 均方值 φ_x^2 , 方差 σ_x^2 , 自相关函数 $r_x(\tau)$, 自协方差函数 $c_x(\tau)$ 之间的关系

$$\sigma_x^2 = \varphi_x^2 - \mu_x^2$$

$$r_x(\tau) = r_x(-\tau)$$

$$c_x(\tau) = r_x(\tau) - \mu_x^2$$

$$c_x(\tau) = c_x(-\tau)$$

$$\varphi_x^2 = r_x(0)$$

$$\sigma_x^2 = c_x(0)$$

$$r_x(0) \geq |r_x(\tau)|, \tau \neq 0$$

$$c_x(0) \geq |c_x(\tau)|, \tau \neq 0$$

Definition (联合平稳随机过程)

设 $x(t)$ 和 $y(t)$ 分别是两个平稳的随机过程, 如果对于任意的 Δt , 有 $r_{xy}(t_j + \Delta t, t_k + \Delta t) = r_{xy}(t_j, t_k)$, 即互相关函数 $r_{xy}(t_j, t_k) = r_{xy}(\tau)$, ($\tau = t_k - t_j$) 仅与时间间隔 τ 有关, 而与 t_j 和 t_k 无关, 则称过程 $x(t)$ 与 $y(t)$ 是联合平稳的随机过程。

联合平稳随机过程 $x(t)$ 与 $y(t)$ 的互协方差函数

$$c_{xy}(t_j, t_k) = c_{xy}(\tau) = r_{xy}(\tau) - \mu_x \mu_y, \tau = t_k - t_j$$

互相关系数:

$$\rho_{xy}(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c_{xy}(t_j, t_k)}{\sigma_x(t_j)\sigma_y(t_k)} = \frac{c_{xy}(\tau)}{\sigma_x \sigma_y}$$

$$r_{xy}(\tau) = r_{yx}(-\tau)$$

$$c_{xy}(\tau) = c_{yx}(-\tau)$$

Definition

设 $x(t_j)$ 和 $x(t_k)$ 是随机过程 $x(t)$ 的任意两个不同时刻的随机变量, 其均值分别为 $\mu_x(t_j)$ 和 $\mu_x(t_k)$, 自相关函数 $r_x(t_j, t_k)$, 自协方差函数为 $c_x(t_j, t_k)$ 。如果

$$r_x(t_j, t_k) = 0, j \neq k$$

则称 $x(t)$ 是相互正交的随机变量过程。如果

$$c_x(t_j, t_k) = 0, j \neq k$$

则称 $x(t)$ 是互不相关的随机变量过程。等价条件:

$$c_x(t_j, t_k) = r_x(t_j, t_k) - \mu_x(t_j)\mu_x(t_k), j \neq k \implies r_x(t_j, t_k) = \mu_x(t_j)\mu_x(t_k), j \neq k$$

Definition

如果 $x(t)$ 是平稳随机过程,
相互正交:

$$r_x(\tau) = 0, \tau = t_k - t_j$$

互不相关:

$$c_x(\tau) = 0, \tau = t_k - t_j$$

互不相关的等价条件

$$r_x(\tau) = \mu_x^2, \tau = t_k - t_j$$

Definition

设 $x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_N)$ 是随机过程 $x(t)$ 在不同时刻 $t_k (k = 1, 2, \dots, t_N)$ 的随机变量, 如果其 N 维联合概率密度函数对于任意的 $N \geq 1$ 和所有时刻 $t_k (k = 1, 2, \dots, N)$ 都能够表示成各自一维概率密度函数之积的形式, 即

$$\begin{aligned} & p(x_1, x_2, \dots, x_N; t_1, t_2, \dots, t_N) \\ &= p(x_1; t_1) p(x_2; t_2) \cdots p(x_N; t_N) \end{aligned}$$

则称 $x(t)$ 是相互统计独立的随机变量过程。

随机过程的正交性、不相关性和统计独立性

- ① 均值 $\mu_x(t_j) = 0, \mu_x(t_k) = 0$ 则, 相互正交 \Leftrightarrow 互不相关
- ② 相互统计独立 \Rightarrow 互不相关
- ③ 互不相关 \nRightarrow 相互统计独立。但是若 $x(t)$ 服从联合高斯分布, 则互不相关 \Leftrightarrow 相互统计独立

中心极限定理

在一般条件下, N 个相互统计独立的随机变量 n_i 之和 $n = \sum_{k=1}^N n_k$, 在 $N \rightarrow \infty$ 的极限情况下, 其概率密度趋于高斯分布, 而不管每个变量 n_k 的具体分布如何。

高斯噪声一维概率密度函数

$$p(n_k; t_k) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_{n_k}^2}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{(n_k - \mu_{n_k})^2}{2\sigma_{n_k}^2}\right]$$

其中, μ_{n_k} 为 $n(t_k)$ 的均值, σ_{n_k} 为 $n(t_k)$ 的方差。

高斯噪声 N 维联合概率密度函数

高斯噪声的 N 维矢量记为

$$(\mathbf{n}; \mathbf{t}) = (n(t_1), n(t_2), \dots, n(t_N))^T$$

其 N 维联合概率密度函数为

$$\begin{aligned} p(\mathbf{n}; \mathbf{t}) &= p(n_1, n_2, \dots, n_N; t_1, t_2, \dots, t_N) \\ &= \left(\frac{1}{(2\pi)^{N/2} |\mathbf{C}_n|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{n} - \boldsymbol{\mu}_n)^T \mathbf{C}_n^{-1} (\mathbf{n} - \boldsymbol{\mu}_n)\right] \right) \end{aligned}$$

其中, $\boldsymbol{\mu}_n$ 是高斯随机矢量 $(\mathbf{n}; \mathbf{t})$ 的均值矢量, \mathbf{C}_n 为协方差矩阵。

不相关性与统计独立性

互不相关 \nRightarrow 相互统计独立。但是若 $x(t)$ 服从联合高斯分布, 则互不相关 \Leftrightarrow 相互统计独立

白噪声的功率谱密度

$$p_n(\omega) = \frac{N_0}{2}$$

功率谱密度均匀分布在整个频率轴上

白噪声的自相关函数

$$r_n(\tau) = IFT\left[\frac{N_0}{2}\right] = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$$

白噪声也可定义为均值为零、自相关函数 $r_n(\tau)$ 为 δ 的噪声随机过程。

重要特性

白噪声在频域上其功率谱密度是均匀分布的,时域上自相关函数 $r_n(\tau)$ 是 δ 函数。任意两个不同时刻的随机变量 $n(t_j)$ 与 $n(t_k)$, ($\tau = t_j - t_k \neq 0$) 是不相关的。

高斯白噪声

时域的随机变量的概率密度函数是高斯分布的,频域功率谱密度是均匀分布的噪声过程称为高斯白噪声。高斯白噪声的重要特性:任意两个或两个以上不同时刻 t_1, t_2, \dots, t_N 的随机变量 $n(t_k) (k = 1, 2, \dots, N)$ 是互不相关且统计独立的。

有色噪声的功率谱密度

$$P_n(f) = P_0 \exp\left[-\frac{(f-f_0)^2}{2\sigma_f^2}\right]$$

均值 f_0 代表频谱的中心频率,方差 σ_f^2 反映噪声的谱宽度。 $\omega = 2\pi f$

$$\int_0^T a^2 \sin^2(\omega t) dt = \frac{a^2 T}{2}$$

$$\begin{aligned} E_s &= \int_0^T s^2(t) dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_1^N s_k f_k(t) \\ &= \int_0^{2\pi} (5 \sin(t))^2 dt \\ &= \int_0^{2\pi} (5 \sin(t))^2 dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mu_x(t) &\stackrel{\text{def}}{=} E[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x; t)dx \\
 E\left[\int_0^T x(t)f_k(t)dt\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^T x(t)f_k(t)dt p(x; t)dx \\
 &= \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} x(t)f_k(t)p(x; t)dxdt \\
 &= \int_0^T \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t)p(x; t)dx\right)f_k(t)dt \\
 &= \int_0^T E[x(t)]f_k(t)dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Var}[x_k|H_0] &= E[n_k^2] = E\left[\int_0^T n(t)f_k(t)dt \int_0^T n(u)f_k(u)du\right] \\
 &= \int_0^T f_k(t) \int_0^T E[n(t)n(u)]f_k(u)dudt && \text{by } E[n(t)n(u)] = r_n(t-u) \\
 &= \int_0^T f_k(t) \int_0^T \frac{N_0}{2}\delta(t-u)f_k(u)dudt && \text{by } r_n(t-u) = \frac{N_0}{2}\delta(t-u) \\
 &= \int_0^T f_k(t) \frac{N_0}{2}f_k(t)dt \\
 &= \frac{N_0}{2}
 \end{aligned}$$

欢迎批评指正！