信号检测与估值

段江涛
机电工程学院

2019 年 9 月

ch2. 信号检测与估计理论的基础知识

概率论简单回顾

随机现象

随机现象:

落叶的运动轨迹, 气泡的扩散, 灯泡的寿命

随机现象特点

- 至少两种可能
- 不确定性

概率论中的三个组成部分

- 样本空间 Ω
- 事件域 $\mathcal{F}$
- 概率 P

- **样本空间** Ω:一个随机试验所有可能出现的结果的全体,称为随机事件的样本空间。
  每一个可能的结果称为基本事件,它们的全体就是样本空间。
- **样本点** ξ_k:随机试验的一个结果,就是某个基本事件,也就是 Ω 中的一个元素。
  $\Omega = \{\xi_k | k = 1, \dots, n\}$
- **随机事件** A: 样本空间中的某个子集称为随机事件,简称事件 (事件是集合)。
- **事件域** $\mathcal{F}$: 样本空间中的某些子集构成的满足如下条件的集合,称为事件域 (又称 σ^- 域)。
  (1) $\Omega \in \mathcal{F}$
  (2) 若 $A \in \mathcal{F}$, 则 A 的补 $\overline{A} \in \mathcal{F}$
  (3) 若 $A_n \in \mathcal{F}, n = 1, 2, \dots,$ 则 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

Example

一个盒子中有 10 个相同的球,5 个白色,5 个黑色,搅匀后从中任意摸取一球。

样本点: $\xi_1 = \{$取得白球$\}, \xi_2 = \{$取得黑球$\}$

样本空间: $\Omega = \{\xi_1, \xi_2\}$

Example

一个盒子中有 10 个相同的球,编号 1,2,...,10, 从中取一球。

样本空间: $\Omega = \{1, 2, \ldots, 10\}$

随机事件: $A = \{6$ 号球$\} = \{6\}, B = \{$偶数编号球$\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$,

$\overline{B} = \{$奇数编号球$\}$,$C = \{$编号小于等于 5 的球$\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

事件 A 是基本事件,而 B 和 C 则由多个基本事件所组成,并且 $A, B, C \subset \Omega$。

空集 $\emptyset$ 可以看作 Ω 的子集,在任意一次试验中不可能有此事件发生,称为不可能事件。

事件 A 的概率 $P(A)$

事件域中的元素就是随机事件。如果这些事件的随机性能够由定义在事件域 $\mathcal{F}$ 上的具有非负性,归一性和可列加性的实函数 $P(A)$ 来确定,则称 P 是定义在二元组 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的概率,而称 $P(A)$ 为事件 A 的概率。

(1) 非负性。$P(A) \geq 0$

(2) 归一性。$P(\Omega) = 1$

(3) 可列加性。$A_1, A_2, ..., A_n$ 互不相容 $(A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j)$,则
$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

等可能概型 (古典概型)

- 样本空间的元素 (即基本事件) 只有有限个,不妨设为 n 个,
  $\Omega = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$
- 每个基本事件出现的可能性是相等的,即有 $P(\xi_1) = P(\xi_2) = \cdots = P(\xi_n)$
- 事件域 $\mathcal{F}$ 为 Ω 的所有子集的全体,即是 $Pwr(\Omega)$, Ω 的幂集,共有 2^n 个事件,
  $\emptyset \in \mathcal{F}, \Omega \in \mathcal{F}$。
- 由概率的有限可加性知
  $1 = P(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i) \implies P(\xi_i) = \frac{1}{n}, (i = 1, \ldots, n)$
- 对任意一个随机事件 $A \subseteq \mathcal{F}$, 如果 A 是 k 个基本事件的和,即
  $A = \{\xi_{i_1}\} \cup \{\xi_{i_2}\} \cup \cdots \cup \{\xi_{i_k}\}$, 则

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{A\text{ 中所包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}$$

Example

将一枚硬币抛掷 3 次,(1) 设事件 A_1 为“恰有一次出现正面”, 求 $P(A_1)$; (2) 设事件 A_2 为“至少一次出现正面”, 求 $P(A_2)$。

1. 正面用 H 表示, 反面用 T 表示。则
   样本空间 $\Omega = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$
   事件 $A_1 = \{HTT, THT, TTH\}$。
   Ω 中包含有限个元素, 且由对称性知, 每个基本事件发生的可能性相同。所以, $P(A_1) = \frac{3}{8}$。
2. 由于 $\overline{A_2} = \{TTT\}$, 于是
   $P(A_2) = 1 - P(\overline{A_2}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

样本空间的选取

为求一个事件的概率,样本空间可以有不同的取法,但一定要保证基本事件和求概事件数的计算都要在**同一个样本空间**中进行,否则会导致谬误!

Example

一个盒子中有 10 个相同的球,编号 1,2,...,10, 从中取一球,求此球的号码为偶数的概率。

样本空间 $\Omega = \{1, 2, \ldots, 10\}$

事件 $A = \{\text{偶数编号球}\} = \{2\} \cup \{4\} \cup \{6\} \cup \{8\} \cup \{10\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$。

$P(A) = \frac{|A|}{n} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

另外一种解法:

$\Omega = \{A, \overline{A}\}, A = \{\text{编号为偶数的球}\}, \overline{A} = \{\text{编号为奇数的球}\}, \mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, A, \overline{A}\}$, 由 $A, \overline{A}$ 的对称性, 即得 $P(A) = \frac{1}{2}$

样本空间的选取

Notes

- 两种解法的样本空间 Ω 不同 (从而事件域 $\mathcal{F}$ 是不同的)。
  1. $\Omega = \{1, 2, \ldots, 10\}$
  2. $\Omega = \{A, \overline{A}\}$
- 严格地说,两者所描述的随机试验是不同的。
  例如对于第二种解法来说,$B = \{$号码为 4 的球$\}$ 并不属于事件域 $\mathcal{F}$, 就是说 B 不是一个事件,从而也就没有概率可言。
  但对第一种解法,B 是事件,而且 $P(B) = \frac{1}{10}$。
- 一定要保证基本事件和求概事件数的计算都要在**同一个样本空间**中进行。

条件概率

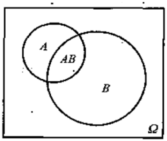
Definition

若 $\Omega, \mathcal{F}, P$ 是一个概率空间, $B \in \mathcal{F}$, 且 $P(B) > 0$, 则对任意的 $A \in \mathcal{F}$, 称

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

为在已知事件 B 发生的条件下, 事件 A 发生的条件概率。

$$P(A|B) = \frac{S_{AB}}{S_B} = \frac{S_{AB}/S_\omega}{S_B/S_\omega} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$



条件概率的性质及其推论

条件概率 $P(\bullet|B)$ 的具备概率的三个基本性质

1. 非负性: 对任意的 $A \in F, P(A|B) \geq 0$;
2. 规范性: $P(\Omega|B) = 1$;
3. 可列加性: 对任意的一列两两互不相容的事件 $A_i(i = 1, 2, \ldots)$, 有

$$P\left[\bigcup_{i=1}^{+\infty}(A_i|B)\right] = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i|B)$$

Corollary

概率的乘法公式: $P(AB) = P(B)P(A|B)$

Corollary

$$P(A_1A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \cdots P(A_n|A_1A_2 \cdots A_{n-1})$$

Example

一个家庭中有两个小孩,已知其中有一个是女孩,问这时另一个小孩也是女孩的概率有多大?

Ω ={(男, 男),(男, 女),(女, 男),(女 ,女)}

A ={已知有一个是女孩}={(男, 女),(女, 男),(女, 女)}

B ={另一个也是女孩}={(女, 女)}

于是所求概率为

$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$

概率树/全概率公式

概率树思想:为了求解复杂事件的概率,往往可以先把它分解成两个 (或若干个) 互不相容的较简单的事件之并。求出这些较简单事件的概率,再利用加法公式即得所要求的复杂事件的概率。把这个方法一般化,便的到下述定理。

Theorem

设 $B_1, B_2, \cdots$ 是一列互不相容的事件,且有

$$\bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i = \Omega, P(B_i) > 0$$

则对任一事件 A, 有

$$P(A) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(B_i) P(A|B_i)$$

Example

某工厂有 4 条流水线生产同一种产品, 该 4 条流水线的产品分别占总产量的 15%, 20%, 30%, 35%, 又这 4 条流水线的不合格品率依次为 0.05, 0.04, 0.03 及 0.02. 现从出厂产品中任取一件, 问

1. 恰好抽到不合格品的概率为多少?
2. 第 4 条流水线应承担的责任?

解: (1) 令

$$A = \{\text{任取一件,恰好抽到不合格品}\}$$

$$B = \{\text{任取一件,恰好抽到第 } i \text{ 条流水线的产品}, (i = 1, 2, 3, 4)\}$$

则, $B_i \cap B_j = \emptyset, i \neq j, \bigcup\limits_{i=1}^{4} B_i = \Omega, P(B_i) > 0$, 于是由全概率公式可得

$$P(A) = \sum_{i=1}^{4} P(B_i)P(A|B_i) = 0.15 \times 0.05 + 0.20 \times 0.04 + 0.30 \times 0.03 + 0.35 \times 0.02$$

$$= 0.0315 = 3.15\%$$

实际上,$P(A|B_i)$ 可以从过去生产的产品中统计出来,称为**先验概率**。

(2) 从概率论的角度考虑可以按 $P(A|B_i)$ 的大小来追究第 i 条 $i = 1, 2, 3, 4$ 流水线的责任。

$P(AB_4) = P(B_4)P(A|B_4) = 0.35 \times 0.02 = 0.007$

由条件概率的定义知

$$P(B_4|A) = \frac{P(AB_4)}{P(A)} = \frac{P(B_4)P(A|B_4)}{\sum\limits_{i=1}^{4} P(B_i)P(A|B_i)} = \frac{0.007}{0.0315} \approx 0.222$$

相互独立事件

条件概率: 已知事件 A 发生的条件下, 事件 B 发生的概率为 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$

一般的概率乘法公式: $P(AB) = P(A)P(B|A)$

如果 “事件 B 发生与否不受事件 A 的影响”: $P(B) = P(B|A)$

乘法公式变为: $P(AB) = P(A)P(B)$

Definition

对任意的两个事件 A,B, 若

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

成立, 则称事件 A,B 是相互独立的, 简称为独立的。

依这个定义, 不难验证:

若 A 与 B 相互独立, 则 $\{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\}$ 中的任意一个与 $\{\emptyset, B, \overline{B}, \Omega\}$ 中的任意一个仍相互独立。

分别掷两枚均匀的硬币,令

$$A = \{\text{硬币甲出现正面}\} \quad B = \{\text{硬币乙出现正面}\}$$

验证事件 A, B 是相互独立的。

Proof.

$$\text{样本空间}\Omega = \{(\text{正},\text{正}),(\text{正},\text{反}),(\text{反},\text{正}),(\text{反},\text{反})\}$$

共还有 4 个基本事件, 它们是等可能的,各有概率为 1/4, 而

$$A = \{(\text{正},\text{正}),(\text{正},\text{反})\}$$

$$B = \{(\text{正},\text{正}),(\text{反},\text{正})\}$$

$$AB = \{\text{正},\text{正}\}$$

由此知

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$$

这时有

$$P(AB) = \frac{1}{4} = P(A)P(B)$$

成立,所以 A, B 事件是相互独立的。 □

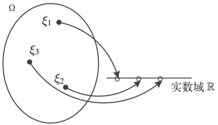
Definition

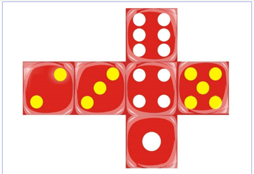
设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是一概率空间,$X = X(\xi), \xi \in \Omega$ 是定义在 Ω 上的单值实函数,如果对任一实数 x, 集合 $\{\xi | X(\xi) \le x\} \in \mathcal{F}$ 则称 $X = X(\xi)$ 为 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的一个**随机变量**。

随机变量 $X(\xi)$ 的定义域为样本空间 Ω, 它的值域是实数域 $\mathbb{R}$。所以, 随机变量 $X(\xi)$ 实际上是一个映射,这个映射为每个来自概率空间的结果 (样本点)ξ 赋予一个实数 x。这种映射必须满足条件:

(1) 对任一 x, 集合 $\{\xi | X(\xi) \le x\} \in \mathcal{F}$(即, 使得 $X(\xi) \le x$ 的所有样本点 ξ 所组成的集合) 是这个概率空间中的一个事件,并有确定的概率 $P\{X(\xi) \le x\}$;

(2) $P\{X(\xi) = \infty\} = 0, P\{X(\xi) = -\infty\} = 0$





Example

将一枚硬币抛掷 3 次, 正面用 H 表示, 反面用 T 表示, 则样本空间

$$\Omega = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$$

令随机变量 $X(\xi)$ 表示投掷得到正面的总数。则

$$X = X(\xi) = \begin{cases} 3, & \xi = \{HHH\} \\ 2, & \xi = \{HHT, HTH, THH\} \\ 1, & \xi = \{HTT, THT, TTH\} \\ 0, & \xi = \{TTT\} \end{cases}$$

$X = 2$, 对应样本点的集合 $A = \{HHT, HTH, THH\}$, 是一个事件, 其概率 $P\{X = 2\} = P(A) = 3/8$。类似地有

$$P\{X \leq 1\} = P\{\{X = 0\} \cup \{X = 1\}\} = P\{HTT, THT, TTH, TTT\} = \frac{1}{2}$$

随机变量的取值随试验的结果而定, 而试验的各个结果出现有一定的概率, 因而随机变量的取值有一定的概率。

Definition

设 $X = X(\xi)$ 是随机变量, 若 L 是一个实数集合, $L \subseteq \mathbb{R}$, 将 X 在 L 上取值写成 $\{X \in L\}$. 它表示事件 $B = \{\xi | X(\xi) \in L\}$. 即 B 是由 Ω 中使得 $X(\xi) \in L$ 的所有样本点 $\{\xi\}$ 所组成的事件, 此时有

$$P\{X \in L\} = P(B) = P\{\xi | X(\xi) \in L\}$$

Notes

随机变量 $X = X(\xi)$ 就是试验结果 (即样本点) 和实数之间的一一对应关系。虽然在试验之前不能肯定随机变量 $X = X(\xi)$ 会取哪一个数值, 但是对于任一实数 a, 我们可以研究 $\{X = X(\xi) = a\}$ 发生的概率, 也就是 $X(\xi)$ 取值的统计规律。

随机变量的分布函数

Definition

设 X 是随机变量, 对 $\forall x \in \mathbb{R}$, 称函数

$$F(x) = P\{X \leq x\}, -\infty < x < \infty$$

为随机变量 X 的**一维 (累积) 分布函数** [(cumulative) distribution function]。

对于任意实数 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 有

$$P\{x_1 < X \leq x_2\} = P\{X \leq x_2\} - P\{X \leq x_1\} = F(x_2) - F(x_1)$$

Notes

如果将 X 看成是数轴上的随机点的坐标, 那么, 分布函数 $F(x)$ 在 x 处的函数值就表示 X 落在区间 $(-\infty, x]$ 上的概率。

分布函数性质

1. 单调不减性: 对 $\forall x_1 < x_2$, 恒有 $F(x_1) \le F(x_2)$

   对于任意实数 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 有

$$F(x_2) - F(x_1) = P\{x_1 < X \le x_2\} \ge 0$$

2. 规范性: $0 \le F(x) \le 1$, 且

$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$

3. 右连续性: 对 $\forall x_0$, 恒有 $F(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0^+} F(x) = F(x_0)$

几何说明

将 $X \in [0, x]$ 的端点 x 沿数轴无限向左移动 (即 $x \to -\infty$), 则 “随机点 X 落在点 x 左边” 这一事件趋于不可能事件, 从而概率趋于 0, 即有 $F(-\infty) = 0$;

将 $X \in [0, x]$ 的端点 x 沿数轴无限向右移动 (即 $x \to \infty$), 则 “随机点 X 落在点 x 左边” 这一事件趋于必然事件, 从而概率趋于 1, 即有 $F(\infty) = 1$;

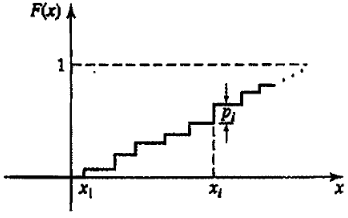
随机变量的概率密度函数 $p(x)$

Definition

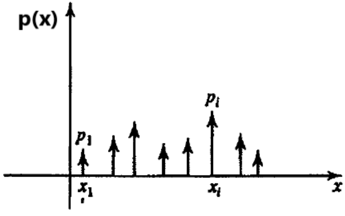
设连续随机变量 X 的**一维累积分布函数**为 $F(x)$, 如果 $F(x)$ 对 x 的一阶导数存在, 则有

$$p(x) \overset{def}{=} \frac{dF(x)}{dx}$$

式中, $p(x)$ 称为随机变量 $X = X(\xi)$ 的**一维概率密度函数**, 简称概率密度函数 (probability density function, p.d.f)



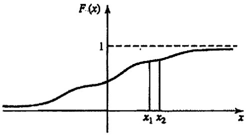
(a)

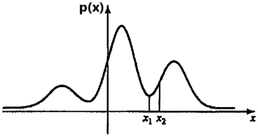


(b)

随机变量概率密度函数 $p(x)$ 的性质

1. 根据随机变量 $X(\xi)$ 的 $p(x)$ 与 $F(x)$ 的关系, 有
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(u)du$$
2. 对所有 x, p(x) 是非负函数, 即
$$p(x) \geq 0, \quad -\infty < x < +\infty$$
3. $p(x)$ 对 x 的全域积分结果等于 1, 一般表示为
$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$$
4. 随机变量 $X(\xi)$ 落在区间 $[x_1, x_2]$ 内的概率为
$$P\{x_1 < x(\xi) \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx$$





Definition (离散型随机变量)

定义在样本空间 Ω 上,取值于实数域 $\mathbb{R}$, 且只取有限个或可列个值的变量 $X = X(\xi)$, 称作是**一维 (实值) 离散型随机变量**。

Definition (离散型随机变量的概率)

设离散型随机变量 X 所有可能取的值为 $x_k(k = 1, 2, \ldots)$, X 取各个可能值的概率, 即事件 $\{X = x_k\}$ 的概率为

$$P\{X = x_k\} = p_k, k = 1, 2, \ldots$$

由概率的定义, p_k 满足如下两个条件:

1. $p_k \geq 0, k = 1, 2, \ldots$
2. $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$

   因为 $\{X = x_1\} \cup \{X = x_2\} \cup \cdots$ 是必然事件, 且

   $\{X = x_j\} \cap \{X = x_k\} = \emptyset, k \neq j$ 故

$$1 = P[\bigcup_{k=1}^{\infty} \{X = x_k\}] = \sum_{k=1}^{\infty} P\{X = x_k\} = 1$$

离散型随机变量 X 的分布律

离散型随机变量 X 的分布律的解析表达式:

$$P\{X = x_k\} = p_k, k = 1, 2, \dots$$

可用表格形式表示如下:

离散型随机变量 X 的分布律

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

Example

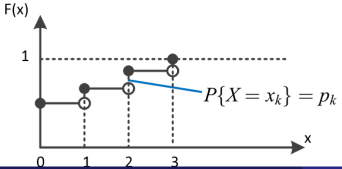
某产品 40 件, 其中次品 3 件, 现从中任取 3 件。(1) 求取出的 3 件产品中所含次品数 X 的分布律; (2) 求取出的产品中至少有一件次品的概率; (3) 求离散型随机变量 X 的分布函数 $F(x)$。

解:

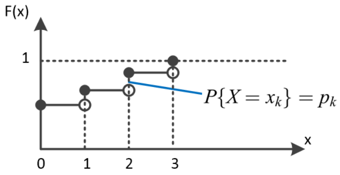
(1)
$$P\{X=0\}=\frac{C_{37}^3}{C_{40}^3}=0.7865 \qquad P\{X=1\}=\frac{C_3^1C_{37}^2}{C_{40}^3}=0.2022$$
$$P\{X=2\}=\frac{C_3^2C_{37}^1}{C_{40}^3}=0.0112 \qquad P\{X=3\}=\frac{C_3^3}{C_{40}^3}=0.0001$$

(2) $P\{X\geq 1\}=1-P\{X=0\}=1-0.7865=0.2135$

(3) 由分布函数定义得: $F(x)=P\{X\leq x\}=\begin{cases}0, & x<0\\ 0.7865, & 0\leq x<1\\ 0.9887, & 1\leq x<2\\ 0.9999, & 2\leq x<3\\ 1, & x\geq 3\end{cases}$



由 $F(x)$ 的图示看到, $F(x)$ 是一个阶梯状的右连续函数 $(F(x+0)=F(x))$, 在 $x=k$ 处有跳跃, 跃度为在 $X=k$ 处的概率 $p_k=P\{X=k\}$。



由随机变量 X 的分布函数 $F(x)$, 可以计算

$$P(X \le x) = F(x)$$
$$P(X = x) = F(x) - F(x-0)$$
$$P(X < x) = F(x-0)$$
$$P(X > x) = 1 - F(x)$$
$$P(X \ge x) = 1 - F(x-0)$$

进一步,形如 $\{x_1 \le X \le x_2\}, \{x_1 < X < x_2\}\{x_1 < X \le x_2\}, \{x_1 \le X < x_2\}$ 等一些事件及它们经过有限次或可列次并、交、差运算以后的概率,都可以由 $F(x)$ 计算出来。

$F(x)$ 全面地描述了随机变量 X 的统计规律。

狄拉克函数 (Dirac 函数/δ—函数)

Definition (δ—函数)

对于任意的无穷次可微的函数 $f(t)$, 如果满足:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t)dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t)f(t)dt$$

其中:

$$\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{\varepsilon}, & 0 \geq t < \varepsilon \\ 0, & t > \varepsilon \end{cases}$$

则称 $\delta_\varepsilon(t)$ 的弱极限为 δ 函数, 记为 $\delta(t)$ 显然, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 有:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t)dt = \int_0^\varepsilon \frac{1}{\varepsilon}dt = 1 \implies \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

狄拉克函数 (Dirac 函数/δ—函数)

注

1. $\delta(t)$ 在 $t=0$ 点的取值为 ∞, 在 $t\neq 0$ 点的取值为 0, 并且满足 $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1$。
2. 工程 (信号处理等) 上 δ—函数也称为**单位脉冲或单位冲激函数**。

δ—函数的筛选性质

若 $f(t)$ 为无穷次可微的函数, 则有:$\int_I \delta(t)f(t)dt=f(0)$

其中 I 是包含点 $t=0$ 的任意区间。特殊地, 有:$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)f(t)dt=f(0)$

更一般地,我们有:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)f(t)dt=f(t_0)$$

离散型随机变量分布律的 δ—函数表示

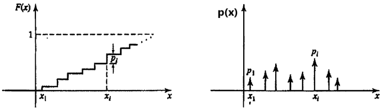
设离散型随机变量 X 的分布律为: $P\{X=x_i\}=p_i, i=1,2,\ldots,$ 则由 δ—函数的筛选性质可以定义离散型随机变量 X 的概率密度函数为:

$$p(x)=\sum_{i=0}^{\infty}p_i\delta(x-x_i)$$

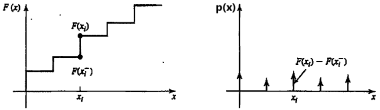
因为, 由 δ—函数的筛选性质, 离散型随机变量 X 的分布函数可以表示为:

$$F(x)=P\{X\le x\}=\sum_{x_i\le x}p_i=\int_{-\infty}^{x}\sum_{i=1}^{\infty}p_i\delta(u-x_i)du$$

$$P\{X=x_i\}=F(x_i)-F(x_i^-)=p_i$$



(a) (b)



离散型随机变量与连续性随机变量的统一

工程上,常用离散型随机变量分布律的 δ—函数表示法,将离散型随机变量的分布律表示成概率密度函数的形式,因此与连续型随机变量的概率密度函数 $p(x)$ 一样进行统一处理。

$$P\{x_1 < X \leq x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx$$

离散型随机变量:

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \sum_{x_i \leq x} p_i = \int_{-\infty}^{x} \sum_{i=1}^{\infty} p_i \delta(u - x_i)du$$

$$p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i \delta(x - x_i)$$

连续型随机变量:

$$p(x) \overset{def}{=} \frac{dF(x)}{dx}, \quad F(x) = P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^{x} p(u)du$$

Example

抛掷一枚硬币: 样本空间: $\Omega = \{H, T\}$, H 表示正面, T 表示反面。正面的概率 p, 反面的概率 q. 定义随机变量 $X = X(\xi), \xi \in \Omega$ 满足:

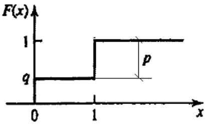
$$X(\xi = H) = 1 \qquad X(\xi = T) = 0,$$

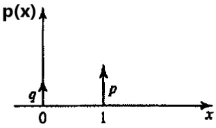
求分布函数 $F(x)$ 和概率密度函数 $p(x)$, 其中: $-\infty < x < \infty$.

$$P\{X = 0\} = q, \quad P\{X = 1\} = p$$

$$F(x) = P\{X \le x\} = \sum_{x_i \le x} p_i = \int_{-\infty}^{x} \sum_{i=1}^{\infty} p_i \delta(u - x_i) du$$

$$p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i \delta(x - x_i)$$





X

Example

事件 A, 试验的样本空间: $\Omega = \{A, \overline{A}, \emptyset\}$. 定义随机变量 $X = X(\xi)$, 满足:

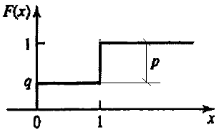
$$X(\xi) = 1, \quad \xi \in A$$

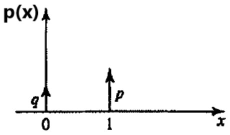
$$X(\xi) = 0, \quad \xi \in \overline{A}$$

$$P\{X = 1\} = P(A) = p, \quad P\{X = 0\} = P(\overline{A}) = q = 1 - p$$

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \sum_{x_i \leq x} p_i = \int_{-\infty}^{x} \sum_{i=1}^{\infty} p_i \delta(u - x_i) du$$

$$p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i \delta(x - x_i)$$





Example

抛掷两枚硬币: 随机变量 $X = X(\xi)$ 表示正面数目。

样本空间: $\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$, H 表示正面, T 表示反面。

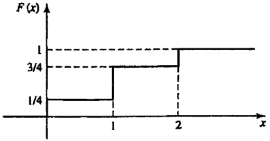
随机变量 $X(HH) = 2, \quad X(HT) = 1, \quad X(TH) = 1, \quad X(TT) = 0$

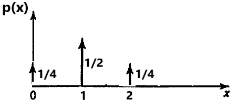
求 $F(x)$ 和 $p(x)$.

$$P\{X=0\} = \frac{1}{4}, \quad P\{X=1\} = \frac{2}{4}, \quad P\{X=2\} = \frac{1}{4}$$

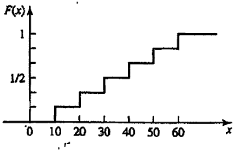
$$F(x) = P\{X \le x\} = \sum_{x_i \le x} p_i = \int_{-\infty}^{x} \sum_{i=1}^{\infty} p_i \delta(u - x_i) du$$

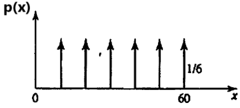
$$p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i \delta(x - x_i)$$

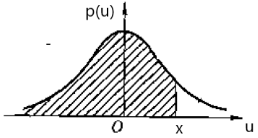




掷一枚骰子, 样本空间: $\Omega = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6\}$。定义随机变量 $X = X(\xi), \xi \in \Omega$ 满足:$X(\xi_i) = 10i$ 求 $F(x)$ 和 $p(x)$, 其中: $-\infty < x < \infty$.







边缘概率分布: $P\{X(\xi) = 10\} = P\{X(\xi) = 20\} = \cdots = p_i = \dfrac{1}{6} \qquad i = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

概率密度函数: $p(x) = \sum_{i=1}^{x} p_i \delta(x - X(\xi_i))$

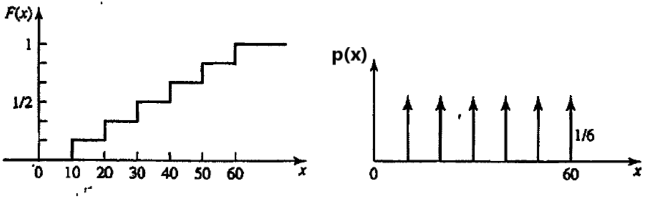
对于离散型随机变量 $X(\xi)$:

$$F(x) = P\{X(\xi) \le x\} = \sum_{i=1}^{x} p_i$$

离散型随机变量 $X(\xi)$ 和连续性随机变量 $X(\xi)$ 的完美统一:

$$F(x) = P\{X(\xi) \le x\} = \int_{-\infty}^{x} p(u) du = \int_{1}^{x} \sum_{i=1}^{x} p_i \delta(x - X(\xi_i)) du$$

掷一枚骰子, 样本空间: $\Omega = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6\}$。定义随机变量 $X = X(\xi), \xi \in \Omega$ 满足:$X(\xi_i) = 10i$ 求 $F(x)$ 和 $p(x)$, 其中: $-\infty < x < \infty$.



$$F(100) = P\{X(\xi) \geq 60\} = P(\Omega) = 1$$

$$F(35) = P\{X(\xi) \leq 35\} = P\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\} = \frac{3}{6}$$

$$F(30.01) = P\{X(\xi) \leq 30.01\} = P\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\} = \frac{3}{6}$$

$$F(30) = P\{X(\xi) \leq 30\} = P\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\} = \frac{3}{6}$$

$$F(29.9) = P\{X(\xi) \leq 29.9\} = P\{\xi_1, \xi_2\} = \frac{2}{6}$$

ch2. 信号检测与估计理论的基础知识

概率论简单回顾

欢迎批评指正！