信号检测与估值

段江涛

机电工程学院

西安电子科技大学
XIDIAN UNIVERSITY

2019 年 8 月

ch2. 信号检测与估计理论的基础知识

随机过程引例 (1)

Example

考察 $[0, t_0]$ 时间内某网站收到的访问次数 $X(t_0)$, $X(t_0)$ 则是一个随机变量。

- 如果要长时间内该网站的访问次数, 则需要让 t 变化起来, 即 t 趋于无穷大, 则 $X(t)$ 是一簇随机变量.
- 此时 $X(t)$ 是与时间有关系的随机变量, 称 $\{X(t), t \in [0, \infty]\}$ 是随机过程。

随机过程引例 (1)

Example

具有随机初位相的简谐波

$$X(t) = A\cos(\omega t + \Phi)$$

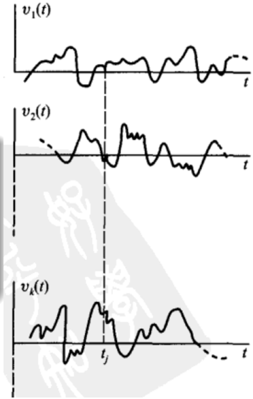
其中 A, ω 为常数, Φ 服从 $[0, 2\pi]$ 上的均匀分布。

- 由于初位相的随机性, 在某时刻 $t = t_0$, $X(t)$ 是一个随机变量.
- 若要观察任一时刻 t 的波形, 则需要用一簇随机变量 $X(t)$ 描述.
- 称 $\{X(t), t \in [0, \infty]\}$ 是随机过程。

随机过程引例 (2)

Example

三次热噪声电压测量结果：固定 t 时刻电压，对应一个随机变量 $v(t)$；无限个 t，则无限个电压—时间的函数族构成一随机过程。



随机过程引例 (3)

Example

生物群体的增长问题. 以 X_t 表示在时刻 t 某种生物群体的个数, 则对每一个固定的 t, X_t 是一个随机变量。

- 如果从 $t = 0$ 开始, 每隔 24 小时对群体的个数观察一次, 则对每一个 t,X_t 是一簇随机变量。记为 $X_n, n = 0, 1, \ldots$
- 若要观察任一时刻 t 的波形, 则需要用一族随机变量 $X(t)$ 描述.
- 称 $\{X_t, t = 0, 1, 2, \ldots\}$ 是随机过程。

随机过程引例特点

以上例子的共同特点—随机现象在时间上的延展 $\Longrightarrow$ 随机过程

- 给定一个 t, 就有一个随机变量 $X(t)$ 与之对应。
- 概率论主要是以**一个或有限个随机变量**为研究对象的.
- 随机过程是概率论的“动力学”部分,研究对象为随时间演变的随机现象, 通常会有**无穷多个随机变量**。

Definition (随机过程)

设 $(\Omega, \mathcal{F}, P$ 是一概率空间, T 是一实参数集, 定义在 Ω 和 T 上的二元函数 $x(t,\xi)$

1. 固定 $t_k \in T, x(t_k,\xi)$ 是概率空间上的随机变量;
2. 固定 $\xi_i \in \Omega, x(t,\xi_i)$ 是概率空间上的随机函数 (或称 $x(t,\xi_i)$ 是对应于 ξ_i 的样本函数)

则称 $\{x(t,\xi), t \in T, \xi \in \Omega\}$ 为一随机过程, 简记为 $x(t)$, 其中 t 和 ξ 均是变量。

随机过程的定义域是实参数集 T 和样本空间 Ω。值域是 $\mathbb{R}$.

- 样本空间 Ω:一个随机试验所有可能出现的结果的全体,称为随机事件的样本空间。
- 事件域 $\mathcal{F}$: 样本空间中的某些子集。
- 参数集 T 表示时间或空间,通常的形式: $T = \{0, 1, 2, \ldots\}$ 或 $T = [a, b], T = [-\infty, \infty]$

用映射表示随机过程:

$$x(t,\xi) : T \times \Omega -> \mathbb{R}$$

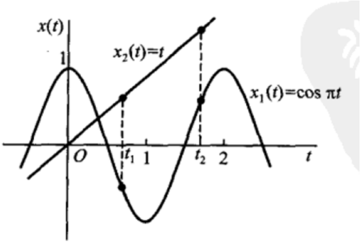
1. $x(t,\xi)$ 实质是定义在 $T \times \Omega$ 上的二元单值函数;
2. 固定 $t \in T, x(t,\cdot)$ 是样本空间 Ω 上的函数, 即为一随机变量;
3. 固定 $\xi_i \in \Omega, x(\cdot,\xi_i)$ 是一个关于 $t \in T$ 的函数, 通常称为样本函数, 或称随机过程的一次实现, 所有样本函数的集合确定一随机过程。
4. 随机过程 $\{x(t,\xi)\}$ 可能取值的全体所构成的集合称为此随机过程的状态空间, 记作 S。S 中的元素称为状态。状态空间可以由复数、实数或更一般的抽象空间构成。

Example (随机过程示例)

抛掷硬币的试验, 样本空间 $\Omega = \{H, T\}$, 定义

$$x(t) = \begin{cases} \cos \pi t, & \text{当出现 } H \\ t, & \text{当出现 } T \end{cases}, t \in (-\infty, \infty)$$

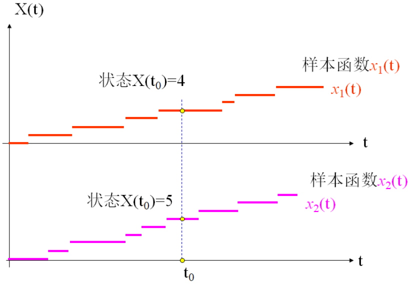
其中 $P(H) = P(T) = 1/2$



Example

考察 $[0, t_0]$ 时间内某网站收到的访问次数 $X(t_0)$, $X(t_0)$ 则是一个随机变量。

- 如果要长时间内该网站的访问次数, 则需要让 t 变化起来, 即 t 趋于无穷大, 则 $X(t)$ 是一簇随机变量.
- 此时 $X(t)$ 是与时间有关系的随机变量, 称 $\{X(t), t \in [0, \infty]\}$ 是随机过程。



状态空间S={0,1,2,….}, T=[0,+∞)

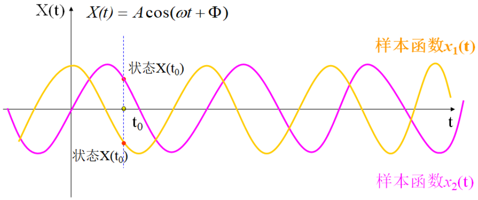
Example

具有随机初位相的简谐波

$$X(t) = A\cos(\omega t + \Phi)$$

其中 A, ω 为常数，Φ 服从 $[0, 2\pi]$ 上的均匀分布。

- 由于初位相的随机性，在某时刻 $t = t_0, X(t)$ 是一个随机变量.
- 若要观察任一时刻 t 的波形，则需要用一簇随机变量 $X(t)$ 描述.
- 称 $\{X(t), t \in [0, \infty]\}$ 是随机过程。



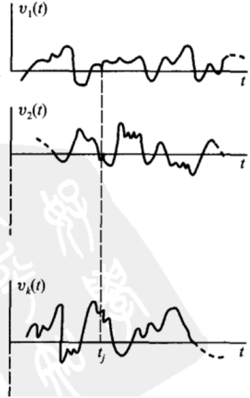
状态空间S=[-A,A],参数集T=[-∞,+ ∞]

Example

三次热噪声电压测量结果：固定 t 时刻电压，对应一个随机变量 $v(t)$；

无限个 t，则无限个电压—时间的函数族构成一随机过程。

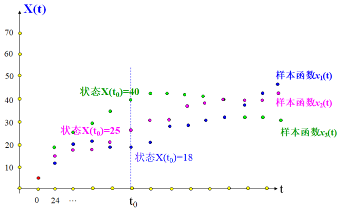
样本函数 $\Longrightarrow$



Example

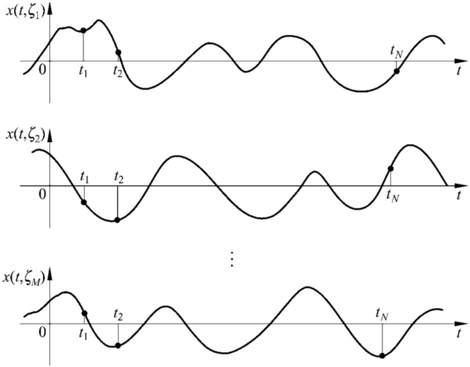
生物群体的增长问题. 以 X_t 表示在时刻 t 某种生物群体的个数, 则对每一个固定的 t, X_t 是一个随机变量。

- 如果从 $t = 0$ 开始, 每隔 24 小时对群体的个数观察一次, 则对每一个 t, X_t 是一簇随机变量。记为 $X_n, n = 0, 1, \ldots$
- 若要观察任一时刻 t 的波形, 则需要用一族随机变量 $X(t)$ 描述.
- 称 $\{X_t, t = 0, 1, 2, \ldots\}$ 是随机过程。



状态空间S={0,1,2,....}, T=[0,24,......)

连续随机过程 $\{x(t,\xi), t \in T, \xi \in \Omega\}$ 的 M 个样本函数如图。通常用有限维概率密



度函数来描述随机过程。

设 $\{x(t,\xi), t\in T, \xi\in\Omega\}$ 是一随机过程,对于任意固定的时刻 t, $x(t,\xi)$ 是一随机变量,称

$$F(x;t) = P\{x(t,\xi)\leq x\}, x\in\mathbb{R}, t\in T$$

为该随机过程的一维累积分布函数。如果 $F(x;t)$ 对 x 的一阶导数存在,则有

$$p(x;t) = \frac{dF(x;t)}{dx}$$

$p(x;t)$ 称为随机过程 $x(t,\xi)$ 的一维概率密度函数。

对于任意固定的时刻 $t_1, t_2 \in T$, 随机变量 $x(t_1,\xi), x(t_2,\xi)$ 构成二维矢量 $[x(t_1,\xi), x(t_2,\xi)]^T$, 称

$$F(x_1,x_2;t_1,t_2) = P\{x(t_1,\xi) \le x_1, x(t_2,\xi) \le x_2\}, x_1,x_2 \in \mathbb{R}, t_1,t_2 \in T$$

为该随机过程的二维累积分布函数。如果 $F(x_1,x_2;t_1,t_2) \in T$ 对 x_1,x_2 的二阶混合偏导数存在,则有

$$p(x_1,x_2;t_1,t_2) = \frac{\partial^2 F(x_1,x_2;t_1,t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

$p(x;t)$ 称为随机过程 $x(t,\xi)$ 的二维联合概率密度函数。

推广至 N 维随机矢量的情况

随机过程的 N 维累积分布函数

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_N; t_1, t_2, \cdots, t_N) = \\ P\{x(t_1, \xi) \leq x_1, x(t_2, \xi), \cdots, x(t_N, \xi) \leq x_N\}, \\ x_1, x_2, \cdots, x_N \in \mathbb{R}, t_1, t_2, \cdots, t_N \in T$$

随机过程的 N 维联合概率密度函数

$$p(x_1, x_2, \cdots, x_N; t_1, t_2, \cdots, t_N) = \\ \frac{\partial^N F(x_1, x_2, \cdots, x_N; t_1, t_2, \cdots, t_N)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_N}$$

雅可比变换法

设一维随机变量为 $x(\xi)$, 它的概率密度函数 $p(x)$ 已知, 若 $x(\xi)$ 的一个函数为

$$y(\xi) = g(x(\xi))$$

该函数也是一维随机变量。若它的反函数存在,即有

$$x(\xi) = h(y(\xi))$$

且连续可导, 则 $y(\xi)$ 的概率密度函数为

$$p(y) = p[x = h(y)]|J|$$

这种变换称为一维雅可比变换, 其中雅可比 $J = \frac{dh(y)}{dy}$, $|\bullet|$ 是绝对值符号。

Example

设随机过程 $x(t) = V\cos\omega t, t \in (-\infty, +\infty)$, 其中 ω 为常数, V 服从 $[0, 1]$ 上的均匀分布。

1. 确定 $\{x(t), t \in (-\infty, +\infty)\}$ 的两个样本函数。
2. 求 $t = 0, t = 3\pi/4\omega$ 时, 随机变量的概率密度函数。
3. 求 $t = \pi/2\omega$ 时, $x(t)$ 的分布函数。

解:

1. 取 $V = 1/2, 1/3$ 分别得到两个样本函数
$$x_1(t) = \frac{1}{2}\cos\omega t, x_2(t) = \frac{1}{3}\cos\omega t$$
2. $t = 0$ 时,$x(t) = V\cos\omega 0 = V$, 而 V 为 $[0, 1]$ 上的均匀分布, 则
$$p(x; t = 0) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

解 (续):

2. (续) 当 $t=\frac{3\pi}{4\omega}$ 时, $x(t)=V\cos\omega\frac{3\pi}{4\omega}=-\frac{\sqrt{2}}{2}V$ 由于函数 $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}V$ 的反函数为 $V=h(x)=-\sqrt{2}x$, 其导数为 $h'(x)=-\sqrt{2}$, 则利用一维雅可比变换公式, 求得

$$p(x,t=\frac{3\pi}{4\omega})=\begin{cases} p_V(h(x))|h'(x)| & 0\le h(x)\le 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \sqrt{2} & 0\le -\sqrt{2}x\le 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \sqrt{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2}\le x\le 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

解 (续):

3. $t=\frac{\pi}{2\omega}$ 时, $x(t)=V\cos\omega\frac{pi}{2\omega}=0$, 此时 $x(t=\frac{\pi}{2\omega})$ 是单点分布, 则

$$F(x,t=\frac{\pi}{2\omega})=P\{x(t)\leq x\}$$
$$=\begin{cases}1 & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

Example

设随机相位正弦信号 $s(t;\theta) = a\cos(\omega_0 t + \theta)$, 其中振幅 a 和 ω_0 为常数, 相位 θ 是一随机变量, 它服从 $(-\pi, \pi)$ 上的均匀分布。

1. 求该过程的均值和自相关函数。
2. 写出 $x(t;\theta)$ 的样本函数。
3. 求 $x(t;\theta)$ 的概率密度函数。

解:

1. 因为相位 θ 服从 $(-\pi,\pi)$ 上的均匀分布, 所以,

$$p(\theta)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}, & -\pi\le\theta\le\pi\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

该随机过程的均值为:

$$\begin{aligned}\mu_x(t)&=E[s(t;\theta)]=E[a\cos(\omega_0 t+\theta)]\\&=\int_{-\infty}^{\infty}a\cos(\omega_0 t+\theta)p(\theta)d\theta\\&=\int_{-\pi}^{\pi}a\cos(\omega_0 t+\theta)\frac{1}{2\pi}d\theta\\&=\frac{a}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\omega_0 t+\theta)d\theta\\&=0\end{aligned}$$

解 (续):

1. (续) 该随机过程的自相关函数为:

$$
\begin{aligned}
x(t_j, t_k) &= E[x(t_j)x(t_k)] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} a\cos(\omega_0 t_j + \theta) a\cos(\omega_0 t_k + \theta) p(\theta) d\theta \\
&= \frac{a^2}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(\omega_0 t_j + \omega_0 t_k + 2\theta) + \cos\omega_0(t_k - t_j)] d\theta \\
&= \frac{a^2}{2}\cos\omega_0\tau, \qquad (\tau = t_k - t_j)
\end{aligned}
$$

2. 当 θ 在 $(-\pi, \pi)$ 内任取定值时, 如 $\theta = 0$, 则样本函数为

$$x(t; \theta = 0) = a\cos\omega_0 t$$

当 $\theta = \frac{\pi}{2}$, 则样本函数为

$$x(t; \theta = \frac{\pi}{2}) = a\cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}) = -a\sin\omega_0 t$$

解 (续):

3. 求 $x(t;\theta)$ 的概率密度函数。

   固定时刻 t, 则随机变量 $x(t;\theta)=a\cos(\omega_0 t+\theta)$ 是随机变量 θ 的函数。由分布函数的定义:

$$F_{x(t)(y)} = P\{x(t)\le y\} = P\{a\cos(\omega_0 t+\theta)\le y\}$$

   当 $y<-a$ 时, $F_{x(t)(y)}=0$; 当 $y\ge +a$ 时, $F_{x(t)}(y)=1$

   当 $-a<y\le +a$ 时, 我们有:

$$\begin{aligned}
F_{x(t)}(y) &= P\{x(y)\le y\} = P\{a\cos(\omega_0 t+\theta)\le y\} \\
&= P(\{-\pi<\theta\le \omega_0 t-\arccos\frac{y}{a}\}\cup\{\arccos\frac{y}{a}-\omega_0 t<\theta\le\pi\}) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\omega_0 t-\arccos\frac{y}{a}} dx + \int_{\arccos\frac{y}{a}-\omega_0 t}^{\pi} dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}[\omega_0 t+\pi-\arccos\frac{y}{a}]
\end{aligned}$$

解 (续):

3. 求 $x(t;\theta)$ 的概率密度函数。

当 $-a < y \leq +a$ 时, 有: $F_{x(t)}(y) = \frac{1}{\pi}[\omega_0 t + \pi - \arccos\frac{y}{a}]$

此时, $x(t;\theta)$ 的概率密度函数为:

$$p_{x(t)}(y) = F'_{x(t)}(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - y^2}}$$

最终得到 $x(t;\theta)$ 的概率密度函数为:

$$p(\theta;t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}, & -a < x \leq +a \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

狄拉克函数 (Dirac 函数/δ—函数)

Definition (δ—函数)

对于任意的无穷此可维的函数 $f(t)$, 如果满足:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t) f(t) dt$$

其中:

$$\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{\varepsilon}, & 0 \geq t < \varepsilon \\ 0, & t > \varepsilon \end{cases}$$

则称 $\delta_\varepsilon(t)$ 的弱极限为 δ 函数, 记为 $\delta(t)$ 显然, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 有:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon} dt = 1 \implies \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

狄拉克函数 (Dirac 函数/δ—函数)

注

1. $\delta(t)$ 在 $t=0$ 点的取值为 ∞, 在 $t\neq 0$ 点的取值为 0, 并且满足 $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1$。
2. 工程 (信号处理等) 上 δ—函数也称为单位脉冲或单位冲激函数。

δ—函数的筛选性质

若 $f(t)$ 为无穷此可微的函数, 则有:$\int_I \delta(t)f(t)dt=f(0)$

其中 I 是包含点 $t=0$ 的任意区间。特殊地, 有:$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)f(t)dt=f(0)$

更一般地,我们有:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)f(t)dt=f(t_0)$$

离散型随机变量分布列的 δ—函数表示

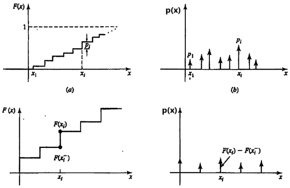
设离散型随机变量 X 的分布列为: $P\{X=x_i\}=p_i, i=1,2,\ldots,$ 则由 δ—函数的筛选性质可以定义离散型随机变量 X 的概率密度函数为:

$$p(x)=\sum_{i=0}^{\infty}p_i\delta(x-x_i)$$

因为,由 δ—函数的筛选性质,离散型随机变量 X 的分布函数可以表示为:

$$F(x)=P\{X\leq x\}=\sum_{x_i\leq x}p_i=\int_{-\infty}^{x}\sum_{i=1}^{\infty}p_i\delta(u-x_i)du$$

工程上,常用离散型随机变量分布列的 δ—函数表示法,将离散型随机变量的分布列表示成概率密度函数的形式,因此与连续型随机变量的概率分布密度函数一样进行统一处理。



Example

设有一采用脉宽调制以传输信息的通信系统。脉冲的重复周期为 T, 每个周期传输一个值, 脉冲宽度收到随机信息的调制, 使每个脉冲的宽度 τ 服从 $(0, T)$ 上的均匀分布, 而且不同周期的脉宽是相互统计独立的随机变量。脉冲的幅度为常数 A。也就是说, 这个通信系统传送的信号是随机脉宽等幅度的周期信号, 它是一个随机过程。下图画出了它的一个样本函数。试求该随机过程 $x(t)$ 的一维概率密度函数。

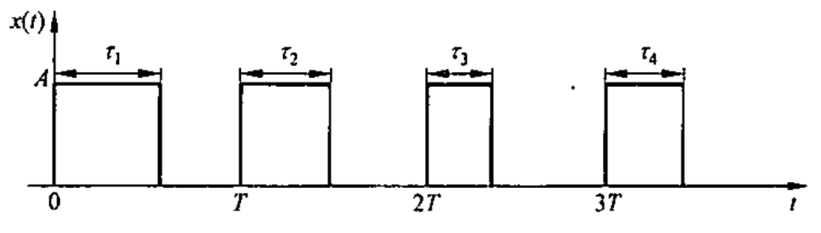


Figure 1: 脉宽调制信号的一个样本函数

Example (解)

因为脉冲的重复周期为 T, 所以只需求出一个周期的概率密度函数。

在一个周期内, 随机信号为

$$x(t) = \begin{cases} A, & t \le \tau \\ 0, & \tau < t \le T \end{cases}$$

$x(t)$ 的分布函数为

$$F(x;t) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{t}{T}, & 0 \ge x < A \\ 1, & x \ge A \end{cases}$$

所以, 它的一维概率密度函数为:

$$p(x;t) = \frac{t}{T}\delta(x) + (1 - \frac{t}{T})\delta(x - A)$$

函数的均值

$$\bar{y} = \frac{1}{b-a} \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \Delta x = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

交流电 $i = I_m \sin \omega t$, 电压 $u = iR = I_m R \sin \omega t$, 功率 $p = ui = I_m^2 R \sin^2 \omega t$

此功率在长度为一个周期的区间 $[0, \frac{2\pi}{\omega}]$ 上的平均值

$$\bar{p} = \frac{1}{\frac{2\pi}{\omega}} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} I_m^2 R \sin^2 \omega t dt = \frac{I_m^2 R}{2} = \frac{I_m U_m}{2}, (U_m = I_m R)$$

I_m, U_m 为交流电电流、电压的最大值,ω 为交流电的角频率。

随机过程的均值 $\mu_x(t)$: 表示随机过程在 t 时刻状态取值的理论平均值

$$\mu_x(t) \overset{def}{=} E[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x;t)dx$$

如果 $x(t)$ 是电压或电流，则 $\mu_x(t)$ 可以理解为在 t 时刻的 “直流分量”。

随机过程的均方值 $\varphi_x^2(t)$

$$\varphi_x^2(t) \overset{def}{=} E[x^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2p(x;t)dx$$

如果 $x(t)$ 是电压或电流，则 $\varphi_x^2(t)$ 可以理解在 t 时刻它在 1Ω 电阻上消耗的 “平均功率”。

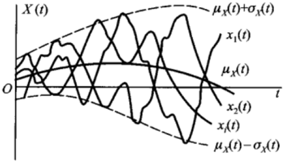
随机过程的方差/标准偏差 $\delta_x^2(t)$

$$\sigma_x^2(t) \overset{def}{=} E[(x(t)-\mu_x(t))^2] = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_x(t))^2 p(x;t)dx$$

方差 $\sigma_x^2(t)$ 表示随机过程在 t 时刻取其值偏离其均值 $\mu_x(t)$ 的离散程度。如果 $x(t)$ 是电压或电流,则 $\delta_x^2(t)$ 可以理解在 t 时刻它在 1Ω 电阻上消耗的“交流功率”。

均值 $\mu_x(t)$, 均方值 $\varphi_x^2(t)$, 方差 $\delta_x^2(t)$ 之间的关系

$$\sigma_x^2(t) = \varphi_x^2(t) - \mu_x^2(t)$$



随机过程的自相关函数 $r_x(t_j, t_k)$

$$
\begin{aligned}
r_x(t_j, t_k) &\overset{def}{=} E[x(t_j)x(t_k)] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_j x_k p(x_j, x_k; t_j, t_k) dx_j dx_k
\end{aligned}
$$

随机过程的自相关函数 $r_x(t_j, t_k)$ 可以理解为它的两个随机变量 $x(t_j)$ 与 $x(t_k)$ 之间含有均值时的相关程度的度量。显然

$$
r_x(t, t) = \varphi_x^2(t)
$$

随机过程的自协方差函数 $c_x(t_j, t_k)$

$$
\begin{aligned}
c_x(t_j, t_k) &\overset{def}{=} E[((x(t_j) - \mu_x(t_j)(x(t_k) - \mu_x(t_k)] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_j - \mu_x(t_j))(x_k - \mu_x(t_k))p(x_j, x_k; t_j, t_k)dx_i dx_k
\end{aligned}
$$

随机过程的自协方差函数 $c_x(t_j, t_k)$ 可以理解为它的两个随机变量 $x(t_j)$ 与 $x(t_k)$ 之间的相关程度的度量。它们的自相关系数定义为

$$
\rho_x(t_j, t_k) \overset{def}{=} \frac{c_x(t_j, t_k)}{\sigma_x(t_j)\sigma_x(t_k)}
$$

易证

$$
c_x(t_j, t_k) = r_x(t_j, t_k) - \mu_x(t_j)\mu_x(t_k)
$$

$$
c_x(t, t) = \sigma_x^2(t)
$$

Example

考察一随机过程,它在 $t_0 + nT_0$ 时刻具有宽度为 b 的矩形脉冲波,脉冲幅度为一等概率 (p), 取值 $\pm a$ 的随机变量,且 $b < T_0, T_0$ 是在 $(0, T_0)$ 上服从均匀分布的随机变量,并且脉冲幅度 A 与 t_0 独立, 试求该过程的自相关函数和方差。

解: 由给定的随机过程,我们有, 均值:

$$\mu_x(t) = E\{x(t)\} = a \times p + (-a) \times p + 0 \times (1 - 2p) = 0$$

下面求自相关函数:

任取 t_1, t_2, 且 $t_1 < t_2$, 当 $|t_1 - t_2| > T_0$ 时, t_1, t_2 位于不同的周期内,此时有:

$$r_x(t_1, t_2) = E\{x(t_1)x(t_2)\} = E\{x(t_1)\}E\{x(t_2)\} = 0$$

当 $|t_1 - t_2| \leq T_0$, 且 t_1, t_2 位于两个不同的周期内时,此时有:

$$r_x(t_1, t_2) = E\{x(t_1)x(t_2)\} = E\{x(t_1)\}E\{x(t_2)\} = 0$$

当 $|t_1 - t_2| \le T_0$, 且 t_1, t_2 位于同一周期内时, 假设 θ 为 t_1 所在的脉冲的起始时刻, 只有当 $t_2 < \theta + b$ 时, $x(t_1)x(t_2)$ 取到不为 0 的值, 此时的概率为:

$$P\{t_2 < \theta + b\} = 1 - P\{t_2 > \theta + b\} = 1 - \frac{1}{T_0}\int_{t_1 - T_0}^{t_2 - b} d\theta = \frac{b - (t_2 - t_1)}{T_0}$$

由此, 我们有:

$$r_x(t_1, t_2) = E\{x(t_1)\}E\{x(t_2)\} = a^2 \cdot \frac{b - (t_2 - t_1)}{T_0}$$

同理, 当 $t_1 > t_2$ 时, 我们有:

$$r_x(t_1, t_2) = E\{x(t_1)x(t_2)\} = a^2 \cdot \frac{b - (t_1 - t_2)}{T_0}$$

因此, 最终得到自相关函数和方差:

$$r_x(\tau) = \frac{a^(b - |\tau|)}{T_0}, \tau = t_2 - t_1, \qquad \sigma_x^2(t) = r_x(0) = \frac{a^2 b}{T_0}$$

随机过程的互相关函数 $r_{xy}(t_j, t_k)$

$$
\begin{aligned}
r_{xy}(t_j, t_k) &\overset{def}{=} E[x(t_j)y(t_k)] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_j y_k p(x_j, t_j; y_k, t_k) dx_j dy_k
\end{aligned}
$$

式中, $p(x_j, t_j; y_k, t_k)$ 是 $x(t)$ 与 $y(t)$ 的二维混合概率密度函数。

随机过程的互协方差函数 $c_{xy}(t_j, t_k)$

$$c_{xy}(t_j, t_k) \overset{def}{=} E[(x(t_j) - \mu_x(t_j))(y(t_k) - \mu_x(t_k))]$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_j - \mu_x(t_j))(y_k - \mu_x(t_k))p(x_j, t_j; x_k, t_k)dx_j dy_k$$

随机过程 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的互协方差函数 $c_{xy}(t_j, t_k)$ 可以理解为它们各自的随机变量 $x(t_j)$ 与 $y(t_k)$ 之间的相关程度, 实际上表示两个随机过程 $x(t)$ 与 $y(t)$ 之间的相关程度。它们的互相关系数定义为

$$\rho_{xy}(t_j, t_k) \overset{def}{=} \frac{c_{xy}(t_j, t_k)}{\sigma_x(t_j)\sigma_x(t_k)}$$

易证

$$c_{xy}(t_j, t_k) = r_{xy}(t_j, t_k) - \mu_x(t_j)\mu_y(t_k)$$

Definition (广义平稳随机过程, 简称平稳随机过程)

随机过程 $x(t)$ 的平均统计量满足

1. $x(t)$ 的均值是与时间 t 无关的常数, 即

$$E[x(t)] = \mu_x$$

2. $x(t)$ 的自相关函数只取决于时间间隔 $\tau = t_k - t_j$, 而与时间的起始时刻无关, 即

$$E[x(t_j)x(t_k)] = E[x(t_j)x(t_j+\tau)] = r_x(\tau)$$

平稳随机过程 $x(t)$ 自相关函数 $r_x(t_k - t_j)$ 仅取决于时间间隔 $(t_k - t_j)$, 而与时间的起始时刻无关。$E[x(t_j)x(t_k)] = r_x[t_k - t_j]$

平稳随机过程的统计平均量之间的关系

平稳随机过程 x(t) 的均值 μ_x, 均方值 φ_x^2, 方差 σ_x^2, 自相关函数 $r_x(\tau)$, 自协方差函数 $c_x(\tau)$ 之间的关系

$$\sigma_x^2 = \varphi_x^2 - \mu_x^2$$

$$r_x(\tau) = r_x(-\tau)$$

$$c_x(\tau) = r_x(\tau) - \mu_x^2$$

$$c_x(\tau) = c_x(-\tau)$$

$$\varphi_x^2 = r_x(0)$$

$$\sigma_x^2 = c_x(0)$$

$$r_x(0) \geq |r_x(\tau)|, \tau \neq 0$$

$$c_x(0) \geq |c_x(\tau)|, \tau \neq 0$$

Definition (联合平稳随机过程)

设 $x(t)$ 和 $y(t)$ 分别是两个平稳的随机过程, 如果对于任意的 Δt, 有 $r_{xy}(t_j+\Delta t, t_k+\Delta t) = r_{xy}(t_j, t_k)$, 即互相关函数 $r_{xy}(t_j, t_k) = r_{xy}(\tau), (\tau = t_k - t_j)$ 仅与时间间隔 τ 有关, 而与 t_j 和 t_k 无关, 则称过程 $x(t)$ 与 $y(t)$ 是联合平稳的随机过程。

联合平稳随机过程 $x(t)$ 与 $y(t)$ 的互协方差函数

$$c_{xy}(t_j, t_k) = c_{xy}(\tau) = r_{xy}(\tau) - \mu_x\mu_y, \tau = t_k - t_j$$

互相关系数:

$$\rho_{xy}(\tau) \stackrel{def}{=} \frac{c_{xy}(t_j, t_k)}{\sigma_x(t_j)\sigma_y(t_k)} = \frac{c_{xy}(\tau)}{\sigma_x\sigma_y}$$

$$r_{xy}(\tau) = r_{yx}(-\tau)$$

$$c_{xy}(\tau) = c_{yx}(-\tau)$$

$x(t)$ 的正交性与互不相关性

随机过程 $x(t)$ 的任意两个不同时刻的随机变量 $x(t_j)$ 与 $x(t_k)$ 之间是否相互正交、互不相关和相关统计独立，表征了随机过程的重要统计特性。

Definition

设 $x(t_j), x(t_k)$ 是随机过程 $x(t)$ 的任意两个不同时刻的随机变量，其均值分别为 $\mu_x(t_j)$ 和 $\mu_x(t_k)$，自相关函数为 $r_x(t_j, t_k)$，自协方差函数为 $c_x(t_j, t_k)$。

1. 相互正交

$$r_x(t_j, t_k) \stackrel{def}{=} E[x(t_j)x(t_k)] = 0, \quad j \neq k$$

2. 互不相关

$$c_x(t_j, t_k) \stackrel{def}{=} E[((x(t_j) - \mu_x(t_j))(x(t_k) - \mu_x(t_k))] = 0, \quad j \neq k$$

3. 互不相关的等价条件

$$c_x(t_j, t_k) = r_x(t_j, t_k) - \mu_x(t_j)\mu_x(t_k), j \neq k \implies r_x(t_j, t_k) = \mu_x(t_j)\mu_x(t_k), j \neq k$$

平稳随机过程 $x(t)$ 的正交性与互相关性

Definition

如果 $x(t)$ 是平稳随机过程,

1. 相互正交:

$$r_x(\tau) = 0, \tau = t_k - t_j$$

2. 互不相关:

$$c_x(\tau) = 0, \tau = t_k - t_j$$

3. 互不相关的等价条件

$$r_x(\tau) = \mu_x^2, \tau = t_k - t_j$$

$x(t)$ 的统计独立性

Definition

设 $x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_N)$ 是随机过程 $x(t)$ 在不同时刻 $t_k(k=1,2,\ldots,t_N)$ 的随机变量, 如果其 N 维联合概率密度函数对于任意的 $N \geq 1$ 和所有时刻 $t_k(k=1,2,\ldots,N)$ 都能够表示成各自一维概率密度函数之积的形式, 即

$$
\begin{aligned}
& p(x_1, x_2, \ldots, x_N; t_1, t_2, \ldots, t_N) \\
= & p(x_1; t_1) p(x_2; t_2) \cdots p(x_N; t_N)
\end{aligned}
$$

则称 $x(t)$ 是相互统计独立的随机变量过程。

$x(t)$ 的正交性, 不相关性以及统计独立性之间的关系

1. 均值 $\mu_x(t_j) = 0, \mu_x(t_k) = 0$ 则, $x(t)$ 相互正交 $\Leftrightarrow$ 互不相关
2. $x(t)$ 相互统计独立 $\Rightarrow$ 互不相关
3. $x(t)$ 互不相关 $\nRightarrow$ 相互统计独立。但是若 $x(t)$ 服从联合高斯分布,则互不相关 $\Leftrightarrow$ 相互统计独立

第 1 条可由 $x(t)$ 互不相关的等价条件 $r_x(t_j, t_k) = \mu_x(t_j)\mu_x(t_k), j \neq k$ 直接导出。现证明第 2 条,第 3 条的证明见后。

证明: 如果 $x(t)$ 是一个相互统计独立随机变量过程, 则它一定是一个互不相关随机变量过程。

Proof.

设 $x(t_j)$ 与 $x(t_k)$ 是相互统计独立的, 则其自相关函数为

$$\begin{aligned} r_x(t_j,t_k) &\stackrel{def}{=} E[x(t_j)x(t_k)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_j x_k p(x_j,x_k;t_j,t_k)dx_j d_k \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_j p(x_j;t_j)dx_j \int_{-\infty}^{\infty} x_j p(x_k;t_k)dx_k \\ &= \mu_x(t_j)\mu_x(t_k) \end{aligned}$$

这正是 $x(t)$ 互不相关的等价条件 $r_x(t_j,t_k)=\mu_x(t_j)\mu_x(t_k), j\neq k$, 所以 $x(t)$ 统计独立 $\Longrightarrow$ 互不相关 $\square$

$x(t), y(t)$ 的正交性与互不相关性

设 $x(t_j)$ 是 $x(t)$ 在 t_j 时刻的随机变量, $y(t_k)$ 是 $y(t)$ 在 t_k 时刻的随机变量。

Definition

$x(t)$ 在 t_j, $y(t)$ 在 t_k 的均值分别为 $\mu_x(t_j)$ 和 $\mu_y(t_k)$, 互相关函数为 $r_{xy}(t_j, t_k)$, 互协方差函数为 $c_{xy}(t_j, t_k)$。

1. 相互正交

$$r_{xy}(t_j, t_k) \stackrel{def}{=} E[x(t_j)y(t_k)] = 0, \quad j \neq k$$

2. 互不相关

$$c_{xy}(t_j, t_k) \stackrel{def}{=} E[((x(t_j) - \mu_x(t_j))(y(t_k) - \mu_y(t_k))] = 0, \quad j \neq k$$

3. 互不相关的等价条件

$$c_{xy}(t_j, t_k) = r_{xy}(t_j, t_k) - \mu_x(t_j)\mu_y(t_k), j \neq k \implies r_{xy}(t_j, t_k) = \mu_x(t_j)\mu_y(t_k), j \neq k$$

平稳随机过程 $x(t), y(t)$ 的正交性与互相关性

Definition

如果 $x(t), y(t)$ 是联合平稳的随机过程,

1. 相互正交:

$$r_{xy}(\tau) = 0, \tau = t_k - t_j$$

2. 互不相关:

$$c_{xy}(\tau) = 0, \tau = t_k - t_j$$

3. 互不相关的等价条件

$$r_{xy}(\tau) = \mu_x \mu_y, \tau = t_k - t_j$$

$x(t), y(t)$ 的统计独立性

Definition

如果随机过程 $x(t)$ 和 $y(t)$ 对任意的 $N \geq 1, M \geq 1$ 和所有时刻 $t_k(k = 1, 2, \ldots, t_N)$ 与 $t'_k(k = 1, 2, \ldots, M)$, 其 $N + M$ 维联合概率密度表示为

$$
\begin{aligned}
& p(x_1, x_2, \ldots, x_N; t_1, t_2, \ldots, t_N; y_1, y_2, \ldots, y_N; t'_1, t'_2, \ldots, t'_M) \\
= & \, p(x_1, x_2, \ldots, x_N; t_1, t_2, \ldots, t_N) p(y_1, y_2, \ldots, y_N; t'_1, t'_2, \ldots, t'_M)
\end{aligned}
$$

则称 $x(t)$ 与 $y(t)$ 是相互统计独立的两个随机变量过程。

$x(t), y(t)$ 的正交性, 不相关性以及统计独立性之间的关系

1. 均值之一或同时为零, 则 $x(t), y(t)$ 相互正交 $\Leftrightarrow$ 互不相关
2. $x(t), y(t)$ 相互统计独立 $\Rightarrow$ 互不相关
3. $x(t), y(t)$ 互不相关 $\nRightarrow$ 相互统计独立。但是若 $x(t), y(t)$ 服从联合高斯分布, 则互不相关 $\Leftrightarrow$ 相互统计独立

平稳随机过程的功率谱密度

如果平稳过程 $x(t)$ 的自相关函数 $r_x(\tau)$ 绝对可积, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |r_x(\tau)| d\tau < \infty$$

则功率谱密度 $P_x(\omega)$ 与自相关函数 $r_x(\tau)$

$$P_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} r_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad -\infty < \omega < \infty$$

$$r_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega, \quad -\infty < \omega < \infty$$

$P_x(\omega)$ 与 $r_x(\tau)$ 构成傅里叶变换对

功率谱密度主要性质

1. $P_x(\omega)$ 非负

$$P_x(\omega) \geq 0$$

2. $P_x(\omega)$ 是 ω 的偶函数

$$P_x(\omega) = P_x(-\omega)$$

3. 当 $\omega = 0$ 或 $\tau = 0$ 时,$P_x(\omega)$ 与 $r_x(\tau)$ 的变换关系是

$$P_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} r_x(\tau) d\tau$$

$$r_x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_x(\omega) d\omega$$

第 3 条表明

$x(t)$ 的功率谱密度的零频率分量等于 $x(t)$ 的自相关函数曲线下的总面积。因为 $r_x(0) = E[x^2(t)]$, 所以,$x(t)$ 的功率谱密度曲线下的总面积等于 $x(t)$ 的平均功率。

高斯 (正态) 分布随机变量

均值 μ_x, 方差为 σ_x^2 的高斯分布随机变量 $x(\xi)$ 概率密度函数 $p(x)$ 表示为

$$p(x) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_x^2}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right]$$

特性

高斯分布随机变量 $x(\xi)$ 的概率密度函数 $p(x)$ 完全由它的均值 μ_x 和方差 σ_x^2 来表示。记为 $x(\xi) \sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$

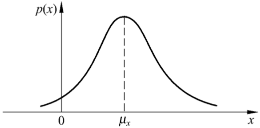


Figure 2: 高斯 (正态) 分布随机变量的 PDF 曲线 $\mu_x > 0$

PDF—概率密度函数 (Probability Density Function)

标准高斯 (正态) 分布随机变量

归一化处理 $x(\xi) \sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$ 为 $x(\xi) \sim \mathcal{N}(0, 1)$, 令

$$u(\xi) = \frac{x(\xi) - \mu_x}{\sigma_x}$$

有

$$p(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$$

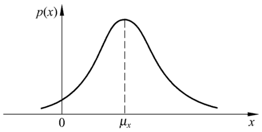


Figure 3: 高斯 (正态) 分布随机变量的 PDF 曲线 $\mu_x > 0$

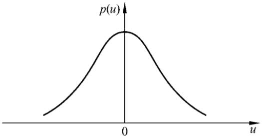


Figure 4: 标准高斯 (正态) 分布随机变量的 PDF 曲线 $\mu_x > 0$

标准高斯 (正态) 分布随机变量

标准高斯分布随机变量的一维累积分布函数 (正态概率积分) 定义为

$$\Phi(x) \stackrel{def}{=} \int_{-\infty}^{x} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

它的互补累积分布函数是标准高斯分布的右尾积分，即

$$Q(x) = 1 - \Phi(x) \stackrel{def}{=} \int_{x}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

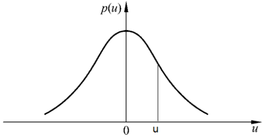


Figure 5: 标准高斯 (正态) 分布随机变量的 PDF 曲线 $\mu_x > 0$

中心极限定理

高斯噪声的数学模型—中心极限定理

在一般条件下, N 个相互**统计独立**的随机变量 n_i 之和 $n = \sum_{k=1}^{N} n_k$, 在 $N \to \infty$ 的极限情况下, 其概率密度趋于高斯分布, 而不管每个变量 n_k 的具体分布如何。

注

(1) 实际上, 只要 N 足够大, 每个分量之间也不一定完全统计独立, 但不存在占统治地位的若干分量, 则它们和的分布就可以近似为高斯分布。

(2) 无限多的、相互独立的、各自作用有限的系统干扰分量叠加形成噪声干扰, 并且服从高斯分布。

高斯噪声的统计描述 (1)

Definition (高斯噪声)

噪声 $n(t)$, 对任意 $N \geq 1$ 和所有时刻 t_k, 随机变量 $n(t_k)$ 服从高斯分布, 则 $n(t)$ 为一个高斯噪声随机变量过程, 简称高斯噪声过程或高斯噪声。

高斯噪声一维概率密度函数

$$p(n_k; t_k) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_{n_k}^2}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{(n_k - \mu_{n_k})^2}{2\sigma_{n_k}^2}\right]$$

其中,μ_{n_k} 为 $n(t_k)$ 的均值, σ_{n_k} 为 $n(t_k)$ 的方差。

高斯噪声的统计描述 (2)

高斯噪声 N 维联合概率密度函数

高斯噪声的 N 维矢量记为

$$(\boldsymbol{n};\boldsymbol{t}) = (n(t_1), n(t_2), \cdots, n(t_N))^T$$

其 N 维联合概率密度函数为

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{n};\boldsymbol{t}) &= p(n_1, n_2, \cdots, n_N; t_1, t_2, \cdots, t_N) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}|\boldsymbol{C_n}|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\mu_n})^T \boldsymbol{C_n}^{-1}(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\mu_n})\right] \end{aligned}$$

其中,$\boldsymbol{\mu_n}$ 是高斯随机矢量 $(\boldsymbol{n};\boldsymbol{t})$ 的均值矢量,$\boldsymbol{C_n}$ 为协方差矩阵。即

$$\boldsymbol{\mu_n} = (\mu_{n_1}, \mu_{n_2}, \ldots, \mu_{n_N})^T$$

$$\mu_{n_k} = E[n(t_k)]$$

$\boldsymbol{C_n}$ 是高斯随机矢量 $(\boldsymbol{n};\boldsymbol{t})$ 的协方差

$$\boldsymbol{C_n} = \begin{bmatrix} C_{n_1n_1} & C_{n_1n_2} & \cdots & C_{n_1n_N} \\ C_{n_2n_1} & C_{n_2n_2} & \cdots & C_{n_2n_N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n_Nn_1} & C_{n_Nn_2} & \cdots & C_{n_Nn_N} \end{bmatrix}$$

其中 $C_{n_jn_k} = E[(n(t_j) - \mu_{n_j})(n(t_k) - \mu_{n_k})] = c_{n_k}c_(n_j)$

$|\boldsymbol{C_n}|$ 是 $\boldsymbol{C_n}$ 的行列式,$\boldsymbol{C_n^{-1}}$ 是 $\boldsymbol{C_n}$ 的逆矩阵。

高斯变量 $n(t_k)$ 互不相关 $\Leftrightarrow$ 相互统计独立

不相关性与统计独立性

互不相关 $\not\Rightarrow$ 相互统计独立。但是若 $x(t)$ 服从联合高斯分布,则互不相关 $\Leftrightarrow$ 相互统计独立

证明: 设高斯随机矢量 $(\boldsymbol{n};\boldsymbol{t})$ 中的 $n(t_j)$ 与 $n(t_k)(j \neq k)$ 互不相关, 即 $C_{n_j n_k} = C_{n_k n_j} = 0(j \neq k)$, 若记 $\sigma_{n_k}^2 \overset{def}{=} C_{n_k n_k}$, 则协方差矩阵 C_n 和 $\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{n}}^{-1}$ 分别为

$$\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{n}} = \begin{bmatrix} \sigma_{n_1}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{n_2}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{n_N}^2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{n}}^{-1} = \begin{bmatrix} (\sigma_{n_1}^2)^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (\sigma_{n_2}^2)^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (\sigma_{n_N}^2)^{-1} \end{bmatrix}$$

而 $|\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{n}}|^{1/2}$ 为: $|\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{n}}|^{1/2} = \prod_{k=1}^{N} \sigma_{n_k}$

因此，高斯噪声 $n(t)$ 的 N 维联合概率密度函数为

$$
\begin{aligned}
p(\boldsymbol{n};\boldsymbol{t}) &= p(n_1,n_2,\cdots,n_N;t_1,t_2,\cdots,t_N) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}|\boldsymbol{C_n}|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\mu_n})^T\boldsymbol{C_n}^{-1}(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\mu_n})\right] \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}|\prod_{k=1}^{N}\sigma_{n_k}} \exp\left[-\sum_{k=1}^{N}\frac{(n_k-\mu_{n_k})^2}{2\sigma_{n_k}^2}\right] \\
&= \prod_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{2\pi\sigma_{n_k}}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{(n_k-\mu_{n_k})^2}{2\sigma_{n_k}^2}\right] \\
&= p(x_1;t_1)p(x_2;t_2)\cdots p(x_N;t_N)
\end{aligned}
$$

表明 $n(t)$ 的 N 维联合概率密度函数表示成各自一维概率密度函数之积的形式，即是统计独立性的定义。因此，N 个高斯随机变量 $n(t_k)(k=1,2,\ldots,t_N)$ 互不相关 $\Rightarrow$ 相互统计独立; 结合之前的结论 “相互统计独立的随机变量 $\Rightarrow$ 互不相关”。所以，**N 个高斯随机变量 $n(t_k)(k=1,2,\ldots,t_N)$ 互不相关 $\Leftrightarrow$ 相互统计独立**。

高斯随机变量的线性组合

1. 若 $x_k(\xi) \sim \mathcal{N}(\mu_{x_k}, \sigma_{x_k}^2)(k = 1, 2, \ldots, N)$, 且它们相互统计独立, 则它们的和

$$x(\xi) = \sum_{k=1}^{N} x_k(\xi)$$

是高斯随机变量, 且有 $x_k(\xi) \sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$, 其中 $\mu_x = \sum_{k=1}^{N} \mu_{x_k}, \sigma_x^2 = \sum_{k=1}^{N} \sigma_{x_k}^2$

2. 更一般地, 任意有限 N 个高斯随机变量 $x_k(\xi)(k = 1, 2, \ldots, N)$ 的线性组合

$$x(\xi) = \sum_{k=1}^{N} a_k x_k(\xi)$$

仍然是高斯随机变量, 且有 $x_k(\xi) \sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$, 其中

$\mu_x = \sum_{k=1}^{N} a_k \mu_{x_k}, \sigma_x^2 = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} a_j a_k c_{x_k x_j}$

式中, 协方差函数 $c_{x_j x_k} = E[(x_j(\xi) - \mu_{x_j})(x_k(\xi) - \mu_{x_k})] = c_{x_k x_j}, \mu_{x_k} = E[x_k(\xi)]$

白噪声

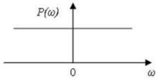
频域—白噪声的功率谱密度

功率谱密度均匀分布在整个频率轴上:

$p_n(\omega) = \frac{N_0}{2}, \quad -\infty < \omega < \infty, N_0$ 是常数

也可以按正半轴上的频域定义:

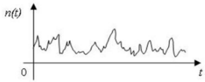
$p_n(\omega) = N_0, \quad 0 < \omega < \infty, N_0$ 是常数



时域—白噪声的自相关函数

均值为零、自相关函数 $r_n(\tau)$ 为 δ 的噪声随机过程:

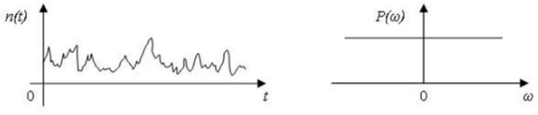
$r_n(\tau) = IFT[\frac{N_0}{2}] = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$



意义

白噪声是一种理想化的数学模型, 由于其功率谱密度在整个频域上均匀分布, 所以其能量是无限的, 实际上是不存在的。但是由于我们所采用的系统相对于整个频率轴来说是窄带系统, 只要认为频谱是均匀分布的, 能够在数学上带来很大方便。

白噪声特性



白噪声

白噪声 $n(t)$ 重要特性

- 白噪声在频域上其功率谱密度是均匀分布的;
- 时域上自相关函数 $r_n(\tau)$ 是 δ 函数: $r_n(\tau) = IFT[\frac{N_0}{2}] = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$
- 任意两个不同时刻的随机变量 $n(t_j)$ 与 $n(t_k), (\tau = t_j - t_k \neq 0)$ 是不相关的: $r_n(t_j, t_k) = r_n(\tau) = E[n(t_j)n(t_k)] = 0, (\tau = t_j - t_k \neq 0)$。
- 由于 δ—函数的筛选性: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)f(t)dt = f(t_0)$, 有 $\int_{-\infty}^{\infty} r_n(t - t_0)f(t)dt = f(t_0) = \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)f(t)dt = \frac{N_0}{2}f(t_0)$

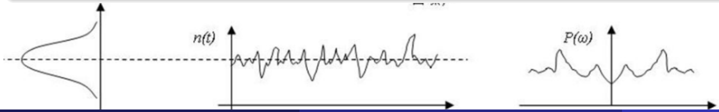
高斯白噪声

高斯白噪声 $n(t)$ 重要特性—高斯随机变量 + 白噪声

- 高斯白噪声在频域上其功率谱密度是均匀分布的;
- **时域上概率密度函数是高斯分布的。(白噪声对此没有明确限制)**
- 时域上自相关函数 $r_n(\tau)$ 是 δ 函数: $r_n(\tau) = IFT[\frac{N_0}{2}] = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$
- 任意两个不同时刻的随机变量 $n(t_j)$ 与 $n(t_k)$, $(\tau = t_j - t_k \neq 0)$ 是不相关的, **并且是统计独立的**:

  $r_n(t_j, t_k) = r_n(\tau) = E[n(t_j)n(t_k)] = 0, (\tau = t_j - t_k \neq 0)$。
- 由 δ—函数的筛选性: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = f(t_0)$, 有

  $\int_{-\infty}^{\infty} r_n(t - t_0) f(t) dt = f(t_0) = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = \frac{N_0}{2} f(t_0)$



有色噪声

如果噪声过程 $n(t)$ 的功率谱密度在频域上的分布是不均匀的，则称其为有色噪声。

有色噪声的功率谱密度

$$P_n(f) = P_0 \exp\left[-\frac{(f-f_0)^2}{2\sigma_f^2}\right]$$

均值 f_0 代表频谱的中心频率，方差 σ_f^2 反映噪声的谱宽度。$\omega = 2\pi f$

ch2. 信号检测与估计理论的基础知识

欢迎批评指正！