信号检测与估值

段江涛

机电工程学院

西安电子科技大学 XIDIAN UNIVERSITY

2019 年 10 月

ch3. 信号检测与估计理论的基础知识

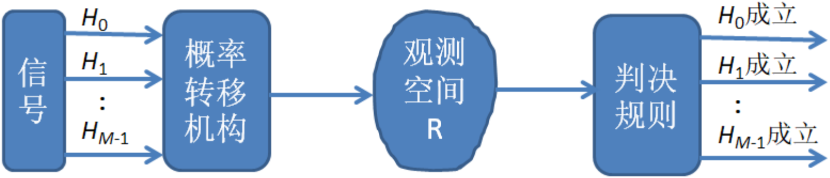
ch3-3. M 元信号的统计检测及参量信号的统计检测

M 元信号的统计检测

基本要求

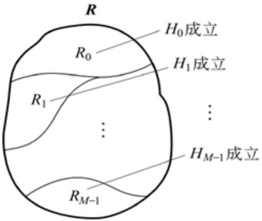
- 了解贝叶斯准则
- 了解最小平均错误概率准则和最大似然准则

M 元信号检测检测模型



判决域划分:

$$\boldsymbol{R} = \bigcup_{i=0}^{M-1} R_i, R_i \cap R_j = \emptyset, (i \neq j)$$



贝叶斯准则

给定各假设先验概率及各判决代价因子。问题: 寻找一种判决空间的划分方法,使平均代价最小。

平均代价:

$$C = P(H_0)C(H_0) + P(H_1)C(H_1)$$

$$C(H_0) = c_{00}P(H_0|H_0) + c_{10}P(H_1|H_0)$$

$$C(H_1) = c_{01}P(H_0|H_1) + c_{11}P(H_1|H_1)$$

$$\begin{aligned} C =& P(H_0)(c_{00}P(H_0|H_0) + c_{10}P(H_1|H_0)) + \\ & P(H_1)(c_{01}P(H_0|H_1) + c_{11}P(H_1|H_1)) \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$C = \sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{M-1} c_{ij}P(H_j)P(H_i|H_j)$$

平均代价计算

$$
\begin{aligned}
C &= \sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{M-1} c_{ij}P(H_j)P(H_i|H_j) \\
&= \sum_{i=0}^{M-1} c_{ii}P(H_i)P(H_i|H_i) + \sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0,j\neq i}^{M-1} c_{ij}P(H_j)P(H_i|H_j) \\
&\quad \text{by } P(H_i|H_i) = 1 - \sum_{j=0,j\neq i}^{M-1} P(H_j|H_i) \\
&= \sum_{i=0}^{M-1} c_{ii}P(H_i)\left(1 - \sum_{j=0,j\neq i}^{M-1} P(H_j|H_i)\right) + \sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0,j\neq i}^{M-1} c_{ij}P(H_j)P(H_i|H_j) \\
&= \sum_{i=0}^{M-1} c_{ii}P(H_i) - \sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0,j\neq i}^{M-1} c_{ii}P(H_i)P(H_j|H_i) + \sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0,j\neq i}^{M-1} c_{ij}P(H_j)P(H_i|H_j)
\end{aligned}
$$

平均代价计算

因为 $\displaystyle\sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{M-1} c_{ii}P(H_i)P(H_j|H_i) = \sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{M-1} c_{jj}P(H_j)P(H_i|H_j)$

所以 $\displaystyle\sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0,j\neq i}^{M-1} c_{ii}P(H_i)P(H_j|H_i) = \sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0,j\neq i}^{M-1} c_{jj}P(H_j)P(H_i|H_j)$

$$
\begin{aligned}
C &= \sum_{i=0}^{M-1} c_{ii}P(H_i) - \sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0,j\neq i}^{M-1} c_{ii}P(H_i)P(H_j|H_i) + \sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0,j\neq i}^{M-1} c_{ij}P(H_j)P(H_i|H_j) \\
&= \sum_{i=0}^{M-1} c_{ii}P(H_i) + \sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0,j\neq i}^{M-1} (c_{ij} - c_{jj})\, P(H_j)P(H_i|H_j) \\
&= \sum_{i=0}^{M-1} c_{ii}P(H_i) + \sum_{i=0}^{M-1}\int_{R_i}\sum_{j=0,j\neq i}^{M-1} (c_{ij} - c_{jj})\, P(H_j)p(\boldsymbol{x}|H_j)d\boldsymbol{x}
\end{aligned}
$$

贝叶斯准则

$$C=\sum_{i=0}^{M-1} c_{ii}P(H_i)+\sum_{i=0}^{M-1}\int_{R_i}\sum_{j=0,j\neq i}^{M-1}\left(c_{ij}-c_{jj}\right)P(H_j)p(\boldsymbol{x}|H_j)d\boldsymbol{x}$$

$$I_i(\boldsymbol{x})=\sum_{j=0,j\neq i}^{M-1}\left(c_{ij}-c_{jj}\right)P(H_j)p(\boldsymbol{x}|H_j)$$

$$c_{ij}\geq c_{jj},\quad P(H_j)\geq 0,\quad p(\boldsymbol{x}|H_j)\geq 0 \implies I_i(\boldsymbol{x})\geq 0$$

贝叶斯准则

为保证平均风险最小,应把所有使 $I_i(\boldsymbol{x})$ 最小的 $\boldsymbol{x}$ 划分至 R_i 判决区域,即当满足

$$I_i(\boldsymbol{x})<I_j(\boldsymbol{x}), j=0,1,\cdots,M-1, j\neq i$$

时,判决 H_i 成立

$$R_i=\{\boldsymbol{x}|I_i(\boldsymbol{x})<I_j(\boldsymbol{x}), 0\leq j\leq M, j\neq i\}$$

贝叶斯准则

贝叶斯准则

为保证平均风险最小,应把所有使 $I_i(\boldsymbol{x})$ 最小的 $\boldsymbol{x}$ 划分至 R_i 判决区域,即当满足

$$I_i(\boldsymbol{x}) < I_j(\boldsymbol{x}), j = 0, 1, \cdots, M-1, j \neq i$$

时, 判决 H_i 成立

$$R_i = \{\boldsymbol{x} | I_i(\boldsymbol{x}) < I_j(\boldsymbol{x}), 0 \leq j \leq M, j \neq i\}$$

H_0 成立的判决域, 是满足下列方程组的解

$$\begin{cases} I_0(\boldsymbol{x}) < I_1(\boldsymbol{x}) \\ I_0(\boldsymbol{x}) < I_2(\boldsymbol{x}) \\ \qquad \vdots \\ I_0(\boldsymbol{x}) < I_{M-1}(\boldsymbol{x}) \end{cases}$$

贝叶斯准则

定义似然比函数

$$\lambda_i(\boldsymbol{x}) = \frac{p(\boldsymbol{x}|H_i)}{p(\boldsymbol{x}|H_0)}, \quad i = 0, 1, \cdots, M-1$$

$$J_i(\boldsymbol{x}) = \frac{I_i(\boldsymbol{x_i})}{p(\boldsymbol{x}|H_0)} = \sum_{j=0, j\neq i}^{M-1} P(H_j)(c_{ij} - c_{jj})\lambda_i(\boldsymbol{x}), \quad i = 0, 1, \cdots, M-1$$

定义判决规则

如果

$$J_i(\boldsymbol{x}) < J_j(\boldsymbol{x}) \quad (j = 0, 1, \cdots, M-1, j \neq i)$$

则判决 H_i 成立

最小平均错误准则

$$C=\sum_{i=0}^{M-1} c_{ii}P(H_i)+\sum_{i=0}^{M-1}\int_{R_i}\sum_{j=0,j\neq i}^{M-1}\left(c_{ij}-c_{jj}\right)P(H_j)p(\mathbf{x}|H_j)d\mathbf{x} \qquad I_i(\mathbf{x})=\sum_{j=0,j\neq i}^{M-1}\left(c_{ij}-c_{jj}\right)P(H_j)p(\mathbf{x}|H_j)$$

正确判决代价为 0, 错误判决代价为 1 的条件下: $I_i(\mathbf{x})=\sum_{j=0,j\neq i}^{M-1} P(H_j)p(\mathbf{x}|H_j)$

最小平均错误准则

为保证最小错误概率, 应把所有使 $I_i(\mathbf{x})$ 最小的 $\mathbf{x}$ 划分至 R_i 判决区域, 即当满足

$$I_i(\mathbf{x})<I_j(\mathbf{x}), j=0,1,\cdots,M-1, j\neq i$$

时, 判决 H_i 成立

$$R_i=\{\mathbf{x}|I_i(\mathbf{x})<I_j(\mathbf{x}), 0\leq j\leq M, j\neq i\}$$

最小平均错误概率: $P_e=\sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{M-1} P(H_j)P(H_i|H_j), \quad j\neq i$

最小平均错误准则

H_0 成立的判决域, 是满足下列下面方程组的解

$$\begin{cases} I_0(\boldsymbol{x}) < I_1(\boldsymbol{x}) \\ I_0(\boldsymbol{x}) < I_2(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ I_0(\boldsymbol{x}) < I_{M-1}(\boldsymbol{x}) \end{cases}$$

H_1 成立的判决域, 是满足下列下面方程组的解

$$\begin{cases} I_1(\boldsymbol{x}) < I_0(\boldsymbol{x}) \\ I_1(\boldsymbol{x}) < I_2(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ I_1(\boldsymbol{x}) < I_{M-1}(\boldsymbol{x}) \end{cases}$$

最大似然准则

$$C = \sum_{i=0}^{M-1} c_{ii} P(H_i) + \sum_{i=0}^{M-1} \int_{R_i} \sum_{j=0, j\neq i}^{M-1} (c_{ij} - c_{jj}) P(H_j) p(\mathbf{x}|H_j) d\mathbf{x}$$

$$I_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=0, j\neq i}^{M-1} (c_{ij} - c_{jj}) P(H_j) p(\mathbf{x}|H_j)$$

正确判决代价为 0，错误判决代价为 1，且信源的假设先验概率相等： $P(H_j) = \dfrac{1}{M}$

$$I_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=0, j\neq i}^{M-1} P(H_j) p(\mathbf{x}|H_j) = \frac{1}{M} \sum_{j=0, j\neq i}^{M-1} p(\mathbf{x}|H_j) = \frac{1}{M} \left(\sum_{j=0}^{M-1} p(\mathbf{x}|H_j) - p(\mathbf{x}|H_i) \right)$$

判决规则是 M 个似然函数 $p(\mathbf{x}|H_i), i = 0, 1, \cdots, M-1$ **中，选择使** $p(\mathbf{x}|H_i)$ **最大的假设成立**

最小平均错误概率： $P_e = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} P(H_j) P(H_i|H_j) = \dfrac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} P(H_i|H_j), \quad j \neq i$

最大似然准则

H_0 成立的判决域, 是满足下列下面方程组的解

$$\begin{cases} p(\boldsymbol{x}|H_0) > p(\boldsymbol{x}|H_1) \\ p(\boldsymbol{x}|H_0) > p(\boldsymbol{x}|H_2) \\ \qquad\vdots \\ p(\boldsymbol{x}|H_0) > p(\boldsymbol{x}|H_{M-1}) \end{cases}$$

H_1 成立的判决域, 是满足下列下面方程组的解

$$\begin{cases} p(\boldsymbol{x}|H_1) > p(\boldsymbol{x}|H_0) \\ p(\boldsymbol{x}|H_1) > p(\boldsymbol{x}|H_2) \\ \qquad\vdots \\ p(\boldsymbol{x}|H_1) > p(\boldsymbol{x}|H_{M-1}) \end{cases}$$

M 元信号检测例题 8

例 8:在四元通信系统中,信源有四个可能的输出,即假设为 H_0 时输出 1,假设为 H_1 时输出为 2,假设为 H_2 时输出为 3,假设为 H_3 时输出为 4。各个假设的先验概率相等,且正确判决代价为 0,错误判决代价为 1,并进行了 N 次独立观测。信号在传输过程中叠加有均值为零,方差为 σ_n^2 的加性高斯白噪声。

试设计一个四元信号的最佳检测系统。

M 元信号检测例题 9

在三元通信系统中,信源有三个可能的输出,即假设为 H_0 时输出 $-A$,假设为 H_1 时输出为 0,假设为 H_2 时输出为 A。各个假设的先验概率相等,且正确判决代价为 0,错误判决代价为 1,并进行了 N 次独立观测。信号在传输过程中叠加有均值为零,方差为 σ_n^2 的加性高斯白噪声。

试按照最小平均错误概率准则设计检测系统,并求正确判决和错误判决的概率。

M 元信号检测例题 9: 解

解: 本例的检测模型为:

$$H_0 : x_k = -A + n_k$$

$$H_1 : x_k = n_k$$

$$H_2 : x_k = A + n_k$$

根据题设: 各个假设的先验概率相等, 且正确判决代价为 0, 错误判决代价为 1。因此本例的贝叶斯检测等价于最大似然检测, 即使似然函数 $p(\boldsymbol{x}|H_i)$ 最大的观测值划分个判决区域 R_i.

M 元信号检测例题 9: 解续 (1)

步骤 1: 计算各假设下的似然函数

由于 n_k 是高斯分布随机变量，因此在 H_0 假设下，第 k 次采样值 x_k 服从高斯分布，且均值为 $-A$，方差为 σ_n^2；在 H_1 假设下，第 k 次采样值 x_k 服从均值为 0，方差为 σ_n^2 的高斯分布；在 H_2 假设下，第 k 次采样值 x_k 服从均值为 A，方差为 σ_n^2 的高斯分布。

$$p(x_k|H_0) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{(x_k+A)^2}{2\sigma_n^2}\right) \implies p(\mathbf{x}|H_0) = \prod_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{(x_k+A)^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

$$p(x_k|H_1) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x_k^2}{2\sigma_n^2}\right) \implies p(\mathbf{x}|H_1) = \prod_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x_k^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

$$p(x_k|H_2) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{(x_k-A)^2}{2\sigma_n^2}\right) \implies p(\mathbf{x}|H_2) = \prod_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{(x_k-A)^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

以上 3 个似然函数统一写成: $p(\mathbf{x}|H_i) = \prod_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{(x_k-s_i)^2}{2\sigma_n^2}\right), \quad i = 0, 1, 2$

其中，$s_0 = -A \qquad s_1 = 0 \qquad s_2 = A$

M 元信号检测例题 9: 解续 (2)

步骤 2: 按照最大似然准则划分观测空间

$$p(\boldsymbol{x}|H_i) = \prod_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{(x_k-s_i)^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{N/2}\exp\left(-\sum_{i=1}^{N}\frac{(x_k-s_i)^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{N/2}\exp\left(-\sum_{i=1}^{N}\frac{x_k^2-2x_ks_i+s_i^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

因此, 判决规则转化为使

$$\left(\sum_{i=1}^{N}2x_ks_i\right)-Ns_i^2$$

最大时, 判决 H_i 假设成立

令 $\hat{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_k$, 使

$$2s_i\hat{\boldsymbol{x}}-s_i^2$$

最大时, 判决 H_i 假设成立

M 元信号检测例题 9: 解续 (3)

判决规则: 使

$$2s_i\hat{\boldsymbol{x}} - s_i^2$$

最大时, 判决 H_i 假设成立。

$$\begin{aligned} H_0 : s_0 &= -A, & 2s_i\hat{\boldsymbol{x}} - s_i^2 &= -2A\hat{\boldsymbol{x}} - A^2 \\ H_1 : s_1 &= 0, & 2s_i\hat{\boldsymbol{x}} - s_i^2 &= 0 \\ H_2 : s_2 &= A, & 2s_i\hat{\boldsymbol{x}} - s_i^2 &= 2A\hat{\boldsymbol{x}} - A^2 \end{aligned}$$

因此, 假设 H_0 的判决区域由下列方程组确定

$$\begin{cases} -2A\hat{\boldsymbol{x}} - A^2 & \geq 0 \\ -2A\hat{\boldsymbol{x}} - A^2 & \geq 2A\hat{\boldsymbol{x}} - A^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \hat{\boldsymbol{x}} & \leq -\frac{A}{2} \\ \hat{\boldsymbol{x}} & \leq 0 \end{cases}$$

合并得到, **当 $\hat{\boldsymbol{x}} \leq -\frac{A}{2}$ 时, 判决 H_0 假设成立**。

M 元信号检测例题 9: 解续 (4)

判决规则: 使

$$2s_i\hat{\boldsymbol{x}} - s_i^2$$

最大时,判决 H_i 假设成立。

$$\begin{aligned} H_0 &: s_0 = -A, & 2s_i\hat{\boldsymbol{x}} - s_i^2 &= -2A\hat{\boldsymbol{x}} - A^2 \\ H_1 &: s_1 = 0, & 2s_i\hat{\boldsymbol{x}} - s_i^2 &= 0 \\ H_2 &: s_2 = A, & 2s_i\hat{\boldsymbol{x}} - s_i^2 &= 2A\hat{\boldsymbol{x}} - A^2 \end{aligned}$$

因此, 假设 H_1 的判决区域由下列方程组确定

$$\begin{cases} 0 & > -2A\hat{\boldsymbol{x}} - A^2 \\ 0 & \geq 2A\hat{\boldsymbol{x}} - A^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \hat{\boldsymbol{x}} & > -\frac{A}{2} \\ \hat{\boldsymbol{x}} & \leq \frac{A}{2} \end{cases}$$

合并得到, **当 $-\frac{A}{2} < \hat{\boldsymbol{x}} \leq \frac{A}{2}$ 时, 判决 H_1 假设成立。**

M 元信号检测例题 9: 解续 (5)

判决规则: 使

$$2s_i\hat{\boldsymbol{x}} - s_i^2$$

最大时,判决 H_i 假设成立。

$$\begin{aligned}
H_0 &: s_0 = -A, & 2s_i\hat{\boldsymbol{x}} - s_i^2 &= -2A\hat{\boldsymbol{x}} - A^2 \\
H_1 &: s_1 = 0, & 2s_i\hat{\boldsymbol{x}} - s_i^2 &= 0 \\
H_2 &: s_2 = A, & 2s_i\hat{\boldsymbol{x}} - s_i^2 &= 2A\hat{\boldsymbol{x}} - A^2
\end{aligned}$$

因此, 假设 H_2 的判决区域由下列方程组确定

$$\begin{cases} 2A\hat{\boldsymbol{x}} - A^2 & > -2A\hat{\boldsymbol{x}} - A^2 \\ 2A\hat{\boldsymbol{x}} - A^2 & > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \hat{\boldsymbol{x}} & > 0 \\ \hat{\boldsymbol{x}} & > \frac{A}{2} \end{cases}$$

合并得到, **当 $\hat{\boldsymbol{x}} > \frac{A}{2}$ 时,判决 H_2 假设成立**。

参量信号的统计检测

基本要求

- 理解参量信号检测的基本概念
- 掌握两种检测方法:广义似然比检验和贝叶斯方法

参量信号检测的基本概念

参量信号的检测中，信源在假设 H_j 下输出含有未知参量 θ_j，因此，在假设 H_j 下，观察信号表示为

$$H_j : x_k = s_{jk|\boldsymbol{\theta}_j} + n_k, \quad k = 1, 2, \cdots, N$$

N 维观测矢量 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_N)^T$ 的统计特性不仅与观测噪声 $n_k (k = 1, 2, \cdots, N)$ 的统计特性有关，而且受未知参量 $\boldsymbol{\theta}_j$ 的控制。

假设 H_j 下观测矢量的概率密度函数是未知参量 $\boldsymbol{\theta}_j$ 的函数：

$$p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta}_j; H_j)$$

参量信号检测的基本概念

例如, 如果我们希望在均值为零, 方差为 σ_n 的高斯白噪声中检测具有未知幅度 A 的信号, 观测次数为 N, 则假设 H_1 下的概率密度函数可表示为

$$
\begin{aligned}
p(\mathbf{x}|A;H_1) &= \prod_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{(x_k-A)^2}{2\sigma_n^2}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{N/2}\exp\left(-\sum_{i=1}^{N}\frac{(x_k-A)^2}{2\sigma_n^2}\right)
\end{aligned}
$$

由于幅度 A 是未知的, 且概率密度函数以 A 为参数, 因此概率密度函数没有完全给定。

因此, 我们需要在确知信号统计检测的基础上, 研究如何处理参量信号的统计检测问题, 这就是**复合假设检验问题**。

广义似然比检验

先利用最大似然方法对未知参量进行估计，然后利用得到的估计量按照确知信号的检测方法进行。

- 最大似然估计

  使似然函数 $p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta}_j; H_j)$ 达最大的 $\boldsymbol{\theta}_j$ 作为该参量的估计量记为 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{jml}$

- 广义似然比检验为

$$\lambda(\boldsymbol{x}) = \frac{p(\boldsymbol{x}|\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1ml}; H_1)}{p(\boldsymbol{x}|\hat{\boldsymbol{\theta}}_{0ml}; H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

  如果假设 H_0 是简单的，而假设 H_1 是复合的，则广义似然比检验为

$$\lambda(\boldsymbol{x}) = \frac{p(\boldsymbol{x}|\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1ml}; H_1)}{p(\boldsymbol{x}|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

关于参量的最大似然估计，将在第 5 章中详细讨论。

贝叶斯方法

- 概率密度函数已知的情况
- 猜测概率密度函数的情况
- 未知参量的奈曼—皮尔逊检测

概率密度函数已知的情况

贝叶斯判决准则

$$\frac{p(\mathbf{x}|H_1)}{p(\mathbf{x}|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)(c_{10}-c_{00})}{P(H_1)(c_{01}-c_{11})}$$

参量信号的检测中，信源在假设 H_j 下的**条件概率密度函数**为

$$p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}_j; H_j)$$

如何由条件似然函数 $p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}_j; H_j)$ 和未知参量 $p(\boldsymbol{\theta}_j)$ 的概率密度函数到似然函数 $p(\mathbf{x}|H_j)$?

概率密度函数已知的情况

$$p(\boldsymbol{x}|H_j) = \int_{\boldsymbol{\theta}_j} p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta}_j; H_j)p(\boldsymbol{\theta}_j)d\boldsymbol{\theta}_j$$

参量检测中, 贝叶斯判决准则

$$\frac{p(\boldsymbol{x}|H_1)}{p(\boldsymbol{x}|H_0)} = \frac{\int_{\boldsymbol{\theta}_1} p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta}_1; H_1)p(\boldsymbol{\theta}_1)d\boldsymbol{\theta}_1}{\int_{\boldsymbol{\theta}_0} p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta}_0; H_0)p(\boldsymbol{\theta}_0)d\boldsymbol{\theta}_0} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)(c_{10} - c_{00})}{P(H_1)(c_{01} - c_{11})}$$

贝叶斯准则方法例题 10

在二元参量信号的统计检测中，两个假设下的信号分别为:

$$H_0 : x = n$$

$$H_1 : x = m + n$$

其中，m 是信号的参量，且是均值为零，方差为 σ_m^2 的高斯随机变量，n 是均值为零，方差为 σ_n^2 的高斯白噪声，试给出贝叶斯检测准则。

贝叶斯准则方法例题 10: 解

解:

$$H_0: x = n$$

$$H_1: x = m + n$$

步骤 1: 计算两个似然函数, 构建似然比

由于 n 是高斯分布随机变量, 因此在 H_0 假设下, 观测信号 x 也服从高斯分布, 且均值为 0, 方差为 σ_n^2; 在 H_1 和给定 m 条件下, 观测信号 x 服从均值为 m, 方差为 σ_n^2 的高斯分布。

$$p(x|H_0) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

$$p(x|m;H_1) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

贝叶斯准则方法例题 10: 解续 (1)

步骤 2: 计算 H_1 假设下的似然函数

由于 $m \sim \mathcal{N}(0, \sigma_m)$ 是一高斯随机变量, 有

$$p(m) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_m^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m^2}{2\sigma_m^2}\right)$$

因此,

$$\begin{aligned}
p(x|H_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x|m; H_1)p(m)dm \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma_n^2}\right) \left(\frac{1}{2\pi\sigma_m^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m^2}{2\sigma_m^2}\right) dm \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n\sigma_m}\right) \exp\left(-\frac{\sigma_m^2(x-m)^2 + \sigma_n^2 m^2}{2\sigma_n^2\sigma_m^2}\right) dm \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n\sigma_m}\right) \exp\left(-\frac{\sigma_m^2 x^2 + (\sigma_n^2+\sigma_m^2)m^2 - 2\sigma_m^2 mx}{2\sigma_n^2\sigma_m^2}\right) dm
\end{aligned}$$

贝叶斯准则方法例题 10: 解续 (2)

利用积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-At^2 \pm 2Bt - C)dt = \left(\frac{\pi}{A}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{AC - B^2}{A}\right)$$

$$\begin{aligned} p(x|H_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n\sigma_m}\right) \exp\left(-\frac{\sigma_m^2 x^2 + (\sigma_n^2 + \sigma_m^2)m^2 - 2\sigma_m^2 mx}{2\sigma_n^2\sigma_m^2}\right) dm \\ &= \left(\frac{1}{2\pi(\sigma_n^2 + \sigma_m^2)}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2(\sigma_n^2 + \sigma_m^2)}\right) \end{aligned}$$

贝叶斯准则方法例题 10: 解续 (3)

$$p(x|H_0) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right)$$
$$p(x|H_1) = \left(\frac{1}{2\pi(\sigma_n^2+\sigma_m^2)}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2(\sigma_n^2+\sigma_m^2)}\right)$$

步骤 3: 构建贝叶斯检测基本表达式

$$\frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

$$\left(\frac{\sigma_n^2}{\sigma_n^2+\sigma_m^2}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{x^2}{2\sigma_n^2} - \frac{x^2}{2(\sigma_n^2+\sigma_m^2)}\right) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

$$\left(\frac{\sigma_n^2}{\sigma_n^2+\sigma_m^2}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{\sigma_m^2 x^2}{2\sigma_n^2(\sigma_n^2+\sigma_m^2)}\right) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

$$x^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{2\sigma_n^2(\sigma_n^2+\sigma_m^2)}{\sigma_m^2}\left(\ln\eta + \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{\sigma_m^2}{\sigma_n^2}\right)\right)$$

判决准则确定后，似然比检测门限 η 就确定了，于是上式可完成是假设 H_1 成立，还是假设 H_2 成立的判决。

猜测概率密度的情况

随机参量的概率密度函数未知时,可以利用常识猜测一个概率分布,然后按照前述方法进行检测。

H_1 含随机变量 m 的似然比检验的判别式:

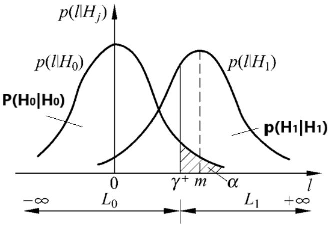
$$\lambda(x) = \frac{p(x|m;H_1)}{p(x|H_0)} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} p(x|m,H_1)p(m)dm}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

未知参量的奈曼—皮尔逊检测

未知参量的概率密度函数未知时, 或未知参量非随机的情况下, 可采用奈曼—皮尔逊准则进行检测。

在给定参量 θ 为某个值和 $P(H_1|H_0)=\alpha$ 约束条件下, 使正确判决概率 $P(H_1|H_1)$ 最大的准则。

注: 在参量 θ 随机或未知的条件下, $P(H_1|H_1)$ 往往是参量的函数。只有对任意 θ, $P(H_1|H_1)$ 都获得最大值时, 该类方法才可适用。



贝叶斯准则方法例题 11

在二元参量信号的统计检测中,两个假设下的信号分别为:

$$H_0 : x = n$$

$$H_1 : x = m + n$$

其中, m 是未知参量, n 是均值为零, 方差为 σ_n^2 的高斯白噪声, 试给 m 不同特性参量情况下的最佳信号检测方法。

贝叶斯准则方法例题 11: 解

解:

$$H_0 : x = n$$

$$H_1 : x = m + n$$

步骤 1: 计算两个似然函数, 构建似然比

由于 n 是高斯分布随机变量, 因此在 H_0 假设下, 观测信号 x 也服从高斯分布, 且均值为 0, 方差为 σ_n^2; 在 H_1 和给定 m 条件下, 观测信号 x 服从均值为 m, 方差为 σ_n^2 的高斯分布。。

$$p(x|H_0) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

$$p(x|m;H_1) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

贝叶斯准则方法例题 11: 解续 (1)

步骤 2: 形成贝叶斯检测基本表达式

$$\lambda(x) = \frac{p(x|m;H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

$$\exp\left(\frac{m}{\sigma_n^2}x - \frac{m^2}{2\sigma_n^2}\right) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

步骤 3: 化简, 形成贝叶斯检测判决表达式

$$\left(\frac{m}{\sigma_n^2}x - \frac{m^2}{2\sigma_n^2}\right) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \ln\eta$$

$$mx \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \sigma_n^2 \ln\eta + \frac{m^2}{2} \overset{def}{=} \gamma$$

贝叶斯准则方法例题 11: 解续 (2)

$$mx \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \sigma_n^2 \ln \eta + \frac{m^2}{2} \overset{def}{=} \gamma$$

1. 当 $m > 0$, 且为确知信号参量时, 似然比检验为

$$x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma_n^2}{m} \ln \eta + \frac{m}{2} \overset{def}{=} \gamma^+$$

2. 当 $m < 0$, 且为确知信号参量时, 似然比检验为

$$x \underset{H_1}{\overset{H_0}{\gtrless}} -\frac{\sigma_n^2}{|m|} \ln \eta - \frac{|m|}{2} \overset{def}{=} \gamma^-$$

贝叶斯准则方法例题 11: 解续 (2)

3. 当 m 是随机参量, 且 $m \sim \mathcal{N}(0, \sigma_m)$, 其概率密度函数为

$$p(m) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_m^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m^2}{2\sigma_m^2}\right)$$

由例题 10 得到:

$$x^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{2\sigma_n^2(\sigma_n^2+\sigma_m^2)}{\sigma_m^2}\left(\ln\eta + \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{\sigma_m^2}{\sigma_n^2}\right)\right)$$

4. 假设 $m_0 \le m \le m_1$,其概率密度函数 p(m) 未知似然比检验为:

$$mx \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \sigma_n^2 \ln\eta + \frac{m^2}{2}$$

在 $m(m_0 \le m \le m_1)$ 取某个值的条件下,采用奈曼-皮尔逊准则来建立判决表达式。

贝叶斯准则方法例题 11: 解续 (3)

在 $m(m_0 \le m \le m_1)$ 取某个值的条件下，采用奈曼-皮尔逊准则来建立判决表达式。

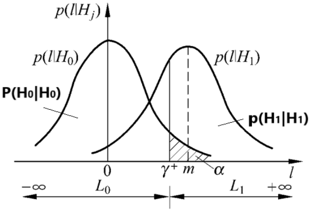
4.1 若 $m_0 > 0$, 判决表示式为

$$mx \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \sigma_n^2 \ln \eta + \frac{m^2}{2}$$

$$l(x) = x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma_n^2}{m} \ln \eta + \frac{m}{2} \overset{def}{=} \gamma^+$$

在 $P(H_1|H_0) = \alpha$ 约束条件下，γ^+ 由下式确定：

$$P(H_1|H_0) = \int_{\gamma^+}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{l^2}{2\sigma_n^2} \right) dl = \alpha$$



贝叶斯准则方法例题 11: 解续 (4)

在 $m(m_0 \le m \le m_1)$ 取某个值的条件下，采用奈曼-皮尔逊准则来建立判决表达式。

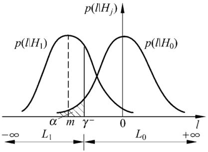
4.2 若 $m_1 < 0$，判决表示式为

$$mx \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \sigma_n^2 \ln\eta + \frac{m^2}{2}$$

$$l(x) = x \underset{H_1}{\overset{H_0}{\gtrless}} -\frac{\sigma_n^2}{|m|}\ln\eta - \frac{|m|}{2} \overset{def}{=} \gamma^-$$

在 $P(H_1|H_0) = \alpha$ 约束条件下，γ^- 由下式确定：

$$P(H_1|H_0) = \int_{-\infty}^{\gamma^-}\left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{l^2}{2\sigma_n^2}\right)dl = \alpha$$

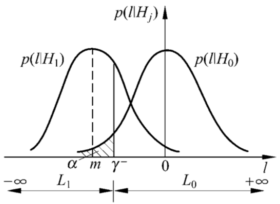


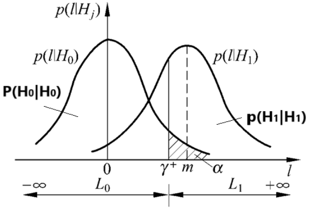
贝叶斯准则方法例题 11: 解续 (5)

在 $m(m_0 \le m \le m_1)$ 取某个值的条件下，采用奈曼-皮尔逊准则来建立判决表达式。

4.3 若 $m_0 > 0$ 或 $m_1 < 0$ 小结

1. 若 $m_0 > 0$, m 仅取正值，则在 $P(H_1|H_0) = \alpha$ 的约束下，$P^{(m)}(H_1|H_1)$ 是最大的，其一致最大功效检验成立；
2. 若 $m_1 < 0$, m 仅取负值，则在 $P(H_1|H_0) = \alpha$ 的约束下，$P^{(m)}(H_1|H_1)$ 也是最大的。





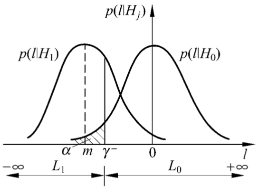
贝叶斯准则方法例题 11: 解续 (6)

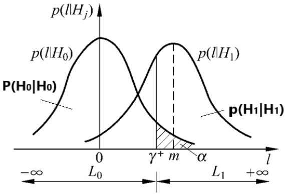
在 $m(m_0 \le m \le m_1)$ 取某个值的条件下，采用奈曼-皮尔逊准则来建立判决表达式。

4.4 若 $m_0 < 0, m_1 > 0$, 即 m 取值可能为正或可能为负的情况下，无论参量信号的统计检测，按 m 仅取正值设计，还是按 m 仅取负值设计，都有可能在某些 m 值下，$P^{(m)}(H_1|H_1)$ 不满足最大的要求。

例如，按 m 取正设计信号检测系统，当 m 为正时，$P^{(m)}(H_1|H_1)$ 最大，但当 m 为负时，$P^{(m)}(H_1|H_1)$ 可能最小。

因此，这种情况下不能采用奈曼-皮尔逊准则来实际最佳检测系统。





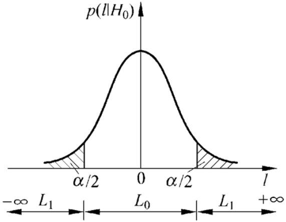
贝叶斯准则方法例题 11: 解续 (6)

5. 双边检验

若 $m_0 < 0, m_1 > 0$, 即 m 取值可能为正或可能为负, 奈曼-皮尔逊准则不能保证 $P^{(m)}(H_1|H_1)$ 最大要求。考虑把约束条件 $P(H_1|H_0) = \alpha$ 分成两个 $\alpha/2$, 假设 H_1 的判决域由两部分组成。判决表示式为

$$|x| \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \gamma$$

虽然双边检验比均值 m 假定为正确时的单边检验性能差, 但是比均值 m 假定为错误时的单边检验性能要好的多。因此不失为一种好的折中方法。



贝叶斯准则方法例题 11: 解续 (7)

6. 广义似然比检验

似然函数

$$p(x|m;H_1) = (\frac{1}{2\pi\sigma_n^2})^{1/2}\exp(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma_n^2})$$

对 m 求偏导, 令结果等于零, 即

$$\frac{\partial \ln p(x|m;H_1)}{\partial m}\Big|_{m=\widehat{m}_{ml}} = 0$$

解得单次观测时, m 的最大似然估计量 $\widehat{m}_{ml} = x$, 于是有

$$p(x|\widehat{m}_{ml};H_1) = (\frac{1}{2\pi\sigma_n^2})^{1/2}\exp(-\frac{(x-\widehat{m}_{ml})^2}{2\sigma_n^2})\Big|_{\widehat{m}_{ml}=x} = (\frac{1}{2\pi\sigma_n^2})^{1/2}$$

贝叶斯准则方法例题 11: 解续 (8)

6. 广义似然比检验

$$p(x|H_0) = (\frac{1}{2\pi\sigma_n^2})^{1/2}\exp(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}) \qquad p(x|\widehat{m}_{ml};H_1) = (\frac{1}{2\pi\sigma_n^2})^{1/2}$$

代入广义似然比检验中, 有

$$\lambda(x) = \frac{p(x|m;H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

$$\lambda(x) = \frac{(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2})^{1/2}}{(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2})^{1/2}\exp(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2})} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

化简得判决表示式 $$x^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 2\sigma_n^2 \ln\eta \overset{def}{=} \gamma^2 \implies |x| \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \gamma$$

这正是前面讨论过的双边检验。只是前面是从奈曼-皮尔逊准则出发推导得到。而这里是从似然比检验的概念导出的, 似然函数 $p(x|m;H_1)$ 中的信号参量 m 由其最大似然估计量 $\widehat{m}_{ml}$ 代换, 所以是广义似然比检验。

欢迎批评指正！