信号检测与估值

段江涛
机电工程学院

2019 年 8 月

主要内容

Theorem

如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则积分上限函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

在 $[a,b]$ 上具有导数，并且它的导数是

$$\Phi'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \qquad (a \le x \le b)$$

Theorem

如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

就是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数。

Theorem

如果函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

术语 (1)

$H_j(j=0,1)$: 信源输出的信号, 称为假设 H_j

$P(H_j)(i=0)$: 假设 H_j 为真的先验概率 (先验: 先于试验)

$(x|H_j)(j=0,1)$: 假设 H_j 下的观测信号是随机变量

$p(x|H_j)(j=0,1)$: 假设 H_j 下观测信号的概率密度函数

$(H_i|H_j)(i,j=0,1)$: 在假设 H_j 为真的条件下,判决假设 H_i 成立的结果。

$P(H_i|H_j)(i,j=0,1)$: 在假设 H_j 为真的条件下,判决假设 H_i 成立的概率。

c_{ij}: 在假设 H_j 为真的条件下,判决假设 H_i 成立所付出的代价。

贝叶斯判决准则

判决表达式

$$\lambda(x) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

$$\lambda(x) \overset{def}{=} \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)}$$

定义为**似然比函数**

$$\eta \overset{def}{=} \frac{P(H_0)(c_{10} - c_{00})}{P(H_1)(c_{01} - c_{11})}$$

定义为**判决门限**

化简 (例如对数似然比检验)

$$\ln \lambda(x) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \ln \eta$$

M 元信号检测模型

$$\boldsymbol{R} = \bigcup_{i=0}^{M-1} R_i, \quad R_i \cap R_j = \emptyset, (i \neq j)$$

最佳信号检测 $\Leftarrow$ 正确划分观测空间 $\boldsymbol{R}$ 中的各个判决域 R_i $\Leftarrow$ 最佳检测准则

两种假设先验等概 $\Longrightarrow$ $P(H_0) = P(H_1) = \frac{1}{2}$

采样样本 $x_i (i = 1, 2, \ldots, N)$ 之间相互统计独立, 因此其 N 维联合概率密度能够表示成各自一维概率密度之积的形式, 即

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_N) = p(x_1)p(x_2)\cdots p(x_N) = \prod_{i=1}^{N} p(x_i)$$

思考

如果 n 是均值为零的，方差为 σ_n^2 的高斯随机变量，两个假设下的观测信号模型

$H_1 : r = 1 + n$

$H_0 : r = -1 + n$

观测信号 $p(r|H_1), p(r|H_0)$ 应服从何种分布？

因为高斯随机变量的特点：高斯随机变量的线性组合还是高斯随机变量。

习题 2.7: $x \sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$，则 $(y = ax + b) \sim \mathcal{N}(a\mu_x + b, a^2\sigma_x^2)$。

所以，$p(r|H_1) \sim \mathcal{N}(1, \sigma_n^2), p(r|H_0) \sim \mathcal{N}(-1, \sigma_n^2)$

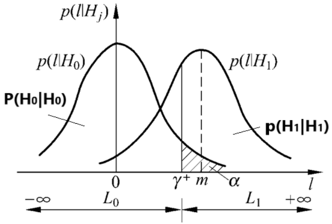
直接计算：$E(r|H_0) = E(1 + n) = 1 + E(n) = 1, Var(r|H_0) =$
$E[(r|H_0 - E(r|H_0))^2] = E[n^2] = \sigma_n^2 \implies r|H_0 \sim \mathcal{N}(1, \sigma_n^2)$
$E(r|H_1) = E(-1 + n) = -1 + E(n) = -1, Var(r|H_1) = E[(r|H_1 - E(r|H_1))^2] =$
$E[n^2] = \sigma_n^2 \implies r|H_1 \sim \mathcal{N}(-1, \sigma_n^2)$

$$n \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$$

$$H_0 : x = n \qquad x \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$$

$$H_1 : x = m + n \quad x \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$$

判决表达式: $x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \dfrac{\sigma^2}{m}\ln\eta + \dfrac{m}{2}$

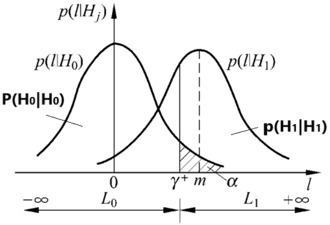


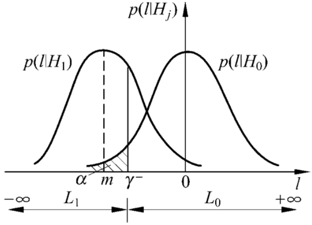
$p(l|H_j)(j=0,1)$: 假设 H_j 下观测信号的概率密度函数; $r^+ = \frac{\sigma^2}{m}\ln\eta + \frac{m}{2}$; $\alpha = P(H_1|H_0)$

思考

1. $\frac{m}{2}$ 是两个假设的中间值, $\frac{\sigma^2}{m}\ln\eta$ 为中间值的修正量, 其含义如何?
2. 考虑 $m>0, m<0, m=0$ 时, 如何构造判决表达式?

1. $m=0$ 时: H_0, H_1 成为一样的信号。
2. $m\uparrow \Longrightarrow$ 中间值修正量 $(\frac{\sigma^2}{m}\ln\eta)\downarrow, r$ 越接近于中间值 $\frac{m}{2}$。
3. m 值越大, 更易区分两种假设, 检测性能越好。
4. $m>0$ 和 $m<0$ 下的判决表达式如下图。





$m>0$; $\quad x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma^2}{m}\ln\eta + \frac{m}{2}$

$m<0$; $\quad x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\lessgtr}} -\frac{\sigma^2}{|m|}\ln\eta - \frac{|m|}{2}$

经过上述化简,信号检测的判决式由似然比检验的形式,简化为检验统计量 $l(x)$ 与检测门限 γ 相比较的形式,形成贝叶斯检测基本基本表达式:

$$l(x) \stackrel{def}{=} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma^2 \ln \eta}{Nm} + \frac{m}{2} \stackrel{def}{=} \gamma^+$$

检验统计量 $l(x) \stackrel{def}{=} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$ 是观测信号 $x_i(i = 1, 2, \ldots, N)$ 的求和取平均值的结果,即它是 $x_i(i = 1, 2, \ldots, N)$ 的函数,是一个随机变量。

而无论是在假设 H_0 下,还是在假设 H_1 下,$(x_i|H_0), (x_i|H_1)$ 均服从高斯分布,因为高斯随机变量的线性组合还是高斯随机变量,所以两种假设下的观测量 $(l|H_0), (l|H_1)$ 也是服从高斯分布的随机变量。

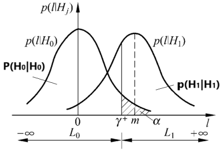
N 次独立采样,样本为

$x_i(i = 1, 2, \ldots, N)$

$$n_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

$$H_0 : x_i = n_i \qquad (l|H_0) \sim \mathcal{N}(0, \frac{\sigma^2}{N})$$

$$H_1 : x_i = m + n_i \qquad (l|H_1) \sim \mathcal{N}(m, \frac{\sigma^2}{N})$$



$p(l|H_j)(j = 0, 1)$: 假设 H_j 下观测信号的概率密度函数; $r^+ = \frac{\sigma^2 \ln \eta}{Nm} + \frac{m}{2}$; $\alpha = P(H_1|H_0)$

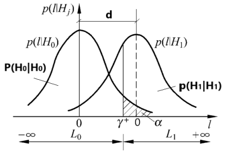
观测信号 ($\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$)

$(\mathbf{x}|H_0) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2), \quad (\mathbf{x}|H_1) \sim \mathcal{N}(A, \sigma^2)$

检验统计量 $l(x)$:

$(l|H_0) \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{N}\sigma^2), \quad (l|H_1) \sim \mathcal{N}(A, \frac{1}{N}\sigma^2)$

归一化后, $(l|H_j) \sim \mathcal{N}(0, 1)$



$p(l|H_j)(j = 0, 1)$: 假设 H_j 下观测信号的概率密度函数; $r^+ = \frac{\ln\eta}{d} + \frac{d}{2}$; $\alpha = P(H_1|H_0)$

判决表达式:

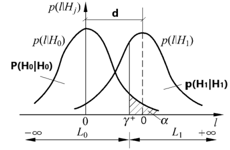
$$l(x) \overset{def}{=} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma^2 \ln\eta}{NA} + \frac{A}{2} \overset{def}{=} \gamma^+$$

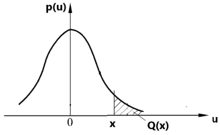
判决概率:(其中, 信噪比 $d^2 = \frac{NA^2}{\sigma^2}$)

$$P(H_1|H_0) = Q\left(\frac{\ln\eta}{d} + \frac{d}{2}\right), \qquad P(H_0|H_0) = 1 - Q\left(\frac{\ln\eta}{d} + \frac{d}{2}\right)$$

$$P(H_1|H_1) = Q\left(\frac{\ln\eta}{d} - \frac{d}{2}\right), \qquad P(H_0|H_1) = 1 - Q\left(\frac{\ln\eta}{d} - \frac{d}{2}\right)$$

贝叶斯检测性能分析小结 (ex3 小结 2)





$p(l|H_j)(j=0,1)$: 假设 H_j 下观测信号的概率密度函数; $r^+ = \frac{\ln\eta}{d} + \frac{d}{2}$; $\alpha = P(H_1|H_0)$

$Q(x) = \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{u^2}{2})du.$
$Q(x)$ 是单调递减函数, 其反函数: $Q^{-1}[\bullet]$

因为 $P(H_1|H_0) = Q(\ln\eta/d + d/2) \implies \ln\eta/d = Q^{-1}[P(H_1|H_0)] - d/2$

这样有:

$$P(H_1|H_1) = Q\left(\ln\eta/d - d/2\right)$$
$$= Q[Q^{-1}[P(H_1|H_0)] - d/2 - d/2] = Q[Q^{-1}[P(H_1|H_0)] - d]$$

这说明, 当给定 $P(H_1|H_0)$ 时, $P(H_1|H_1)$ 随功率信噪比 $(d^2 = NA^2/\sigma^2)$ 单调增加。

另一方面, 采样次数 $N\uparrow \implies d\uparrow, p(l|H_0), p(l|H_1)$ 的间距 $d\uparrow$, 检测性能 $\uparrow$。

ex3 小结 (1)

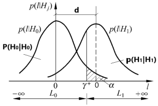
N 次独立采样, 样本为

$x_i(i=1,2,\ldots,N)$

$$n_i \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$$

$$H_0: x_i = n_i \qquad (l|H_0) \sim \mathcal{N}(0, \frac{\sigma^2}{N})$$

$$H_1: x_i = A + n_i \quad (l|H_1) \sim \mathcal{N}(m, \frac{\sigma^2}{N})$$



$p(l|H_j)(j=0,1)$: 假设 H_j 下观测信号的概率密度函数; $r^+ = \frac{\ln\eta}{d} + \frac{d}{2}$; $\alpha = P(H_1|H_0)$

检验统计量 $l(x)$:

$$(l|H_0) \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{N}\sigma^2), \qquad (l|H_1) \sim \mathcal{N}(A, \frac{1}{N}\sigma^2)$$

归一化后, $(l|H_j) \sim \mathcal{N}(0,1)$

判决表达式:

$$l(x) \overset{def}{=} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma^2 \ln\eta}{NA} + \frac{A}{2} \overset{def}{=} \gamma^+$$

判决概率:(其中, 信噪比 $d^2 = \frac{NA^2}{\sigma^2}$)

$$P(H_1|H_0) = Q\left(\frac{\ln\eta}{d} + \frac{d}{2}\right), \qquad P(H_0|H_0) = 1 - Q\left(\frac{\ln\eta}{d} + \frac{d}{2}\right)$$

$$P(H_1|H_1) = Q\left(\frac{\ln\eta}{d} - \frac{d}{2}\right), \qquad P(H_0|H_1) = 1 - Q\left(\frac{\ln\eta}{d} - \frac{d}{2}\right)$$

ex3—观测量 $(l|H_0)$

性能分析:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma^2 \ln\eta}{NA} + \frac{A}{2} \overset{def}{=} \gamma$$

统计量 $l(x) \overset{def}{=} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$

假设 H_0 条件下,统计量 $l(x)$ 为高斯分布,均值和方差分别为

$$E[l|H_0] = E\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i|H_0)\right] = E\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} n_i\right] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E[n_i] = 0$$

$$Var[l|H_0] = E\left[(l|H_0 - E(l|H_0))^2\right] = E\left[\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} n_i\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N} E[n_i^2] = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{N}$$

因此, $(l|H_0) \sim \mathcal{N}(0, \frac{\sigma^2}{N})$

$$p(l|H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Var[l|H_0]}} \exp\left[-\frac{(l - E[l|H_0])^2}{2Var[l|H_0]}\right] = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{Nl^2}{2\sigma^2}\right]$$

ex3—观测量 $(l|H_1)$

性能分析:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma^2 \ln \eta}{NA} + \frac{A}{2} \overset{def}{=} \gamma$$

统计量 $\quad l(x) \overset{def}{=} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$

假设 H_1 条件下, 统计量 $l(x)$ 为高斯分布, 均值和方差分别为

$$E[l|H_1] = E\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i|H_1)\right] = E\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(A+n_i)\right] = A + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E[n_i] = A$$

$$Var[l|H_1] = E\left[(l|H_1 - E(l|H_1))^2\right] = E\left[\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(A+n_i) - A\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N} E[n_i^2] = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{N}$$

因此, $(l|H_1) \sim \mathcal{N}(A, \frac{\sigma^2}{N})$

$$p(l|H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Var[l|H_1]}} \exp\left[-\frac{(l - E[l|H_1])^2}{2Var[l|H_1]}\right] = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{N(l-A)^2}{2\sigma^2}\right]$$

ex4—$l|H_0$

N 次独立采样,样本为:

$H_0 : x_i = 1 + n_i, i = 1, 2, \ldots, N$

$H_1 : x_i = -1 + n_i, i = 1, 2, \ldots, N$

计算平均代价:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma^2 \ln\eta}{2N} = -\frac{\ln 3}{4N} \overset{def}{=} \gamma$$

统计量 $l(x) \overset{def}{=} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$

假设 H_0 **条件下,统计量** $l(x)$ **为高斯分布,均值和方差分别为**

$$E[l|H_0] = E\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i|H_0)\right] = E\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(1+n_i)\right]$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E[(1+n_i)] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[E(1)+E(n_i)] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[1+0] = 1$$

$$Var[l|H_0] = E\left[(l|H_0 - E[l|H_0]))^2\right] = E\left[\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(1+n_i) - E(l)\right)^2\right]$$

$$= E\left[\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(1+n_i) - 1\right)^2\right] = E\left[\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} n_i\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N} E[n_i^2] = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{N}$$

因此, $(l|H_0) \sim \mathcal{N}(1, \frac{\sigma^2}{N})$

$$p(l|H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Var[l|H_0]}} \exp\left[-\frac{(l - E[l|H_0])^2}{2Var[l|H_0]}\right] = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{N(l-1)^2}{2\sigma^2}\right]$$

ex4—$l|H_1$

N **次独立采样,样本为:**

$H_0 : x_i = 1 + n_i, i = 1, 2, \ldots, N$

$H_1 : x_i = -1 + n_i, i = 1, 2, \ldots, N$

计算平均代价:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma^2 \ln\eta}{2N} = -\frac{\ln 3}{4N} \overset{def}{=} \gamma$$

统计量 $l(x) \overset{def}{=} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$

假设 H_1 **条件下,统计量** $l(x)$ **为高斯分布,均值和方差分别为**

$$E[l|H_1] = E\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i|H_1)\right] = E\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(-1+n_i)\right]$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E[(1+n_i)] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[E(-1)+E(n_i)] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[-1+0] = -1$$

$$Var[l|H_1] = E\left[(l|H_1 - E[l|H_1]))^2\right] = E\left[\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(-1+n_i) - E(l)\right)^2\right]$$

$$= E\left[\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(-1+n_i)+1\right)^2\right] = E\left[\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} n_i\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N} E[n_i^2] = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{N}$$

因此, $(l|H_1) \sim \mathcal{N}(-1, \frac{\sigma^2}{N})$

$$p(l|H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Var[l|H_1]}}\exp\left[-\frac{(l-E[l|H_1])^2}{2Var[l|H_1]}\right] = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[-\frac{N(l+1)^2}{2\sigma^2}\right]$$

公式推导练习 (1)

检验统计量:

$$l(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(a + bn_i), i = 1, 2, \ldots, N$$

其中: $n_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$, 即 $E[n_i] = 0$, $Var[n_i] = E\left[(n_i - E[n_i])^2\right] = E[n_i^2] = \sigma_n^2$

统计量 $l(x)$ 为高斯分布, 均值和方差分别为

$$\begin{aligned}
E[l] &= E\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(a + bn_i)\right] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}E[a + bn_i] \\
&= a + \frac{b}{N}\sum_{i=1}^{N}E[n_i] = a && \text{by } E[n_i] = 0 \\
Var[l] &= E[(l - E(l))^2] = E\left[\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(a + bn_i) - a\right)^2\right] \\
&= E\left[\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(bn_i)\right)^2\right] = E\left[\left(\frac{b}{N}\sum_{i=1}^{N}n_i\right)^2\right] \\
&= \left(\frac{b}{N}\right)^2\sum_{i=1}^{N}E[n_i^2] = (\frac{b}{N})N\sigma_n^2 = \frac{b^2\sigma_n^2}{N} && \text{by } E[n_i^2] = \sigma_n^2
\end{aligned}$$

公式推导练习 (2)

检验统计量:

$$l(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(m+n_i), i = 1, 2, \ldots, N$$

其中: m 是常数, $n_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$, 即

$E[n_i] = 0, Var[n_i] = E\left[(n_i - E[n_i])^2\right] = E[n_i^2] = \sigma_n^2$

统计量 $l(x)$ 为高斯分布, 均值和方差分别为

$$\begin{aligned}
E[l] &= E\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(m+n_i)\right] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}E[m+n_i] \\
&= m + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}E[n_i] && \text{by } E[n_i] = 0 \\
&= m \\
Var[l] &= E[(l-E(l))^2] = E\left[\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(m+n_i) - m\right)^2\right] \\
&= E\left[\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}n_i\right)^2\right] = E\left[\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}n_i\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}E[n_i^2] = \frac{1}{N^2}N\sigma_n^2 && \text{by } E[n_i^2] = \sigma_n^2 \\
&= \frac{\sigma_n^2}{N}
\end{aligned}$$

ex5 推导 (1)

两个假设下，观测量 x 均服从高斯分布，$(x|H_0) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, $(x|H_1) \sim \mathcal{N}(A, \sigma^2)$.

$$p(x|H_0) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$
$$p(x|H_1) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{(x-A)^2}{2\sigma^2}\right]$$

两个假设先验概率等概，且 $c_{00} = c_{11} = 0, c_{10} = c_{01} = 1$，所以似然比检验判别式为:

$$\lambda(x) = \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} = \exp\left(\frac{2Ax - A^2}{2\sigma^2}\right) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta = 1$$

化简得判决表达式:

$$x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{A}{2}$$

由于检验统计量 $l(x) = x$，所以

$$p(l|H_0) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{l^2}{2\sigma^2}\right)$$
$$p(l|H_1) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{(l-A)^2}{2\sigma^2}\right]$$

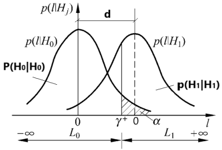
ex5 推导 (2)

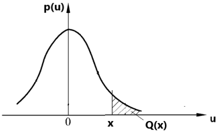
又因为检测判决门限 $\gamma = \frac{A}{2}$, 所以两种错误判决概率分别为

$$P(H_1|H_0) = \int_{\gamma}^{\infty} p(l|H_0)dl = \int_{\frac{A}{2}}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{l^2}{2\sigma^2}\right) dl$$

$$\overset{l=\sigma u}{=} \int_{\frac{A}{2\sigma}}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

$$= Q[\frac{A}{2\sigma}] = Q[\frac{d}{2}] \qquad \text{by } d^2 \overset{def}{=} A^2/\sigma^2$$





$p(l|H_j)(j=0,1)$: 假设 H_j 下观测信号的概率密度函数; $\alpha = P(H_1|H_0)$

$Q(x) = \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{u^2}{2})du.$
$Q(x)$ 是单调递减函数, 其反函数: $Q^{-1}[\bullet]$

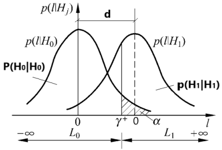
ex5 推导 (3)

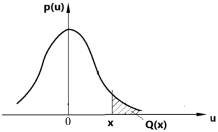
$$P(H_0|H_1) = \int_{-\infty}^{\gamma} p(l|H_1)dl = \int_{-\infty}^{\frac{A}{2}} \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{(l-A)^2}{2\sigma^2}\right) dl$$

$$\overset{l=A+\sigma u}{=} \int_{-\infty}^{-\frac{A}{2\sigma}} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

$$= 1 - \int_{-\frac{A}{2\sigma}}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

$$= 1 - Q[-\frac{A}{2\sigma}] = 1 - Q[-\frac{d}{2}] = Q[\frac{d}{2}] \qquad \text{by } d^2 \overset{def}{=} A^2/\sigma^2$$





ex5 推导 (4)

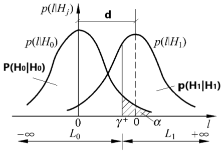
两种错误判决概率:

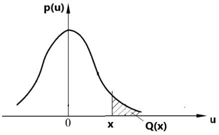
$$P(H_1|H_0) = Q[\frac{d}{2}], \qquad P(H_0|H_1) = Q[\frac{d}{2}]$$

其中, $d^2 \stackrel{def}{=} A^2/\sigma^2$。所以, 平均错误概率 P_e 为

$$\begin{aligned} P_e &= P(H_0)P(H_1|H_0) + P(H_1)P(H_0|H_1) \\ &= \frac{1}{2}Q[\frac{d}{2}] + \frac{1}{2}Q[\frac{d}{2}] = Q[\frac{d}{2}] \end{aligned}$$

$Q(x)$ 是单调递减函数, 信噪比 d 越高, 平均错误概率越小, 检测性能越好。





$p(l|H_j)(j=0,1)$: 假设 H_j 下观测信号的概率

$Q(x) = \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{u^2}{2})du.$

最大后验概率准则

在贝叶斯准则中, 当代价因子满足: $c_{10}-c_{00}=c_{01}-c_{11}$ 时

$$\lambda(\boldsymbol{x})=\frac{p(\boldsymbol{x}|H_1)}{p(\boldsymbol{x}|H_0)}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\frac{P(H_0)}{P(H_1)}\implies P(H_1)p(\boldsymbol{x}|H_1)\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}P(H_0)p(\boldsymbol{x}|H_0)$$

由条件概率公式, 有

$$P(H_1|(\boldsymbol{x}\le X\le\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}))=\frac{P((\boldsymbol{x}\le X\le\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x})|H_1)P(H_1)}{P(\boldsymbol{x}\le X\le\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x})}$$

当 $d\boldsymbol{x}$ 很小时, 有

$P((\boldsymbol{x}\le X\le\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x})|H_1)=p(\boldsymbol{x}|H_1)d\boldsymbol{x},\quad P(\boldsymbol{x}\le X\le\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x})=p(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$

$P(H_1|(\boldsymbol{x}\le X\le\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}))=P(H_1|\boldsymbol{x})$, 从而得

$$P(H_1|\boldsymbol{x})=\frac{p(\boldsymbol{x}|H_1)d\boldsymbol{x}P(H_1)}{p(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}}=\frac{p(\boldsymbol{x}|H_1)P(H_1)}{p(\boldsymbol{x})}$$

$$\implies P(H_1)p(\boldsymbol{x}|H_1)=p(\boldsymbol{x})P(H_1|\boldsymbol{x})$$

类似地, 可得

$$P(H_0)p(\boldsymbol{x}|H_0)=p(\boldsymbol{x})P(H_0|\boldsymbol{x})$$

最大后验概率准则

$$P(H_1)p(\boldsymbol{x}|H_1) = p(\boldsymbol{x})P(H_1|\boldsymbol{x}), \quad P(H_0)p(\boldsymbol{x}|H_0) = p(\boldsymbol{x})P(H_0|\boldsymbol{x})$$

$$\lambda(\boldsymbol{x}) = \frac{p(\boldsymbol{x}|H_1)}{p(\boldsymbol{x}|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)}{P(H_1)} \implies P(H_1)p(\boldsymbol{x}|H_1) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} P(H_0)p(\boldsymbol{x}|H_0)$$

$$p(\boldsymbol{x})P(H_1|\boldsymbol{x}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} p(\boldsymbol{x})P(H_0|\boldsymbol{x})$$

$$P(H_1|\boldsymbol{x}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} P(H_0|\boldsymbol{x})$$

$P(H_j|\boldsymbol{x})(j=0,1)$ 表示已经获得观测量 $\boldsymbol{x}$ 的条件下，假设 H_j 为真时的概率，称为**后验概率**。

按照最小平均代价的贝叶斯准则在代价因子满足：$c_{10} - c_{00} = c_{01} - c_{11}$ 时，就成为**最大后验概率准则 (maximum a posteriori probability criterion)**

平均代价

假设 H_j 为真,判决所付出的平均代价为:

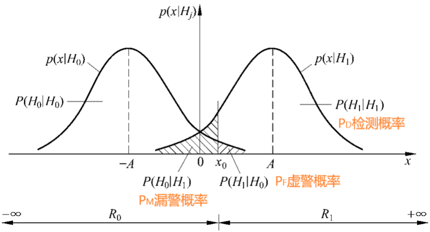
$$C(H_j) = \sum_{i=0}^{1} c_{ij} P(H_i|H_j)$$

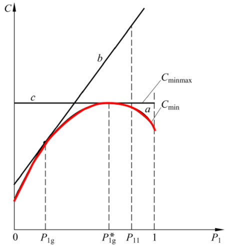
判决 H_0 成立的代价 $\quad C(H_0) = c_{00}P(H_0|H_0) + c_{10}P(H_1|H_0)$

判决 H_1 成立的代价 $\quad C(H_1) = c_{01}P(H_0|H_1) + c_{11}P(H_1|H_1)$

总代价: $\quad C = P(H_0)C(H_0) + P(H_1)C(H_1)$

P_F, P_M, P_D (1)





$$\eta \overset{def}{=} \frac{P(H_0)(c_{10}-c_{00})}{P(H_1)(c_{01}-c_{11})} = \frac{(1-P_1)(c_{10}-c_{00})}{P_1(c_{01}-c_{11})} = \frac{1}{P_1(c_{01}-c_{11})} - \frac{c_{10}-c_{00}}{c_{01}-c_{11}}$$

$$C(P_1) = c_{00} + (c_{10}-c_{00})P_F(P_1) +$$

$$P_1[(c_{11}-c_{00}) + (c_{01}-c_{11})P_M(P_1) - (c_{10}-c_{00})P_F(P_1)] \qquad \text{凸函数}$$

$$P_1 \uparrow \Longrightarrow \eta\downarrow, P_M\downarrow, P_F\uparrow, P_D\uparrow, C\uparrow\sim\downarrow$$

极小极大化准则

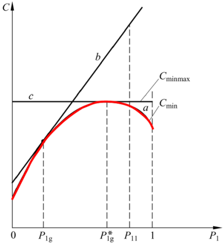
目的: 避免产生过分大的代价, 使极大可能代价极小化。

1. 猜测一个先验概率 P_{1g}, 以 $\eta(P_{1g})$ 为门限进行判决。
2. P_{1g} 确定, $P_M(P_{1g})$ 和 $P_F(P_{1g})$ 即可确定。
3. $C(P_1, P_{1g})$ 是一条与曲线 a 相且的直线 b, 切点在 $C(P_1 = P_{1g})$ 处。
4. 如果猜测的先验概率为 P_{1g}^*, 则无论实际的先验概率 P_1 为多大, 平均代价都等于 C_{minmax}, 而不会产生过分大的代价。

$$\eta = \eta(P_{1g}) = \frac{1}{P_{1g}(c_{01} - c_{11})} - \frac{c_{10} - c_{00}}{c_{01} - c_{11}}$$

$$C(P_1, P_{1g}) = c_{00} + (c_{10} - c_{00})P_F(P_{1g}) +$$

$$P_1[(c_{11} - c_{00}) + (c_{01} - c_{11})P_M(P_{1g}) - (c_{10} - c_{00})P_F(P_{1g})]$$



此时,极小化极大代价就是平均错误概率 $P_F(P_{1g})$

似然比检验的判别式:

$$\lambda(x)=\frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\eta$$

$$\lambda(x)=\frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\frac{P(H_0)(c_{10}-c_{00})}{P(H_1)(c_{01}-c_{11})}\overset{def}{=}\eta$$

$$\eta\overset{def}{=}\frac{P(H_0)(c_{10}-c_{00})}{P(H_1)(c_{01}-c_{11})}=\frac{(1-P_1)(c_{10}-c_{00})}{P_1(c_{01}-c_{11})}=\frac{1}{P_1(c_{01}-c_{11})}-\frac{c_{10}-c_{00}}{c_{01}-c_{11}}$$

判决概率:

$$P_F=P(H_1|H_0)=\int_\eta^\infty p(\lambda|H_0)d\lambda$$

$$P_D=P(H_1|H_1)=\int_\eta^\infty p(\lambda|H_1)d\lambda$$

$$P_D = P_D = P(H_1|H_1) = \int_{\eta}^{\infty} p(\lambda|H_1)d\lambda = P_D(\eta)$$

$$P_F = P(H_1|H_0) = \int_{\eta}^{\infty} p(\lambda|H_0)d\lambda = P_F(\eta)$$

$$\frac{dP_D(\eta)}{d\eta} = -p(\eta|H_1)$$

$$\frac{dP_F(\eta)}{d\eta} = -p(\eta|H_0)$$

$$\text{by } \Phi'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \qquad (a \le x \le b)$$

$$\frac{dP_D(\eta)}{dP_F(\eta)} = \frac{-p(\eta|H_1)}{-p(\eta|H_0)} = \frac{p(\eta|H_1)}{p(\eta|H_0)}$$

$$
\begin{aligned}
P_D(\eta) &= P[(\lambda|H_1) \geq \eta] \\
&= \int_{\eta}^{\infty} p(\lambda|H_1)d\lambda \\
&= \int_{R_1}^{\infty} p(x|H_1)dx \\
&= \int_{R_1}^{\infty} \lambda p(x|H_0)dx \qquad\qquad \text{by } \lambda(x) = \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta \\
&= \int_{\eta}^{\infty} \lambda p(\lambda|H_0)d\lambda
\end{aligned}
$$

$$
\frac{dP_D(\eta)}{d\eta} = -\eta p(\eta|H_0)
$$

$$
\frac{dP_D(\eta)}{dP_F(\eta)} = \frac{-p(\eta|H_1)}{-p(\eta|H_0)} = \frac{-\eta p(\eta|H_0)}{-p(\eta|H_0)} = \eta
$$

H_1 含随机变量 m 的似然比检验的判别式：

$$\lambda(x)=\frac{p(x|m;H_1)}{p(x|H_0)}=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}p(x|m,H_1)p(m)dm}{p(x|H_0)}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\eta$$

$p(m)$ 未知

$$p(x|H_0) = (\frac{1}{2\pi\sigma_n^2})^{1/2}\exp(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2})$$

$$p(x|m;H_1) = (\frac{1}{2\pi\sigma_n^2})^{1/2}\exp(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma_n^2})$$

$$\lambda(x) = \frac{p(x|m;H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

$$\exp(\frac{2mx}{2\sigma_n^2} - \frac{m^2}{2\sigma_n^2}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

$$mx \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \sigma_n^2 \ln\eta + \frac{m^2}{2}$$

$$m_0 \le m \le m_1, m_0 > 0$$

$$mx \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \sigma_n^2 \ln \eta + \frac{m^2}{2}$$

$$l(x) = x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma_n^2}{m} \ln \eta + \frac{m}{2} \overset{def}{=} \gamma^+$$

$$\int_{\gamma^+}^{\infty} (\frac{1}{2\pi\sigma_n^2})^{1/2} \exp(-\frac{l^2}{2\sigma_n^2}) dl = \alpha$$

$$m_0 \le m \le m_1, m_1 < 0$$

$$mx \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \sigma_n^2 \ln\eta + \frac{m^2}{2}$$

$$l(x) = x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\lessgtr}} -\frac{\sigma_n^2}{|m|}\ln\eta - \frac{|m|}{2} \overset{def}{=} \gamma^-$$

$$\int_{-\infty}^{\gamma^-} (\frac{1}{2\pi\sigma_n^2})^{1/2} \exp(-\frac{l^2}{2\sigma_n^2}) dl = \alpha$$

若 $m_0 > 0$, m 仅取正值, 则在 $P(H_1|H_0) = \alpha$ 的约束下, $P^{(m)}(H_1|H_1)$ 是最大的, 其一致最大功效检验成立;
若 $m_1 < 0$, m 仅取负值, 则在 $P(H_1|H_0) = \alpha$ 的约束下, $P^{(m)}(H_1|H_1)$ 也是最大的。

若 $m_0 < 0, m_1 > 0$, 即 m 取值可能为正或可能为负的情况下, 无论参量信号的统计检测, 按 m 仅取正值设计, 还是按 m 仅取负值设计, 都有可能在某些 m 值下, $P^{(m)}(H_1|H_1)$ 不满足最大的要求。

例如, 按 m 取正设计信号检测系统, 当 m 为正时, $P^{(m)}(H_1|H_1)$ 最大, 但当 m 为负时, $P^{(m)}(H_1|H_1)$ 可能最小。

因此, 这种情况下不能采用奈曼-皮尔逊准则来实际最佳检测系统。

若 $m_0 < 0, m_1 > 0$, 即 m 取值可能为正或可能为负, 奈曼-皮尔逊准则不能保证 $P^{(m)}(H_1|H_1)$ 最大要求。考虑把约束条件 $P(H_1|H_0) = \alpha$ 分成两个 $\alpha/2$, 假设 H_1 的判决域由两部分组成。判决表示式为

$$|x| \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \gamma$$

虽然双边检验比均值 m 假定为正确时的单边检验性能差, 但是比均值 m 假定为错误时的单边检验性能要好的多。因此不失为一种好的折中方法。

广义似然比检验

似然函数

$$p(x|m;H_1)=(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2})^{1/2}\exp(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma_n^2})$$

对 m 求偏导, 令结果等于零, 即

$$\frac{\partial \ln p(x|m;H_1)}{\partial m}|_{m=\widehat{m}_{ml}}=0$$

解得单次观测时,m 的最大似然估计量 $\widehat{m}_{ml}=x$, 于是有

$$p(x|\widehat{m}_{ml};H_1)=(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2})^{1/2}\exp(-\frac{(x-\widehat{m}_{ml})^2}{2\sigma_n^2})|_{\widehat{m}_{ml}=x}=(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2})^{1/2}$$

广义似然比检验

$$p(x|H_0)=(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2})^{1/2}\exp(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}) \qquad p(x|\widehat{m}_{ml};H_1)=(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2})^{1/2}$$

代入广义似然比检验中,有

$$\lambda(x)=\frac{p(x|m;H_1)}{p(x|H_0)}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\eta$$

$$\lambda(x)=\frac{(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2})^{1/2}}{(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2})^{1/2}\exp(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2})}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\eta$$

化简得判决表示式

$$x^2\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}2\sigma_n^2\ln\eta\overset{def}{=}\gamma^2 \implies |x|\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\gamma$$

这正是前面讨论过的双边检验。只是前面是从奈曼-皮尔逊准则出发推导得到。而这里是从似然比检验的概念导出的,似然函数 $p(x|m;H_1)$ 中的信号参量 m 由其最大似然估计量 $\widehat{m}_{ml}$ 代换,所以是广义似然比检验。

title

$$H_0 = -A + n$$

$$H_1 = A + n$$

$$p(n) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{n^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$p(x|H_0) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{(x+A)^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$p(x|H_1) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{(x-A)^2}{2\sigma^2}\right]$$

title

- 目标: 正确判决概率 $P(H_j|H_j)$ 尽可能大,错误判决概率 $P(H_i|H_j)(i \neq j)$ 尽可能小。
- $x_0 \downarrow \Longrightarrow P(H_1|H_1) \uparrow$, 但 $P(H_0|H_1) \downarrow$。如果 $x_0 \uparrow$, 结果相反。
- 因此需要最佳划分判决域

欢迎批评指正！