

随机过程

- 1 随机过程的定义
- 2 随机过程的统计描述
- 3 随机过程的平稳性
- 4 随机过程的正交性、不相关性和统计独立性
- 5 平稳随机过程的功率谱密度
- 6 高斯噪声、白噪声、高斯白噪声和有色噪声

随机过程引例 (2)

Example

具有随机初位相的简谐波

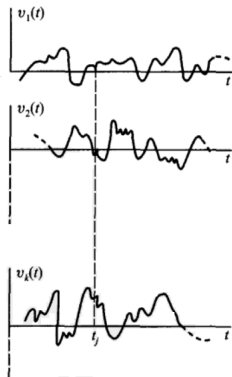
$$X(t) = A \cos(\omega t + \Phi)$$

其中 A, ω 为常数, Φ 服从 $[0, 2\pi]$ 上的均匀分布。

- 由于初位相的随机性,在某时刻 $t = t_0, X(t)$ 是一个随机变量.
- 若要观察任一时刻 t 的波形,则需要用一簇随机变量 $X(t)$ 描述.
- 称 $\{X(t), t \in [0, \infty]\}$ 是随机过程.

Example

无限个 t , 则无限个电压—时间的函数族构成一随机过程。



随机过程引例 (4)

Example

生物群体的增长问题. 以 X_t 表示在时刻 t 某种生物群体的个数, 则对每一个固定的 t, X_t 是一个随机变量。

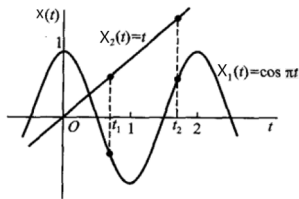
- 如果从 $t = 0$ 开始,每隔 24 小时对群体的个数观察一次,则对每一个 t, X_t 是一簇随机变量。记为 $X_n, n = 0, 1, \dots$
- 若要观察任一时刻 t 的波形,则需要用一族随机变量 $X(t)$ 描述.
- 称 $\{X_t, t = 0, 1, 2, \dots\}$ 是随机过程。

Example (随机过程示例)

抛掷硬币的试验, 样本空间 $\Omega = \{H, T\}$, 定义

$$X(t) = \begin{cases} \cos \pi t, & \text{当出现 } H \\ t, & \text{当出现 } T \end{cases}, t \in (-\infty, \infty)$$

其中 $P(H) = P(T) = 1/2$, 则 $\{X(t), t \in (-\infty, +\infty)\}$ 是一随机过程。试考察其样本函数和状态空间。



样本函数: $X(\bullet, \xi) = \{\cos \pi t, t\}, \xi \in \Omega$

状态空间: $S = \{\cos \pi t_0, t_0\}, \forall t_0 \in (-\infty, +\infty)$

每次试验的结果是下列事件集合之一:

$$\{(H, T), (T, H), (H, H), (T, T)\}$$

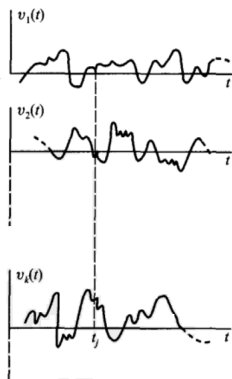
每次热噪声电压测量结果: 固定 t 时刻电压, 对应一个随机变量 $v(t)$;

无限个 t , 则无限个电压—时间的函数族 $\{v(t), t \in [0, \infty)\}$ 构成一随机过程。

对某种装置做一次试验,便得到一个电压—时间函数 $v_1(t)$ 。这个电压—时间函数是不可能预先确知的,只有通过测量才能得到,如果在相同的条件下独立地再进行一次测量,则得到的记录是不同的。

样本函数: $X(\bullet, \xi) = \{v_k(t)\}, k = 1, 2, \dots, \xi \in \Omega$

状态空间: $S = \{v_k(t_0)\}, k = 1, 2, \dots, \forall t_0 \in (-\infty, +\infty)$



设随机相位正弦信号 $s(t; \theta) = a \cos(\omega_0 t + \theta)$, 其中振幅 a 和 ω_0 为常数, 相位 θ 是一随机变量, 它服从 $[-\pi, \pi]$ 上的均匀分布。写出 $s(t; \theta)$ 的样本函数。

解:

当 θ 在 $[-\pi, \pi]$ 内任取定值时, 如

当 $\theta = 0$, 则样本函数为

$$s_1(t; \theta = 0) = a \cos \omega_0 t$$

当 $\theta = \frac{\pi}{2}$, 则样本函数为

$$s_2(t; \theta = \frac{\pi}{2}) = a \cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}) = -a \sin \omega_0 t$$

N 维联合概率密度函数

推广至 N 维随机矢量的情况

随机过程的 N 维累积分布函数

$$F(x_1, x_2, \dots, x_N; t_1, t_2, \dots, t_N) = \\ P\{X(t_1, \xi) \leq x_1, X(t_2, \xi) \leq x_2, \dots, X(t_N, \xi) \leq x_N\}, \\ x_1, x_2, \dots, x_N \in \mathbb{R}, t_1, t_2, \dots, t_N \in T$$

随机过程的 N 维联合概率密度函数

$$p(x_1, x_2, \dots, x_N; t_1, t_2, \dots, t_N) = \frac{\partial^N F(x_1, x_2, \dots, x_N; t_1, t_2, \dots, t_N)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_N}$$

Example

设随机过程 $X(t) = V \cos \omega t, t \in (-\infty, +\infty)$, 其中 ω 为常数, V 服从 $[0, 1]$ 上的均匀分布。

- ① 确定 $\{X(t), t \in (-\infty, +\infty)\}$ 的两个样本函数。
- ② 求 $t = 0, t = 3\pi/4\omega$ 时, 随机变量 $X(t)$ 的概率密度函数。
- ③ 求 $t = \pi/2\omega$ 时, $X(t)$ 的分布函数。

解:

$$X_1(t) = \frac{1}{2} \cos \omega t, \quad X_2(t) = \frac{1}{3} \cos \omega t$$
$$p(x; t = 0) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

解 (续):

② (续) 当 $t = \frac{3\pi}{4\omega}$ 时, $X(t) = V \cos \omega \frac{3\pi}{4\omega} = -\frac{\sqrt{2}}{2} V$

由于函数 $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}V$ 的反函数为 $V = h(x) = -\sqrt{2}x$, 其导数为 $h'(x) = -\sqrt{2}$, 则利用一维雅可比变换公式, 求得

$$\begin{aligned} p(x, t = \frac{3\pi}{4\omega}) &= \begin{cases} p_V(h(x))|h'(x)| & 0 \leq h(x) \leq 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sqrt{2} & 0 \leq -\sqrt{2}x \leq 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \end{aligned}$$

解(续):

③ $t = \frac{\pi}{2\omega}$ 时, $X(t) = V \cos \omega \frac{\pi}{2\omega} = 0$, 此时 $X(t = \frac{\pi}{2\omega})$ 是单点分布, 则

$$F(x, t = \frac{\pi}{2\omega}) = P\{X(t) \leq x\}$$

$$= \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Example (解)

因为脉冲的重复周期为 T , 所以只需求出一个周期的概率密度函数。

在一个周期内, 随机信号为

$$X(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t \leq \tau \\ 0, & \tau < t \leq T \end{cases}$$

$X(t)$ 的分布函数为

$$F(x; t) = P\{X(t) \leq x\} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{t}{T}, & 0 \leq x < A \\ 1, & x \geq A \end{cases}$$

所以, 它的一维概率密度函数为:

$$p(x; t) = \frac{t}{T}\delta(x) + (1 - \frac{t}{T})\delta(x - A)$$

由 δ 函数性质, 当 $x = 0$ 时, $\delta(x) = \infty$; 其它, $\delta(x) = 0$. 并且 $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$

可以验证以上分布函数的正确性. $F(x; t) = P\{X(t) \leq x\} = \int_{-\infty}^x p(u)du$

连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 的均值:

$$\bar{y} = \frac{1}{b-a} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \Delta x = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

交流电 $I(t) = I_m \sin \omega t$, 其平均值表示它的直流分量: $\bar{I} = \frac{1}{T} \int_0^T I(t) dt$

电压 $U(t) = iR = I_m R \sin \omega t$, 其平均值表示它的直流分量: $\bar{U} = \frac{1}{T} \int_0^T U(t) dt$

功率 $p = U(t)I(t) = I_m^2 R \sin^2 \omega t$

此功率在长度为一个周期的区间 $[0, \frac{2\pi}{\omega}]$ 上的平均值:

$$\bar{p} = \frac{1}{\frac{2\pi}{\omega}} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} I_m^2 R \sin^2 \omega t dt = \frac{I_m^2 R}{2} = \frac{I_m U_m}{2}, (U_m = I_m R)$$

I_m, U_m 为交流电电流、电压的最大值, ω 为交流电的角频率。

以下用记号 $\{x(t), t \in T\}$ 表示随机过程, 固定 $t \in T$, $x(t)$ 是一随机变量。

随机过程的均值 $\mu_x(t)$: 表示随机过程在 t 时刻状态取值的理论平均值

$$\mu_x(t) \stackrel{\text{def}}{=} E[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x; t)dx$$

如果 $x(t)$ 是电压或电流, 则 $\mu_x(t)$ 可以理解为在 t 时刻的“直流分量”。

随机过程 $x(t)$ 的均值又称作数学期望 (Expectation)。 $\mu_x(t)$ 是随机过程的所有样本函数在时刻 t 的函数值的统计平均值。 $\mu_x(t)$ 表示了随机过程 $x(t)$ 在各个时刻的摆动中心。

Notes

- 如果 $y(t) = g(x(t))$, 则 $\mu_y(t) = E[g(x(t))] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)p_x(x)dx$
- 均值的线性特性: $y(t) = ax(t) + b$, a, b 为常数, 则

$$\mu_y(t) = E[y(t)] = E[ax(t) + b] = aE[x(t)] + b = a\mu_x(t) + b$$

随机过程的均方值 $\varphi_x^2(t)$

$$\varphi_x^2(t) \stackrel{\text{def}}{=} E[x^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x; t) dx$$

如果 $x(t)$ 是电压或电流, 则 $\varphi_x^2(t)$ 可以理解在 t 时刻它在 1Ω 电阻上消耗的“平均功率”。

随机过程的方差/标准偏差 $\delta_x^2(t)$

$$\sigma_x^2(t) \stackrel{\text{def}}{=} E[(x(t) - \mu_x(t))^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x(t))^2 p(x; t) dx$$

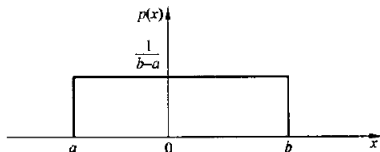
方差 $\sigma_x^2(t)$ 表示随机过程在 t 时刻取其值**偏离其均值** $\mu_x(t)$ 的离散程度。

如果 $x(t)$ 是电压或电流, $\delta_x^2(t)$ 表示在 t 时刻它在 1Ω 电阻上消耗的“交流功率”。
随机过程 $x(t)$ 的方差 (Variance) 有时用 $\text{Var}[x(t)]$ 表示。

均匀分布随机变量 x 的均值 μ_x 和方差 σ_x^2

Example

求如图均匀分布随机变量 x 的均值 μ_x 和方差 σ_x^2 。

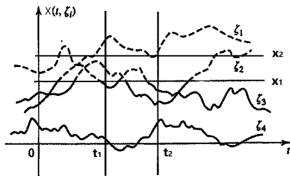


随机过程的自相关函数 $r_x(t_j, t_k)$

$$\begin{aligned} r_x(t_j, t_k) &\stackrel{\text{def}}{=} E[x(t_j)x(t_k)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_j x_k p(x_j, x_k; t_j, t_k) dx_j dx_k \end{aligned}$$

随机过程的自相关函数 $r_x(t_j, t_k)$ 可以理解为它的两个随机变量 $x(t_j)$ 与 $x(t_k)$ 之间含有均值时的相关程度的度量。显然

$$r_x(t, t) = \varphi_x^2(t)$$



Example

设随机过程 $x(t)$ 的均值为 $\mu_x(t)$, 自相关函数为 $r_x(t_j, t_k)$ 。若有随机过程 $y(t) = a(t)x(t) + b(t)$, 其中 $a(t), b(t)$ 是确知函数。求随机过程 $y(t)$ 的均值和自相关函数。

解:

由均值定义 $E[x(\xi)] \stackrel{\text{def}}{=} \mu_x = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$ 知:

确知函数 $a(t)$ 的均值:

$$E[a(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} a(t)p(x)dx$$

$$= a(t) \int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx$$

$$= a(t) \cdot 1$$

$$= a(t)$$

by 确知函数 $a(t)$ 看作常数

$$\text{by } \int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$$

结论: 确知函数 $a(t)$ 的均值 $E[a(t)] = a(t)$

解 (续): 随机过程 $y(t)$ 的均值为:

$$\begin{aligned}\mu_y &= E[y(t)] = E[a(t)x(t) + b(t)] = E[a(t)x(t)] + E[b(t)] \\ &= a(t)E[x(t)] + b(t) = a(t)\mu_x + b(t)\end{aligned}$$

随机过程 $y(t)$ 的自相关函数为:

$$\begin{aligned}r_y(t_j, t_k) &= E[y(t_j)y(t_k)] \\ &= E[(a(t_j)x(t_j) + b(t_j))(a(t_k)x(t_k) + b(t_k))] \\ &= a(t_j)a(t_k)E[x(t_j)x(t_k)] + a(t_j)b(t_k)E[x(t_j)] \\ &\quad + b(t_j)a(t_k)E[x(t_k)] + b(t_j)b(t_k) \\ &= a(t_j)a(t_k)r_x(t_j, t_k) + a(t_j)b(t_k)\mu_x(t_j) + b(t_j)a(t_k)\mu_x(t_k) + b(t_j)b(t_k)\end{aligned}$$

其中: $r_x(t_j, t_k) = E[x(t_j)x(t_k)]$, $\mu_x(t_j) = E[x(t_j)]$, $\mu_x(t_k) = E[x(t_k)]$

Example

设随机相位正弦信号 $s(t; \theta) = a \cos(\omega_0 t + \theta)$, 其中振幅 a 和 ω_0 为常数, 相位 θ 是一随机变量, 它服从 $[-\pi, \pi]$ 上的均匀分布。

- ① 求该随机过程的均值 $E[s(t; \theta)]$;
- ② 求该随机过程的自相关函数 $E[s(t_j; \theta)s(t_k; \theta)]$ 。

解:

① 因为相位 $\theta \sim U(-\pi, \pi)$, 所以,

$$p(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & -\pi \leq \theta \leq \pi \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

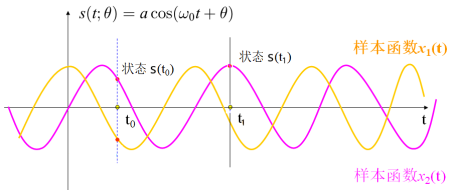
该随机过程的均值为:

$$\begin{aligned} \mu_x(t) &= E[s(t; \theta)] = E[a \cos(\omega_0 t + \theta)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} a \cos(\omega_0 t + \theta) p(\theta) d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} a \cos(\omega_0 t + \theta) \frac{1}{2\pi} d\theta \\ &= \frac{a}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega_0 t + \theta) d\theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

解 (续): ¹

② 该随机过程的自相关函数为:

$$\begin{aligned} r_x(t_j, t_k) &= E[s(t_j)s(t_k)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} a \cos(\omega_0 t_j + \theta) a \cos(\omega_0 t_k + \theta) p(\theta) d\theta \\ &= \frac{a^2}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(\omega_0 t_j + \omega_0 t_k + 2\theta) + \cos \omega_0(t_k - t_j)] d\theta \\ &= \frac{a^2}{2} \cos \omega_0 \tau, \quad (\tau = t_k - t_j) \end{aligned}$$



由于 a, ω_0 为常数, 因此 $r_x(t_j, t_k)$ 仅与采样间隔 $\tau = t_j - t_k$ 有关, 与 θ 无关。 $\tau = 0$ 时, 自相关函数值达到最大 $\frac{a^2}{2}$ 。

$$^1\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A + B) + \cos(A - B)]$$

随机过程的自协方差函数 $c_x(t_j, t_k)$

$$\begin{aligned} c_x(t_j, t_k) &\stackrel{\text{def}}{=} E[(x(t_j) - \mu_x(t_j))(x(t_k) - \mu_x(t_k))] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_j - \mu_x(t_j))(x_k - \mu_x(t_k))p(x_j, x_k; t_j, t_k)dx_j dx_k \end{aligned}$$

随机过程的自协方差函数 $c_x(t_j, t_k)$ 可以理解为它的两个随机变量 $x(t_j)$ 与 $x(t_k)$ 之间的相关程度的度量。

而随机过程的自相关函数 $r_x(t_j, t_k)$ 可以理解为它的两个随机变量 $x(t_j)$ 与 $x(t_k)$ 之间**含有均值**时的相关程度的度量。

它们的自相关系数定义为

$$\rho_x(t_j, t_k) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c_x(t_j, t_k)}{\sigma_x(t_j)\sigma_x(t_k)}$$

易证

$$c_x(t_j, t_k) = r_x(t_j, t_k) - \mu_x(t_j)\mu_x(t_k), \quad c_x(t, t) = \sigma_x^2(t)$$

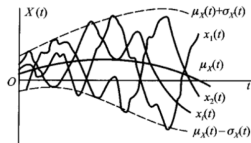
随机过程的统计平均量之间的关系

- 随机过程的均值 $\mu_x(t)$: 是随机过程的**所有样本函数**在时刻 t 的函数值的统计平均值。
 $\mu_x(t)$ 表示了随机过程 $x(t)$ 在各个时刻的摆动中心。
- 方差 $\sigma_x^2(t)$ 表示随机过程在 t 时刻取其值**偏离其均值** $\mu_x(t)$ 的离散程度。
- 随机过程的自相关函数 $r_x(t_j, t_k)$ 可以理解为它的两个随机变量 $x(t_j)$ 与 $x(t_k)$ 之间**含有均值**时的相关程度的度量。
- 随机过程的自协方差函数 $c_x(t_j, t_k)$ 可以理解为它的两个随机变量 $x(t_j)$ 与 $x(t_k)$ 之间的相关程度的度量。

$$c_x(t_j, t_k) = r_x(t_j, t_k) - \mu_x(t_j)\mu_x(t_k), \quad c_x(t, t) = \sigma_x^2(t)$$

均值 $\mu_x(t)$, 均方值 $\varphi_x^2(t)$, 方差 $\delta_x^2(t)$ 之间的关系:

$$\sigma_x^2(t) = \varphi_x^2(t) - \mu_x^2(t)$$



随机过程的互相关函数 $r_{xy}(t_j, t_k)$

对于两个随机过程 $x(t)$ 和 $y(t)$, 其互相关函数定义为

$$\begin{aligned} r_{xy}(t_j, t_k) &\stackrel{\text{def}}{=} E[x(t_j)y(t_k)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_j y_k p(x_j, t_j; y_k, t_k) dx_j dy_k \end{aligned}$$

式中, $p(x_j, t_j; y_k, t_k)$ 是 $x(t)$ 与 $y(t)$ 的二维混合概率密度函数。

随机过程的互协方差函数 $c_{xy}(t_j, t_k)$

$$\begin{aligned} c_{xy}(t_j, t_k) &\stackrel{\text{def}}{=} E[(x(t_j) - \mu_x(t_j))(y(t_k) - \mu_y(t_k))] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_j - \mu_x(t_j))(y_k - \mu_y(t_k))p(x_j, t_j; x_k, t_k)dx_j dy_k \end{aligned}$$

随机过程 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的互协方差函数 $c_{xy}(t_j, t_k)$ 可以理解为它们各自的随机变量 $x(t_j)$ 与 $y(t_k)$ 之间的相关程度, 实际上表示两个随机过程 $x(t)$ 与 $y(t)$ 之间的相关程度。它们的互相关系数定义为

$$\rho_{xy}(t_j, t_k) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c_{xy}(t_j, t_k)}{\sigma_x(t_j)\sigma_y(t_k)}$$

易证

$$c_{xy}(t_j, t_k) = r_{xy}(t_j, t_k) - \mu_x(t_j)\mu_y(t_k)$$

Definition (广义平稳随机过程, 简称平稳随机过程)

随机过程 $x(t)$ 的平均统计量满足

- ① $x(t)$ 的均值是与时间 t 无关的常数, 即

$$E[x(t)] = \mu_x$$

- ② $x(t)$ 的自相关函数只取决于时间间隔 $\tau = t_k - t_j$, 而与时间的起始时刻无关, 即

$$E[x(t_j)x(t_k)] = E[x(t_j)x(t_j + \tau)] = r_x(\tau)$$

平稳随机过程 $x(t)$ 自相关函数 $r_x(t_k - t_j)$ 仅取决于时间间隔 $(t_k - t_j)$, 而与时间的起始时刻无关。 $E[x(t_j)x(t_k)] = r_x[t_k - t_j]$

平稳随机过程的统计平均量之间的关系

平稳随机过程 $x(t)$ 的均值 μ_x , 均方值 φ_x^2 , 方差 σ_x^2 , 自相关函数 $r_x(\tau)$, 自协方差函数 $c_x(\tau)$ 之间的关系

$$\sigma_x^2 = \varphi_x^2 - \mu_x^2$$

$$r_x(\tau) = r_x(-\tau)$$

$$c_x(\tau) = r_x(\tau) - \mu_x^2$$

$$c_x(\tau) = c_x(-\tau)$$

$$\varphi_x^2 = r_x(\mathbf{0})$$

$$\sigma_x^2 = c_x(0)$$

$$r_x(0) \geq |r_x(\tau)|, \tau \neq 0$$

$$c_x(0) \geq |c_x(\tau)|, \tau \neq 0$$

假定平稳随机过程 $x(t)$ 是周期的, 周期为 T , 即

证明其自相关函数 $r_x(\tau)$ 也是以 T 为周期的, 即

Proof.

因为

$$\begin{aligned} r_x(\tau) &= E[x(t)x(t+\tau)] \\ &= E[x(t)x(t+\tau+T)] && \text{by } x(t+\tau) = x(t+\tau+T) \\ &= r_x(\tau+T) \end{aligned}$$

所以, 自相关函数 $r_x(\tau)$ 也是以 T 为周期的。

Definition (联合平稳随机过程)

设 $x(t)$ 和 $y(t)$ 分别是两个平稳的随机过程, 如果对于任意的 Δt , 有

$r_{xy}(t_j + \Delta t, t_k + \Delta t) = r_{xy}(t_j, t_k)$, 即互相关函数 $r_{xy}(t_j, t_k) = r_{xy}(\tau)$, ($\tau = t_k - t_j$) 仅与时间间隔 τ 有关, 而与 t_j 和 t_k 无关, 则称过程 $x(t)$ 与 $y(t)$ 是联合平稳的随机过程。

联合平稳随机过程 $x(t)$ 与 $y(t)$ 的互协方差函数

$$c_{xy}(t_j, t_k) = c_{xy}(\tau) = r_{xy}(\tau) - \mu_x \mu_y, \tau = t_k - t_j$$

互相关系数:

$$\rho_{xy}(\tau) \stackrel{def}{=} \frac{c_{xy}(t_j, t_k)}{\sigma_x(t_j)\sigma_y(t_k)} = \frac{c_{xy}(\tau)}{\sigma_x\sigma_y}$$

$$r_{xv}(\tau) = r_{vx}(-\tau)$$

$$c_{xy}(\tau) = c_{yx}(-\tau)$$

平稳随机过程 $x(t)$ 的正交性与互相关性

Definition

如果 $x(t)$ 是平稳随机过程,

- ① 相互正交:

$$r_x(\tau) = 0, \tau = t_k - t_j$$

- ② 互不相关:

$$c_x(\tau) = 0, \tau = t_k - t_j$$

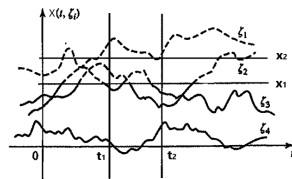
- ### ③ 互不相关的等价条件

$$r_x(\tau) = \mu_x^2, \tau = t_k - t_j$$

Definition

$$p(x_1, x_2, \dots, x_N; t_1, t_2, \dots, t_N) \\ = p(x_1; t_1)p(x_2; t_2) \cdots p(x_N; t_N)$$

则称 $x(t)$ 是相互统计独立的随机变量过程。



- 第 1 条可由 $x(t)$ 互不相关的等价条件 $r_x(t_j, t_k) = \mu_x(t_j)\mu_x(t_k), j \neq k$ 直接导出。现证明第 2 条, 第 3 条的证明见后。

两个平稳随机过程 $x(t), y(t)$ 的正交性与互相关性

Definition

如果 $x(t), y(t)$ 是联合平稳的随机过程,

- ① 相互正交:

$$r_{xv}(\tau) = \mathbf{0}, \tau = t_k - t_j$$

- ② 互不相关:

$$c_{xy}(\tau) = 0, \tau = t_k - t_j$$

- ### ③ 互不相关的等价条件

$$r_{xv}(\tau) = \mu_x \mu_v, \tau = t_k - t_j$$

两个随机过程 $x(t), y(t)$ 的统计独立性

Definition

如果随机过程 $x(t)$ 和 $y(t)$ 对任意的 $N \geq 1, M \geq 1$ 和所有时刻 $t_k (k = 1, 2, \dots, t_N)$ 与 $t'_k (k = 1, 2, \dots, M)$, 其 $N + M$ 维联合概率密度表示为

$$p(x_1, x_2, \dots, x_N; t_1, t_2, \dots, t_N; y_1, y_2, \dots, y_N; t'_1, t'_2, \dots, t'_M) \\ = p(x_1, x_2, \dots, x_N; t_1, t_2, \dots, t_N) p(y_1, y_2, \dots, y_N; t'_1, t'_2, \dots, t'_M)$$

则称 $x(t)$ 与 $y(t)$ 是相互统计独立的两个随机变量过程。

相互独立的随机过程 $E[x(t)y(t)] = E[x(t)]E[y(t)]$

设 $x(t), y(t)$ 是相互独立的随机过程, 则有

$$E[x(t)y(t)] = E[x(t)]E[y(t)]$$

这一性质可以推广至任一两个有限个相互独立的随机变量之积的情况。

Proof.

$$\begin{aligned} E[x(t)y(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyp(x,y)dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyp_x(x)p_ydxdy \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} xp_x(x)dx \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} yp_y(y)dy \right] \\ &= E[x(t)]E[y(t)] \end{aligned}$$

$x(t), y(t)$ 的正交性, 不相关性以及统计独立性之间的关系

- ① 均值之一或同时为零, 则 $x(t), y(t)$ 相互正交 \Leftrightarrow 互不相关
- ② $x(t), y(t)$ 相互统计独立 \Rightarrow 互不相关
- ③ $x(t), y(t)$ 互不相关 \nRightarrow 相互统计独立。但是若 $x(t), y(t)$ 服从联合高斯分布, 则互不相关 \Leftrightarrow 相互统计独立

$$\begin{aligned}
 r_{sx}(\tau) &= E[s(t)x(t+\tau)] \\
 &= E[s(t)(as(t-t_0+\tau) + n(t+\tau)))] && \text{by } x(t) = as(t-t_0) + n(t) \\
 &= aE[s(t)s(t-t_0+\tau)] + E[s(t)n(t+\tau)] && \text{相互统计独立 } E[XY]=E[X]E[Y] \\
 &= aE[s(t)s(t-t_0+\tau)] + E[s(t)]E[n(t+\tau)] && \text{确知信号 } s(t) \text{ 看作常数, } E[s(t)] = s(t) \\
 &= aE[s(t)s(t-t_0+\tau)] + s(t)E[n(t+\tau)] && \text{by } E[n(t)] = 0 \\
 &= ar_s(\tau - t_0)
 \end{aligned}$$

平稳随机过程的功率谱密度

如果平稳过程 $x(t)$ 的自相关函数 $r_x(\tau)$ 绝对可积, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |r_x(\tau)| d\tau < \infty$$

则功率谱密度 $P_x(\omega)$ 与自相关函数 $r_x(\tau)$

$$P_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} r_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad -\infty < \omega < \infty$$

$$r_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega, \quad -\infty < \omega < \infty$$

$P_x(\omega)$ 与 $r_x(\tau)$ 构成傅里叶变换对

功率谱密度主要性质

- ① $P_x(\omega)$ 非负

$$P_x(\omega) \geq 0$$

- ② $P_x(\omega)$ 是 ω 的偶函数

$$P_x(\omega) = P_x(-\omega)$$

- ③ 当 $\omega = 0$ 或 $\tau = 0$ 时, $P_x(\omega)$ 与 $r_x(\tau)$ 的变换关系是

$$P_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} r_x(\tau) d\tau$$

$$r_x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_x(\omega) d\omega$$

第3条表明

$x(t)$ 的功率谱密度的零频率分量等于 $x(t)$ 的自相关函数曲线下的总面积。因为 $r_x(0) = E[x^2(t)]$, 所以, $x(t)$ 的功率谱密度曲线下的总面积等于 $x(t)$ 的平均功率。

60 / 77

有

$$u(\xi) = \frac{x(\xi) - \mu_x}{\sigma_x}$$

有

$$p(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$$

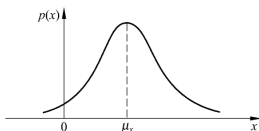


Figure 3: 高斯 (正态) 分布随机变量的 PDF 曲线 $\mu_x > 0$

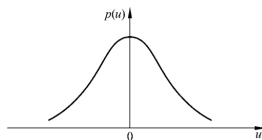


Figure 4: 标准高斯 (正态) 分布随机变量的 PDF 曲线 $\mu_x = 0$

高斯噪声的统计描述 (2)

高斯噪声 N 维联合概率密度函数

高斯噪声的 N 维向量记为

$$(\mathbf{n}; \mathbf{t}) = (n(t_1), n(t_2), \dots, n(t_N))^T$$

其 N 维联合概率密度函数为

$$p(\mathbf{n}; \mathbf{t}) = p(n_1, n_2, \dots, n_N; t_1, t_2, \dots, t_N)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{N/2} |\mathbf{C}_n|^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{n} - \boldsymbol{\mu}_n)^T \mathbf{C}_n^{-1} (\mathbf{n} - \boldsymbol{\mu}_n) \right]$$

其中, μ_n 是高斯随机矢量 $(n; t)$ 的均值矢量, C_n 为协方差矩阵。即

$$\mu_n = (\mu_{n_1}, \mu_{n_2}, \dots, \mu_{n_N})^T$$

$$\mu_{n_k} = E[n(t_k)]$$

C_n 是高斯随机矢量 $(n; t)$ 的协方差

$$\mathbf{C}_n = \begin{bmatrix} C_{n_1 n_1} & C_{n_1 n_2} & \cdots & C_{n_1 n_N} \\ C_{n_2 n_1} & C_{n_2 n_2} & \cdots & C_{n_2 n_N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n_N n_1} & C_{n_N n_2} & \cdots & C_{n_N n_N} \end{bmatrix}$$

其中 $C_{n_j n_k} = E[(n(t_j) - \mu_{n_j})(n(t_k) - \mu_{n_k})] = c_{n_k} c(n_j)$

$|C_n|$ 是 C_n 的行列式, C_n^{-1} 是 C_n 的逆矩阵。

$$p(\mathbf{n}; \mathbf{t}) = p(n_1, n_2, \dots, n_N; t_1, t_2, \dots, t_N)$$

表明 $n(t)$ 的 N 维联合概率密度函数表示成各自一维概率密度函数之积的形式, 即是统计独立性的定义。因此, **N 个高斯随机变量 $n(t_k)(k = 1, 2, \dots, t_N)$ 互不相关 \Rightarrow 相互统计独立**; 结合之前的结论“相互统计独立的随机变量 \Rightarrow 互不相关”。所以, **N 个高斯随机变量 $n(t_k)(k = 1, 2, \dots, t_N)$ 互不相关 \Leftrightarrow 相互统计独立**。

高斯随机变量的线性组合仍然是高斯随机变量

- ① 若 $x_k(\xi) \sim \mathcal{N}(\mu_{x_k}, \sigma_{x_k}^2) (k = 1, 2, \dots, N)$, 且它们相互统计独立, 则它们的和

$$x(\xi) = \sum_{k=1}^N x_k(\xi)$$

是高斯随机变量, 且有 $x_k(\xi) \sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$, 其中 $\mu_x = \sum_{k=1}^N \mu_{x_k}$, $\sigma_x^2 = \sum_{k=1}^N \sigma_{x_k}^2$

- ② 更一般地,任意有限 N 个高斯随机变量 $x_k(\xi)(k=1,2,\dots,N)$ 的线性组合

$$x(\xi) = \sum_{k=1}^N a_k x_k(\xi)$$

仍然是高斯随机变量, 且有 $x_k(\xi) \sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$, 其中

$$\mu_x = \sum_{k=1}^N a_k \mu_{x_k}, \sigma_x^2 = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N a_j a_k c_{x_k x_j}$$

式中, 协方差函数 $c_{x_j, x_k} = E[(x_j(\xi) - \mu_{x_j})(x_k(\xi) - \mu_{x_k})] = c_{x_k, x_j}$, $\mu_{x_k} = E[x_k(\xi)]$

设随机变量 y 与 x 之间为线性关系 $y = ax + b$, a, b 为常数, 且 $a \neq 0$ 。已知随机变量 x 服从高斯分布, 即

$$p(x) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_x^2} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{(x - \mu_x)^2}{2\sigma_x^2} \right]$$

证明随机变量 y 是服从均值为 $a\mu_x + b$, 方差为 $a^2\sigma_x^2$ 的高斯分布。

证法 I: 雅可比变换法

所以,反函数为 $x = \frac{y-b}{a}$

于是,由一维雅可比变换,得

$$\begin{aligned} p(y) &= \left(\frac{1}{2\pi\sigma_x^2} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{(\frac{y-b}{a} - \mu_x)^2}{2\sigma_x^2} \right] \left| \frac{1}{a} \right| \\ &= \left(\frac{1}{2\pi a^2 \sigma_x^2} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{(y - (a\mu_x + b))^2}{2a^2 \sigma_x^2} \right] \end{aligned}$$

Proof.

证法 II: 利用高斯随机变量的特性来证明

因为 $y = ax + b$

是高斯随机变量 x 的线性变换, 所以 y 仍然是高斯随机变量。

其均值 μ_y 和方差 σ_y^2 分别为

$$\mu_y = E(y) = E(ax + b) = aE(x) + b$$

$$= a\mu_x + b$$

$$\sigma_y^2 = E[(y - \mu_y)^2] = E[(ax + b - a\mu_x - b)^2]$$

$$= a^2 E[(x - \mu_x)^2]$$

$$= a^2 \sigma_x^2$$

所以, 随机变量 y 是服从均值为 $a\mu_x + b$, 方差为 $a^2\sigma_x^2$ 的高斯分布。

73 / 77

高斯白噪声 $n(t)$ 重要特性—高斯随机变量 + 白噪声

- 由 δ -函数的筛选性: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)f(t)dt = f(t_0)$, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} r_n(t - t_0)f(t)dt = f(t_0) = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)f(t)dt = \frac{N_0}{2}f(t_0)$$



有色噪声的功率谱密度

率, 方差 σ_f^2 反映噪声的谱宽

欢迎批评指正！