信号检测与估值

段江涛
机电工程学院

2019 年 9 月

ch3. 信号检测与估计理论的基础知识

ch3-3. 派生贝叶斯准则

派生贝叶斯准则

基本要求

- 掌握最小平均错误概率准则和最大后验概率准则
- 理解极小化极大准则和奈曼-皮尔逊准则的应用范围和基本原理

最小平均错误概率准则

贝叶斯判决准则

$$\frac{p(\boldsymbol{x}|H_1)}{p(\boldsymbol{x}|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)(c_{10}-c_{00})}{P(H_1)(c_{01}-c_{11})} \implies \lambda(\boldsymbol{x}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

最小平均错误概率准则

正确判决不付出代价, 错误判决代价相同。

$$c_{01}=c_{10}=1, c_{00}=c_{11}=0$$

最小平均错误概率准则—判决域划分

最小平均错误概率准则

正确判决不付出代价，错误判决代价相同。

$$c_{01} = c_{10} = 1, c_{00} = c_{11} = 0$$

$$C(H_0) = c_{00}P(H_0|H_0) + c_{10}P(H_1|H_0) = P(H_1|H_0)$$

$$C(H_1) = c_{01}P(H_0|H_1) + c_{11}P(H_1|H_1) = P(H_0|H_1)$$

最小平均错误概率准则，平均代价 $C \Leftrightarrow$ 平均错误概率 P_e

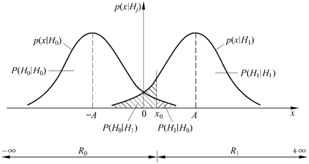
$$C = P(H_0)C(H_0) + P(H_1)C(H_1)$$

$$= P(H_0)P(H_1|H_0) + P(H_1)P(H_0|H_1)$$

最小平均错误概率准则—判决域划分

最小平均错误概率准则, 平均代价 $C \Leftrightarrow$ 平均错误概率 P_e

$$\begin{aligned} C &= P(H_0)C(H_0) + P(H_1)C(H_1) \\ &= P(H_0)P(H_1|H_0) + P(H_1)P(H_0|H_1) \\ &= P(H_0) + \left(\int_{R_0} \left[P(H_1)p(\mathbf{x}|H_1) - P(H_0)p(\mathbf{x}|H_0) \right] dx \right) \end{aligned}$$



$$P(H_1|H_0) = 1 - \int_{R_0} p(x|H_0)dx$$

$$P(H_0|H_1) = \int_{R_0} p(x|H_1)dx$$

把被积函数取负值的观测值 x 划分给 R_0 区域, 而把其余的观测值 x 划分给 R_1, 即可保证平均代价最小。

$$P(H_1)p(\mathbf{x}|H_1) < P(H_0)p(x|H_0) \quad \text{判决 } H_0 \text{ 假设成立}$$

$$P(H_1)p(\mathbf{x}|H_1) \geq P(H_0)p(x|H_0) \quad \text{判决 } H_1 \text{ 假设成立}$$

最小平均错误概率准则

最小平均错误概率准则

$$\frac{p(\boldsymbol{x}|H_1)}{p(\boldsymbol{x}|H_0)} < \frac{P(H_0)}{P(H_1)} \quad \text{判决 } H_0 \text{ 假设成立}$$

$$\frac{p(\boldsymbol{x}|H_1)}{p(\boldsymbol{x}|H_0)} \geq \frac{P(H_0)}{P(H_1))} \quad \text{判决 } H_1 \text{ 假设成立}$$

$\Longrightarrow$

$$\lambda(\boldsymbol{x}) \overset{def}{=} \frac{p(\boldsymbol{x}|H_1)}{p(\boldsymbol{x}|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)}{P(H_1)} \overset{def}{=} \eta$$

$\Longrightarrow$

$$\ln \lambda(\boldsymbol{x}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \ln \eta$$

$\Longrightarrow$

$$l(\boldsymbol{x}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \gamma$$

最大似然检测准则

最小平均错误概率准则

$$\lambda(\boldsymbol{x}) \overset{def}{=} \frac{p(\boldsymbol{x}|H_1)}{p(\boldsymbol{x}|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)}{P(H_1)} \overset{def}{=} \eta$$

最大似然检测准则

$c_{00} = c_{11} = 0, c_{01} = c_{10} = 1$, 且两个假设的先验概率等概, 则最小平均错误准则转化为最大似然检测准则。

$$p(\boldsymbol{x}|H_1) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} p(\boldsymbol{x}|H_0)$$

先验概率等概的最小平均错误概率准则为最大似然准则 (maximum likelihood criterion)。

贝叶斯准则例题 5

在闭启键控通信系统中，两个假设下的观测信号模型为:

$$H_0 : x = n$$

$$H_1 : x = A + n$$

其中，噪声 n 是均值为零，方差为 σ_n^2 的高斯噪声，若两个假设的先验概率相等，且 $c_{00} = c_{11} = 0, c_{01} = c_{10} = 1$。

采用最小平均错误概率准则，试确定判决表示式，并求最小平均错误概率。

贝叶斯准则例题 5: 解

解: 观测信号模型为:

$$H_0 : x = n$$

$$H_1 : x = A + n$$

由于, 先验概率等概的最小平均错误概率准则就是最大似然准则。因此, 贝叶斯检测判别式为:

$$p(x|H_1) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} p(x|H_0) \implies \lambda(x) \overset{def}{=} \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1 \overset{def}{=} \eta$$

由于 n 是高斯分布随机变量, 因此在 H_0 假设下, 检测统计量 x 服从高斯分布, 且均值为 0, 方差为 σ_n^2; 在 H_1 假设下, 检测统计量 x 服从均值为 A, 方差为 σ_n^2 的高斯分布。

$$p(x|H_0) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right) \qquad p(x|H_1) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{(x-A)^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

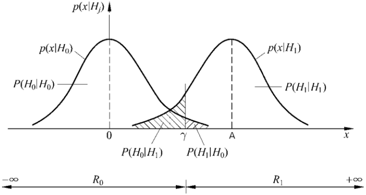
$$\lambda(x) = \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} = \exp\left(\frac{(x^2-(x-A)^2)}{2\sigma_n^2}\right) = \exp\left(\frac{A}{\sigma_n^2}x - \frac{A^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

贝叶斯准则例题 5: 解 (续 1)

$$\lambda(x) \overset{def}{=} \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1 \overset{def}{=} \eta$$

$$\lambda(x) = \exp\left(\frac{A}{\sigma_n^2}x - \frac{A^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

$$x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma_n^2 \ln \eta}{A} + \frac{A}{2} \overset{def}{=} \gamma$$



$$P(H_1|H_0) = \int_\gamma^\infty p(x|H_0)dx \implies Q(x) = \int_x^\infty \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

$$= \int_\gamma^\infty \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right) dx \qquad \text{by } x = \sigma_n u$$

$$= \int_{\frac{\gamma}{\sigma_n}}^\infty \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \qquad \text{by } \gamma = \frac{\sigma_n^2 \ln \eta}{A} + \frac{A}{2}$$

$$= \int_{\frac{\sigma_n \ln \eta}{A} + \frac{A}{2\sigma_n}}^\infty \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \qquad \text{by } d^2 = \frac{A^2}{\sigma_n^2}$$

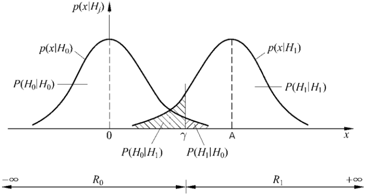
$$= Q\left(\frac{\ln \eta}{d} + \frac{d}{2}\right)$$

贝叶斯准则例题 5: 解 (续 2)

$$\lambda(x) \overset{def}{=} \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1 \overset{def}{=} \eta$$

$$\lambda(x) = \exp\left(\frac{A}{\sigma_n^2}x - \frac{A^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

$$x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma_n^2 \ln\eta}{A} + \frac{A}{2} \overset{def}{=} \gamma$$



$$P(H_0|H_1) = 1 - \int_\gamma^\infty p(x|H_1)dx \implies Q(x) = \int_x^\infty \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

$$= 1 - \int_\gamma^\infty \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{(x-A)^2}{2\sigma_n^2}\right) dx \qquad \text{by } x = \sigma_n u + A$$

$$= 1 - \int_{\frac{\gamma - A}{\sigma_n}}^\infty \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \qquad \text{by } \gamma = \frac{\sigma_n^2 \ln\eta}{A} + \frac{A}{2}$$

$$= 1 - \int_{\frac{\sigma_n \ln\eta}{A} - \frac{A}{2\sigma_n}}^\infty \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \qquad \text{by } d^2 = \frac{A^2}{\sigma_n^2}$$

$$= 1 - Q\left(\frac{\ln\eta}{d} - \frac{d}{2}\right)$$

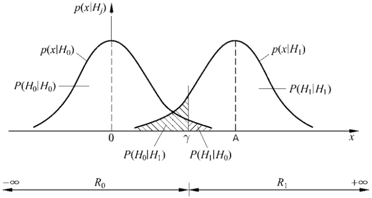
贝叶斯准则例题 5: 解 (续 3)

$$\lambda(x) \overset{def}{=} \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1 \overset{def}{=} \eta \implies \ln\eta = 0$$

$$P(H_1|H_0) = Q\left(\frac{\ln\eta}{d} + \frac{d}{2}\right) = Q\left(\frac{d}{2}\right)$$

$$P(H_0|H_1) = 1 - Q\left(\frac{\ln\eta}{d} - \frac{d}{2}\right)$$

$$= 1 - Q\left(-\frac{d}{2}\right) = Q\left(\frac{d}{2}\right)$$



最小平均错误概率准则, 平均代价 $C \Leftrightarrow$ **平均错误概率** $P_e, P(H_0) = P(H_1) = \frac{1}{2}$

$$P_e = C = P(H_0)P(H_1|H_0) + P(H_1)P(H_0|H_1)$$

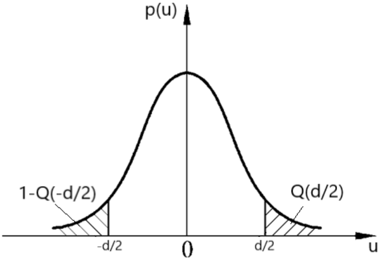
$$= \frac{1}{2}Q\left(\frac{d}{2}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\frac{d}{2}\right) = Q\left(\frac{d}{2}\right) \qquad d^2 = \frac{A^2}{\sigma_n^2}$$

$Q(x)$ **是单调递减函数, 信噪比 d 越高, 平均错误概率越小, 检测性能越好。**

标准高斯分布的右尾积分

$$Q(x) = \int_x^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

$$Q\left(\frac{d}{2}\right) = 1 - Q\left(-\frac{d}{2}\right)$$



最大后验概率准则

贝叶斯判决准则

$$\frac{p(\boldsymbol{x}|H_1)}{p(\boldsymbol{x}|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)(c_{10}-c_{00})}{P(H_1)(c_{01}-c_{11})} \implies \lambda(\boldsymbol{x}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

最大后验概率准则

代价因子满足: $c_{10}-c_{00}=c_{01}-c_{11}$

判决表示式

$$\frac{p(\boldsymbol{x}|H_1)}{p(\boldsymbol{x}|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$$

Notes

- 最大后验概率准则形式上与最小平均错误概率准则相同
- 问题: 可写成上述判决表达式形式的, 是否一定可以获得最小平均错误概率?

最大后验概率准则不一定能获得最小平均错误概率

最大后验概率准则

代价因子满足: $c_{10} - c_{00} = c_{01} - c_{11}$

判决表示式

$$\frac{p(\mathbf{x}|H_1)}{p(\mathbf{x}|H_0)} \mathop{\gtrless}_{H_0}^{H_1} \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$$

Notes

最小平均错误概率准则: $c_{01} = c_{10} = 1, c_{00} = c_{11} = 0$。

可得到最小平均错误概率:

$$P_e = C = P(H_0)C(H_0) + P(H_1)C(H_1) = P(H_0)P(H_1|H_0) + P(H_1)P(H_0|H_1)$$

因此, 虽然最大后验概率准则形式上与最小平均错误概率准则相同。但是不一定能获得最小平均错误概率?

最大后验概率准则

在贝叶斯准则中, 当代价因子满足: $c_{10} - c_{00} = c_{01} - c_{11}$ 时

$$\lambda(\boldsymbol{x}) = \frac{p(\boldsymbol{x}|H_1)}{p(\boldsymbol{x}|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)}{P(H_1)} \implies P(H_1)p(\boldsymbol{x}|H_1) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} P(H_0)p(\boldsymbol{x}|H_0)$$

由条件概率公式 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$, 有

$$P(H_1|(\boldsymbol{x} \le X \le \boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x})) = \frac{P((\boldsymbol{x} \le X \le \boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x})|H_1)P(H_1)}{P(\boldsymbol{x} \le X \le \boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x})}$$

当 $d\boldsymbol{x}$ 很小时, 有 $P(H_1|(\boldsymbol{x} \le X \le \boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x})) = P(H_1|\boldsymbol{x})$,

$P((\boldsymbol{x} \le X \le \boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x})|H_1) = p(\boldsymbol{x}|H_1)d\boldsymbol{x}, \quad P(\boldsymbol{x} \le X \le \boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}) = p(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$

从而得

$$P(H_1|\boldsymbol{x}) = \frac{p(\boldsymbol{x}|H_1)d\boldsymbol{x}P(H_1)}{p(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}} = \frac{p(\boldsymbol{x}|H_1)P(H_1)}{p(\boldsymbol{x})}$$

$$\implies P(H_1)p(\boldsymbol{x}|H_1) = p(\boldsymbol{x})P(H_1|\boldsymbol{x})$$

类似地, 可得

$$P(H_0)p(\boldsymbol{x}|H_0) = p(\boldsymbol{x})P(H_0|\boldsymbol{x})$$

最大后验概率准则

$$P(H_1)p(\boldsymbol{x}|H_1) = p(\boldsymbol{x})P(H_1|\boldsymbol{x}), \quad P(H_0)p(\boldsymbol{x}|H_0) = p(\boldsymbol{x})P(H_0|\boldsymbol{x})$$

$$\lambda(\boldsymbol{x}) = \frac{p(\boldsymbol{x}|H_1)}{p(\boldsymbol{x}|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)}{P(H_1)} \implies P(H_1)p(\boldsymbol{x}|H_1) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} P(H_0)p(\boldsymbol{x}|H_0)$$

$$p(\boldsymbol{x})P(H_1|\boldsymbol{x}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} p(\boldsymbol{x})P(H_0|\boldsymbol{x})$$

$$P(H_1|\boldsymbol{x}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} P(H_0|\boldsymbol{x})$$

$P(H_j|\boldsymbol{x})(j=0,1)$ 表示已经获得观测量 $\boldsymbol{x}$ 的条件下，假设 H_j 为真时的概率，称为**后验概率**。

按照最小平均代价的贝叶斯准则在代价因子满足：$c_{10} - c_{00} = c_{01} - c_{11}$ 时，就成为**最大后验概率准则 (maximum a posteriori probability criterion)**

贝叶斯准则以及派生贝叶斯准则

贝叶斯检测，给定各种判决代价因子，且已知各假设的先验概率条件下，使平均代价最小的检测准则。

$$\frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)(c_{10}-c_{00})}{P(H_1)(c_{01}-c_{11})}$$

$c_{00}=c_{11}=0$

$c_{01}=c_{10}=1$

$c_{10}-c_{00}=c_{01}-c_{11}$

最小平均错误概率判决准则

$$\frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$$

$$P(H_1|x) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} P(H_0|x)$$

最大后验概率检测准则

等概

最大似然判决准则

$$p(x|H_1) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} p(x|H_0)$$

符合最小平均错误概率准则的一定符合最大后验概率检测准则，反之不成立。

极小极大化准则和奈曼皮尔逊准则

贝叶斯检测，给定各种判决代价因子，且已知各假设的先验概率条件下，使平均代价最小的检测准则。

$$\boxed{\frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)(c_{10}-c_{00})}{P(H_1)(c_{01}-c_{11})}}$$

信源先验概率未知 ↓ 极小化极大准则

信源先验概率及代价因子均未知 ↓ 奈曼皮尔逊准则

极小极大化准则

贝叶斯判决准则

$$\frac{p(\boldsymbol{x}|H_1)}{p(\boldsymbol{x}|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)(c_{10}-c_{00})}{P(H_1)(c_{01}-c_{11})} \implies \lambda(\boldsymbol{x}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

极小极大化准则

- 应用范围：

  假设的先验概率未知，判决代价因子给定

- 目的：

  尽可能避免产生过分大的代价，使极大可能代价最小化

极小极大化准则

- 在先验概率未知的情况下，平均代价的性质?

  平均代价是先验概率的函数

$$C = P(H_0)C(H_0) + P(H_1)C(H_1)$$

- 在先验概率未知的情况下，进行检测的方法是:

  先假设一个先验概率 P_{1g}，然后按照贝叶斯准则进行检测。

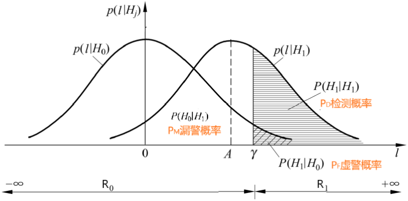
- 为尽可能降低代价，需设计一种先验概率的假设方法，使由此得到的检测准则的带价值与先验概率无关。

  尽可能避免产生过分大的代价，使极大可能代价最小化。

几种符号定义

$H_0 : x = n$　　仅含噪声信号

$H_1 : x = A + n$　　雷达检测回波信号

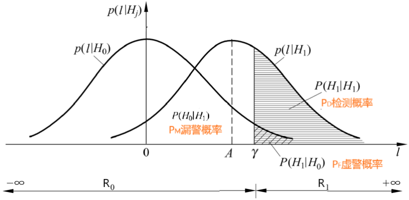


- **虚警概率**$P_F \overset{def}{=} P(H_1|H_0)$: False alarm, 假设 H_0 为真的条件下,判决 H_1 成立的概率。是个假判决。
- **漏警概率**$P_M \overset{def}{=} P(H_0|H_1)$: Miss alarm, 假设 H_1 为真的条件下, 判决 H_0 成立的概率。是个遗漏的判决。
- **检测概率**$P_D \overset{def}{=} P(H_1|H_1)$: Ditection alarm, 假设 H_1 为真的条件下, 判决 H_1 成立的概率。是个正确检测的判决。

几种符号定义 (续)

$H_0 : x = n$ 仅含噪声信号

$H_1 : x = A + n$ 雷达检测回波信号



虚警概率 $$P_F \stackrel{def}{=} P(H_1|H_0) = \int_{R_1} p(\mathbf{x}|H_0)d\mathbf{x} = 1 - \int_{R_0} p(\mathbf{x}|H_0)d\mathbf{x}$$

漏警概率 $$P_M \stackrel{def}{=} P(H_0|H_1) = \int_{R_0} p(\mathbf{x}|H_1)d\mathbf{x}$$

检测概率 $$P_D \stackrel{def}{=} P(H_1|H_1) = \int_{R_1} p(\mathbf{x}|H_1)d\mathbf{x}$$

先验概率 $$P_1 \stackrel{def}{=} P(H_1) = 1 - P(H_0) \stackrel{def}{=} = 1 - P_0$$

极小极大化准则—先验概率未知, 平均代价的性质

- 先验概率和代价因子已知时, 平均代价为

$$\begin{aligned} C &= P(H_0)C(H_0) + P(H_1)C(H_1) \\ &= P(H_0)(c_{00}P(H_0|H_0) + c_{10}P(H_1|H_0)) + P(H_1)(c_{01}P(H_0|H_1) + c_{11}P(H_1|H_1)) \end{aligned}$$

- 代价因子已知, 先验概率未知时, **平均代价是先验概率的函数**。$P_1 \overset{def}{=} P(H_1)$

$$\begin{aligned} C(P_1) &= (1 - P(H_1))(c_{00}P(H_0|H_0) + c_{10}P(H_1|H_0)) + P(H_1)(c_{01}P(H_0|H_1) + c_{11}P(H_1|H_1)) \\ &= (1 - P_1)(c_{00}P(H_0|H_0) + c_{10}P(H_1|H_0)) + P_1(c_{01}P(H_0|H_1) + c_{11}P(H_1|H_1)) \end{aligned}$$

- 先验概率未知时, 由于贝叶斯判决门限是先验概率 P_1 的函数, 因此**漏警概率 P_M 和虚警概率 P_F 也是先验概率 P_1 的函数**。

$$\eta \overset{def}{=} \eta(P_1) = \frac{P(H_0)(c_{10} - c_{00})}{P(H_1)(c_{01} - c_{11})} = \frac{(1 - P_1)(c_{10} - c_{00})}{P_1(c_{01} - c_{11})} = \frac{1}{P_1(c_{01} - c_{11})} - \frac{c_{10} - c_{00}}{c_{01} - c_{11}}$$

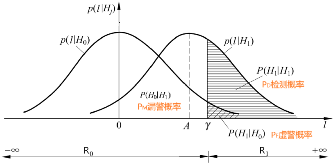
$$P_M(P_1) \overset{def}{=} P(H_0|H_1) = \int_{R_0} p(x|H_1)dx, \quad P_F(P_1) \overset{def}{=} P(H_1|H_0) = \int_{R_1} p(x|H_0)dx$$

极小极大化准则—先验概率未知, 平均代价的性质

$$P_1 \overset{def}{=} P(H_1), \quad P_M(P_1) \overset{def}{=} P(H_0|H_1), \quad P_F(P_1) \overset{def}{=} P(H_1|H_0)$$

$$P(H_1|H_1) = 1 - P(H_0|H_1) = 1 - P_M(P_1)$$

$$P(H_0|H_0) = 1 - P(H_1|H_0) = 1 - P_F(P_1)$$



$$\begin{aligned}
C(P_1) &= (1 - P(H_1))(c_{00}P(H_0|H_0) + c_{10}P(H_1|H_0)) + P(H_1)(c_{01}P(H_0|H_1) + c_{11}P(H_1|H_1)) \\
&= (1 - P_1)(c_{00}P(H_0|H_0) + c_{10}P(H_1|H_0)) + P_1(c_{01}P(H_0|H_1) + c_{11}P(H_1|H_1)) \\
&= (1 - P_1)(c_{00}(1 - P_F(P_1)) + c_{10}P_F(P_1)) + P_1(c_{01}P_M(P_1) + c_{11}(1 - P_M(P_1)) \\
&= (1 - P_1)c_{00} + (1 - P_1)(c_{10} - c_{00})P_F(P_1) + P_1c_{11} + P_1(c_{01} - c_{11})P_M(P_1) \\
&= c_{00} - P_1c_{00} + (c_{10} - c_{00})P_F(P_1) - P_1(c_{10} - c_{00})P_F(P_1) + P_1c_{11} + P_1(c_{01} - c_{11})P_M(P_1) \\
&= c_{00} + (c_{10} - c_{00})P_F(P_1) \\
&\quad + P_1[(c_{11} - c_{00}) + (c_{01} - c_{11})P_M(P_1) - (c_{10} - c_{00})P_F(P_1)]
\end{aligned}$$

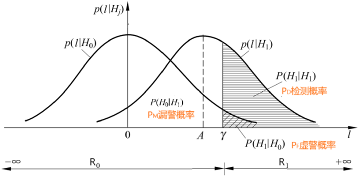
极小极大化准则—先验概率未知, 平均代价的性质

$$P_1 \stackrel{def}{=} P(H_1), \quad P_M(P_1) \stackrel{def}{=} P(H_0|H_1), \quad P_F(P_1) \stackrel{def}{=} P(H_1|H_0)$$

$$P(H_1|H_1) = 1 - P(H_0|H_1) = 1 - P_M(P_1)$$

$$P(H_0|H_0) = 1 - P(H_1|H_0) = 1 - P_F(P_1)$$

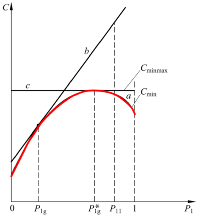
$$\eta \stackrel{def}{=} \eta(P_1) = \frac{1}{P_1(c_{01} - c_{11})} - \frac{c_{10} - c_{00}}{c_{01} - c_{11}}$$



当 $\lambda(x)$ 是严格单调的概率分布随机变量时, 平均代价 $C(P_1)$ 是先验概念率 P_1 的严格上凸函数。

$$C(P_1) = c_{00} + (c_{10} - c_{00})P_F(P_1)$$
$$+ P_1[(c_{11} - c_{00}) + (c_{01} - c_{11})P_M(P_1) - (c_{10} - c_{00})P_F(P_1)]$$

$$P_1 \uparrow \Longrightarrow \eta \downarrow, P_M \downarrow, P_F \uparrow, P_D \uparrow, C \uparrow \sim C_{minmax} \sim \downarrow$$



极小极大化准则

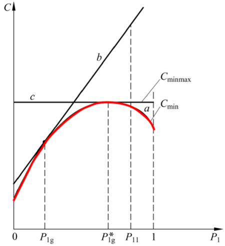
目的: 尽可能避免产生过分大的代价,使极大可能代价最小化。

1. 猜测一个先验概率 P_{1g}, 以 $\eta(P_{1g})$ 为门限进行判决。
2. P_{1g} 确定, $P_M(P_{1g})$ 和 $P_F(P_{1g})$ 即可确定。
3. P_{1g} 确定,则 $C(P_1,P_{1g})$ 表示与上凸函数曲线 $C(P_1)$ 的切线,如图中的直线 b, c。

$$\eta \stackrel{def}{=} \eta(P_{1g}) = \frac{1}{P_{1g}(c_{01}-c_{11})} - \frac{c_{10}-c_{00}}{c_{01}-c_{11}}$$

$$C(P_1) = c_{00} + (c_{10}-c_{00})P_F(P_1) +$$
$$P_1[(c_{11}-c_{00}) + (c_{01}-c_{11})P_M(P_1) - (c_{10}-c_{00})P_F(P_1)]$$

$$C(P_1,P_{1g}) = c_{00} + (c_{10}-c_{00})P_F(P_{1g}) +$$
$$P_1[(c_{11}-c_{00}) + (c_{01}-c_{11})P_M(P_{1g}) - (c_{10}-c_{00})P_F(P_{1g})]$$

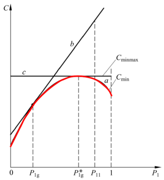


极小极大化准则

目的: 尽可能避免产生过分大的代价，使极大可能代价最小化。

4. 如果实际 $P_1 = P_{1g}$, 平均代价最小, 在直线 b 与 $C(P_1)$ 的切点处, $C(P_1 = P_{1g}, P(_{1g}))$。
5. 如果实际 $P_1 \neq P_{1g}$, 比如 $P_1 = P_{11}$, 则平均代价远大于 $C(P_1 = P_{1g}, P(_{1g}))$, 在直线 $P_1 = P_{11}$ 与直线 b 的交点处。
6. 如果猜测的先验概率为 P_{1g}^*, 则无论实际的先验概率 P_1 为多大，平均代价都等于 C_{minmax}, 而不会产生过分大的代价。**产生的代价与先验概率 P_1 无关。P_{1g}^* 即是先验概率 P_1 最理想的猜测值。**

$$C(P_1, P_{1g}) = c_{00} + (c_{10} - c_{00})P_F(P_{1g}) +$$
$$P_1[(c_{11} - c_{00}) + (c_{01} - c_{11})P_M(P_{1g}) - (c_{10} - c_{00})P_F(P_{1g})]$$



极小极大化准则

先验概率未知的情况下, 可猜测一个先验概率 P_{1g}, 然后利用贝叶斯准则进行检测。判决门限是 P_{1g} 的函数, 判决区域 R_0 是 P_{1g} 的函数, 判决区域 R_1 是 P_{1g} 的函数

$$\eta \overset{def}{=} \eta(P_{1g}) = \frac{1}{P_{1g}(c_{01}-c_{11})} - \frac{c_{10}-c_{00}}{c_{01}-c_{11}}$$

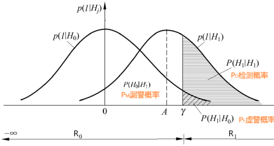
$$P_M = \int_{R_0} p(x|H_1)dx \overset{def}{=} P_M(P_{1g}), P_F = \int_{R_1} p(x|H_0)dx \overset{def}{=} P_F(P_{1g})$$

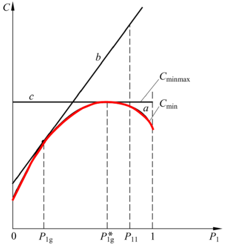
$$C(P_1) = c_{00} + (c_{10}-c_{00})P_F(P_1) +$$

$$P_1[(c_{11}-c_{00}) + (c_{01}-c_{11})P_M(P_1) - (c_{10}-c_{00})P_F(P_1)]$$

$$C(P_1, P_{1g}) = c_{00} + (c_{10}-c_{00})P_F(P_{1g}) +$$

$$P_1[(c_{11}-c_{00}) + (c_{01}-c_{11})P_M(P_{1g}) - (c_{10}-c_{00})P_F(P_{1g})]$$





极小极大化准则

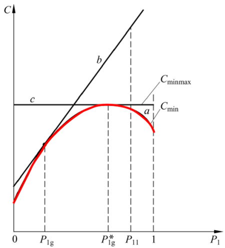
给定 P_{1g} 的条件下, 平均代价 $C(P_1, P_{1g})$ 是先验概率 P_1 的线性函数, 若 $P_{1g} \neq P_1$, 平均代价 $C(P_1, P_{1g})$ 大于最小平均代价。

为避免产生过分大的代价, 需要猜测一种先验概率 P_{1g}^*, 使得平均代价 $C(P_1, P_{1g}^*)$ 不依赖于信源的先验概率 P_1。

$$C(P_1, P_{1g}) = c_{00} + (c_{10} - c_{00})P_F(P_{1g}) +$$

$$P_1[(c_{11} - c_{00}) + (c_{01} - c_{11})P_M(P_{1g}) - (c_{10} - c_{00})P_F(P_{1g})]$$

$$\frac{\partial C(P_1, P_{1g})}{\partial P_1}\bigg|_{P_{1g}=P_{1g}^*} = 0$$



极小化极大方程

$$(c_{11} - c_{00}) + (c_{01} - c_{11})P_M(P_{1g}^*) - (c_{10} - c_{00})P_F(P_{1g}^*) = 0$$

平均代价: $C(P_{1g}^*) = c_{00} + (c_{10} - c_{00})P_F(P_{1g}^*)$

极小极大化准则

极小化极大方程

$$(c_{11}-c_{00})+(c_{01}-c_{11})P_M(P_{1g}^*)-(c_{10}-c_{00})P_F(P_{1g}^*)=0$$

平均代价:

$$C(P_{1g}^*)=c_{00}+(c_{10}-c_{00})P_F(P_{1g}^*)$$

正确判决不付出代价

$$c_{11}=c_{00}=0 \qquad c_{01}P_M(P_{1g}^*)=c_{10}P_F(P_{1g}^*)$$

正确判决不付出代价, 错误判决代价因子相同

$$c_{11}=c_{00}=0$$

$$c_{10}=c_{01}=1$$

$$P_M(P_{1g}^*)=P_F(P_{1g}^*)$$

极小化极大准则的基本步骤

1. 计算两个似然函数, 构建似然比 $\lambda(x) \overset{def}{=} \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)}$
2. 假设判决门限 η, 构建贝叶斯检测基本表达式
3. 化简成最简形式 $l(x) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \gamma(\eta)$
4. 利用极小化极大准则, 确定最终判决门限 $\gamma(\eta)$

贝叶斯准则例题 6

在闭启键控通信系统中,两个假设下的观测信号模型为:

$$H_0 : x = n$$

$$H_1 : x = A + n$$

其中, 噪声 n 是均值为零, 方差为 σ_n^2 的高斯噪声, 若两个假设的先验概率未知, 且 $c_{00} = c_{11} = 0, c_{01} = c_{10} = 1$。

采用极小化极大准则,试确定检测门限, 并求最小平均错误概率。

贝叶斯准则例题 6: 解

解: 观测信号模型为:

$$H_0 : x = n$$

$$H_1 : x = A + n$$

步骤 1: 计算两个似然函数, 构建似然比

由于 n 是高斯分布随机变量, 因此在 H_0 假设下, 检测统计量 x 服从高斯分布, 且均值为 0, 方差为 σ_n^2; 在 H_1 假设下, 检测统计量 x 服从均值为 A, 方差为 σ_n^2 的高斯分布。

$$p(x|H_0) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right) \qquad p(x|H_1) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{(x-A)^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

$$\lambda(x) = \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} = \exp\left(\frac{(x^2-(x-A)^2)}{2\sigma_n^2}\right) = \exp\left(\frac{A}{\sigma_n^2}x - \frac{A^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

贝叶斯准则例题 6: 解 (续 1)

步骤 2: 假设判决门限 η, 构建贝叶斯检测基本表达式

$$\lambda(x) \stackrel{def}{=} \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \stackrel{def}{=} \eta$$

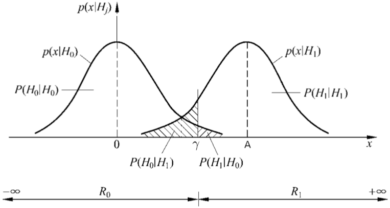
$$\lambda(x) = \exp\left(\frac{A}{\sigma_n^2}x - \frac{A^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

步骤 3: 化简成最简形式

$$x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma_n^2 \ln \eta}{A} + \frac{A}{2} \stackrel{def}{=} \gamma$$

贝叶斯准则例题 6: 解 (续 2)

步骤 4: 利用极小化极大准则, 确定最终判决门限 γ



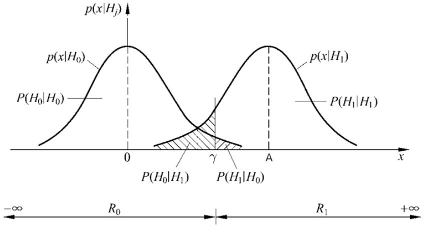
$$P_F \overset{def}{=} P(H_1|H_0) = \int_\gamma^\infty p(x|H_0)dx \implies Q(x) = \int_x^\infty \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

$$= \int_\gamma^\infty \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right) dx \qquad \text{by } x = \sigma_n u$$

$$= \int_{\frac{\gamma}{\sigma_n}}^\infty \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

$$= Q\left(\frac{\gamma}{\sigma_n}\right)$$

贝叶斯准则例题 6: 解 (续 3)



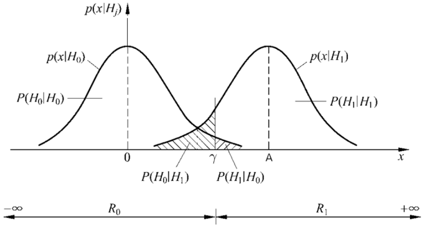
$$P_M \stackrel{def}{=} P(H_0|H_1) = 1 - \int_{\gamma}^{\infty} p(x|H_1)dx \implies Q(x) = \int_{x}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

$$= 1 - \int_{\gamma}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{(x-A)^2}{2\sigma_n^2}\right) dx \qquad \text{by } x = \sigma_n u + A$$

$$= 1 - \int_{\frac{\gamma-A}{\sigma_n}}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

$$= 1 - Q\left(\frac{\gamma-A}{\sigma_n}\right)$$

贝叶斯准则例题 6: 解 (续 3)



$$P_M \stackrel{def}{=} P(H_0|H_1) = 1 - \int_\gamma^\infty p(x|H_1)dx \implies Q(x) = \int_x^\infty \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

$$= 1 - \int_\gamma^\infty \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{(x-A)^2}{2\sigma_n^2}\right) dx \qquad \text{by } x = \sigma_n u + A$$

$$= 1 - \int_{\frac{\gamma-A}{\sigma_n}}^\infty \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

$$= 1 - Q\left(\frac{\gamma - A}{\sigma_n}\right)$$

贝叶斯准则例题 6: 解 (续 4)

正确判决不付出代价, 错误判决代价因子相同时的极小化极大方程

$$c_{11}=c_{00}=0$$
$$c_{10}=c_{01}=1$$

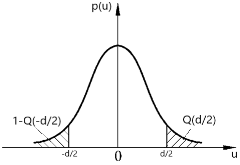
$$P_M(P_{1g}^*)=P_F(P_{1g}^*)$$

$$P_F \overset{def}{=} P(H_1|H_0)=Q\left(\frac{\gamma}{\sigma_n}\right)$$

$$P_M \overset{def}{=} P(H_0|H_1)=1-Q\left(\frac{\gamma-A}{\sigma_n}\right)=Q\left(-\frac{\gamma-A}{\sigma_n}\right)$$

$$Q(x)=\int_x^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)du$$

$$Q\left(\frac{d}{2}\right)=1-Q\left(-\frac{d}{2}\right)$$



根据上述极小化极大方程,有

$$Q\left(\frac{\gamma}{\sigma_n}\right)=Q\left(-\frac{\gamma-A}{\sigma_n}\right)\implies\gamma=\frac{A}{2}$$

贝叶斯准则例题 6: 解 (续 5)

本例, 按照极小化极大准则, 平均错误概率为:

$$
\begin{aligned}
P_e &= P(H_1)P(H_0|H_1) + P(H_0)P(H_1|H_0) \\
&= P(H_1)P_M + P(H_0)P_F \\
&= [P(H_1) + P(H_0)]P_F && \text{by 本例的极小化极大方程} P_M(P_{1g}^*) = P_F(P \\
&= P_F = P(H_1|H_0) && \text{by } P(H_1) + P(H_0) = 1, P_F \overset{def}{=} P(H_1|H_0) \\
&= Q(\frac{\gamma}{\sigma}) = Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right) && \text{by } \gamma = \frac{A}{2} \\
&= Q(\frac{d}{2}) && \text{by 功率信噪比} d^2 = \frac{A^2}{\sigma^2}
\end{aligned}
$$

例题 5, 按照按照平均错误概率准则, 平均错误概率同上。

因此, **先验等概条件下的最小平均错误准则等价于正确判决为 0, 错误判决代价为 1 时的极小化极大准则。**

奈曼—皮尔逊准则 (Neyman-Pearson criterion)

- **应用范围**

  假设的先验概率未知, 判决代价未知 (雷达信号检测)

- **目标**

  错误判决概率尽可能小, 正确判决概率尽可能大

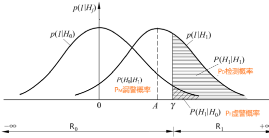
- **实际情况**

  $P(H_1|H_0)$ 减小时, $P(H_1|H_1)$ 也相应减小;

  增加 $P(H_1|H_1)$, $P(H_1|H_0)$ 也随之增加。

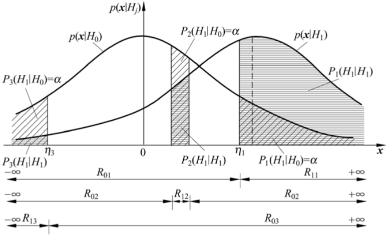
- **奈曼皮尔逊检测**

  在虚警概率 $P_F \overset{def}{=} P(H_1|H_0) = \alpha$ 约束条件下, 使正确判决概率 (检测概率)$P_D \overset{def}{=} P(H_1|H_1)$ 最大的准则。



奈曼—皮尔逊准则的存在性

1. 图中，三个判决域 (R_{0i}, R_{1i}) 均满足错误判决概率 $P_i(H_1|H_0) = \alpha(i = 0, 1, 2)$。
2. 原则上判决域 R_0 和 R_1 有无限多种划分方法，均可以保证错误判决概率 $P(H_1|H_0) = \alpha$，但是正确判决概率 $P(H_1|H_1)$ 一般是不一样的。
3. 至少有一种判决域划分能使 $P(H_1|H_0) = \alpha$，又能使 $P(H_1|H_1)$ 到达最大。



奈曼-皮尔逊检测准则是一定存在的

奈曼—皮尔逊准则的推导

在 $P(H_1|H_0)=\alpha$ 约束条件下, 使正确判决概率 $P(H_1|H_1)$ 最大的准则

等价于 (由于 $P(H_0|H_1)+P(H_1|H_1)=1$)

在 $P(H_1|H_0)=\alpha$ 约束条件下, 使正确判决概率 $P(H_0|H_1)$ 最小的准则

利用拉格朗日乘子 $\mu(\mu\geq 0)$, 构建目标函数

$$J=P(H_0|H_1)+\mu\left[P(H_1|H_0)-\alpha\right]$$

若 $P(H_1|H_0)=\alpha, J$ 达到最小时, $P(H_0|H_1)$ 也达到最小。

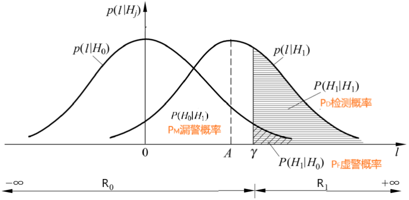
漏警概率 $P(H_0|H_1)+$ 检测概率

$P(H_1|H_1)=1,$

虚警概率 $P(H_1|H_0)=\alpha$

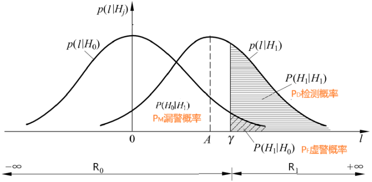
当 J 最小 $\Longrightarrow$ 漏警概率 $(P(H_0|H_1)$ 最小

$\Longrightarrow$ 检测概率 $P(H_1|H_1)$ 最大。



奈曼—皮尔逊准则的推导 (续)

$$
\begin{aligned}
J &= P(H_0|H_1) + \mu[P(H_1|H_0) - \alpha] \\
&= \int_{R_0} p(x|H_1)dx + \mu\left[\int_{R_1} p(x|H_0)dx - \alpha\right] \\
&= \int_{R_0} p(x|H_1)dx + \mu\left[1 - \int_{R_0} p(x|H_0)dx - \alpha\right] \\
&= \mu(1-\alpha) + \int_{R_0} \left[p(x|H_1) - \mu p(x|H_0)\right] dx
\end{aligned}
$$



把使被积函数取负值的观测值 x 值划分给 R_0 区域, 而把其余的观测值 x 值划分给 R_1, 即可保证平均代价最小, 从而使 J 值最小。

$p(x|H_1) < \mu p(x|H_0)$	**判决 H_0 假设成立**
$p(x|H_1) \geq \mu p(x|H_0)$	**判决 H_1 假设成立**

奈曼—皮尔逊准则

奈曼—皮尔逊准则

$$\lambda(x) \overset{def}{=} \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \mu$$

其中, 判决门限有下式确定

$$P(H_1|H_0) = \int_{R_1} p(x|H_0)dx = \int_{\mu}^{\infty} p(\lambda|H_0)d\lambda = \alpha$$

求出的 μ 必满足 $\mu \geq 0$

贝叶斯判决准则

$$\lambda(x) = \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)(c_{10} - c_{00})}{P(H_1)(c_{01} - c_{11})} \overset{def}{=} \eta$$

贝叶斯准则的特例, 当 $P(H_1)(c_{01} - c_{11}) = 1, P(H_0)(c_{10} - c_{00}) = \mu$ 时, 就成为奈曼—皮尔逊准则。

奈曼—皮尔逊准则的求解步骤

1. 计算两个似然函数, 构建似然比 $\lambda(x) \overset{def}{=} \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \mu$
2. 化简
3. 根据统计量计算 $p(l|H_0)$ 和 $p(l|H_1)$
4. 在 $P(H_1|H_0) = \int_{R_1} p(l|H_0)dl = \alpha$ 约束下, 计算判决门限

欢迎批评指正！