信号检测与估值

段江涛
机电工程学院
西安电子科技大学 XIDIAN UNIVERSITY

2019 年 9 月

ch3. 信号检测与估计理论的基础知识

ch3-1. 统计检测理论基本概念及贝叶斯准则

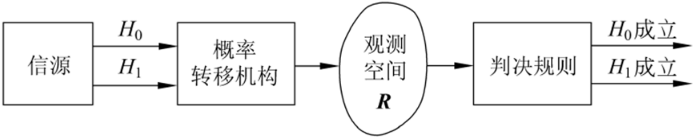
统计检测理论 (假设检验理论)

- 统计信号处理的理论基础之一
- 主要研究在受噪声干扰的随机信号中，信号的有/无或信号属于哪个状态的最佳判决的概念、方法和性能等问题。
- 数学基础——统计判决理论，又称假设检验理论

经典的信号统计检测理论

- 统计信号检测理论的基本概念
- 二元信号检测的最佳检测准则
- 信号状态的判决的方法和检测性能的分析
- M 元信号的最佳检测
- 参量信号的复合假设检验
- 序列检测

统计检测理论的基本模型: 二元信号检测的模型



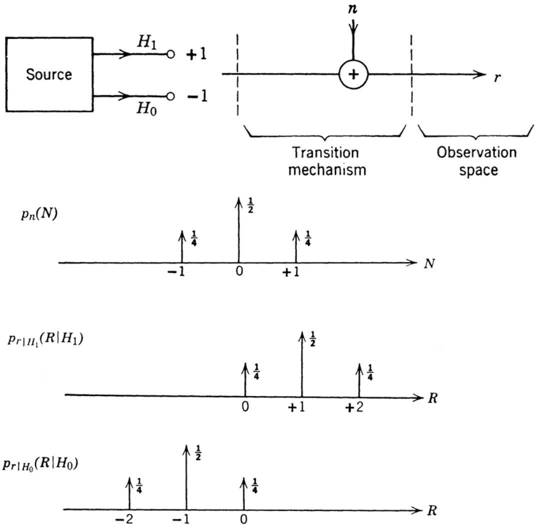
信源 $\Longrightarrow$ 信源的输出称为假设

概率转移机构 $\Longrightarrow$ 将信源的输出 (假设) 以一定的概率关系映射到整个观察空间中

观测空间 $\Longrightarrow$ 接收端所有可能观测量的集合

判决规则 $\Longrightarrow$ 将观测空间进行合理划分, 使每个观测量对应一个假设判断的方法

统计检测理论的基本模型: 二元信号检测的模型示例 1



$H_1 : r = 1 + n$

$H_0 : r = -1 + n$

n : 噪声是一随机变量

一维观测空间:

$\boldsymbol{R} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

统计检测理论的基本模型：二元信号检测的模型示例 2

$$H_1: r_1 = 1 + n_1$$

$$r_2 = 1 + n_2$$

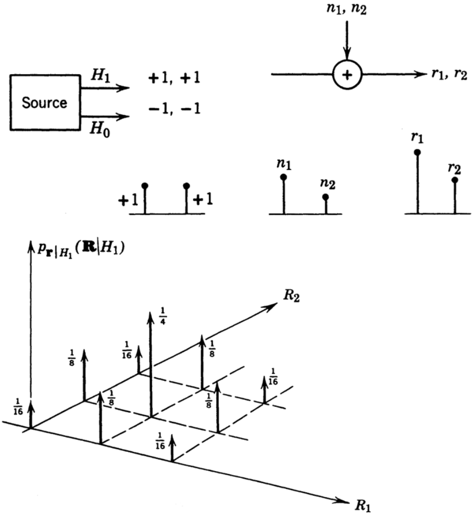
$$H_0: r_1 = -1 + n_1$$

$$r_2 = -1 + n_2$$

n_1, n_2 : 噪声

二维观测空间:

$\boldsymbol{R} = \{R_1, R_2\}$

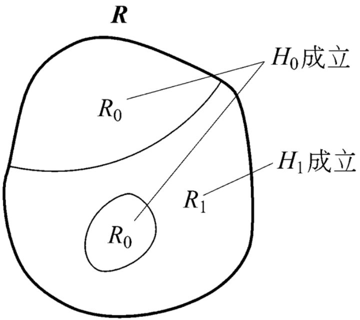


统计检测理论的基本模型：二元信号检测的判决域

二元信号的检测问题，可归结为**对观察空间的划分问题**。

即按照一定的准则，将观察空间 $\boldsymbol{R}$ 分别划分为 R_0 和 R_1 两个子空间。

$$\boldsymbol{R} = R_0 \cup R_1, \quad R_0 \cap R_1 = \emptyset$$



思考

如果 n 是均值为零的, 方差为 σ_n^2 的高斯随机变量, 两个假设下的观测信号模型

$H_1 : r = 1 + n$

$H_0 : r = -1 + n$

观测信号 $p(r|H_1), p(r|H_0)$ 应服从何种分布?

思考

如果 n 是均值为零的, 方差为 σ_n^2 的高斯随机变量, 两个假设下的观测信号模型

$H_1 : r = 1 + n$

$H_0 : r = -1 + n$

观测信号 $p(r|H_1), p(r|H_0)$ 应服从何种分布?

因为高斯随机变量的特点:高斯随机变量的线性组合还是高斯随机变量。

习题 2.7: $x \sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$, 则 $(y = ax + b) \sim \mathcal{N}(a\mu_x + b, a^2\sigma_x^2)$。

所以, $p(r|H_1) \sim \mathcal{N}(1, \sigma_n^2), p(r|H_0) \sim \mathcal{N}(-1, \sigma_n^2)$

$E(r|H_0) = E(1 + n) = 1 + E(n) = 1,$

$Var(r|H_0) = E[(r|H_0 - E(r|H_0))^2] = E[n^2] = \sigma_n^2 \implies r|H_0 \sim \mathcal{N}(1, \sigma_n^2)$

$E(r|H_1) = E(-1 + n) = -1 + E(n) = -1,$

$Var(r|H_1) = E[(r|H_1 - E(r|H_1))^2] = E[n^2] = \sigma_n^2 \implies r|H_1 \sim \mathcal{N}(-1, \sigma_n^2)$

统计检测理论的基本模型：二元信号检测

考虑噪声 n 为高斯噪声时的概率转移机构

观测模型为:

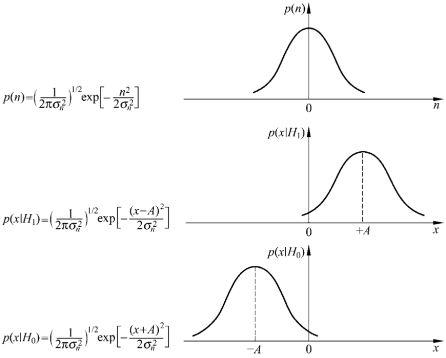
$$H_0: x = -A + n$$

$$H_1: x = A + n$$

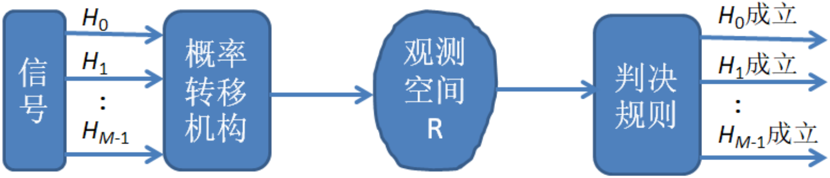
概率转移:

信源输出的某一种确知信号:

- 无噪声干扰时,将映射到观测空间中的某一点;
- 有噪声干扰时,将以一定的概率映射到观测空间。而映射到某一点附件的概率决定于概率密度函数 $p(x|H_j)(j = 1, 2)$.

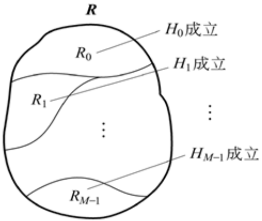


统计检测理论的基本模型: M 元信号检测



判决域划分:

$$\boldsymbol{R} = \bigcup_{i=0}^{M-1} R_i, R_i \cap R_j = \emptyset, (i \neq j)$$



二元信号检测—统计检测判决结果和判决概率

二元信号判决结果

判决	假设 H_0	假设 H_1
H_0	$(H_0\|H_0)$	$(H_0\|H_1)$
H_1	$(H_1\|H_0)$	$(H_1\|H_1)$

$(H_i|H_j)(i,j=0,1)$: 在假设 H_j 为真的条件下，判决假设 H_i 成立的结果。

二元信号判决概率

判决	假设 H_0	假设 H_1
H_0	$P(H_0\|H_0)$	$P(H_0\|H_1)$
H_1	$P(H_1\|H_0)$	$P(H_1\|H_1)$

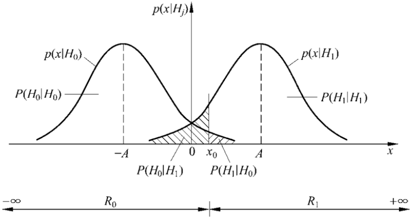
$P(H_i|H_j)(i,j=0,1)$: 在假设 H_j 为真的条件下，判决假设 H_i 成立的概率。

$$H_0: x = -A + n, \quad H_1: x = A + n$$

$$H_0: x_k = -A + n_k, \quad H_1: x_k = A + n_k$$

$$k = 1, 2, \ldots, N, \quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)^T$$

$$P(H_i|H_j) = \int_{R_i} p(\boldsymbol{x}|H_j) d\boldsymbol{x}$$



$$P(H_0|H_0) = \int_{R_0} p(\boldsymbol{x}|H_0) d\boldsymbol{x}, \qquad P(H_1|H_0) = \int_{R_1} p(\boldsymbol{x}|H_0) d\boldsymbol{x}$$

$$P(H_0|H_1) = \int_{R_0} p(\boldsymbol{x}|H_1) d\boldsymbol{x}, \qquad P(H_1|H_1) = \int_{R_1} p(\boldsymbol{x}|H_1) d\boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{R} = R_0 \cup R_1, \quad R_0 \cap R_1 = \emptyset, \quad \int_{\boldsymbol{R}} p(\boldsymbol{x}|H_j) d\boldsymbol{x} = 1$$

$$P(H_0|H_0) + P(H_1|H_0) = \int_{R_0} p(\boldsymbol{x}|H_0) d\boldsymbol{x} + \int_{R_1} p(\boldsymbol{x}|H_0) d\boldsymbol{x} = \int_{\boldsymbol{R}} p(\boldsymbol{x}|H_0) d\boldsymbol{x} = 1$$

$$P(H_0|H_1) + P(H_1|H_1) = \int_{R_0} p(\boldsymbol{x}|H_1) d\boldsymbol{x} + \int_{R_1} p(\boldsymbol{x}|H_1) d\boldsymbol{x} = \int_{\boldsymbol{R}} p(\boldsymbol{x}|H_1) d\boldsymbol{x} = 1$$

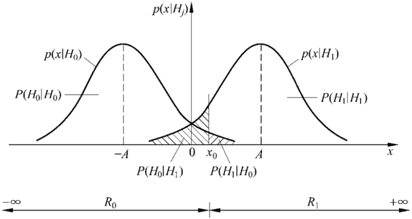
信号统计检测理论要研究的基本问题—判决域的划分

$$H_0 : x = -A + n, \quad H_1 : x = A + n$$

$$H_0 : x_k = -A + n_k, \quad H_1 : x_k = A + n_k$$

$$k = 1, 2, \ldots, N, \quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)^T$$

$$P(H_i|H_j) = \int_{R_i} p(\boldsymbol{x}|H_j)d\boldsymbol{x}$$



- 目标: 正确判决概率 $P(H_j|H_j)$ 尽可能大, 错误判决概率 $P(H_i|H_j)(i \neq j)$ 尽可能小。
- $x_0 \downarrow \Longrightarrow$ 正确判决概率 $P(H_1|H_1)\uparrow$, 但另一个正确判决概率 $P(H_0|H_0)\downarrow$。
- $x_0 \downarrow \Longrightarrow$ 错误判决概率 $P(H_0|H_1)\downarrow$, 但另一个错误判决概率 $P(H_1|H_0)\uparrow$。
- $x_0 \uparrow \Longrightarrow$ 正确判决概率 $P(H_0|H_0)\uparrow$, 但另一个正确判决概率 $P(H_1|H_1)\downarrow$。
- $x_0 \uparrow \Longrightarrow$ 错误判决概率 $P(H_1|H_0)\downarrow$, 但另一个错误判决概率 $P(H_0|H_1)\uparrow$。
- 判决域的划分影响判决概率 $P(H_i|H_j)$, 因此需要最佳划分判决域。

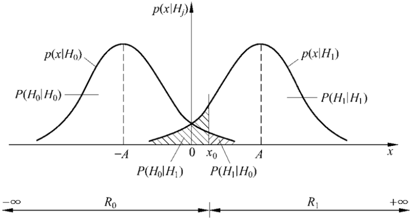
信号统计检测理论要研究的基本问题—判决域的划分

$$H_0: x = -A + n, \quad H_1: x = A + n$$

$$H_0: x_k = -A + n_k, \quad H_1: x_k = A + n_k$$

$$k = 1, 2, \ldots, N, \quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)^T$$

$$P(H_i|H_j) = \int_{R_i} p(\boldsymbol{x}|H_j) d\boldsymbol{x}$$



- 目标: 正确判决概率 $P(H_j|H_j)$ 尽可能大,错误判决概率 $P(H_i|H_j)(i \neq j)$ 尽可能小。
- 判决域的划分影响判决概率 $P(H_i|H_j)$, 因此需要最佳划分判决域。
- $p(\boldsymbol{x}|H_j)(j = 0, 1)$: 假设 H_j 下观测信号的概率密度函数。它描述观测 (接收) 信号的统计特性。
- 按照一定的准则,将观测空间 $\boldsymbol{R}$ 分别划分为 R_0 和 R_1 两个子空间。计算判决概率 $P(H_i|H_j)(i,j = 0, 1)$。

二元信号检测—统计检测判决结果和判决概率计算

观测模型为:

$$H_0 : x = n$$

$$H_1 : x = A + n$$

考虑噪声 n 是均值为零, 方差为 σ^2 的高斯噪声, 且不同时刻的加性噪声之间是相互统计独立的。

接收端根据接收信号判决时, 会出现四种事件, 对应四个判决概率:

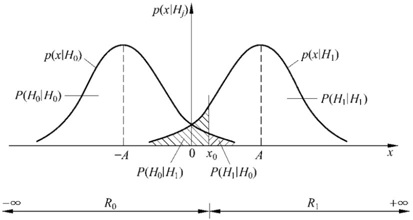
$$\begin{array}{ccc} (H_0|H_0) & & P(H_0|H_0) \\ (H_1|H_0) & \Rightarrow & P(H_1|H_0) \\ (H_0|H_1) & & P(H_0|H_1) \\ (H_1|H_1) & & P(H_1|H_1) \end{array}$$

二元信号检测—统计检测判决结果和判决概率计算

观测模型为:

$$H_0 : x = -A + n$$

$$H_1 : x = A + n$$



考虑噪声 $n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, 且不同时刻的加性噪声之间是相互统计独立的。

噪声 n 的概率密度: $$p(n) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{n^2}{2\sigma^2}\right)$$

接收信号 $\boldsymbol{x}$ 的统计特性可以描述为:

$$p(\boldsymbol{x}|H_0) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{(x+A)^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$p(\boldsymbol{x}|H_1) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{(x-A)^2}{2\sigma^2}\right]$$

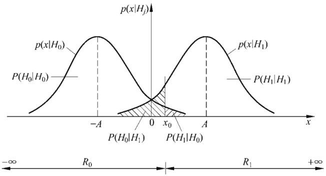
二元信号检测—统计检测判决结果和判决概率计算

观测模型为:

$$H_0: x = -A + n$$

$$H_1: x = A + n$$

考虑噪声 $n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, 且不同时刻的加性噪声之间是相互统计独立的。



四种判决概率的计算: $P(H_i|H_j) = \int_{R_i} p(\mathbf{x}|H_j)d\mathbf{x}$

$$P(H_0|H_0) = \int_{R_0} p(\mathbf{x}|H_0)d\mathbf{x}, \qquad P(H_1|H_0) = \int_{R_1} p(\mathbf{x}|H_0)d\mathbf{x}$$

$$P(H_0|H_1) = \int_{R_0} p(\mathbf{x}|H_1)d\mathbf{x}, \qquad P(H_1|H_1) = \int_{R_1} p(\mathbf{x}|H_1)d\mathbf{x}$$

$$\boldsymbol{R} = R_0 \cup R_1, \quad R_0 \cap R_1 = \emptyset, \quad \int_{\boldsymbol{R}} p(\mathbf{x}|H_j)d\mathbf{x} = 1$$

$$P(H_0|H_0) + P(H_1|H_0) = \int_{R_0} p(\mathbf{x}|H_0)d\mathbf{x} + \int_{R_1} p(\mathbf{x}|H_0)d\mathbf{x} = \int_{\boldsymbol{R}} p(\mathbf{x}|H_0)d\mathbf{x} = 1$$

$$P(H_0|H_1) + P(H_1|H_1) = \int_{R_0} p(\mathbf{x}|H_1)d\mathbf{x} + \int_{R_1} p(\mathbf{x}|H_1)d\mathbf{x} = \int_{\boldsymbol{R}} p(\mathbf{x}|H_1)d\mathbf{x} = 1$$

术语

$H_j(j=0,1)$: 信源输出的信号, 称为假设 H_j

$P(H_j)(i=0)$: 假设 H_j 为真的先验概率 (先验: 先于试验)

$(x|H_j)(j=0,1)$: 假设 H_j 下的观测信号是随机变量

$p(x|H_j)(j=0,1)$: 假设 H_j 下观测信号的概率密度函数

$(H_i|H_j)(i,j=0,1)$: 在假设 H_j 为真的条件下,判决假设 H_i 成立的结果。

$P(H_i|H_j)(i,j=0,1)$: 在假设 H_j 为真的条件下,判决假设 H_i 成立的概率。

贝叶斯准则—基本要求

- 充分理解平均代价 (Average risk) 的概念
- 贝叶斯准则 (Bayes criterion) 的判决表达式
- 判决性能分析

贝叶斯准则的基本原理：在划分观察空间时，使平均代价最小。

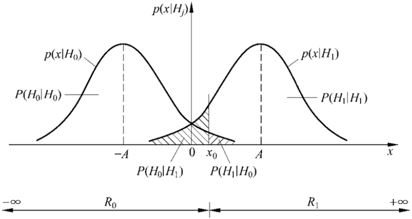
信号统计检测理论要研究的基本问题—判决域的划分

$$H_0 : x = -A + n, \quad H_1 : x = A + n$$

$$H_0 : x_k = -A + n_k, \quad H_1 : x_k = A + n_k$$

$$k = 1, 2, \ldots, N, \quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)^T$$

$$P(H_i|H_j) = \int_{R_i} p(\boldsymbol{x}|H_j) d\boldsymbol{x}$$



- 目标: 正确判决概率 $P(H_j|H_j)$ 尽可能大,错误判决概率 $P(H_i|H_j)(i \neq j)$ 尽可能小。
- 判决域的划分影响判决概率 $P(H_i|H_j)$, 因此**需要最佳划分判决域**。
- $p(\boldsymbol{x}|H_j)(j = 0, 1)$: 假设 H_j 下观测信号的概率密度函数。它描述观测 (接收) 信号的统计特性。
- 按照一定的准则,将观察空间 $\boldsymbol{R}$ 分别划分为 R_0 和 R_1 两个子空间。计算判决概率 $P(H_i|H_j)(i,j = 0, 1)$。

贝叶斯检测的提出动机

通信系统中, 二元信号的平均解调错误概率 (由全概率公式得出):

$$P_e = P(0)P(1|0) + P(1)P(0|1)$$

可以看出, 检测性能不仅与两种错误判决概率 $[P(1|0), P(0|1)]$ 有关, 还与信源发送的 0 和 1 的先验概率 $[P(0), P(1)]$ 有关。

另外, 每做出一种判断, 人们要付出的代价也是不同的。

如何综合考虑上述因素来设计好的检测方法?

贝叶斯检测

给定各种判决代价因子, 且已知各假设的先验概率条件下, 使**平均代价最小**的检测准则。

问题

1. 代价因子如何定义?
2. 平均代价如何计算?
3. 如何获得最小的平均代价?

代价因子的定义

对于二元信号统计检测, 共有四种事件发生, 即

$$\begin{array}{cccc} (H_0|H_0) & (H_1|H_0) & (H_1|H_1) & (H_0|H_1) \\ \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\ c_{00} & c_{10} & c_{11} & c_{01} \end{array}$$

c_{ij} 表示假设 H_j 为真时, 判决假设 H_i 成立所付出的代价

Notes

一般地, $c_{10} > c_{00}, c_{01} > c_{11}$

平均代价的计算

平均代价 C 由两部分构成

1. 信源发送 H_0 假设时, 判决所付出的代价 $C(H_0)$
2. 信源发送 H_1 假设时, 判决所付出的代价 $C(H_0)$

$$C = P(H_0)C(H_0) + P(H_1)C(H_1)$$

参见:

$$P_e = P(0)P(1|0) + P(1)P(0|1)$$

平均代价的计算

对于二元信号统计检测, 共有四种事件发生, 即

$$\begin{array}{cccc} (H_0|H_0) & (H_1|H_0) & (H_1|H_1) & (H_0|H_1) \\ \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\ c_{00} & c_{10} & c_{11} & c_{01} \end{array}$$

c_{ij} 表示假设 H_j 为真时, 判决假设 H_i 成立所付出的代价

因此, 两种假设下, 判决所付出的代价:

$$C(H_0) = c_{00}P(H_0|H_0) + c_{10}P(H_1|H_0)$$

$$C(H_1) = c_{01}P(H_0|H_1) + c_{11}P(H_1|H_1)$$

平均代价: $C = P(H_0)C(H_0) + P(H_1)C(H_1)$

平均代价的计算

$$C = P(H_0)C(H_0) + P(H_1)C(H_1)$$

$$C(H_0) = c_{00}P(H_0|H_0) + c_{10}P(H_1|H_0)$$

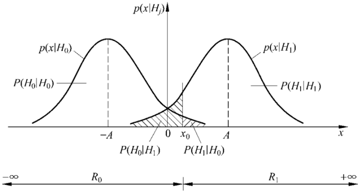
$$C(H_1) = c_{01}P(H_0|H_1) + c_{11}P(H_1|H_1)$$

$$\Downarrow$$

$$C = P(H_0)c_{00}P(H_0|H_0) + c_{10}P(H_1|H_0) + P(H_1)c_{01}P(H_0|H_1) + c_{11}P(H_1|H_1)$$

平均代价的计算

$$C = P(H_0)c_{00}P(H_0|H_0) + c_{10}P(H_1|H_0) +$$
$$P(H_1)c_{01}P(H_0|H_1) + c_{11}P(H_1|H_1)$$
$$P(H_i|H_j) = \int_{R_i} p(x|H_j)dx$$

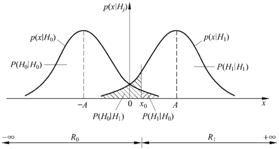


$$\Downarrow$$

$$C = P(H_0)\left(c_{00}\int_{R_0} p(x|H_0)dx + c_{10}\int_{R_1} p(x|H_0)dx\right) +$$
$$P(H_1)\left(c_{01}\int_{R_0} p(x|H_1)dx + c_{11}\int_{R_1} p(x|H_1)dx\right)$$

平均代价的计算

$$C = P(H_0)\left(c_{00}\int_{R_0} p(x|H_0)dx + c_{10}\int_{R_1} p(x|H_0)dx\right) +$$
$$P(H_1)\left(c_{01}\int_{R_0} p(x|H_1)dx + c_{11}\int_{R_1} p(x|H_1)dx\right)$$



$$\int_R p(x|H_j)dx = 1 \implies \int_{R_1} p(x|H_j)dx = 1 - \int_{R_0} p(x|H_0)dx$$

$$\Downarrow$$

$$C = P(H_0)\left(c_{00}\int_{R_0} p(x|H_0)dx + c_{10}\left(1 - \int_{R_0} p(x|H_0)dx\right)\right) +$$
$$P(H_1)\left(c_{01}\int_{R_0} p(x|H_1)dx + c_{11}\left(1 - \int_{R_0} p(x|H_1)dx\right)\right)$$

平均代价的计算

$$
\begin{aligned}
C =& P(H_0)\left(c_{00}\int_{R_0} p(x|H_0)dx + c_{10}\left(1-\int_{R_0} p(x|H_0)dx\right)\right)+ \\
& P(H_1)\left(c_{01}\int_{R_0} p(x|H_1)dx + c_{11}\left(1-\int_{R_0} p(x|H_1)dx\right)\right) \\
=& P(H_0)\left(c_{10}+c_{00}\int_{R_0} p(x|H_0)dx - c_{10}\int_{R_0} p(x|H_0)dx\right)+ \\
& P(H_1)\left(c_{11}+c_{01}\int_{R_0} p(x|H_1)dx - c_{11}\int_{R_0} p(x|H_1)dx\right) \\
=& c_{10}P(H_0)+c_{11}P(H_1)+ \\
& \left(\int_{R_0}\left[P(H_1)(c_{01}-c_{11})p(x|H_1)-P(H_0)(c_{10}-c_{00})p(x|H_0)\right]dx\right)
\end{aligned}
$$

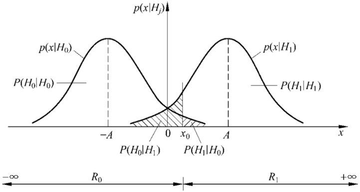
平均代价取最小的条件

$$C = c_{10}P(H_0) + c_{11}P(H_1) + \left(\int_{R_0} \left[P(H_1)(c_{01} - c_{11})p(x|H_1) - P(H_0)(c_{10} - c_{00})p(x|H_0)\right] dx\right)$$

$c_{10}P(H_0)$ 和 $c_{11}P(H_1$ 是两项固定的值

$P(H_1)(c_{01} - c_{11})p(x|H_1) \geq 0$

$P(H_0)(c_{10} - c_{00})p(x|H_0) \geq 0$

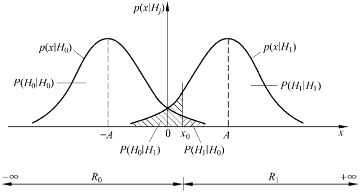


- **因此, 给定信道特性和先验信息, 平均代价 C 的大小完全由判决域 R_0 确定。**
- **把被积函数取负值的观测值 x 划分给 R_0 区域, 而把其余的观测值 x 划分给 R_1, 即可保证平均代价最小。**

平均代价取最小的条件

$$
\begin{aligned}
C = & c_{10}P(H_0) + c_{11}P(H_1) + \\
& \left(\int_{R_0} \left[P(H_1)(c_{01} - c_{11})p(x|H_1) - P(H_0)(c_{10} - c_{00})p(x|H_0) \right] dx \right)
\end{aligned}
$$

把被积函数取负值的观测值 x 划分给 R_0 区域，而把其余的观测值 x 划分给 R_1，即可保证平均代价最小。



$P(H_1)(c_{01} - c_{11})p(x|H_1) < P(H_0)(c_{10} - c_{00})p(x|H_0)$ **判决 H_0 假设成立**

$P(H_1)(c_{01} - c_{11})p(x|H_1) \geq P(H_0)(c_{10} - c_{00})p(x|H_0)$ **判决 H_1 假设成立**

解决方案

1. 代价因子如何定义?

   c_{ij} 表示假设 H_j 为真时, 判决假设 H_i 成立所付出的代价。

   $c_{00}, c_{10}, c_{11}, c_{01}$

2. 平均代价如何计算?

$$
\begin{aligned}
C =& P(H_0)C(H_0) + P(H_1)C(H_1) \\
& c_{10}P(H_0) + c_{11}P(H_1) + \\
& \left(\int_{R_0} \left[P(H_1)(c_{01} - c_{11})p(x|H_1) - P(H_0)(c_{10} - c_{00})p(x|H_0) \right] dx \right)
\end{aligned}
$$

3. 如何获得最小的平均代价?

$$P(H_1)(c_{01} - c_{11})p(x|H_1) < P(H_0)(c_{10} - c_{00})p(x|H_0) \quad \textbf{判决 } H_0 \textbf{ 假设成立}$$

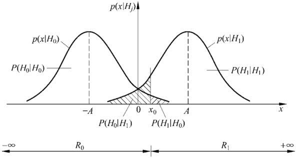
$$P(H_1)(c_{01} - c_{11})p(x|H_1) \geq P(H_0)(c_{10} - c_{00})p(x|H_0) \quad \textbf{判决 } H_1 \textbf{ 假设成立}$$

贝叶斯判决准则

二元信号检测模型:

$$H_0: x = -A + n$$

$$H_1: x = A + n$$



$$P(H_1)(c_{01} - c_{11})p(x|H_1) < P(H_0)(c_{10} - c_{00})p(x|H_0) \quad \text{判决 } H_0 \text{ 假设成立}$$

$$P(H_1)(c_{01} - c_{11})p(x|H_1) \geq P(H_0)(c_{10} - c_{00})p(x|H_0) \quad \text{判决 } H_1 \text{ 假设成立}$$

贝叶斯判决准则

$$\frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} < \frac{P(H_0)(c_{10} - c_{00})}{P(H_1)(c_{01} - c_{11})} \quad \text{判决 } H_0 \text{ 假设成立}$$

$$\frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \geq \frac{P(H_0)(c_{10} - c_{00})}{P(H_1)(c_{01} - c_{11})} \quad \text{判决 } H_1 \text{ 假设成立}$$

贝叶斯判决准则

贝叶斯判决准则

$$\frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} < \frac{P(H_0)(c_{10}-c_{00})}{P(H_1)(c_{01}-c_{11})} \qquad \textbf{判决 } H_0 \textbf{ 假设成立}$$

$$\frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \geq \frac{P(H_0)(c_{10}-c_{00})}{P(H_1)(c_{01}-c_{11})} \qquad \textbf{判决 } H_1 \textbf{ 假设成立}$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)(c_{10}-c_{00})}{P(H_1)(c_{01}-c_{11})}$$

$\Longrightarrow$

$$\lambda(x) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

贝叶斯准则

贝叶斯判决准则

$$\frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)(c_{10}-c_{00})}{P(H_1)(c_{01}-c_{11})} \implies \lambda(x) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

$$\lambda(x) \overset{def}{=} \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)}$$ **定义为似然比函数**

$$\eta \overset{def}{=} \frac{P(H_0)(c_{10}-c_{00})}{P(H_1)(c_{01}-c_{11})}$$ **定义为判决门限**

$\lambda(x)$ **是一维随机变量, 称为检验统计量**

$\lambda(x)$ **不依赖于假设的先验概率** $[P(H_0), P(H_1)]$**, 也与代价因子无关。适用于不同先验概率和不同代价因子的最佳信号检测。**

ch3. 信号检测与估计理论的基础知识

ch3-1. 统计检测理论基本概念及贝叶斯准则

欢迎批评指正！