信号检测与估值

段江涛
机电工程学院

2019 年 8 月

主要内容

Theorem

如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则积分上限函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$$

在 $[a,b]$ 上具有导数，并且它的导数是

$$\Phi'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)\qquad (a\le x\le b)$$

Theorem

如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$$

就是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数。

Theorem

如果函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

术语

$H_j(j=0,1)$: 信源输出的信号, 称为假设 H_j

$P(H_j)(i=0)$: 假设 H_j 为真的先验概率 (先验: 先于试验)

$\lambda\ (x|H_j)(j=0,1)$: 观测信号是随机变量

$p(x|H_j)(j=0,1)$: 假设 H_j 下观测信号的概率密度函数

$(H_i|H_j)(i,j=0,1)$: 在假设 H_j 为真的条件下, 判决假设 H_i 成立的结果。

$P(H_i|H_j)(i,j=0,1)$: 在假设 H_j 为真的条件下, 判决假设 H_i 成立的概率。

c_{ij}: 在假设 H_j 为真的条件下, 判决假设 H_i 成立所付出的代价。

M 元信号检测模型

$$\boldsymbol{R} = \bigcup_{i=0}^{M-1} R_i, \quad R_i \cap R_j = \emptyset, (i \neq j)$$

最佳信号检测 $\Leftarrow$ 正确划分观测空间 $\boldsymbol{R}$ 中的各个判决域 R_i $\Leftarrow$ 最佳检测准则

两种假设先验等概 $\Longrightarrow P(H_0) = P(H_1) = \frac{1}{2}$

采样样本 $x_i (i = 1, 2, \ldots, N)$ 之间相互统计独立, 因此其 N 维联合概率密度能够表示成各自一维概率密度之积的形式, 即

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_N) = p(x_1)p(x_2)\cdots p(x_N) = \prod_{i=1}^{N} p(x_i)$$

思考

如果 n 是均值为零的, 方差为 σ_n^2 的高斯随机变量, 两个假设下的观测信号模型

$H_1 : r = 1 + n$

$H_0 : r = -1 + n$

观测信号 $p(r|H_1), p(r|H_0)$ 应服从何种分布?

因为高斯随机变量的特点:高斯随机变量的线性组合还是高斯随机变量。

习题 2.7: $x \sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$, 则 $(y = ax + b) \sim \mathcal{N}(a\mu_x + b, a^2\sigma_x^2)$。

所以, $p(r|H_1) \sim \mathcal{N}(1, \sigma_n^2), p(r|H_0) \sim \mathcal{N}(-1, \sigma_n^2)$

直接计算: $E(r|H_0) = E(1 + n) = 1 + E(n) = 1, Var(r|H_0) = Var[(r|H_0 - E(r|H_0))^2] = E[n^2] = \sigma_n^2 \implies r|H_0 \sim \mathcal{N}(1, \sigma_n^2)$

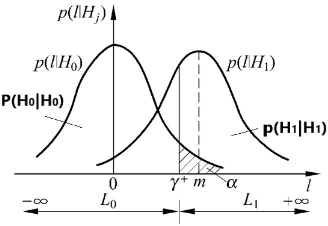
$E(r|H_1) = E(-1 + n) = -1 + E(n) = -1, Var(r|H_1) = Var[(r|H_1 - E(r|H_1))^2] = E[n^2] = \sigma_n^2 \implies r|H_1 \sim \mathcal{N}(1, \sigma_n^2)$

$$n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

$$H_0 : x = n \qquad x \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

$$H_1 : x = m + n \quad x \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$$

判决表达式: $x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma^2}{m} \ln \eta + \frac{m}{2}$

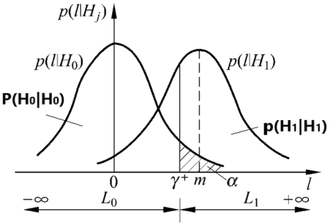


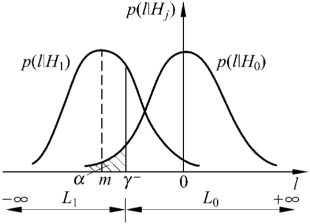
$p(l|H_j)(j = 0, 1)$: 假设 H_j 下观测信号的概率密度函数; $r^+ = \frac{\sigma^2}{m} \ln \eta + \frac{m}{2}$; $\alpha = P(H_1|H_0)$

思考

1. $\frac{m}{2}$ 是两个假设的中间值, $\frac{\sigma^2}{m} \ln \eta$ 为中间值的修正量, 其含义如何?
2. 考虑 $m > 0, m < 0, m = 0$ 时, 如何构造判决表达式?

1. $m = 0$ 时: H_0, H_1 成为一样的信号。
2. m 值越大, $\frac{\sigma^2}{m}\ln\eta$ 中间值修正量越小,越接近于中间值。
3. m 值越大, 更易区分两种假设,检测性能越好。
4. $m > 0$ 和 $m < 0$ 下的判决表达式如下图。





$m > 0;\qquad x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma^2}{m}\ln\eta + \frac{m}{2}$

$m < 0;\qquad x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\lessgtr}} -\frac{\sigma^2}{|m|}\ln\eta - \frac{|m|}{2}$

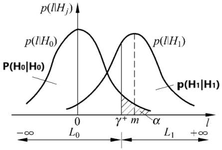
经过上述化简,信号检测的判决式由似然比检验的形式,简化为检验统计量 $l(x)$ 与检测门限 γ 相比较的形式,形成贝叶斯检测基本基本表达式:

$$l(x) \overset{def}{=} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma^2 \ln \eta}{Nm} + \frac{m}{2} \overset{def}{=} \gamma^+$$

检验统计量 $l(x) \overset{def}{=} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$ 是观测信号 $x_i(i=1,2,\ldots,N)$ 的求和取平均值的结果,即它是 $x_i(i=1,2,\ldots,N)$ 的函数,是一个随机变量。

而无论是在假设 H_0 下,还是在假设 H_1 下,$(x_i|H_0),(x_i|H_1)$ 均服从高斯分布,因为高斯随机变量的线性组合还是高斯随机变量,所以两种假设下的观测量 $(l|H_0),(l|H_1)$ 也是服从高斯分布的随机变量。

$$\begin{aligned} & n \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2) \\ H_0 : x = n \quad & x \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2) \\ H_1 : x = m+n \quad & x \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2) \end{aligned}$$



$p(l|H_j)(j=0,1)$: 假设 H_j 下观测信号的概率密度函数; $r^+ = \frac{\sigma^2 \ln \eta}{Nm} + \frac{m}{2}$; $\alpha = P(H_1|H_0)$

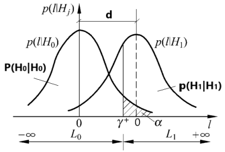
观测信号 $(\boldsymbol{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\})$

$(\boldsymbol{x}|H_0) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2), \quad (\boldsymbol{x}|H_1) \sim \mathcal{N}(A, \sigma^2)$

检验统计量 $l(x)$:

$(l|H_0) \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{N}\sigma^2), \quad (l|H_1) \sim \mathcal{N}(A, \frac{1}{N}\sigma^2)$

归一化后, $(l|H_j) \sim \mathcal{N}(0, 1)$



$p(l|H_j)(j = 0, 1)$: 假设 H_j 下观测信号的概率密度函数; $r^+ = \frac{\ln \eta}{d} + \frac{d}{2}$; $\alpha = P(H_1|H_0)$

判决表达式:

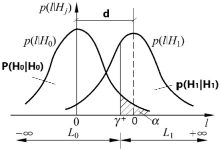
$$l(x) \overset{def}{=} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma^2 \ln \eta}{NA} + \frac{A}{2} \overset{def}{=} \gamma^+$$

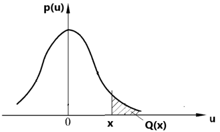
判决概率:(其中, 信噪比 $d^2 = \frac{NA^2}{\sigma^2}$)

$$P(H_1|H_0) = Q\left(\frac{\ln \eta}{d} + \frac{d}{2}\right), \qquad P(H_0|H_0) = 1 - Q\left(\frac{\ln \eta}{d} + \frac{d}{2}\right)$$

$$P(H_1|H_1) = Q\left(\frac{\ln \eta}{d} - \frac{d}{2}\right), \qquad P(H_0|H_1) = 1 - Q\left(\frac{\ln \eta}{d} - \frac{d}{2}\right)$$

贝叶斯检测性能分析小结





$p(l|H_j)(j=0,1)$: 假设 H_j 下观测信号的概率密度函数; $r^+ = \frac{\ln\eta}{d} + \frac{d}{2}$; $\alpha = P(H_1|H_0)$

$Q(x) = \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{u^2}{2})du.$
$Q(x)$ 是单调递减函数, 其反函数: $Q^{-1}[\bullet]$

因为 $P(H_1|H_0) = Q(\ln\eta/d + d/2) \implies \ln\eta/d = Q^{-1}[P(H_1|H_0)] - d/2$

这样有:

$$\begin{aligned} P(H_1|H_1) &= Q\left(\ln\eta/d - d/2\right) \\ &= Q[Q^{-1}[P(H_1|H_0)] - d/2 - d/2] = Q[Q^{-1}[P(H_1|H_0)] - d] \end{aligned}$$

这说明, 当给定 $P(H_1|H_0)$ 时, $P(H_1|H_1)$ 随功率信噪比 $(d^2 = NA^2/\sigma^2)$ 单调增加。

ex4

$$
\begin{aligned}
E[l|H_0] &= E\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i|H_0\right] = E\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(1+n)\right] \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E[(1+n)] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[E(1)+E(n)] \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[1+0] = 1 \\
Var[l|H_0] &= E\left[(l-E(l))^2\right] = E\left[\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(1+n)-E(l)\right)^2\right] \\
&= E\left[\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(1+n)-1\right)^2\right] \\
&= E\left[(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} n)^2\right] = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N} E[n^2] = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{N}
\end{aligned}
$$

ex4 推导 (1)

$$l = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(a+bn)$$

其中: $n \sim \mathcal{N}(0,\sigma_n^2)$, 即 $E[n]=0, Var[n] = E\left[(n-E[n])^2\right] = E[n^2] = \sigma_n^2$

$$\begin{aligned}
E[l] &= E\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(a+bn)\right] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}E[a+bn] \\
&= a + \frac{b}{N}\sum_{i=1}^{N}E[n] = a && \text{by } E[n]=0 \\
Var[l] &= E[(l-E(l))^2] = E\left[\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(a+bn)-a\right)^2\right] \\
&= E\left[\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(bn)\right)^2\right] = E\left[\left(\frac{b}{N}\sum_{i=1}^{N}(n)\right)^2\right] \\
&= (\frac{b}{N})^2\sum_{i=1}^{N}E[n^2] = (\frac{b}{N})N\sigma_n^2 = \frac{b^2\sigma_n^2}{N} && \text{by } E[n^2]=\sigma_n^2
\end{aligned}$$

ex4 推导 (2)

$$l = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(m+n)$$

其中: m 是常数, $n \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$, 即 $E[n] = 0, Var[n] = E\left[(n - E[n])^2\right] = E[n^2] = \sigma_n^2$

$$\begin{aligned}
E[l] &= E\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(m+n)\right] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}E[m+n] \\
&= m + \frac{b}{N}\sum_{i=1}^{N}E[n] && \text{by } E[n] = 0 \\
&= m \\
Var[l] &= E[(l - E(l))^2] = E\left[\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(m+n) - m\right)^2\right] \\
&= E\left[\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}n\right)^2\right] = E\left[\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}n\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}E[n^2] = \frac{1}{N^2}N\sigma_n^2 && \text{by } E[n^2] = \sigma_n^2 \\
&= \frac{\sigma_n^2}{N}
\end{aligned}$$

ex5 推导 (1)

两个假设下, 观测量 x 均服从高斯分布, $(x|H_0) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, $(x|H_1) \sim \mathcal{N}(A, \sigma^2)$.

$$p(x|H_0) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$p(x|H_1) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{(x-A)^2}{2\sigma^2}\right]$$

两个假设先验概率等概, 且 $c_{00} = c_{11} = 0, c_{10} = c_{01} = 1$, 所以似然比检验判别式为:

$$\lambda(x) = \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} = \exp\left(\frac{2Ax - A^2}{2\sigma^2}\right) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta = 1$$

化简得判决表达式:

$$x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{A}{2}$$

由于检验统计量 $l(x) = x$, 所以

$$p(l|H_0) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{l^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$p(l|H_1) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{(l-A)^2}{2\sigma^2}\right]$$

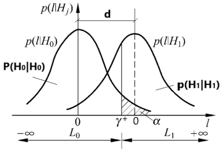
ex5 推导 (2)

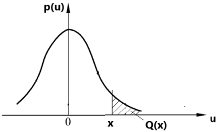
又因为检测判决门限 $\gamma = \frac{A}{2}$, 所以两种错误判决概率分别为

$$P(H_1|H_0) = \int_{\gamma}^{\infty} p(l|H_0)dl = \int_{\frac{A}{2}}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{l^2}{2\sigma^2}\right) dl$$

$$\overset{l=\sigma u}{=} \int_{\frac{A}{2\sigma}}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

$$= Q[\frac{A}{2\sigma}] = Q[\frac{d}{2}] \qquad \text{by } d^2 \overset{def}{=} A^2/\sigma^2$$





$p(l|H_j)(j=0,1)$: 假设 H_j 下观测信号的概率密度函数; $\alpha = P(H_1|H_0)$

$Q(x) = \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{u^2}{2})du.$
$Q(x)$ 是单调递减函数, 其反函数: $Q^{-1}[\bullet]$

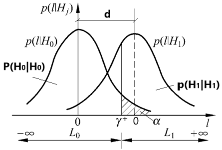
ex5 推导 (3)

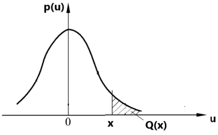
$$P(H_0|H_1) = \int_{-\infty}^{\gamma} p(l|H_1)dl = \int_{-\infty}^{\frac{A}{2}} \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{(l-A)^2}{2\sigma^2}\right) dl$$

$$\overset{l=A+\sigma u}{=} \int_{-\infty}^{-\frac{A}{2\sigma}} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

$$= 1 - \int_{-\frac{A}{2\sigma}}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

$$= 1 - Q[-\frac{A}{2\sigma}] = 1 - Q[-\frac{d}{2}] = Q[\frac{d}{2}] \qquad \text{by } d^2 \overset{def}{=} A^2/\sigma^2$$





ex5 推导 (4)

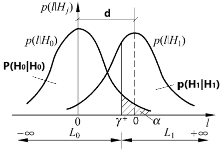
两种错误判决概率:

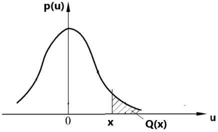
$$P(H_1|H_0) = Q[\frac{d}{2}], \qquad P(H_0|H_1) = Q[\frac{d}{2}]$$

其中, $d^2 \stackrel{def}{=} A^2/\sigma^2$。所以, 平均错误概率 P_e 为

$$\begin{aligned} P_e &= P(H_0)P(H_1|H_0) + P(H_1)P(H_0|H_1) \\ &= \frac{1}{2}Q[\frac{d}{2}] + \frac{1}{2}Q[\frac{d}{2}] = Q[\frac{d}{2}] \end{aligned}$$

$Q(x)$ 是单调递减函数, 信噪比 d 越高, 平均错误概率越小, 检测性能越好。





$p(l|H_j)(j=0,1)$: 假设 H_j 下观测信号的概率

$Q(x) = \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{u^2}{2}) du.$

最大后验概率准则

在贝叶斯准则中，当代价因子满足: $c_{10} - c_{00} = c_{01} - c_{11}$ 时

$$\lambda(\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x}|H_1)}{p(\mathbf{x}|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)}{P(H_1)} \implies P(H_1)p(\mathbf{x}|H_1) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} P(H_0)p(\mathbf{x}|H_0)$$

由条件概率公式，有

$$P(H_1|(\mathbf{x} \le X \le \mathbf{x} + d\mathbf{x})) = \frac{P((\mathbf{x} \le X \le \mathbf{x} + d\mathbf{x})|H_1)|P(H_1)}{P(\mathbf{x} \le X \le \mathbf{x} + d\mathbf{x})}$$

当 $d\mathbf{x}$ 很小时，有

$P((\mathbf{x} \le X \le \mathbf{x} + d\mathbf{x})|H_1) = p(\mathbf{x}|H_1)d\mathbf{x}, \quad P(\mathbf{x} \le X \le \mathbf{x} + d\mathbf{x}) = p(\mathbf{x})d\mathbf{x}$

$P(H_1|(\mathbf{x} \le X \le \mathbf{x} + d\mathbf{x})) = P(H_1|\mathbf{x})$，从而得

$$P(H_1|\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x}|H_1)d\mathbf{x}P(H_1)}{p(\mathbf{x})d\mathbf{x}} = \frac{p(\mathbf{x}|H_1)P(H_1)}{p(\mathbf{x})}$$

$$\implies P(H_1)p(\mathbf{x}|H_1) = p(\mathbf{x})P(H_1|\mathbf{x})$$

类似地，可得

$$P(H_0)p(\mathbf{x}|H_0) = p(\mathbf{x})P(H_0|\mathbf{x})$$

最大后验概率准则

$$P(H_1)p(\boldsymbol{x}|H_1) = p(\boldsymbol{x})P(H_1|\boldsymbol{x}), \quad P(H_0)p(\boldsymbol{x}|H_0) = p(\boldsymbol{x})P(H_0|\boldsymbol{x})$$

$$\lambda(\boldsymbol{x}) = \frac{p(\boldsymbol{x}|H_1)}{p(\boldsymbol{x}|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)}{P(H_1)} \implies P(H_1)p(\boldsymbol{x}|H_1) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} P(H_0)p(\boldsymbol{x}|H_0)$$

$$p(\boldsymbol{x})P(H_1|\boldsymbol{x}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} p(\boldsymbol{x})P(H_0|\boldsymbol{x})$$

$$P(H_1|\boldsymbol{x}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} P(H_0|\boldsymbol{x})$$

$P(H_j|\boldsymbol{x})(j=0,1)$ 表示已经获得观测量 $\boldsymbol{x}$ 的条件下，假设 H_j 为真时的概率，称为**后验概率**。

按照最小平均代价的贝叶斯准则在代价因子满足: $c_{10} - c_{00} = c_{01} - c_{11}$ 时，就成为**最大后验概率准则 (maximum a posteriori probability criterion)**

似然比检验的判别式:

$$\lambda(x) = \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

判决概率:

$$P_F = P(H_1|H_0) = \int_{\eta}^{\infty} p(\lambda|H_0)d\lambda$$

$$P_D = P(H_1|H_1) = \int_{\eta}^{\infty} p(\lambda|H_1)d\lambda$$

$$P_D = P_D = P(H_1|H_1) = \int_\eta^\infty p(\lambda|H_1)d\lambda = P_D(\eta)$$

$$P_F = P(H_1|H_0) = \int_\eta^\infty p(\lambda|H_0)d\lambda = P_F(\eta)$$

$$\frac{dP_D(\eta)}{d\eta} = -p(\eta|H_1)$$

$$\frac{dP_F(\eta)}{d\eta} = -p(\eta|H_0)$$

$$\text{by } \Phi'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \qquad (a \leq x \leq b)$$

$$\frac{dP_D(\eta)}{dP_F(\eta)} = \frac{-p(\eta|H_1)}{-p(\eta|H_0)} = \frac{p(\eta|H_1)}{p(\eta|H_0)}$$

$$
\begin{aligned}
P_D(\eta) &= P[(\lambda|H_1) \geq \eta] \\
&= \int_{\eta}^{\infty} p(\lambda|H_1)d\lambda \\
&= \int_{R_1}^{\infty} p(x|H_1)dx \\
&= \int_{R_1}^{\infty} \lambda p(x|H_0)dx \qquad\qquad \text{by } \lambda(x) = \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta \\
&= \int_{\eta}^{\infty} \lambda p(\lambda|H_0)d\lambda
\end{aligned}
$$

$$
\frac{dP_D(\eta)}{d\eta} = -\eta p(\eta|H_0)
$$

$$
\frac{dP_D(\eta)}{dP_F(\eta)} = \frac{-p(\eta|H_1)}{-p(\eta|H_0)} = \frac{-\eta p(\eta|H_0)}{-p(\eta|H_0)} = \eta
$$

H_1 含随机变量 m 的似然比检验的判别式:

$$\lambda(x)=\frac{p(x|m;H_1)}{p(x|H_0)}=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}p(x|m,H_1)p(m)dm}{p(x|H_0)}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\eta$$

$p(m)$ 未知

$$p(x|H_0) = (\frac{1}{2\pi\sigma_n^2})^{1/2}\exp(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2})$$

$$p(x|m;H_1) = (\frac{1}{2\pi\sigma_n^2})^{1/2}\exp(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma_n^2})$$

$$\lambda(x) = \frac{p(x|m;H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

$$\exp(\frac{2mx}{2\sigma_n^2} - \frac{m^2}{2\sigma_n^2}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

$$mx \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \sigma_n^2 \ln\eta + \frac{m^2}{2}$$

$$m_0 \le m \le m_1, m_0 > 0$$

$$mx \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \sigma_n^2 \ln\eta + \frac{m^2}{2}$$

$$l(x) = x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma_n^2}{m} \ln\eta + \frac{m}{2} \overset{def}{=} \gamma^+$$

$$\int_{\gamma^+}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{l^2}{2\sigma_n^2}\right) dl = \alpha$$

$$m_0 \le m \le m_1, m_1 < 0$$

$$mx \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \sigma_n^2 \ln\eta + \frac{m^2}{2}$$

$$l(x) = x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\lessgtr}} -\frac{\sigma_n^2}{|m|}\ln\eta - \frac{|m|}{2} \overset{def}{=} \gamma^-$$

$$\int_{-\infty}^{\gamma^-} \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{l^2}{2\sigma_n^2}\right) dl = \alpha$$

若 $m_0 > 0$, m 仅取正值, 则在 $P(H_1|H_0) = \alpha$ 的约束下, $P^{(m)}(H_1|H_1)$ 是最大的, 其一致最大功效检验成立;
若 $m_1 < 0$, m 仅取负值, 则在 $P(H_1|H_0) = \alpha$ 的约束下, $P^{(m)}(H_1|H_1)$ 也是最大的。

若 $m_0 < 0, m_1 > 0$, 即 m 取值可能为正或可能为负的情况下, 无论参量信号的统计检测, 按 m 仅取正值设计, 还是按 m 仅取负值设计, 都有可能在某些 m 值下, $P^{(m)}(H_1|H_1)$ 不满足最大的要求。
例如, 按 m 取正设计信号检测系统, 当 m 为正时, $P^{(m)}(H_1|H_1)$ 最大, 但当 m 为负时, $P^{(m)}(H_1|H_1)$ 可能最小。
因此, 这种情况下不能采用奈曼-皮尔逊准则来实际最佳检测系统。

若 $m_0 < 0, m_1 > 0$, 即 m 取值可能为正或可能为负, 奈曼-皮尔逊准则不能保证 $P^{(m)}(H_1|H_1)$ 最大要求。考虑把约束条件 $P(H_1|H_0) = \alpha$ 分成两个 $\alpha/2$, 假设 H_1 的判决域由两部分组成。判决表示式为

$$|x| \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \gamma$$

虽然双边检验比均值 m 假定为正确时的单边检验性能差,但是比均值 m 假定为错误时的单边检验性能要好的多。因此不失为一种好的折中方法。

广义似然比检验

似然函数

$$p(x|m;H_1) = (\frac{1}{2\pi\sigma_n^2})^{1/2}\exp(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma_n^2})$$

对 m 求偏导, 令结果等于零, 即

$$\frac{\partial \ln p(x|m;H_1)}{\partial m}\Big|_{m=\widehat{m}_{ml}} = 0$$

解得单次观测时,m 的最大似然估计量 $\widehat{m}_{ml} = x$, 于是有

$$p(x|\widehat{m}_{ml};H_1) = (\frac{1}{2\pi\sigma_n^2})^{1/2}\exp(-\frac{(x-\widehat{m}_{ml})^2}{2\sigma_n^2})\Big|_{\widehat{m}_{ml}=x} = (\frac{1}{2\pi\sigma_n^2})^{1/2}$$

广义似然比检验

$$p(x|H_0) = (\frac{1}{2\pi\sigma_n^2})^{1/2}\exp(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}) \qquad p(x|\widehat{m}_{ml};H_1) = (\frac{1}{2\pi\sigma_n^2})^{1/2}$$

代入广义似然比检验中,有

$$\lambda(x) = \frac{p(x|m;H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

$$\lambda(x) = \frac{(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2})^{1/2}}{(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2})^{1/2}\exp(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2})} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

化简得判决表示式

$$x^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 2\sigma_n^2\ln\eta \overset{def}{=} \gamma^2 \implies |x| \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \gamma$$

这正是前面讨论过的双边检验。只是前面是从奈曼-皮尔逊准则出发推导得到。而这里是从似然比检验的概念导出的,似然函数 $p(x|m;H_1)$ 中的信号参量 m 由其最大似然估计量 $\widehat{m}_{ml}$ 代换,所以是广义似然比检验。

欢迎批评指正！