信号检测与估值

段江涛

机电工程学院

西安电子科技大学
XIDIAN UNIVERSITY

2019 年 10 月

ch4. 信号波形的检测

ch4-1. 统计检测理论基本概念及贝叶斯准则

信号波形的检测基本内容

- 掌握随机过程正交级数展开的目的和方法;
- 掌握高斯白噪声中二元确知信号波形的检测;
- 了解 M 元确知信号波形的检测;
- 将第三章有关统计检测的理论,推广至噪声中信号波形的最佳检测问题;
- 基本任务:根据性能要求,设计与环境相匹配的接收机;
- 主要问题:最佳检测的判决表达式,检测性能分析以及最佳波形设计等。

二元数字通信系统波形检测模型

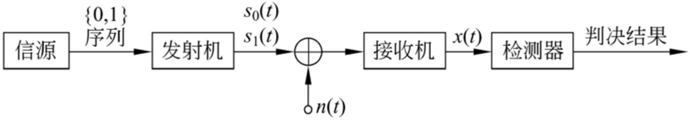


图4.1 二元数字通信系统波形检测模型

信源输出	发射信号
0	$s_0(t), nT \le t \le (n+1)T$
1	$s_1(t), nT \le t \le (n+1)T$

信号在信道传输中受到加性干扰

$$H_0: \quad x(t) = s_0(t) + n(t), \quad nT + t_0 \le t \le (n+1)T + t_0$$

$$H_1: \quad x(t) = s_1(t) + n(t), \quad nT + t_0 \le t \le (n+1)T + t_0$$

问题的提出

- 第 3 章,统计检测理论处理的观测信号是 N 维矢量
- 第 4 章,波形信号检测处理的是随机过程 $x(t)$

  如何在两者之间建立联系?

  能否利用第三章的方法,解决波形信号检测的问题?

比较上述两种不同的信号发现,如果能用一组随机变量来表示随机过程 $x(t)$,或者说将随机过程 $x(t)$ 与一组随机变量之间建立联系,则可直接应用第三章的结果解决波形信号检测的问题。

- 如何用一组随机变量来表示一个随机过程?

信号由正交级数展开,可用展开系数和正交集来表示该信号。

问题的提出

- 第 3 章,统计检测理论处理的观测信号是 N 维矢量
- 第 4 章,波形信号检测处理的是随机过程 $x(t)$

  如何在两者之间建立联系?

  能否利用第三章的方法,解决波形信号检测的问题?

比较上述两种不同的信号发现,如果能用一组随机变量来表示随机过程 $x(t)$,或者说将随机过程 $x(t)$ 与一组随机变量之间建立联系,则可直接应用第三章的结果解决波形信号检测的问题。

- 如何用一组随机变量来表示一个随机过程?

信号由正交级数展开,可用展开系数和正交集来表示该信号。

问题的提出

- 第 3 章,统计检测理论处理的观测信号是 N 维矢量
- 第 4 章,波形信号检测处理的是随机过程 $x(t)$

  如何在两者之间建立联系?

  能否利用第三章的方法,解决波形信号检测的问题?

比较上述两种不同的信号发现,如果能用一组随机变量来表示随机过程 $x(t)$,或者说将随机过程 $x(t)$ 与一组随机变量之间建立联系,则可直接应用第三章的结果解决波形信号检测的问题。

- 如何用一组随机变量来表示一个随机过程?

信号由正交级数展开,可用展开系数和正交集来表示该信号。

问题的提出

- 第 3 章,统计检测理论处理的观测信号是 N 维矢量
- 第 4 章,波形信号检测处理的是随机过程 $x(t)$

  如何在两者之间建立联系?

  能否利用第三章的方法,解决波形信号检测的问题?

比较上述两种不同的信号发现,如果能用一组随机变量来表示随机过程 $x(t)$,或者说将随机过程 $x(t)$ 与一组随机变量之间建立联系,则可直接应用第三章的结果解决波形信号检测的问题。

- 如何用一组随机变量来表示一个随机过程?

信号由正交级数展开,可用展开系数和正交集来表示该信号。

随机过程的正交级数展开

基本要求

- 掌握随机过程的卡亨南—洛维展开
- 理解白噪声条件下, 正交函数集的任意性
- 理解参量信号随机过程的正交级数展开

矢量正交与正交矢量集

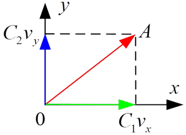
矢量正交

$\boldsymbol{V_x} = (V_{x1}, V_{x2}, V_{x3})$ 与 $\boldsymbol{V_y} = (V_{y1}, V_{y2}, V_{y3})$, 正交的定义: 其**内积**为 0。即

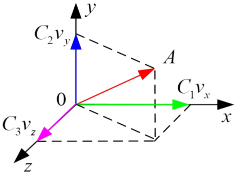
$$\boldsymbol{V_x V_y} = \sum_{i=1}^{3} v_{xi} v_{yi} = 0$$

正交矢量集

由两两正交的矢量组成的矢量集合称为**正交矢量集**。



(a) 平面矢量分解



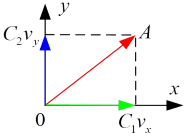
(b) 空间矢量分解

Example

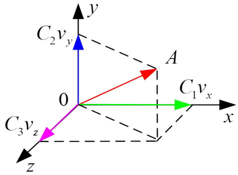
如三维空间中，以矢量 $\boldsymbol{v}_x = (2,0,0), \boldsymbol{v}_y = (0,2,0), \boldsymbol{v}_z = (0,0,2)$ 所组成的集合就是一个**正交矢量集**。

对于一个三维空间的矢量 $\boldsymbol{A} = (2,5,8)$，可以用一个三维正交矢量集 $\{\boldsymbol{v}_x, \boldsymbol{v}_y, \boldsymbol{v}_z\}$ 分量的线性组合表示。即

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{v}_x + \boldsymbol{2.5}\boldsymbol{v}_y + \boldsymbol{4}\boldsymbol{v}_z$$



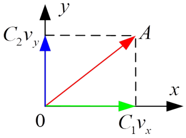
(a) 平面矢量分解



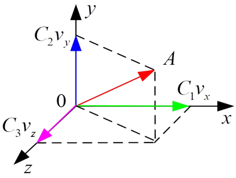
(b) 空间矢量分解

矢量空间正交分解的概念可推广到信号空间

1. 在信号空间找到若干个**相互正交**的信号作为基本信号;
2. 使得信号空间中**任意信号均可表示成它们的线性组合**。



(a) 平面矢量分解



(b) 空间矢量分解

完备正交函数集

三角函数集

$$\{1, \cos(n\omega t), \sin(n\omega t), \dots\}, n = 1, 2, \dots$$

就是在区间 $(t_0, t_0, T), T = 2\pi/\omega$ 上的**完备正交函数集**。

Example (傅里叶级数的三角形式)

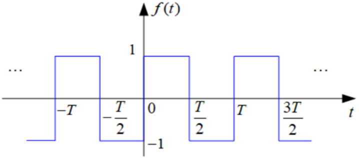
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

傅里叶系数:

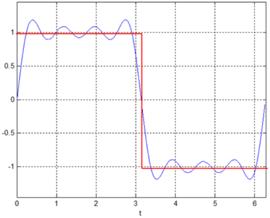
$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega t)dt, \quad b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\omega t)dt$$

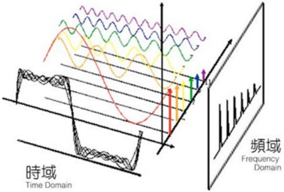
信号分解

1. 在信号空间找到若干个**相互正交**的信号作为基本信号;
2. 使得信号空间中**任意信号均可表示成它们的线性组合**。



$\Longrightarrow$





正交级数展开

Table 1: 正交级数展开

	二维矢量	信号 $f(t)$ 傅里叶展开	信号 $x(t)$ 正交级数
正交集	$\{\boldsymbol{v}_x, \boldsymbol{v}_y\}$	$\{1, \cos(n\omega t), \sin(n\omega t)\}$	$\{f_1(t), f_2(t), \ldots, f_k(t)\}$
展开系数 (正交投影)	C_k = 矢量 $\boldsymbol{A}$ 在第 k 个坐标的投影	$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega t)dt$ $b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\omega t)dt$	$x_k = \int_0^T x(t)f_k(t)dt$
线性表示	$\boldsymbol{A} = C_1\boldsymbol{v}_x + C_2\boldsymbol{v}_y$	$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(n\omega t)$	$x(t) = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N} x_k f_k(t)$

完备正交函数集

若实函数集 $\{f_k(t)\}(k=1,2,\cdots)$, 在 $(0,T)$ 时间内满足

$$\int_0^T f_k(t)f_j(t)dt = \begin{cases} 1, & j=k \\ 0, & j\neq k \end{cases}$$

不存在函数 $g(t)$, 满足

$$\int_0^T f_k(t)g(t)dt = 0, \quad k=1,2,\cdots$$

则称函数集 $\{f_k(t)\}(k=1,2,\cdots)$, 是**完备正交函数集**。

比照矢量正交的定义:

$$V_x V_y = \sum_{i=1}^{3} v_{xi}v_{yi} = 0$$

完备正交函数集

若实函数集 $\{f_k(t)\}(k=1,2,\cdots)$, 在 $(0,T)$ 时间内满足

$$\int_0^T f_k(t)f_j(t)dt = \begin{cases} 1, & j=k \\ 0, & j\neq k \end{cases}$$

不存在函数 $g(t)$, 满足

$$\int_0^T f_k(t)g(t)dt = 0, \quad k=1,2,\cdots$$

则称函数集 $\{f_k(t)\}(k=1,2,\cdots)$, 是**完备正交函数集**。

比照矢量正交的定义:

$$\boldsymbol{V_x V_y} = \sum_{i=1}^{3} v_{xi}v_{yi} = 0$$

确知信号的正交级数展开

$s(t)$ 是定义在 $(0,T)$ 时间内的确知信号, 且信号能量有限, 即

$$E_s = \int_0^T s^2(t)dt < \infty$$

该信号可用正交级数展开表示为:

$$s(t) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} s_k f_k(t)$$

其中, $f_k(t)$ 是正交函数集的第 k 个坐标函数, s_k 是信号 $s_k(t)$ 在第 k 个坐标函数上的正交投影, 成为信号 $s(t)$ 的第 k 个展开系数, 且

$$s_k = \int_0^T s(t)f_k(t)dt, \quad k = 1, 2, \cdots$$

确知信号的展开系数 $s_k(k = 1, 2, \cdots)$ 是确定的量, 而不是随机变量。

随机过程的正交级数展开

假设接收为信号: $x(t) = s(t) + n(t)$

其中 $s(t)$ 是确知信号, $n(t)$ 是零均值的平稳随机过程, 则接收信号 $x(t)$ 也是平稳随机过程。由于随机过程是由很多样本函数构成的集合, 而每个样本函数是时间的函数, 所以对给定的样本函数 $x(t)$, 可以进行正交级数展开

$$x(t) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} x_k f_k(t), \quad \text{而展开系数为: } x_k = \int_0^T x(t) f_k(t) dt, \quad k = 1, 2, \cdots$$

展开系数 x_k 为一组随机变量, 在平均意义上随机过程 $x(t)$ 展开的均方误差等于 0, 或者说 $\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} x_k f_k(t)$ 均方收敛于 $x(t)$, 即 x_k 满足

$$\lim_{N\to\infty} E\left[\left(x(t) - \sum_{k=1}^{N} x_k f_k(t)\right)^2\right] = 0$$

随机过程的正交级数展开

Notes

$$\textbf{随机过程:}\ x(t) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} x_k f_k(t)$$

$$\textbf{展开系数:}\ x_k = \int_0^T x(t) f_k(t) dt, \quad k = 1, 2, \ldots$$

随机过程 $x(t)$ 可以由上式求得的展开系数 x_k 来恢复,就是说 $x(t)$ 完全由展开系数 x_k 确定。注意,这里对随机过程 $x(t)$ 进行正交级数展开所用的正交函数集 $\{f_k(t)\}$ 并没有提出特别的要求,所以**展开系数** $x_k(k = 1, 2, \ldots)$ **之间可能是相关的随机变量**。

问题: 如何根据噪声干扰的特性,正确选择随机过程展开的正交函数集 $\{f_k(t)\}$,以使**展开系数** x_k **之间是互不相关的随机变量**。

随机过程的卡亨南—洛维展开: 预备公式

- 随机过程: $x(t) = s(t) + n(t)$
- $\{f_k(t)\}$ 是一组正交函数集, $k = 1, 2, \ldots$
- 随机过程 $x(t)$ 正交展开系数 x_k 是一个**随机变量**: $x_k = \int_0^T x(t) f_k(t) dt$
- 确知信号 $s(t)$ 正交展开系数 s_k 是一个**确定的量**: $s_k = \int_0^T s(t) f_k(t) dt$
- 确知信号 $s(t)$ 的展开系数 s_k 为确定的量,其均值就是本身:
  $E(s_k) = E\left[\int_0^T s(t) f_k(t) dt\right] = \int_0^T E[s(t)] f_k(t) dt = \int_0^T s(t) f_k(t) dt = s_k$
- 噪声 $n(t)$ 是一个**零均值**的平稳随机过程:
  - $E[n(t)] = 0$
  - $n(t)$ 的自相关函数只取决于时间间隔 $(t_k - t_j)$, 而与时间的起始时刻无关,
    $E[n(t_j) n(t_k)] = r_n(t_k - t_j)$

随机过程的卡亨南—洛维展开

目的:给出一种正交函数集的选择方法,以保证展开系数之间是互不相关的随机变量。 随机过程: $x(t) = s(t) + n(t)$, 正交函数集 $\{f_k(t)\}$, $x(t)$ 的各展开系数 x_k 是随机变量, 当随机过程 $x(t)$ 满足

$$\int_0^T x^2(t)dt < \infty$$

时, 其展开系数 x_k 的均值为

$$\begin{aligned}
E[x_k] &= E\left[\int_0^T x(t)f_k(t)dt\right] = E\left[\int_0^T (s(t)+n(t))f_k(t)dt\right] \\
&= E\left[\int_0^T s(t)f_k(t)dt + \int_0^T n(t)f_k(t)dt\right] = E\left[\int_0^T s(t)f_k(t)dt\right] + E\left[\int_0^T n(t)f_k(t)dt\right] \\
&= E\left[\int_0^T s(t)f_k(t)dt\right] + \int_0^T E[n(t)]f_k(t)dt \qquad (\text{by } E[n(t)] = 0) \\
&= E\left[\int_0^T s(t)f_k(t)dt\right] = E[s_k] = s_k \quad (\text{by 确知展开系数的均值就是本身})
\end{aligned}$$

随机过程的卡亨南—洛维展开

展开系数 x_j 与 x_k 协方差是在 t 时刻两个随机变量减去各自的均值后的乘积。

$$
\begin{aligned}
&E[(x_j - E(x_j))(x_k - E(x_k))] = E[(x_j - s_j)(x_k - s_k)] \\
&= E\left[\left(\int_0^T x(t) f_j(t) dt - s_j\right)\left(\int_0^T x(t) f_k(t) dt - s_k\right)\right] \\
&= E\left[\left(\int_0^T (s(t) + n(t)) f_j(t) dt - s_j\right)\left(\int_0^T (s(t) + n(t)) f_k(t) dt - s_k\right)\right] \\
&= E\left[\left(\int_0^T n(t) f_j(t) dt\right)\left(\int_0^T n(t) f_k(t) dt\right)\right] = E\left[\left(\int_0^T n(t) f_j(t) dt\right)\left(\int_0^T n(u) f_k(u) du\right)\right] \\
&= E\left[\int_0^T f_j(t)\left[\int_0^T n(t) n(u) f_k(u) du\right] dt\right] = \int_0^T f_j(t)\left[\int_0^T E[n(t) n(u)] f_k(u) du\right] dt \\
&= \int_0^T f_j(t)\left[\int_0^T r_n(t-u) f_k(u) du\right] dt \quad (\text{by } E[n(t_j) n(t_k)] = r_n(t_k - t_j))
\end{aligned}
$$

随机过程的卡亨南—洛维展开

希望 $x(t)$ 各展开系数 x_j 与 x_k 的协方差满足:

$$E[(x_j - E(x_j))(x_k - E(x_k))] = E[(x_j - s_j)(x_k - s_k)] = \lambda_k \delta_{jk}$$

式中 $\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & (j = k) \\ 0, & (j \neq k) \end{cases}$, λ_k 是展开系数 x_k 的方差, $k = 1, 2, \ldots$

这样,

当 $j \neq k$ 时, $E[(x_j - s_j)(x_k - s_k)] = 0$, 即展开式的各展开系数之间互不相关;

当 $j = k$ 时, $E[(x_j - s_j)(x_k - s_k)] = E[(x_j - s_k)^2] = \lambda_k$, 是展开系数 x_k 的方差。

随机过程的卡亨南-洛维展开

展开系数 x_j 与 x_k 协方差:

$$E[(x_j - s_j)(x_k - s_k)] = \int_0^T f_j(t) \left[\int_0^T r_n(t-u) f_k(u) du \right] dt$$

其中, $x(t) = s(t) + n(t)(0 \le t \le T), r_n(t-u) = E[n(t)n(u)]$ 是零均值平稳噪声过程 $n(t)$ 的自相关函数。

为保证 $E[(x_j - s_j)(x_k - s_k)] = \lambda_k \delta_{jk}$

$$\int_0^T r_n(t-u) f_k(u) du = \lambda_k f_k(t), \quad 0 \le t \le T$$

该式是齐次积分方程。该方程的解 $f_k(t)$ 就是正交函数集 $\{f_k(t)\}$ 的第 k 个坐标函数。

$$E[(x_j - s_j)(x_k - s_k)] = \lambda_k \int_0^T f_j(t) f_k(t) dt = \lambda_k \delta_{jk} \implies f_j(t) \text{与} f_k(t) \text{正交。}$$

白噪声条件下正交函数集的任意性 (1)

假设接收信号为 $x(t)=s(t)+n(t)$, $n(t)$ 是零均值, 功率谱密度为 $P_n(\omega)=N_0/2$ 的白噪声, 其自相关函数为: $r_n(t-u)=\frac{N_0}{2}\delta(t-u)$, (说明噪声自相关函数在 $t=u$ 时不为 0, 其他时刻都为 0, 自相关性最强)

对于任意正交函数集 $\{f_k(t)\}$, 展开系数 x_j 与 x_k 协方差:

$$
\begin{aligned}
E[(x_j-s_j)(x_k-s_k)] &= \int_0^T f_j(t)\left[\int_0^T r_n(t-u)f_k(u)du\right]dt \\
&= \frac{N_0}{2}\int_0^T f_j(t)\left[\int_0^T \delta(t-u)f_k(u)du\right]dt \\
&= \frac{N_0}{2}\int_0^T f_j(t)f_k(t)dt = \frac{N_0}{2}\delta_{jk}
\end{aligned}
$$

式中 $\delta_{jk}=\begin{cases}1, & (j=k)\\ 0, & (j\neq k)\end{cases}$, $\quad \delta(t-u)=\begin{cases}1, & (t=u)\\ 0, & (t\neq u)\end{cases}$

白噪声条件下正交函数集的任意性 (2)

假设接收信号为 $x(t) = s(t) + n(t)$, $n(t)$ 是零均值, 功率谱密度为 $P_n(\omega) = N_0/2$ 的白噪声,其自相关函数为:

$$r_n(t-u) = \frac{N_0}{2}\delta(t-u)$$

对于任意正交函数集 $\{f_k(t)\}$, 展开系数 x_j 与 x_k 协方差:

$$E[(x_j - s_j)(x_k - s_k)] = \int_0^T f_j(t)\left[\int_0^T r_n(t-u) f_k(u) du\right] dt = \frac{N_0}{2}\delta_{jk}$$

重要结论

当 $j \neq k$ 时,展开系数 x_j 与 x_k 协方差 =0。这说明,在 $n(t)$ 是白噪声的条件下,取任意正交函数集 $\{f_k(t)\}$ 对平稳随机过程 $x(t)$ 进行展开,其展开系数 $x_k(k = 1, 2, \ldots)$ 之间都是互不相关的。这就是**白噪声条件下正交函数集的任意性**。

参量随机信号时随机过程的正交级数展开

接收信号为含有参量 $\boldsymbol{\theta}$ 的平稳随机过程信号

$$x(t) = s(t;\boldsymbol{\theta}) + n(t), \quad 0 \le t \le T$$

把参量信号 $s(t;\boldsymbol{\theta})$ 看作以 $\boldsymbol{\theta}$ 为条件的信号, 正交函数集为 $\{f_k(t)\}$, 则 $x(t)$ 展开为

$$x(t) = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N} x_k f_k(t)$$

展开系数为

$$x_k = \int_0^T x(t)f_k(t)dt = \int_0^T [s(t;\boldsymbol{\theta}) + n(t)]f_k(t)dt = s_{k|\boldsymbol{\theta}} + n_k, \quad k = 1, 2, \cdots$$

$s_{k|\boldsymbol{\theta}}$ 是信号 $s(t;\boldsymbol{\theta})$ 以 $\boldsymbol{\theta}$ 为条件的展开系数, 即

$$s_{k|\boldsymbol{\theta}} = \int_0^T s(t;\boldsymbol{\theta})f_k(t)dt, \quad k = 1, 2, \cdots$$

参量随机信号时随机过程的正交级数展开

$x(t)$ 展开系数的条件均值为

$$E[x_k] = E[s_{k|\boldsymbol{\theta}} + n_k] = E[s_{k|\boldsymbol{\theta}}] = s_{k|\boldsymbol{\theta}}$$

为使展开系数互不相关，则

$$E[(x_j - s_{j|\boldsymbol{\theta}})(x_k - s_{k|\boldsymbol{\theta}})] = \lambda_k \delta_{jk}$$

若 $n(t)$ 的自相关函数为 $r_n(t-u)$ 时，x_k 互不相关的正交函数集 $\{f_k(t)\}$ 满足齐次方程

$$\int_0^T r_n(t-u) f_k(u) du = \lambda_k f_k(t), \quad 0 \le t \le T$$

在白噪声条件下，正交函数集仍具有任意性。

欢迎批评指正！