

信号检测与估值

段江涛

机电工程学院



2019 年 9 月

ch3. 信号检测与估计理论的基础知识

ch3-3. 贝叶斯准则—例题 (续) 及性能分析

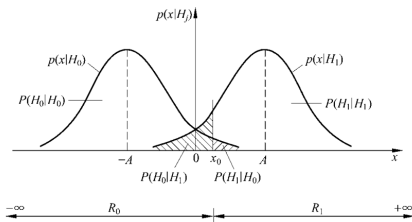
- 1 贝叶斯检测步骤回顾
- 2 贝叶斯准则例题 2
- 3 贝叶斯检测性能分析
- 4 贝叶斯准则例题 3,4

$$H_0 : x = -A + n, \quad H_1 : x = A + n$$

$$H_0 : x_k = -A + n_k, \quad H_1 : x_k = A + n_k$$

$$k = 1, 2, \dots, N, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$$

$$P(H_i|H_j) = \int_{R_i} p(\mathbf{x}|H_j) d\mathbf{x}$$



$$P(H_0|H_0) = \int_{R_0} p(\mathbf{x}|H_0) d\mathbf{x}, \quad P(H_1|H_0) = \int_{R_1} p(\mathbf{x}|H_0) d\mathbf{x}$$

$$P(H_0|H_1) = \int_{R_0} p(\mathbf{x}|H_1) d\mathbf{x}, \quad P(H_1|H_1) = \int_{R_1} p(\mathbf{x}|H_1) d\mathbf{x}$$

$$\mathbf{R} = R_0 \cup R_1, \quad R_0 \cap R_1 = \emptyset, \quad \int_{\mathbf{R}} p(\mathbf{x}|H_j) d\mathbf{x} = 1$$

$$P(H_0|H_0) + P(H_1|H_0) = \int_{R_0} p(\mathbf{x}|H_0) d\mathbf{x} + \int_{R_1} p(\mathbf{x}|H_0) d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{R}} p(\mathbf{x}|H_0) d\mathbf{x} = 1$$

$$P(H_0|H_1) + P(H_1|H_1) = \int_{R_0} p(\mathbf{x}|H_1) d\mathbf{x} + \int_{R_1} p(\mathbf{x}|H_1) d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{R}} p(\mathbf{x}|H_1) d\mathbf{x} = 1$$

贝叶斯检测步骤

贝叶斯判决准则

$$\frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{P(H_0)(c_{10} - c_{00})}{P(H_1)(c_{01} - c_{11})} \implies \lambda(x) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \eta$$

利用贝叶斯判决准则进行检测的基本步骤:

- ① 计算两个似然函数, 构建似然比 $\lambda(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)}$
- ② 根据两个假设的先验概率和代价因子, 计算判决门限 $\eta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P(H_0)(c_{10}-c_{00})}{P(H_1)(c_{01}-c_{11})}$
- ③ 利用上式, 形成贝叶斯检测基本表达式 $\lambda(x) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \eta$
- ④ 化简, 形成贝叶斯检测判决表达式。如对数似然比检验

$$\ln \lambda(x) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \ln \eta \implies l(x) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \gamma$$

贝叶斯准则例题 2

考虑以下信号检测问题：

$$H_0 : x_k = n_{0k}, \quad k = 1, 2, \dots, N$$

$$H_1 : x_k = n_{1k}, \quad k = 1, 2, \dots, N$$

其中 n_{0k} 是均值为零, 方差为 σ_0^2 的高斯随机变量, n_{1k} 是均值为零, 方差为 σ_1^2 的高斯随机变量, 且不同采样时刻的加性噪声之间是相互统计独立的。

求: 请给出上述问题的贝叶斯检测准则。

贝叶斯准则例题 2: 解

解: N 次独立采样, 样本为 $x_k (k = 1, 2, \dots, N)$:

$$H_0 : x_k = n_{0k} \quad k = 1, 2, \dots, N$$

$$H_1 : x_k = n_{1k} \quad k = 1, 2, \dots, N$$

步骤 1: 计算两个似然函数, 构建似然比

由于 n 是高斯分布随机变量, 因此在 H_0 假设下, 第 k 次采样值 x_k 服从高斯分布, 且均值为 0, 方差为 σ_0^2 ; 在 H_1 假设下, 第 k 次采样值 x_k 服从均值为 0, 方差为 σ_1^2 的高斯分布。

$$p(x_k|H_0) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_0^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x_k^2}{2\sigma_0^2}\right) \Rightarrow p(\mathbf{x}|H_0) = \prod_{k=1}^N \left(\frac{1}{2\pi\sigma_0^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x_k^2}{2\sigma_0^2}\right)$$

$$p(x_k|H_1) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_1^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x_k^2}{2\sigma_1^2}\right) \Rightarrow p(\mathbf{x}|H_1) = \prod_{k=1}^N \left(\frac{1}{2\pi\sigma_1^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x_k^2}{2\sigma_1^2}\right)$$

$$\lambda(\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x}|H_1)}{p(\mathbf{x}|H_0)} = \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^N \exp\left(\left(\frac{1}{2\sigma_0^2} - \frac{1}{2\sigma_1^2}\right) \sum_{k=1}^N x_k^2\right)$$

贝叶斯准则例题 2: 解续 (1)

步骤 2: 根据两个假设的先验概率和代价因子, 计算判决门限

$$\eta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P(H_0)(c_{10} - c_{00})}{P(H_1)(c_{01} - c_{11})}$$

步骤 3: 形成贝叶斯检测基本表达式

$$\lambda(\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x}|H_1)}{p(\mathbf{x}|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

$$\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^N \exp\left(\left(\frac{1}{2\sigma_0^2} - \frac{1}{2\sigma_1^2}\right) \sum_{k=1}^N x_k^2\right) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

步骤 4: 化简, 形成贝叶斯检测判决表达式

$$\left(\frac{1}{2\sigma_0^2} - \frac{1}{2\sigma_1^2}\right) \sum_{k=1}^N x_k^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \ln \eta - N \ln \frac{\sigma_0}{\sigma_1} \implies \frac{\sigma_1^2 - \sigma_0^2}{2\sigma_1^2 \sigma_0^2} \sum_{k=1}^N x_k^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \ln \eta - N \ln \frac{\sigma_0}{\sigma_1}$$

贝叶斯准则例题 2: 解续 (2)

步骤 4: 化简, 形成贝叶斯检测判决表达式

$$\frac{\sigma_1^2 - \sigma_0^2}{2\sigma_1^2\sigma_0^2} \sum_{k=1}^N x_k^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \ln \eta - N \ln \frac{\sigma_0}{\sigma_1}$$

经过上述化简, 信号检测的判决式由似然比检验的形式, 简化为检验统计量 $l(x)$ 与检测门限 γ 相比较的形式, 形成贝叶斯检测判决表达式:

$$\text{如果 } \sigma_1^2 > \sigma_0^2 \quad l(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{2\sigma_1^2\sigma_0^2}{\sigma_1^2 - \sigma_0^2} \left(\frac{\ln \eta}{N} - \ln \frac{\sigma_0}{\sigma_1} \right) \stackrel{\text{def}}{=} \gamma$$

$$\text{如果 } \sigma_1^2 < \sigma_0^2 \quad l(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k \underset{H_1}{\overset{H_0}{\geq}} \frac{2\sigma_1^2\sigma_0^2}{\sigma_1^2 - \sigma_0^2} \left(\frac{\ln \eta}{N} - \ln \frac{\sigma_0}{\sigma_1} \right) \stackrel{\text{def}}{=} \gamma$$

检验统计量 $l(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k$ 是观测信号 $x_k (k = 1, 2, \dots, N)$ 的求和取平均值的结
果, 即它是 $x_k (k = 1, 2, \dots, N)$ 的函数, 是一个随机变量。

两种假设下的观测量 $(l|H_0), (l|H_1)$ 也是服从高斯分布的随机变量。

贝叶斯检测性能分析

问题

问题 1: 贝叶斯检测准则是一种平均代价最小的判决准则,按照贝叶斯检测准则,能获得平均代价到底等于多少?

问题 2: 利用贝叶斯检测准则进行检测,平均检测错误概率如何计算?

贝叶斯检测性能分析

问题

问题 1: 贝叶斯检测准则是一种平均代价最小的判决准则,按照贝叶斯检测准则,能获得平均代价到底等于多少?

$$C = P(H_0)(c_{00}P(H_0|H_0) + c_{10}P(H_1|H_0)) + P(H_1)(c_{01}P(H_0|H_1) + c_{11}P(H_1|H_1))$$

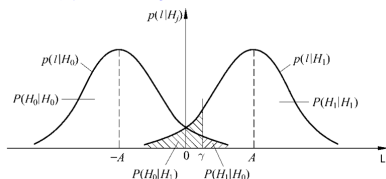
问题 2: 利用贝叶斯检测准则进行检测,平均检测错误概率如何计算?

$$P_e = P(H_0)P(H_1|H_0) + P(H_1)P(H_0|H_1)$$

上述两个问题的关键在于,如何计算四种事件的检测概率?

正确判决概率 ↑: $P(H_1|H_1), P(H_0|H_0)$

错误判决概率 ↓: $P(H_0|H_1), P(H_1|H_0)$



判决概率的计算

$$\lambda(\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x}|H_1)}{p(\mathbf{x}|H_0)} \quad \text{or} \quad \lambda(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{p(\bar{\mathbf{x}}|H_1)}{p(\bar{\mathbf{x}}|H_0)}$$

$$\Downarrow$$

$$\ln(\lambda(\mathbf{x})) = \ln\left(\frac{p(\mathbf{x}|H_1)}{p(\mathbf{x}|H_0)}\right) \quad \text{or} \quad \ln(\lambda(\bar{\mathbf{x}})) = \ln\left(\frac{p(\bar{\mathbf{x}}|H_1)}{p(\bar{\mathbf{x}}|H_0)}\right)$$

$$\Downarrow$$

最终统计量 $l(\mathbf{x})$ or $l(\bar{\mathbf{x}})$

根据最终的统计量来计算各种判决概率

判决概率的计算步骤

计算基本原则: 根据化简后的最简判决表达式进行计算。计算步骤如下:

- ① 推导贝叶斯检测准则的最简判决表达式。

$$l(\mathbf{x}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \gamma$$

- ② 根据最简判决表达式, 计算各种假设下, 统计量的概率密度函数。

$$p(l|H_0) \quad p(l|H_1)$$

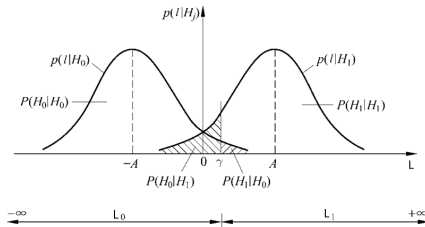
- ③ 计算判决概率

$$P(H_0|H_1) = \int_{-\infty}^{\gamma} p(l|H_1) dl$$

$$P(H_1|H_0) = \int_{\gamma}^{\infty} p(l|H_0) dl$$

$$P(H_1|H_1) = 1 - P(H_0|H_1)$$

$$P(H_0|H_0) = 1 - P(H_1|H_0)$$



贝叶斯准则例题 3

考虑以下信号检测问题：

$$H_0 : x_k = n_k, \quad k = 1, 2, \dots, N$$

$$H_1 : x_k = A + n_k, \quad k = 1, 2, \dots, N$$

其中 n_k 是均值为零，方差为 σ_n^2 的高斯随机变量，且不同采样时刻的加性噪声之间是相互统计独立的。请

- ① 请给出上述问题的贝叶斯检测准则。
- ② 当 $N = 1$ 时，计算判决概率 $P(H_1|H_1)$ 和 $P(H_1|H_0)$ 。
- ③ 当 $N > 1$ 时，计算判决概率 $P(H_1|H_1)$ 和 $P(H_1|H_0)$ 。

贝叶斯准则例题 3: 解

解: N 次独立采样, 样本为 $x_k (k = 1, 2, \dots, N)$:

$$H_0 : x_k = n_k \quad k = 1, 2, \dots, N$$

$$H_1 : x_k = A + n_k \quad k = 1, 2, \dots, N$$

步骤 1: 计算两个似然函数, 构建似然比

由于 n 是高斯分布随机变量, 因此在 H_0 假设下, 第 k 次采样值 x_k 服从高斯分布, 且均值为 0, 方差为 σ_n^2 ; 在 H_1 假设下, 第 k 次采样值 x_k 服从均值为 A , 方差为 σ_n^2 的高斯分布。

$$p(x_k|H_0) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x_k^2}{2\sigma_n^2}\right) \Rightarrow p(\mathbf{x}|H_0) = \prod_{k=1}^N \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x_k^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

$$p(x_k|H_1) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{(x_k - A)^2}{2\sigma_n^2}\right) \Rightarrow p(\mathbf{x}|H_1) = \prod_{k=1}^N \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{(x_k - A)^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

$$\lambda(\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x}|H_1)}{p(\mathbf{x}|H_0)} = \exp\left(\frac{\sum_{k=1}^N (x_k^2 - (x_k - A)^2)}{2\sigma_n^2}\right)$$

贝叶斯准则例题 3: 解续 (1)

步骤 2: 根据两个假设的先验概率和代价因子, 计算判决门限

$$\eta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P(H_0)(c_{10} - c_{00})}{P(H_1)(c_{01} - c_{11})}$$

步骤 3: 形成贝叶斯检测基本表达式

$$\lambda(\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x}|H_1)}{p(\mathbf{x}|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

$$\exp \left(\frac{\sum_{k=1}^N (x_k^2 - (x_k - A)^2)}{2\sigma_n^2} \right) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

步骤 4: 化简, 形成贝叶斯检测判决表达式

$$-NA^2 + \sum_{k=1}^N 2Ax_k \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 2\sigma_n^2 \ln \eta \implies \sum_{k=1}^N x_k \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma_n^2 \ln \eta}{A} + \frac{NA}{2}$$

$$l(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma_n^2 \ln \eta}{NA} + \frac{A}{2} \stackrel{\text{def}}{=} \gamma$$

贝叶斯准则例题 3: 解续 (2)

经过上述化简, 信号检测的判决式由似然比检验的形式, 简化为检验统计量 $l(x)$ 与检测门限 γ 相比较的形式, 形成贝叶斯检测判决表达式:

$$l(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{\sigma_n^2 \ln \eta}{NA} + \frac{A}{2} \stackrel{\text{def}}{=} \gamma$$

检验统计量 $l(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k$ 是观测信号 $x_k (k = 1, 2, \dots, N)$ 的求和取平均值的结果, 即它是 $x_k (k = 1, 2, \dots, N)$ 的函数, 是一个随机变量。

因为高斯随机变量的线性组合还是高斯随机变量, 所以两种假设下的观测量 $(l|H_0), (l|H_1)$ 也是服从高斯分布的随机变量。

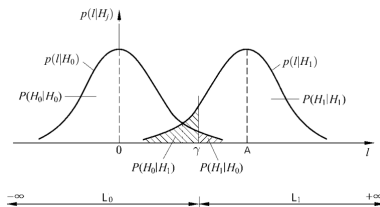
贝叶斯准则例题 3: 解续 (3)

N 次独立采样, 样本为 $x_k (k = 1, 2, \dots, N)$

$$\begin{aligned} n_k &\sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2) \\ H_0 : x_k &= n_k \\ H_1 : x_k &= A + n_k \\ (l|H_0) &\sim \mathcal{N}(0, \frac{\sigma_n^2}{N}) \\ (l|H_1) &\sim \mathcal{N}(A, \frac{\sigma_n^2}{N}) \end{aligned}$$

贝叶斯检测判决表达式:

$$l(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{\sigma_n^2 \ln \eta}{NA} + \frac{A}{2} \stackrel{\text{def}}{=} \gamma$$



贝叶斯准则例题 3: 性能分析—观测量 ($l|H_0$)

$$H_0 : x_k = n_k$$

$$H_1 : x_k = A + n_k$$

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma_n^2 \ln \eta}{NA} + \frac{A}{2} \stackrel{\text{def}}{=} \gamma \quad \text{统计量: } l(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k$$

假设 H_0 条件下, 统计量 $l(\mathbf{x})$ 为高斯分布, 均值和方差分别为

$$E[l|H_0] = E \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (x_k|H_0) \right] = E \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N n_k \right] = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N E[n_k] = 0$$

$$Var[l|H_0] = E[(l|H_0 - E(l|H_0))^2] = E \left[\left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N n_k \right)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^N E[n_k^2] = \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^N \sigma_n^2 = \frac{\sigma_n^2}{N}$$

因此, $(l|H_0) \sim \mathcal{N}(0, \frac{\sigma_n^2}{N})$

$$p(l|H_0) = \left(\frac{1}{2\pi Var[l|H_0]} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{(l - E[l|H_0])^2}{2Var[l|H_0]} \right) = \left(\frac{N}{2\pi \sigma_n^2} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{Nl^2}{2\sigma_n^2} \right)$$

贝叶斯准则例题 3: 性能分析—观测量 ($l|H_0$)

$$H_0 : x_k = n_k$$

$$H_1 : x_k = A + n_k$$

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{\sigma_n^2 \ln \eta}{NA} + \frac{A}{2} \stackrel{\text{def}}{=} \gamma \quad \text{统计量: } l(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k$$

$$p(l|H_0) = \left(\frac{N}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{Nl^2}{2\sigma_n^2} \right)$$

$$\begin{aligned} P(H_1|H_0) &= \int_{\gamma}^{\infty} p(l|H_0) dl \implies Q(x) = \int_x^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{u^2}{2} \right) du \\ &= \int_{\gamma}^{\infty} \left(\frac{N}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{Nl^2}{2\sigma_n^2} \right) dl \quad \text{by } l = \frac{\sigma_n u}{\sqrt{N}} \\ &= \int_{\frac{\sqrt{N}\gamma}{\sigma_n}}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{u^2}{2} \right) du \\ &= Q \left(\frac{\sqrt{N}\gamma}{\sigma_n} \right) = Q \left(\frac{\sqrt{N} \left(\frac{\sigma_n^2 \ln \eta}{NA} + \frac{A}{2} \right)}{\sigma_n} \right) \end{aligned}$$

贝叶斯准则例题 3: 性能分析—观测量 ($l|H_0$)

$$H_0 : x_k = n_k$$

$$H_1 : x_k = A + n_k$$

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{\sigma_n^2 \ln \eta}{NA} + \frac{A}{2} \stackrel{\text{def}}{=} \gamma$$

$$\text{统计量: } l(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k$$

$$P(H_1|H_0) = Q \left(\frac{\sqrt{N} \left(\frac{\sigma_n^2 \ln \eta}{NA} + \frac{A}{2} \right)}{\sigma_n} \right)$$

$$= Q \left(\frac{\sigma_n \ln \eta}{\sqrt{NA}} + \frac{\sqrt{NA}}{2\sigma_n} \right)$$

$$= Q \left(\frac{\ln \eta}{d} + \frac{d}{2} \right)$$

$$\text{by } d^2 = \frac{NA^2}{\sigma_n^2}$$

贝叶斯准则例题 3: 性能分析—观测量 ($l|H_1$)

$$\begin{aligned} H_0 : x_k &= n_k \\ H_1 : x_k &= A + n_k \end{aligned} \quad \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma_n^2 \ln \eta}{NA} + \frac{A}{2} \stackrel{\text{def}}{=} \gamma \quad \text{统计量: } l(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k$$

假设 H_1 条件下, 统计量 $l(\mathbf{x})$ 为高斯分布, 均值和方差分别为

$$\begin{aligned} E[l|H_1] &= E \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (x_k|H_1) \right] = E \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (A + n_k) \right] = A + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N E[n_k] = A \\ \text{Var}[l|H_1] &= E [(l|H_1 - E(l|H_1))^2] = E \left[\left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (A + n_k) - A \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^N E[n_k^2] = \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^N \sigma_n^2 = \frac{\sigma_n^2}{N} \end{aligned}$$

因此, $(l|H_1) \sim \mathcal{N}(A, \frac{\sigma_n^2}{N})$

$$p(l|H_1) = \left(\frac{1}{2\pi \text{Var}[l|H_1]} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{(l - E[l|H_1])^2}{2\text{Var}[l|H_1]} \right) = \left(\frac{N}{2\pi \sigma_n^2} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{N(l - A)^2}{2\sigma_n^2} \right)$$

贝叶斯准则例题 3: 性能分析—观测量 ($l|H_1$)

$$H_0 : x_k = n_k$$

$$H_1 : x_k = A + n_k$$

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{\sigma_n^2 \ln \eta}{NA} + \frac{A}{2} \stackrel{\text{def}}{=} \gamma \quad \text{统计量: } l(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k$$

$$p(l|H_1) = \left(\frac{N}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{N(l-A)^2}{2\sigma_n^2} \right)$$

$$\begin{aligned} P(H_1|H_1) &= \int_{\gamma}^{\infty} p(l|H_1) dl \implies Q(x) = \int_x^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{u^2}{2} \right) du \\ &= \int_{\gamma}^{\infty} \left(\frac{N}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{N(l-A)^2}{2\sigma_n^2} \right) dl \quad \text{by } l = \frac{\sigma_n u}{\sqrt{N}} + A \\ &= \int_{\frac{\sqrt{N}(\gamma-A)}{\sigma_n}}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{u^2}{2} \right) du \\ &= Q \left(\frac{\sqrt{N}(\gamma-A)}{\sigma_n} \right) = Q \left(\frac{\sqrt{N} \left(\frac{\sigma_n^2 \ln \eta}{NA} - \frac{A}{2} \right)}{\sigma_n} \right) \end{aligned}$$

贝叶斯准则例题 3: 性能分析—观测量 ($l|H_1$)

$$H_0 : x_k = n_k$$

$$H_1 : x_k = A + n_k$$

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{\sigma_n^2 \ln \eta}{NA} + \frac{A}{2} \stackrel{\text{def}}{=} \gamma$$

$$\text{统计量: } l(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k$$

$$P(H_1|H_1) = Q \left(\frac{\sqrt{N} \left(\frac{\sigma_n^2 \ln \eta}{NA} - \frac{A}{2} \right)}{\sigma_n} \right)$$

$$= Q \left(\frac{\sigma_n \ln \eta}{\sqrt{NA}} - \frac{\sqrt{NA} A}{2\sigma_n} \right)$$

$$= Q \left(\frac{\ln \eta}{d} - \frac{d}{2} \right)$$

$$\text{by } d^2 = \frac{NA^2}{\sigma_n^2}$$

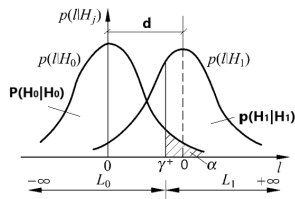
贝叶斯准则例题 3(小结 1)

N 次独立采样, 样本为 $x_k (k = 1, 2, \dots, N)$

$$n_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$$

$$H_0 : x_k = n_k \quad (l|H_0) \sim \mathcal{N}(0, \frac{\sigma_n^2}{N})$$

$$H_1 : x_k = A + n_k \quad (l|H_1) \sim \mathcal{N}(A, \frac{\sigma_n^2}{N})$$



检验统计量 $l(\mathbf{x})$, 归一化后, $(l|H_j) \sim \mathcal{N}(0, 1)$

$p(l|H_j) (j = 0, 1)$: 假设 H_j 下观测信号的概率
密度函数; $r^+ = \frac{\ln \eta}{d} + \frac{d}{2}$; $\alpha = P(H_1|H_0)$

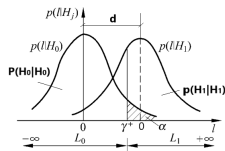
$$\text{判决表达式:} \quad l(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{\sigma^2 \ln \eta}{NA} + \frac{A}{2} \stackrel{\text{def}}{=} \gamma$$

判决概率: (式中, 信噪比 $d^2 = \frac{NA^2}{\sigma_n^2}$)

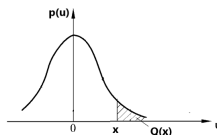
$$P(H_1|H_0) = Q\left(\frac{\ln \eta}{d} + \frac{d}{2}\right), \quad P(H_0|H_0) = 1 - Q\left(\frac{\ln \eta}{d} + \frac{d}{2}\right)$$

$$P(H_1|H_1) = Q\left(\frac{\ln \eta}{d} - \frac{d}{2}\right), \quad P(H_0|H_1) = 1 - Q\left(\frac{\ln \eta}{d} - \frac{d}{2}\right)$$

贝叶斯准则例题 3(小结 2)



$p(l|H_j) (j = 0, 1)$: 假设 H_j 下观测信号的概率密度函数; $r^+ = \frac{\ln \eta}{d} + \frac{d}{2}$; $\alpha = P(H_1|H_0)$



$$Q(x) = \int_x^\infty \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du.$$

$Q(x)$ 是单调递减函数, 其反函数: $Q^{-1}[\bullet]$

因为 $P(H_1|H_0) = Q(\ln \eta/d + d/2) \implies \ln \eta/d = Q^{-1}[P(H_1|H_0)] - d/2$

这样有:

$$\begin{aligned} P(H_1|H_1) &= Q(\ln \eta/d - d/2) \\ &= Q[Q^{-1}[P(H_1|H_0)] - d/2 - d/2] = Q[Q^{-1}[P(H_1|H_0)] - d] \end{aligned}$$

这说明, 当给定 $P(H_1|H_0)$ 时, $P(H_1|H_1)$ 随功率信噪比 ($d^2 = NA^2/\sigma_n^2$) 单调增加。

另一方面, 采样次数 $N \uparrow \implies d \uparrow, p(l|H_0), p(l|H_1)$ 的间距 $d \uparrow$, 检测性能 \uparrow 。

贝叶斯准则例题 4(作业)

考虑以下信号检测问题：

$$H_0 : x_k = 1 + n_k, \quad k = 1, 2, \dots, N$$

$$H_1 : x_k = -1 + n_k, \quad k = 1, 2, \dots, N$$

其中 n_k 是均值为零, 方差为 $\sigma_n^2 = 1/2$ 的高斯随机变量, 且不同采样时刻的加性噪声之间是相互统计独立的。

若两种假设先验等概的, 且代价因子为 $c_{00} = 1, c_{10} = 4, c_{11} = 2, c_{01} = 3$ 。

请给出上述问题的贝叶斯检测准则和平均代价 C 。

贝叶斯准则例题 4: 解

步骤 1: 计算两个似然函数, 构建似然比 $\lambda(\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x}|H_1)}{p(\mathbf{x}|H_0)}$

步骤 2: 根据两个假设的先验概率和代价因子, 计算判决门限 $\eta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P(H_0)(c_{10}-c_{00})}{P(H_1)(c_{01}-c_{11})}$

步骤 3: 形成贝叶斯检测基本表达式 $\lambda(\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x}|H_1)}{p(\mathbf{x}|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$

步骤 4: 化简, 形成贝叶斯检测判决表达式 $l(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \stackrel{\text{def}}{=} \gamma$

步骤 5: 性能分析

计算判决概率: $P(H_1|H_0), P(H_0|H_0), P(H_0|H_1), P(H_1|H_1)$, 其中,

$$\text{信噪比: } d^2 = \frac{4N}{\sigma_n^2}, \quad Q(x) = \int_x^\infty \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

计算平均代价:

$$C = P(H_0)(c_{00}P(H_0|H_0) + c_{10}P(H_1|H_0)) + P(H_1)(c_{01}P(H_0|H_1) + c_{11}P(H_1|H_1))$$

欢迎批评指正！