信号检测与估值

段江涛
机电工程学院
西安电子科技大学
XIDIAN UNIVERSITY

2019 年 7 月

主要内容

Theorem

如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则积分上限函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$$

在 [a,b] 上具有导数，并且它的导数是

$$\Phi'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)\qquad(a\le x\le b)$$

Theorem

如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$$

就是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数。

Theorem

如果函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一个原函数,则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

似然比检验的判别式:

$$\lambda(x) = \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

判决概率:

$$P_F = P(H_1|H_0) = \int_{\eta}^{\infty} p(\lambda|H_0)d\lambda$$

$$P_D = P(H_1|H_1) = \int_{\eta}^{\infty} p(\lambda|H_1)d\lambda$$

$$P_D = P_D = P(H_1|H_1) = \int_{\eta}^{\infty} p(\lambda|H_1)d\lambda = P_D(\eta)$$

$$P_F = P(H_1|H_0) = \int_{\eta}^{\infty} p(\lambda|H_0)d\lambda = P_F(\eta)$$

$$\frac{dP_D(\eta)}{d\eta} = -p(\eta|H_1)$$

$$\frac{dP_F(\eta)}{d\eta} = -p(\eta|H_0)$$

$$\text{by } \Phi'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \qquad (a \le x \le b)$$

$$\frac{dP_D(\eta)}{dP_F(\eta)} = \frac{-p(\eta|H_1)}{-p(\eta|H_0)} = \frac{p(\eta|H_1)}{p(\eta|H_0)}$$

$$
\begin{aligned}
P_D(\eta) &= P[(\lambda|H_1) \geq \eta] \\
&= \int_{\eta}^{\infty} p(\lambda|H_1)d\lambda \\
&= \int_{R_1}^{\infty} p(x|H_1)dx \\
&= \int_{R_1}^{\infty} \lambda p(x|H_0)dx \qquad\qquad \text{by } \lambda(x) = \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta \\
&= \int_{\eta}^{\infty} \lambda p(\lambda|H_0)d\lambda
\end{aligned}
$$

$$
\frac{dP_D(\eta)}{d\eta} = -\eta p(\eta|H_0)
$$

$$
\frac{dP_D(\eta)}{dP_F(\eta)} = \frac{-p(\eta|H_1)}{-p(\eta|H_0)} = \frac{-\eta p(\eta|H_0)}{-p(\eta|H_0)} = \eta
$$

H_1 含随机变量 m 的似然比检验的判别式：

$$\lambda(x)=\frac{p(x|m;H_1)}{p(x|H_0)}=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}p(x|m,H_1)p(m)dm}{p(x|H_0)}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\eta$$

$p(m)$ 未知

$$p(x|H_0) = (\frac{1}{2\pi\sigma_n^2})^{1/2}\exp(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2})$$

$$p(x|m;H_1) = (\frac{1}{2\pi\sigma_n^2})^{1/2}\exp(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma_n^2})$$

$$\lambda(x) = \frac{p(x|m;H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

$$\exp(\frac{2mx}{2\sigma_n^2} - \frac{m^2}{2\sigma_n^2}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

$$mx \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \sigma_n^2 \ln\eta + \frac{m^2}{2}$$

$$m_0 \le m \le m_1, m_0 > 0$$

$$mx \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \sigma_n^2 \ln \eta + \frac{m^2}{2}$$

$$l(x) = x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma_n^2}{m} \ln \eta + \frac{m}{2} \overset{def}{=} \gamma^+$$

$$\int_{\gamma^+}^{\infty} (\frac{1}{2\pi\sigma_n^2})^{1/2} \exp(-\frac{l^2}{2\sigma_n^2}) dl = \alpha$$

$$m_0 \leq m \leq m_1, m_1 < 00$$

$$mx \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \sigma_n^2 \ln \eta + \frac{m^2}{2}$$

$$l(x) = x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\lessgtr}} -\frac{\sigma_n^2}{|m|} \ln \eta - \frac{|m|}{2} \overset{def}{=} \gamma^-$$

$$\int_{-\infty}^{\gamma^-} (\frac{1}{2\pi\sigma_n^2})^{1/2} \exp(-\frac{l^2}{2\sigma_n^2}) dl = \alpha$$

若 $m_0 > 0$, m 仅取正值, 则在 $P(H_1|H_0) = \alpha$ 的约束下, $P^{(m)}(H_1|H_1)$ 是最大的, 其一致最大功效检验成立;
若 $m_1 < 0$, m 仅取负值, 则在 $P(H_1|H_0) = \alpha$ 的约束下, $P^{(m)}(H_1|H_1)$ 也是最大的。

若 $m_0 < 0, m_1 > 0$, 即 m 取值可能为正或可能为负的情况下, 无论参量信号的统计检测,按 m 仅取正值设计,还是按 m 仅取负值设计,都有可能在某些 m 值下, $P^{(m)}(H_1|H_1)$ 不满足最大的要求。

例如,按 m 取正设计信号检测系统,当 m 为正时,$P^{(m)}(H_1|H_1)$ 最大, 但当 m 为负时, $P^{(m)}(H_1|H_1)$ 可能最小。

因此, 这种情况下不能采用奈曼-皮尔逊准则来实际最佳检测系统。

若 $m_0 < 0, m_1 > 0$, 即 m 取值可能为正或可能为负, 奈曼-皮尔逊准则不能保证 $P^{(m)}(H_1|H_1)$ 最大要求。考虑把约束条件 $P(H_1|H_0) = \alpha$ 分成两个 $\alpha/2$, 假设 H_1 的判决域由两部分组成。判决表示式为

$$|x| \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \gamma$$

虽然双边检验比均值 m 假定为正确时的单边检验性能差,但是比均值 m 假定为错误时的单边检验性能要好的多。因此不失为一种好的折中方法。

广义似然比检验

似然函数

$$p(x|m;H_1)=(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2})^{1/2}\exp(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma_n^2})$$

对 m 求偏导, 令结果等于零, 即

$$\frac{\partial\ln p(x|m;H_1)}{\partial m}|_{m=\widehat{m}_{ml}}=0$$

解得单次观测时,m 的最大似然估计量 $\widehat{m}_{ml}=x$, 于是有

$$p(x|\widehat{m}_{ml};H_1)=(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2})^{1/2}\exp(-\frac{(x-\widehat{m}_{ml})^2}{2\sigma_n^2})|_{\widehat{m}_{ml}=x}=(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2})^{1/2}$$

广义似然比检验

$$p(x|H_0) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right) \qquad p(x|\widehat{m}_{ml}; H_1) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2}$$

代入广义似然比检验中，有

$$\lambda(x) = \frac{p(x|m;H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

$$\lambda(x) = \frac{\left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2}}{\left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

化简得判决表示式 $x^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 2\sigma_n^2 \ln\eta \overset{def}{=} \gamma^2 \implies |x| \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \gamma$

这正是前面讨论过的双边检验。只是前面是从奈曼-皮尔逊准则出发推导得到。而这里是从似然比检验的概念导出的，似然函数 $p(x|m;H_1)$ 中的信号参量 m 由其最大似然估计量 $\widehat{m}_{ml}$ 代换，所以是广义似然比检验。

欢迎批评指正！