

# 信号检测与估值

段江涛

机电工程学院



2019 年 10 月

### ch3-3. 派生贝叶斯准则 (2), 信号统计检测的性能及 M 元信号的统计检测

- 1 极小极大化准则 (续)
- 2 奈曼—皮尔逊准则
- 3 信号统计检测的性能
- 4 利用接收机工作特性,各种判决准则的分析和计算
- 5 M 元信号的统计检测

# 极小极大化准则

给定  $P_{1g}$  的条件下, 平均代价  $C(P_1, P_{1g})$  是先验概率  $P_1$  的线性函数, 若  $P_{1g} \neq P_1$ , 平均代价  $C(P_1, P_{1g})$  大于最小平均代价。

为避免产生过分大的代价, 需要猜测一种先验概率  $P_{1g}^*$ , 使得平均代价  $C(P_1, P_{1g}^*)$  不依赖于信源的先验概率  $P_1$ 。

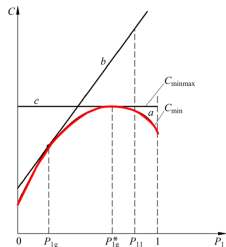
$$C(P_1, P_{1g}) = c_{00} + (c_{10} - c_{00})P_F(P_{1g}) + P_1[(c_{11} - c_{00}) + (c_{01} - c_{11})P_M(P_{1g}) - (c_{10} - c_{00})P_F(P_{1g})]$$

$$\left. \frac{\partial C(P_1, P_{1g})}{\partial P_1} \right|_{P_{1g}=P_{1g}^*} = 0$$

## 极小化极大方程

$$(c_{11} - c_{00}) + (c_{01} - c_{11})P_M(P_{1g}^*) - (c_{10} - c_{00})P_F(P_{1g}^*) = 0$$

**平均代价:**  $C(P_{1g}^*) = c_{00} + (c_{10} - c_{00})P_F(P_{1g}^*)$



# 极小极大化准则

## 极小化极大方程

$$(c_{11} - c_{00}) + (c_{01} - c_{11})P_M(P_{1g}^*) - (c_{10} - c_{00})P_F(P_{1g}^*) = 0$$

## 平均代价:

$$C(P_{1g}^*) = c_{00} + (c_{10} - c_{00})P_F(P_{1g}^*)$$

### 正确判决不付出代价

$$c_{11} = c_{00} = 0$$

$$c_{01}P_M(P_{1g}^*) = c_{10}P_F(P_{1g}^*)$$

### 正确判决不付出代价, 错误判决代价因子相同

$$c_{11} = c_{00} = 0$$

$$c_{10} = c_{01} = 1$$

$$P_M(P_{1g}^*) = P_F(P_{1g}^*)$$

# 极小化极大准则的基本步骤

- ① 计算两个似然函数, 构建似然比  $\lambda(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)}$
- ② 假设判决门限  $\eta$ , 构建贝叶斯检测基本表达式
- ③ 化简成最简形式  $l(x) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \gamma(\eta)$
- ④ 利用极小化极大准则, 确定最终判决门限  $\gamma(\eta)$

# 贝叶斯准则例题 6

在闭启键控通信系统中,两个假设下的观测信号模型为:

$$H_0 : x = n$$

$$H_1 : x = A + n$$

其中, 噪声  $n$  是均值为零, 方差为  $\sigma_n^2$  的高斯噪声, 若两个假设的先验概率未知, 且  $c_{00} = c_{11} = 0, c_{01} = c_{10} = 1$ 。

采用极小化极大准则, 试确定检测门限, 并求最小平均错误概率。

# 贝叶斯准则例题 6: 解

解: 观测信号模型为:

$$H_0 : x = n$$

$$H_1 : x = A + n$$

## 步骤 1: 计算两个似然函数, 构建似然比

由于  $n$  是高斯分布随机变量, 因此在  $H_0$  假设下, 检测统计量  $x$  服从高斯分布, 且均值为 0, 方差为  $\sigma_n^2$ ; 在  $H_1$  假设下, 检测统计量  $x$  服从均值为  $A$ , 方差为  $\sigma_n^2$  的高斯分布。

$$p(x|H_0) = \left( \frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{1/2} \exp \left( -\frac{x^2}{2\sigma_n^2} \right) \quad p(x|H_1) = \left( \frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{1/2} \exp \left( -\frac{(x-A)^2}{2\sigma_n^2} \right)$$

$$\lambda(x) = \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} = \exp \left( \frac{(x^2 - (x-A)^2)}{2\sigma_n^2} \right) = \exp \left( \frac{A}{\sigma_n^2} x - \frac{A^2}{2\sigma_n^2} \right)$$

# 贝叶斯准则例题 6: 解 (续 1)

步骤 2: 假设判决门限  $\eta$ , 构建贝叶斯检测基本表达式

$$\lambda(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \eta$$

$$\lambda(x) = \exp \left( \frac{A}{\sigma_n^2} x - \frac{A^2}{2\sigma_n^2} \right)$$

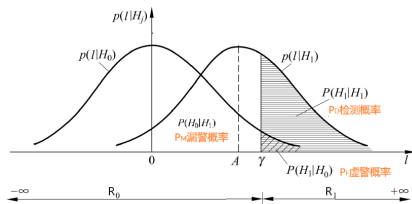
步骤 3: 化简成最简形式

$$x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{\sigma_n^2 \ln \eta}{A} + \frac{A}{2} \stackrel{\text{def}}{=} \gamma$$



# 贝叶斯准则例题 6: 解(续 2)

## 步骤 4: 利用极小化极大准则, 确定最终判决门限 $\gamma$



$$\begin{aligned}
 P_F \stackrel{\text{def}}{=} P(H_1|H_0) &= \int_{\gamma}^{\infty} p(x|H_0) dx \Rightarrow Q(x) = \int_x^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \\
 &= \int_{\gamma}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right) dx \quad \text{by } x = \sigma_n u \\
 &= \int_{\frac{\gamma}{\sigma_n}}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \\
 &= Q\left(\frac{\gamma}{\sigma_n}\right)
 \end{aligned}$$



# 贝叶斯准则例题 6: 解(续 4)

正确判决不付出代价, 错误判决代价因子相同时的极小化极大方程

$$c_{11} = c_{00} = 0$$

$$c_{10} = c_{01} = 1$$

$$P_M(P_{1g}^*) = P_F(P_{1g}^*)$$

$$P_F \stackrel{\text{def}}{=} P(H_1|H_0) = Q\left(\frac{\gamma}{\sigma_n}\right)$$

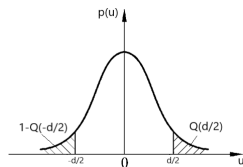
$$\begin{aligned} P_M \stackrel{\text{def}}{=} P(H_0|H_1) &= 1 - Q\left(\frac{\gamma - A}{\sigma_n}\right) \\ &= Q\left(-\frac{\gamma - A}{\sigma_n}\right) \end{aligned}$$

$$Q(x) = \int_x^\infty \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

$$Q\left(\frac{d}{2}\right) = 1 - Q\left(-\frac{d}{2}\right)$$

根据上述极小化极大方程,有

$$Q\left(\frac{\gamma}{\sigma_n}\right) = Q\left(-\frac{\gamma - A}{\sigma_n}\right) \Rightarrow \gamma = \frac{A}{2}$$



## 贝叶斯准则例题 6: 解 (续 5)

本例, 按照极小化极大准则, 平均错误概率为:

$$P_e = P(H_1)P(H_0|H_1) + P(H_0)P(H_1|H_0)$$

$$= P(H_1)P_M + P(H_0)P_F$$

$$= [P(H_1) + P(H_0)]P_F$$

$$= P_F = P(H_1|H_0)$$

$$= Q\left(\frac{\gamma}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right)$$

$$= Q\left(\frac{d}{2}\right)$$

$$\text{by 本例的极小化极大方程 } P_M(P_{1g}^*) = P_F(P_{1g}^*)$$

$$\text{by } P(H_1) + P(H_0) = 1, P_F \stackrel{\text{def}}{=} P(H_1|H_0)$$

$$\text{by } \gamma = \frac{A}{2}$$

$$\text{by 功率信噪比 } d^2 = \frac{A^2}{\sigma^2}$$

例题 5, 按照按照平均错误概率准则, 平均错误概率同上。

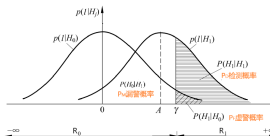
因此, 先验等概条件下的最小平均错误准则等价于正确判决为 0, 错误判决代价为 1 时的极小化极大准则。

1998, 1999, 2000, 2001, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2021, 2022, 2023, 2024, 2025, 2026, 2027, 2028, 2029, 2030, 2031, 2032, 2033, 2034, 2035, 2036, 2037, 2038, 2039, 2040, 2041, 2042, 2043, 2044, 2045, 2046, 2047, 2048, 2049, 2050, 2051, 2052, 2053, 2054, 2055, 2056, 2057, 2058, 2059, 2060, 2061, 2062, 2063, 2064, 2065, 2066, 2067, 2068, 2069, 2070, 2071, 2072, 2073, 2074, 2075, 2076, 2077, 2078, 2079, 2080, 2081, 2082, 2083, 2084, 2085, 2086, 2087, 2088, 2089, 2090, 2091, 2092, 2093, 2094, 2095, 2096, 2097, 2098, 2099, 2100, 2101, 2102, 2103, 2104, 2105, 2106, 2107, 2108, 2109, 2110, 2111, 2112, 2113, 2114, 2115, 2116, 2117, 2118, 2119, 2120, 2121, 2122, 2123, 2124, 2125, 2126, 2127, 2128, 2129, 2130, 2131, 2132, 2133, 2134, 2135, 2136, 2137, 2138, 2139, 2140, 2141, 2142, 2143, 2144, 2145, 2146, 2147, 2148, 2149, 2150, 2151, 2152, 2153, 2154, 2155, 2156, 2157, 2158, 2159, 2160, 2161, 2162, 2163, 2164, 2165, 2166, 2167, 2168, 2169, 2170, 2171, 2172, 2173, 2174, 2175, 2176, 2177, 2178, 2179, 2180, 2181, 2182, 2183, 2184, 2185, 2186, 2187, 2188, 2189, 2190, 2191, 2192, 2193, 2194, 2195, 2196, 2197, 2198, 2199, 2200, 2201, 2202, 2203, 2204, 2205, 2206, 2207, 2208, 2209, 2210, 2211, 2212, 2213, 2214, 2215, 2216, 2217, 2218, 2219, 2220, 2221, 2222, 2223, 2224, 2225, 2226, 2227, 2228, 2229, 2230, 2231, 2232, 2233, 2234, 2235, 2236, 2237, 2238, 2239, 2240, 2241, 2242, 2243, 2244, 2245, 2246, 2247, 2248, 2249, 2250, 2251, 2252, 2253, 2254, 2255, 2256, 2257, 2258, 2259, 2260, 2261, 2262, 2263, 2264, 2265, 2266, 2267, 2268, 2269, 2270, 2271, 2272, 2273, 2274, 2275, 2276, 2277, 2278, 2279, 2280, 2281, 2282, 2283, 2284, 2285, 2286, 2287, 2288, 2289, 2290, 2291, 2292, 2293, 2294, 2295, 2296, 2297, 2298, 2299, 2300, 2301, 2302, 2303, 2304, 2305, 2306, 2307, 2308, 2309, 2310, 2311, 2312, 2313, 2314, 2315, 2316, 2317, 2318, 2319, 2320, 2321, 2322, 2323, 2324, 2325, 2326, 2327, 2328, 2329, 2330, 2331, 2332, 2333, 2334, 2335, 2336, 2337, 2338, 2339, 2340, 2341, 2342, 2343, 2344, 2345, 2346, 2347, 2348, 2349, 2350, 2351, 2352, 2353, 2354, 2355, 2356, 2357, 2358, 2359, 2360, 2361, 2362, 2363, 2364, 2365, 2366, 2367, 2368, 2369, 2370, 2371, 2372, 2373, 2374, 2375, 2376, 2377, 2378, 2379, 2380, 2381, 2382, 2383, 2384, 2385, 2386, 2387, 2388, 2389, 2390, 2391, 2392, 2393, 2394, 2395, 2396, 2397, 2398, 2399, 2400, 2401, 2402, 2403, 2404, 2405, 2406, 2407, 2408, 2409, 2410, 2411, 2412, 2413, 2414, 2415, 2416, 2417, 2418, 2419, 2420, 2421, 2422, 2423, 2424, 2425, 2426, 2427, 2428, 2429, 2430, 2431, 2432, 2433, 2434, 2435, 2436, 2437, 2438, 2439, 2440, 2441, 2442, 2443, 2444, 2445, 2446, 2447, 2448, 2449, 2450, 2451, 2452, 2453, 2454, 2455, 2456, 2457, 2458, 2459, 2460, 2461, 2462, 2463, 2464, 2465, 2466, 2467, 2468, 2469, 2470, 2471, 2472, 2473, 2474, 2475, 2476, 2477, 2478, 2479, 2480, 2481, 2482, 2483, 2484, 2485, 2486, 2487, 2488, 2489, 2490, 2491, 2492, 2493, 2494, 2495, 2496, 2497, 2498, 2499, 2500, 2501, 2502, 2503, 2504, 2505, 2506, 2507, 2508, 2509, 2510, 2511, 2512, 2513, 2514, 2515, 2516, 2517, 2518, 2519, 2520, 2521, 2522, 2523, 2524, 2525, 2526, 2527, 2528, 2529, 2530, 2531, 2532, 2533, 2534, 2535, 2536, 2537, 2538, 2539, 2540, 2541, 2542, 2543, 2544, 2545, 2546, 2547, 2548, 2549, 2550, 2551, 2552, 2553, 2554, 2555, 2556, 2557, 2558, 2559, 2560, 2561, 2562, 2563, 2564, 2565, 2566, 2567, 2568, 2569, 2570, 2571, 2572, 2573, 2574, 2575, 2576, 2577, 2578, 2579, 2580, 2581, 2582, 2583, 2584, 2585, 2586, 2587, 2588, 2589, 2590, 2591, 2592, 2593, 2594, 2595, 2596, 2597, 2598, 2599, 2600, 2601, 2602, 2603, 2604, 2605, 2606, 2607, 2608, 2609, 2610, 2611, 2612, 2613, 2614, 2615, 2616, 2617, 2618, 2619, 2620, 2621, 2622, 2623, 2624, 2625, 2626, 2627, 2628, 2629, 2630, 2631, 2632, 2633, 2634, 2635, 2636, 2637, 2638, 2639, 2640, 2641, 2642, 2643, 2644, 2645, 2646, 2647, 2648, 2649, 2650, 2651, 2652, 2653, 2654, 2655, 2656, 2657, 2658, 2659, 2660, 2661, 2662, 2663, 2664, 2665, 2666, 2667, 2668, 2669, 2670, 2671, 2672, 2673, 2674, 2675, 2676, 2677, 2678, 2679, 26

1. *Journal of Management Studies*, 1990, 27, 1, 1-13.

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \text{def } f(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \\ x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \end{pmatrix}$$

在虚警概率  $P_F \equiv P(H_1|H_0) \equiv \alpha$  约束条件下 使正确





# 奈曼—皮尔逊准则的推导

在  $P(H_1|H_0) = \alpha$  约束条件下, 使正确判决概率  $P(H_1|H_1)$  最大的准则

$$\Updownarrow \quad (\text{由于 } P(H_0|H_1) + P(H_1|H_1) = 1)$$

在  $P(H_1|H_0) = \alpha$  约束条件下, 使错误判决概率  $P(H_0|H_1)$  最小的准则

利用拉格朗日乘子  $\mu(\mu \geq 0)$ , 构建目标函数

$$J = P(H_0|H_1) + \mu [P(H_1|H_0) - \alpha]$$

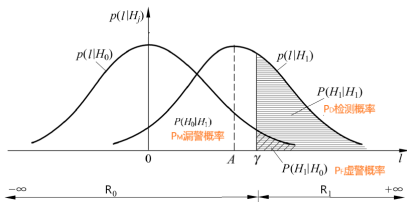
若  $P(H_1|H_0) = \alpha$ ,  $J$  达到最小时,  $P(H_0|H_1)$  也达到最小。

漏警概率  $P(H_0|H_1)$  + 检测概率  $P(H_1|H_1) = 1$ ,

虚警概率  $P(H_1|H_0) = \alpha$

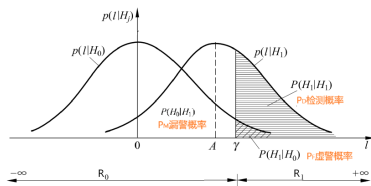
当  $J$  最小  $\Rightarrow$  漏警概率  $(P(H_0|H_1))$  最小

$\Rightarrow$  检测概率  $P(H_1|H_1)$  最大。



# 奈曼—皮尔逊准则的推导(续)

$$\begin{aligned}
 J &= P(H_0|H_1) + \mu[P(H_1|H_0) - \alpha] \\
 &= \int_{R_0} p(x|H_1)dx + \mu \left[ \int_{R_1} p(x|H_0)dx - \alpha \right] \\
 &= \int_{R_0} p(x|H_1)dx + \mu \left[ 1 - \int_{R_0} p(x|H_0)dx - \alpha \right] \\
 &= \mu(1 - \alpha) + \int_{R_0} [p(x|H_1) - \mu p(x|H_0)] dx
 \end{aligned}$$



把使被积函数取负值的观测值  $x$  值划分给  $R_0$  区域, 而把其余的观测值  $x$  值划分给  $R_1$ , 即可保证平均代价最小, 从而使  $J$  值最小。

$$p(x|H_1) < \mu p(x|H_0)$$

判决  $H_0$  假设成立

$$p(x|H_1) \geq \mu p(x|H_0)$$

判决  $H_1$  假设成立



# 奈曼—皮尔逊准则

## 奈曼—皮尔逊准则

$$\lambda(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \mu$$

其中, 判决门限有下式确定

$$P(H_1|H_0) = \int_{R_1} p(x|H_0) dx = \int_{\mu}^{\infty} p(\lambda|H_0) d\lambda = \alpha$$

求出的  $\mu$  必满足  $\mu \geq 0$

## 贝叶斯判决准则

$$\lambda(x) = \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{P(H_0)(c_{10} - c_{00})}{P(H_1)(c_{01} - c_{11})} \stackrel{\text{def}}{=} \eta$$

贝叶斯准则的特例, 当  $P(H_1)(c_{01} - c_{11}) = 1, P(H_0)(c_{10} - c_{00}) = \mu$  时, 就成为奈曼—皮尔逊准则。

# 奈曼—皮尔逊准则的求解步骤

- ① 计算两个似然函数, 构建似然比  $\lambda(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\geq} \mu$
- ② 假设判决门限  $\mu$ , 构建贝叶斯检测基本表达式
- ③ 化简
- ④ 根据统计量计算  $p(l|H_0)$  和  $p(l|H_1)$
- ⑤ 在  $P(H_1|H_0) = \int_{R_1} p(l|H_0)dl = \alpha$  约束下, 计算判决门限

# 贝叶斯准则例题 7

在闭启键控通信系统中,两个假设下的观测信号模型为:

$$H_0 : x = n$$

$$H_1 : x = 1 + n$$

其中, 噪声  $n$  是均值为零, 方差为 1 的高斯噪声。

试构造在  $P(H_1|H_0) = 0.1$  条件下的奈曼—皮尔逊接收机

# 贝叶斯准则例题 7: 解

解: 观测信号模型为:

$$H_0 : x = n$$

$$H_1 : x = 1 + n$$

## 步骤 1: 计算两个似然函数, 构建似然比

由于  $n$  是高斯分布随机变量, 因此在  $H_0$  假设下, 检测统计量  $x$  服从高斯分布, 且均值为 0, 方差为  $\sigma_n^2$ ; 在  $H_1$  假设下, 检测统计量  $x$  服从均值为 1, 方差为  $\sigma_n^2$  的高斯分布。

$$p(x|H_0) = \left( \frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{1/2} \exp \left( -\frac{x^2}{2\sigma_n^2} \right) \quad p(x|H_1) = \left( \frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{1/2} \exp \left( -\frac{(x-1)^2}{2\sigma_n^2} \right)$$

$$\lambda(x) = \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} = \exp \left( \frac{(x^2 - (x-1)^2)}{2\sigma_n^2} \right) = \exp \left( \frac{1}{\sigma_n^2}x - \frac{1}{2\sigma_n^2} \right)$$

# 贝叶斯准则例题 7: 解 (续 1)

步骤 2: 假设判决门限  $\mu$ , 构建贝叶斯检测基本表达式

$$\lambda(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \mu$$

$$\lambda(x) = \exp \left( \frac{1}{\sigma_n^2} x - \frac{1}{2\sigma_n^2} \right)$$

步骤 3: 化简成最简形式

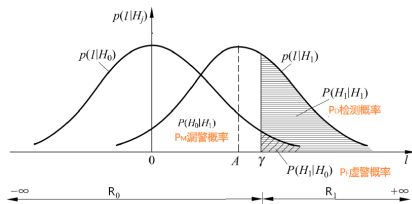
$$x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \sigma_n^2 \ln \mu + \frac{1}{2} \stackrel{\text{def}}{=} \gamma$$

$$\text{by } \sigma_n = 1$$

$$x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \ln \mu + \frac{1}{2} \stackrel{\text{def}}{=} \gamma$$

# 贝叶斯准则例题 7: 解(续 2)

## 步骤 4: 利用奈曼—皮尔逊准则, 确定最终判决门限 $\gamma$



$$\begin{aligned}
 P_F \stackrel{\text{def}}{=} P(H_1|H_0) &= \int_{\gamma}^{\infty} p(x|H_0) dx \implies Q(x) = \int_x^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \\
 &= \int_{\gamma}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right) dx \quad \text{by } x = \sigma_n u \\
 &= \int_{\frac{\gamma}{\sigma_n}}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \\
 &= Q\left(\frac{\gamma}{\sigma_n}\right) = Q(\gamma) \quad \text{by } \sigma_n = 1
 \end{aligned}$$

# 贝叶斯准则例题 7: 解 (续 3)

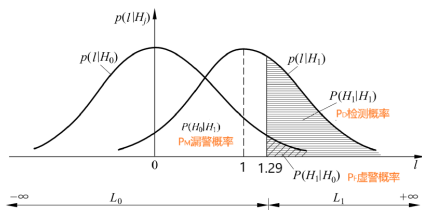
$$x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \ln \mu + \frac{1}{2} \stackrel{\text{def}}{=} \gamma$$

$$P(H_1|H_0) = Q(\gamma)$$

在  $P(H_1|H_0) = 0.1$  条件下, 确定判决门限

由  $Q(\gamma) = 0.1$ , 解得  $\gamma = 1.29$ ,

由  $\ln \mu + \frac{1}{2} = \gamma$ , 解得  $\mu = 2.2$



$$\begin{aligned} P_D \stackrel{\text{def}}{=} P(H_1|H_1) &= \int_{\gamma}^{\infty} p(x|H_1) dx \implies Q(x) = \int_x^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \\ &= \int_{\gamma}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{2\sigma_n^2}\right) dx \quad \text{by } x = \sigma_n u + 1 \\ &= \int_{\frac{\gamma-1}{\sigma_n}}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \\ &= Q\left(\frac{\gamma-1}{\sigma_n}\right) = Q(\gamma-1) = Q(0.29) = 0.386 \end{aligned}$$

# 贝叶斯准则以及派生贝叶斯准则(1)

贝叶斯检测, 给定各种判决代价因子, 且已知各假设的先验概率条件下, 使平均代价最小的检测准则。

$$\frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)(c_{10} - c_{00})}{P(H_1)(c_{01} - c_{11})}$$

$$c_{00} = c_{11} = 0$$

$$c_{01} = c_{10} = 1$$

最小平均  
错误概率  
判决准则

$$\frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$$

等概

最大似然  
判决准则

$$p(x|H_1) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} p(x|H_0)$$

$$c_{10} - c_{00} = c_{01} - c_{11}$$

$$P(H_1|x) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} P(H_0|x)$$

最大后验  
概率检测  
准则

符合最小平均错误概率准则的一定符合最大后验概率检测准则, 反之不成立。



# 贝叶斯准则以及派生贝叶斯准则 (2)

贝叶斯检测, 给定各种判决代价因子, 且已知各假设的先验概率条件下, 使平均代价最小的检测准则。

$$\frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{P(H_0)(c_{10} - c_{00})}{P(H_1)(c_{01} - c_{11})}$$

信源先验  
概率未知



极小化极大准则

按照似然比检测形式构建基本表达式, 并在  $P_M(P_{lg}^*) = P_F(P_{lg}^*)$  的约束下计算最终判决门限。

$$c_{11} = c_{00} = 0 \quad c_{10} = c_{01} = 1$$

信源先验概率及  
代价因子均未知



奈曼皮尔逊准则

按照似然比检测形式构建基本表达式, 并在  $P(H_1|H_0) = \int_{R_1} p(l|H_0)dl = \alpha$  的约束下计算最终判决门限。

# 贝叶斯准则以及派生贝叶斯准则求解步骤

分析某种检测方法得性能时,需要根据化简后得最简判决表示式进行。

计算步骤:

- ① 推导某种检测方法下获得的最简判决表达式  $l(x) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \gamma$
- ② 根据最简表示式, 计算各种假设下, 统计量的概率密度函数

$$p(l|H_0) \quad p(l|H_1)$$

- ③ 计算判决概率

$$P(H_0|H_1) \quad P(H_1|H_0)$$

# 信号统计检测的性能

## 基本要求

- 理解判决概率的不同计算方法
- 理解似然比检测的接收机工作特性
- 利用接收机工作特性求解不同检测准则的解

# 信号统计检测的性能

## ● 判决概率计算

$$\lambda(\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x}|H_1)}{p(\mathbf{x}|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \eta$$

$$P(H_1|H_0) = \int_{\eta}^{\infty} p(\lambda|H_0)d\lambda$$

$$P(H_1|H_1) = \int_{\eta}^{\infty} p(\lambda|H_1)d\lambda$$

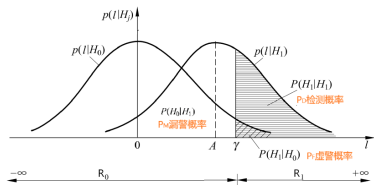
$$l(\mathbf{x}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \gamma$$

$$P(H_1|H_0) = \int_{\gamma}^{\infty} p(l|H_0)dl$$

$$P(H_1|H_1) = \int_{\gamma}^{\infty} p(l|H_1)dl$$

## ● 似然比检测的接收机工作特性

根据  $P_D = P(H_1|H_1)$  和  $P_F = P(H_1|H_0)$  分析似然比检测的接收机工作特性



# 信号统计检测的性能

## ● 判决概率计算

$$\lambda(\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x}|H_1)}{p(\mathbf{x}|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \eta$$

$$P(H_1|H_0) = \int_{\eta}^{\infty} p(\lambda|H_0)d\lambda$$

$$P(H_1|H_1) = \int_{\eta}^{\infty} p(\lambda|H_1)d\lambda$$

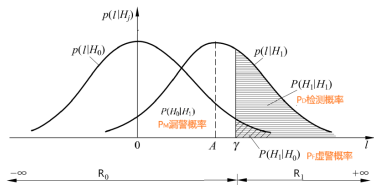
$$l(\mathbf{x}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \gamma$$

$$P(H_1|H_0) = \int_{\gamma}^{\infty} p(l|H_0)dl$$

$$P(H_1|H_1) = \int_{\gamma}^{\infty} p(l|H_1)dl$$

## ● 似然比检测的接收机工作特性

根据  $P_D = P(H_1|H_1)$  和  $P_F = P(H_1|H_0)$  分析似然比检测的接收机工作特性



# 例如, 雷达信号检测

$$H_0 : x_k = n_k$$

$$H_1 : x_k = A + n_k$$

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma_n^2 \ln \eta}{NA} + \frac{A}{2} \stackrel{\text{def}}{=} \gamma \quad \text{统计量: } l(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k$$

假设  $H_0$  条件下, 统计量  $l(x)$  为高斯分布,  $(l|H_0) \sim \mathcal{N}(0, \frac{\sigma_n^2}{N})$

$$p(l|H_0) = \left( \frac{N}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{1/2} \exp \left( -\frac{Nl^2}{2\sigma_n^2} \right)$$

假设  $H_1$  条件下, 统计量  $l(x)$  为高斯分布,  $(l|H_1) \sim \mathcal{N}(A, \frac{\sigma_n^2}{N})$

$$p(l|H_1) = \left( \frac{N}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{1/2} \exp \left( -\frac{N(l-A)^2}{2\sigma_n^2} \right)$$

# 虚警概率 $P_F = P(H_1|H_0)$

$$\begin{aligned}
 P(H_1|H_0) &= \int_{\gamma}^{\infty} p(l|H_0)dl \Rightarrow Q(x) = \int_x^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \\
 &= \int_{\gamma}^{\infty} \left(\frac{N}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{Nl^2}{2\sigma_n^2}\right) dl \quad \text{by } l = \frac{\sigma_n u}{\sqrt{N}} \\
 &= \int_{\frac{\sqrt{N}\gamma}{\sigma_n}}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \\
 &= Q\left(\frac{\sqrt{N}\gamma}{\sigma_n}\right) \\
 &= Q\left(\frac{\sqrt{N}\left(\frac{\sigma_n^2 \ln \eta}{NA} + \frac{A}{2}\right)}{\sigma_n}\right) \\
 &= Q\left(\frac{\sigma_n \ln \eta}{\sqrt{NA}} + \frac{\sqrt{NA}}{2\sigma_n}\right) \\
 &= Q\left(\frac{\ln \eta}{d} + \frac{d}{2}\right)
 \end{aligned}$$

$$\text{by } \gamma = \frac{\sigma_n^2 \ln \eta}{NA} + \frac{A}{2}$$

$$\text{by } d^2 = \frac{NA^2}{\sigma_n^2}$$

# 检测概率 $P_D = P(H_1|H_1)$

$$\begin{aligned}
 P(H_1|H_1) &= \int_{\gamma}^{\infty} p(l|H_1)dl \Rightarrow Q(x) = \int_x^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \\
 &= \int_{\gamma}^{\infty} \left(\frac{N}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{N(l-A)^2}{2\sigma_n^2}\right) dl \quad \text{by } l = \frac{\sigma_n u}{\sqrt{N}} + A \\
 &= \int_{\frac{\sqrt{N}(\gamma-A)}{\sigma_n}}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \\
 &= Q\left(\frac{\sqrt{N}(\gamma-A)}{\sigma_n}\right) \quad \text{by } \gamma = \frac{\sigma_n^2 \ln \eta}{NA} + \frac{A}{2} \\
 &= Q\left(\frac{\sqrt{N}\left(\frac{\sigma_n^2 \ln \eta}{NA} - \frac{A}{2}\right)}{\sigma_n}\right) \\
 &= Q\left(\frac{\sigma_n \ln \eta}{\sqrt{NA}} - \frac{\sqrt{NA}}{2\sigma_n}\right) \quad \text{by } d^2 = \frac{NA^2}{\sigma_n^2} \\
 &= Q\left(\frac{\ln \eta}{d} - \frac{d}{2}\right)
 \end{aligned}$$



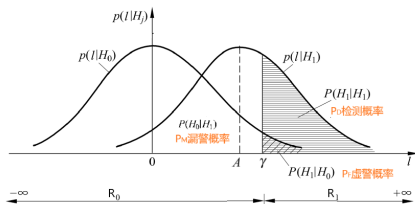
# 判决域与判决概率

$N$  次独立采样, 样本为  $x_k (k = 1, 2, \dots, N)$

$$n_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$$

$$H_0 : x_k = n_k \quad (l|H_0) \sim \mathcal{N}(0, \frac{\sigma_n^2}{N})$$

$$H_1 : x_k = A + n_k \quad (l|H_1) \sim \mathcal{N}(A, \frac{\sigma_n^2}{N})$$



检验统计量  $l(\mathbf{x})$ , 归一化后,  $(l|H_j) \sim \mathcal{N}(0, 1)$

判决表达式: 
$$l(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma^2 \ln \eta}{NA} + \frac{A}{2} \stackrel{\text{def}}{=} \gamma$$

判决概率: (式中, 信噪比  $d^2 = \frac{NA^2}{\sigma_n^2}$ )

虚警概率:  $P_F \stackrel{\text{def}}{=} P(H_1|H_0) = Q\left(\frac{\ln \eta}{d} + \frac{d}{2}\right)$

检测概率:  $P_D \stackrel{\text{def}}{=} P(H_1|H_1) = Q\left(\frac{\ln \eta}{d} - \frac{d}{2}\right)$

# 接收机工作特性

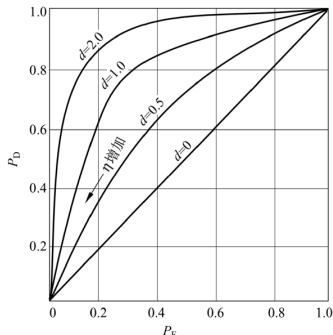
- 错误判别概率 (虚警概率):

$$P_F \stackrel{\text{def}}{=} P(H_1|H_0) = Q\left(\frac{\ln \eta}{d} + \frac{d}{2}\right)$$

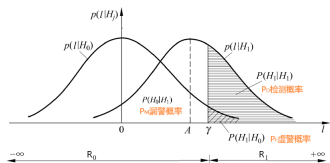
- 正确判别概率 (检测概率):

$$P_D \stackrel{\text{def}}{=} P(H_1|H_1) = Q\left(\frac{\ln \eta}{d} - \frac{d}{2}\right)$$

- 不同的信噪比  $d$ , 有不同的  $P_D \sim P_F$  曲线
- 似然比函数  $\lambda(x)$  超过无穷大门限  $\eta = +\infty$  是不可能事件,  $(P_D, P_F) = (0, 0)$
- $\lambda(x) \geq 0, \eta = 0$  是必然事件,  $(P_D, P_F) = (1, 1)$
- 当  $\lambda(x)$  是连续随机变量时,  $\eta \uparrow \Rightarrow (P_D, P_F) \downarrow$



接收机工作特性





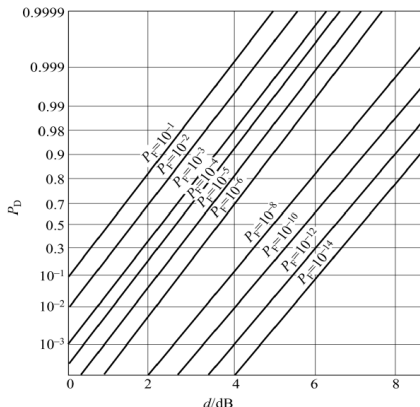
# 检测概率 $P_D$ 与信噪比 $d$ 的关系

信噪比  $d$  是接收机的主要指标之一,因此常把接收机工作特性改成  $P_D \sim d$  曲线,而以  $P_F$  作为参变量。

$$P_F = P(H_1|H_0) = Q(\ln \eta/d + d/2)$$

$$\ln \eta/d = Q^{-1}[P(H_1|H_0)] - d/2$$

$$\begin{aligned} P_D &= P(H_1|H_1) = Q(\ln \eta/d - d/2) \\ &= Q[Q^{-1}[P(H_1|H_0)] - d/2 - d/2] \\ &= Q[Q^{-1}[P(H_1|H_0)] - d] \end{aligned}$$



检测概率  $P_D$  与信噪比  $d$  的关系

$Q(x)$  是递减函数, 当给定  $P_F$  时,  $P_D$  随功率信噪比 ( $d^2 = NA^2/\sigma_n^2$ ) 单调增加。

# 工作特性某点上的斜率等于该点 $P_D$ 和 $P_F$ 所要求的检测门限值 $\eta$

$$P_D \stackrel{\text{def}}{=} P(H_1|H_1) = \int_{\eta}^{\infty} p(\lambda|H_1)d\lambda \stackrel{\text{def}}{=} P_D(\eta)$$

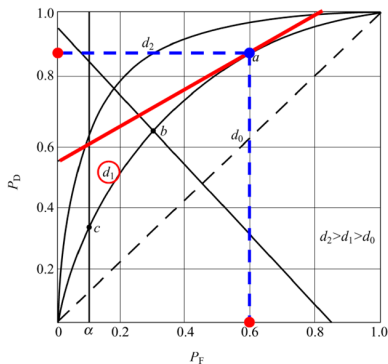
$$P_F \stackrel{\text{def}}{=} P(H_1|H_0) = \int_{\eta}^{\infty} p(\lambda|H_0)d\lambda \stackrel{\text{def}}{=} P_F(\eta)$$

$$\frac{dP_D(\eta)}{d\eta} = -p(\eta|H_1)$$

$$\frac{dP_F(\eta)}{d\eta} = -p(\eta|H_0)$$

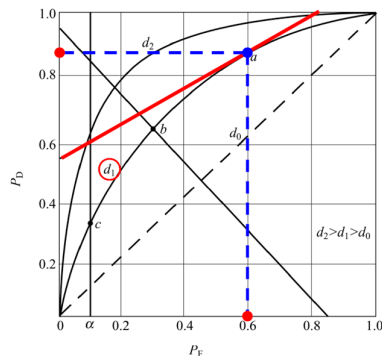
$$\text{by } \Phi'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

$$\frac{dP_D(\eta)}{dP_F(\eta)} = \frac{-p(\eta|H_1)}{-p(\eta|H_0)} = \frac{p(\eta|H_1)}{p(\eta|H_0)}$$



# 工作特性某点上的斜率等于该点 $P_D$ 和 $P_F$ 所要求的检测门限值 $\eta$

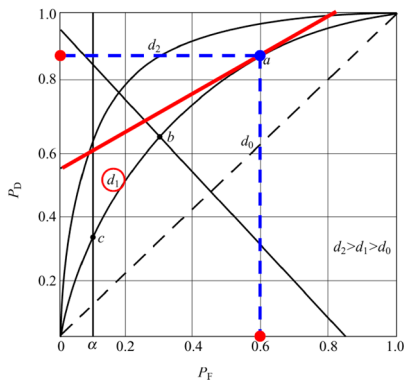
$$\begin{aligned}
 P_D(\eta) &= P[(\lambda|H_1) \geq \eta] \\
 &= \int_{\eta}^{\infty} p(\lambda|H_1) d\lambda = \int_{R_1}^{\infty} p(x|H_1) dx \\
 &= \int_{R_1}^{\infty} \lambda p(x|H_0) dx \quad \text{by } \lambda(x) = \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\gtrless} \eta \\
 &= \int_{\eta}^{\infty} \lambda p(\lambda|H_0) d\lambda \\
 \text{by } \Phi'(x) &= \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x) \quad (a \leq x \leq b)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \frac{dP_D(\eta)}{d\eta} &= -\eta p(\eta|H_0) \\
 \frac{dP_D(\eta)}{dP_F(\eta)} &= \frac{-p(\eta|H_1)}{-p(\eta|H_0)} = \frac{-\eta p(\eta|H_0)}{-p(\eta|H_0)} = \eta
 \end{aligned}$$

# 贝叶斯准则和最小错误概率准则

- 根据先验概率和代价因子, 求得判决门限  $\eta$
- 以  $\eta$  为斜率, 可找到一条直线, 与在给定信噪比  $d$  下的  $P_D - P_F$  曲线相切; 如,  $d = d_1$ , 切点  $u$
- 切点对应的  $P_D$  和  $P_F$  值, 就是在给定信噪比下的两种判决概率。



# 极小化极大准则

## 满足极小化极大方程

$$(c_{11} - c_{00}) + (c_{01} - c_{11})P_M(P_{1g}^*) - (c_{10} - c_{00})P_F(P_{1g}^*) = 0$$

$$(c_{11} - c_{00}) + (c_{01} - c_{11})(1 - P_D(P_{1g}^*)) - (c_{10} - c_{00})P_F(P_{1g}^*) = 0$$

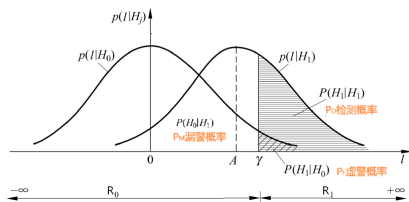
$$(c_{01} - c_{11})P_D(P_{1g}^*) + (c_{10} - c_{00})P_F(P_{1g}^*) - c_{01} + c_{00} = 0$$

$$P_D \stackrel{\text{def}}{=} P_F(P_1) = P(H_1|H_1)$$

$$P_F \stackrel{\text{def}}{=} P_F(P_1) = P(H_1|H_0)$$

$$P_M \stackrel{\text{def}}{=} P_M(P_1) = P(H_0|H_1) = 1 - P_D$$

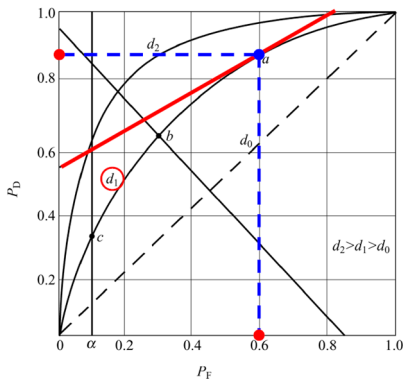
$$P_M(P_{1g}^*) = 1 - P_D(P_{1g}^*)$$





# 极小化极大准则

- 按照满足极小化极大方程的关系公式,画出一条  $P_D - P_F$  直线,该直线与给定信噪比下的  $P_D - P_F$  工作特性曲线相交。如,  $d = d_1$ , 交点  $b$
- 交点即是在极小化极大准则条件下的两种判决概率。

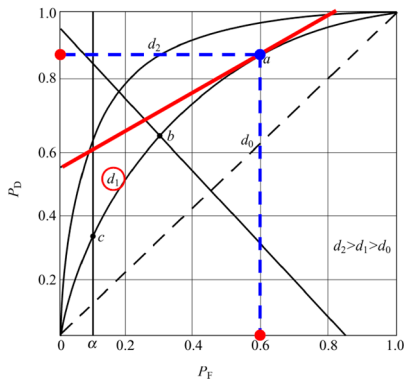


## 满足极小化极大方程

$$(c_{01} - c_{11})P_D(P_{1g}^*) + (c_{10} - c_{00})P_F(P_{1g}^*) - c_{01} + c_{00} = 0$$

# 奈曼—皮尔逊准则

- 由  $P_F = \alpha$  画一条直线
- 该直线与给定信噪比下的  $P_D - P_F$  工作特性曲线相交。如,  $d = d_1$ , 交点  $c$
- 交点即是在奈曼—皮尔逊准则下的两种判决概率。



# M 元信号的统计检测

## 基本要求

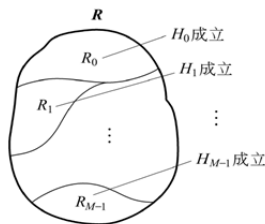
- 了解贝叶斯准则
- 了解最小平均错误概率准则和最大似然准则

# M 元信号检测检测模型



判决域划分:

$$\mathbf{R} = \bigcup_{i=0}^{M-1} R_i, R_i \cap R_j = \emptyset, (i \neq j)$$



# 贝叶斯准则

给定各假设先验概率及各判决代价因子。问题: 寻找一种判决空间的划分方法, 使平均代价最小。

**平均代价:**

$$C = P(H_0)C(H_0) + P(H_1)C(H_1)$$

$$C(H_0) = c_{00}P(H_0|H_0) + c_{10}P(H_1|H_0)$$

$$C(H_1) = c_{01}P(H_0|H_1) + c_{11}P(H_1|H_1)$$

$$C = P(H_0)(c_{00}P(H_0|H_0) + c_{10}P(H_1|H_0)) + \\ P(H_1)(c_{01}P(H_0|H_1) + c_{11}P(H_1|H_1))$$

↓

$$C = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} c_{ij}P(H_j)P(H_i|H_j)$$

# 平均代价计算

$$\begin{aligned}
 C &= \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} c_{ij} P(H_j) P(H_i|H_j) \\
 &= \sum_{i=0}^{M-1} c_{ii} P(H_i) P(H_i|H_i) + \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0, j \neq i}^{M-1} c_{ij} P(H_j) P(H_i|H_j) \\
 &\quad \text{by } P(H_i|H_i) = 1 - \sum_{j=0, j \neq i}^{M-1} P(H_j|H_i) \\
 &= \sum_{i=0}^{M-1} c_{ii} P(H_i) \left( 1 - \sum_{j=0, j \neq i}^{M-1} P(H_j|H_i) \right) + \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0, j \neq i}^{M-1} c_{ij} P(H_j) P(H_i|H_j) \\
 &= \sum_{i=0}^{M-1} c_{ii} P(H_i) - \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0, j \neq i}^{M-1} c_{ii} P(H_i) P(H_j|H_i) + \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0, j \neq i}^{M-1} c_{ij} P(H_j) P(H_i|H_j)
 \end{aligned}$$

# 平均代价计算

$$\text{因为} \quad \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} c_{ii} P(H_i) P(H_j | H_i) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} c_{jj} P(H_j) P(H_i | H_j)$$

$$\text{所以} \quad \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0, j \neq i}^{M-1} c_{ii} P(H_i) P(H_j | H_i) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0, j \neq i}^{M-1} c_{jj} P(H_j) P(H_i | H_j)$$

$$\begin{aligned} C &= \sum_{i=0}^{M-1} c_{ii} P(H_i) - \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0, j \neq i}^{M-1} c_{ii} P(H_i) P(H_j | H_i) + \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0, j \neq i}^{M-1} c_{jj} P(H_j) P(H_i | H_j) \\ &= \sum_{i=0}^{M-1} c_{ii} P(H_i) + \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0, j \neq i}^{M-1} (c_{ij} - c_{jj}) P(H_j) P(H_i | H_j) \\ &= \sum_{i=0}^{M-1} c_{ii} P(H_i) + \sum_{i=0}^{M-1} \int_{R_i} \sum_{j=0, j \neq i}^{M-1} (c_{ij} - c_{jj}) P(H_j) p(\mathbf{x} | H_j) d\mathbf{x} \end{aligned}$$

# 贝叶斯准则

$$C = \sum_{i=0}^{M-1} c_{ii} P(H_i) + \sum_{i=0}^{M-1} \int_{R_i} \sum_{j=0, j \neq i}^{M-1} (c_{ij} - c_{jj}) P(H_j) p(\mathbf{x}|H_j) d\mathbf{x}$$

$$I_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=0, j \neq i}^{M-1} (c_{ij} - c_{jj}) P(H_j) p(\mathbf{x}|H_j)$$

$$c_{ij} \geq c_{jj}, \quad P(H_j) \geq 0, \quad p(\mathbf{x}|H_j) \geq 0 \implies I_i(\mathbf{x}) \geq 0$$

## 贝叶斯准则

为保证平均风险最小,应把所有使  $I_i(\mathbf{x})$  最小的  $\mathbf{x}$  划分至  $R_i$  判决区域,即当满足

$$I_i(\mathbf{x}) < I_j(\mathbf{x}), j = 0, 1, \dots, M-1, j \neq i$$

时,判决  $H_i$  成立

$$R_i = \{\mathbf{x} | I_i(\mathbf{x}) < I_j(\mathbf{x}), 0 \leq j \leq M, j \neq i\}$$



# 贝叶斯准则

## 贝叶斯准则

为保证平均风险最小,应把所有使  $I_i(\mathbf{x})$  最小的  $\mathbf{x}$  划分至  $R_i$  判决区域,即当满足

$$I_i(\mathbf{x}) < I_j(\mathbf{x}), j = 0, 1, \dots, M-1, j \neq i$$

时,判决  $H_i$  成立

$$R_i = \{\mathbf{x} | I_i(\mathbf{x}) < I_j(\mathbf{x}), 0 \leq j \leq M, j \neq i\}$$

$H_0$  成立的判决域,是满足下列方程组的解

$$\begin{cases} I_0(\mathbf{x}) < I_1(\mathbf{x}) \\ I_0(\mathbf{x}) < I_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ I_0(\mathbf{x}) < I_{M-1}(\mathbf{x}) \end{cases}$$

# 贝叶斯准则

## 定义似然比函数

$$\lambda_i(\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x}|H_i)}{p(\mathbf{x}|H_0)}, \quad i = 0, 1, \dots, M-1$$

$$J_i(\mathbf{x}) = \frac{I_i(\mathbf{x})}{p(\mathbf{x}|H_0)} = \sum_{j=0, j \neq i}^{M-1} P(H_j)(c_{ij} - c_{jj})\lambda(\mathbf{x}), \quad i = 0, 1, \dots, M-1$$

## 定义判决规则

如果

$$J_i(\mathbf{x}) < J_j(\mathbf{x}) \quad (j = 0, 1, \dots, M-1, j \neq i)$$

则判决  $H_i$  成立

# 最小平均错误准则

$$C = \sum_{i=0}^{M-1} c_{ii} P(H_i) + \sum_{i=0}^{M-1} \int_{R_i} \sum_{j=0, j \neq i}^{M-1} (c_{ij} - c_{jj}) P(H_j) p(\mathbf{x}|H_j) d\mathbf{x} \quad I_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=0, j \neq i}^{M-1} (c_{ij} - c_{jj}) P(H_j) p(\mathbf{x}|H_j)$$

正确判决代价为 0, 错误判决代价为 1 的条件下: 
$$I_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=0, j \neq i}^{M-1} P(H_j) p(\mathbf{x}|H_j)$$

## 最小平均错误准则

为保证最小错误概率, 应把所有使  $I_i(\mathbf{x})$  最小的  $\mathbf{x}$  划分至  $R_i$  判决区域, 即当满足

$$I_i(\mathbf{x}) < I_j(\mathbf{x}), j = 0, 1, \dots, M-1, j \neq i$$

时, 判决  $H_i$  成立

$$R_i = \{\mathbf{x} | I_i(\mathbf{x}) < I_j(\mathbf{x}), 0 \leq j \leq M, j \neq i\}$$

**最小平均错误概率:** 
$$P_e = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} P(H_j) P(H_i|H_j), \quad j \neq i$$

# 最小平均错误准则

$H_0$  成立的判决域, 是满足下列下面方程组的解

$$\begin{cases} I_0(\mathbf{x}) < I_1(\mathbf{x}) \\ I_0(\mathbf{x}) < I_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ I_0(\mathbf{x}) < I_{M-1}(\mathbf{x}) \end{cases}$$

$H_1$  成立的判决域, 是满足下列下面方程组的解

$$\begin{cases} I_1(\mathbf{x}) < I_0(\mathbf{x}) \\ I_1(\mathbf{x}) < I_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ I_1(\mathbf{x}) < I_{M-1}(\mathbf{x}) \end{cases}$$

# 最大似然准则

$$C = \sum_{i=0}^{M-1} c_{ii} P(H_i) + \sum_{i=0}^{M-1} \int_{R_i} \sum_{j=0, j \neq i}^{M-1} (c_{ij} - c_{jj}) P(H_j) p(\mathbf{x}|H_j) d\mathbf{x}$$

$$I_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=0, j \neq i}^{M-1} (c_{ij} - c_{jj}) P(H_j) p(\mathbf{x}|H_j)$$

正确判决代价为 0, 错误判决代价为 1, 且信源的假设先验概率相等:  $P(H_j) = \frac{1}{M}$

$$I_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=0, j \neq i}^{M-1} P(H_j) p(\mathbf{x}|H_j) = \frac{1}{M} \sum_{j=0, j \neq i}^{M-1} p(\mathbf{x}|H_j) = \frac{1}{M} \left( \sum_{j=0}^{M-1} p(\mathbf{x}|H_j) - p(\mathbf{x}|H_i) \right)$$

判决规则是 M 个似然函数  $p(\mathbf{x}|H_i), i = 0, 1, \dots, M-1$  中, 选择使  $p(\mathbf{x}|H_i)$  最大的假设成立

最小平均错误概率: 
$$P_e = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} P(H_j) P(H_i|H_j) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} P(H_i|H_j), \quad j \neq i$$

# 最大似然准则

$H_0$  成立的判决域, 是满足下列下面方程组的解

$$\begin{cases} p(\mathbf{x}|H_0) > p(\mathbf{x}|H_1) \\ p(\mathbf{x}|H_0) > p(\mathbf{x}|H_2) \\ \vdots \\ p(\mathbf{x}|H_0) > p(\mathbf{x}|H_{M-1}) \end{cases}$$

$H_1$  成立的判决域, 是满足下列下面方程组的解

$$\begin{cases} p(\mathbf{x}|H_1) > p(\mathbf{x}|H_0) \\ p(\mathbf{x}|H_1) > p(\mathbf{x}|H_2) \\ \vdots \\ p(\mathbf{x}|H_1) > p(\mathbf{x}|H_{M-1}) \end{cases}$$

# M 元信号检测例题 9

在三元通信系统中,信源有三个可能的输出,即假设为  $H_0$  时输出  $-A$ ,假设为  $H_1$  时输出为  $0$ ,假设为  $H_2$  时输出为  $A$ 。各个假设的先验概率相等,且正确判决代价为  $0$ ,错误判决代价为  $1$ ,并进行了  $N$  次独立观测。信号在传输过程中叠加有均值为零,方差为  $\sigma_n^2$  的加性高斯白噪声。

试按照最小平均错误概率准则设计检测系统,并求正确判决和错误判决的概率。

# M 元信号检测例题 9: 解

解: 本例的检测模型为:

$$H_0 : x_k = -A + n_k$$

$$H_1 : x_k = n_k$$

$$H_2 : x_k = A + n_k$$

根据题设: 各个假设的先验概率相等, 且正确判决代价为 0, 错误判决代价为 1。  
因此本例的贝叶斯检测等价于最大似然检测, 即使似然函数  $p(\mathbf{x}|H_i)$  最大的观测值划分个判决区域  $R_i$ .



# M 元信号检测例题 9: 解续 (1)

## 步骤 1: 计算各假设下的似然函数

由于  $n_k$  是高斯分布随机变量, 因此在  $H_0$  假设下, 第  $k$  次采样值  $x_k$  服从高斯分布, 且均值为  $-A$ , 方差为  $\sigma_n^2$ ; 在  $H_1$  假设下, 第  $k$  次采样值  $x_k$  服从均值为  $0$ , 方差为  $\sigma_n^2$  的高斯分布; 在  $H_2$  假设下, 第  $k$  次采样值  $x_k$  服从均值为  $A$ , 方差为  $\sigma_n^2$  的高斯分布。

$$p(x_k|H_0) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{(x_k + A)^2}{2\sigma_n^2}\right) \implies p(\mathbf{x}|H_0) = \prod_{k=1}^N \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{(x_k + A)^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

$$p(x_k|H_1) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x_k^2}{2\sigma_n^2}\right) \implies p(\mathbf{x}|H_1) = \prod_{k=1}^N \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x_k^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

$$p(x_k|H_2) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{(x_k - A)^2}{2\sigma_n^2}\right) \implies p(\mathbf{x}|H_2) = \prod_{k=1}^N \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{(x_k - A)^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

以上 3 个似然函数统一写成:  $p(\mathbf{x}|H_i) = \prod_{k=1}^N \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{(x_k - s_i)^2}{2\sigma_n^2}\right), \quad i = 0, 1, 2$

其中,  $s_0 = -A \quad s_1 = 0 \quad s_2 = A$

## M 元信号检测例题 9: 解续 (2)

### 步骤 2: 按照最大似然准则划分观测空间

$$\begin{aligned}
 p(\mathbf{x}|H_i) &= \prod_{k=1}^N \left( \frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{1/2} \exp \left( -\frac{(x_k - s_i)^2}{2\sigma_n^2} \right) \\
 &= \left( \frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{N/2} \exp \left( -\sum_{i=1}^N \frac{(x_k - s_i)^2}{2\sigma_n^2} \right) \\
 &= \left( \frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{N/2} \exp \left( -\sum_{i=1}^N \frac{x_k^2 - 2x_k s_i + s_i^2}{2\sigma_n^2} \right)
 \end{aligned}$$

因此, 判决规则转化为使

$$\left( \sum_{i=1}^N 2x_k s_i \right) - N s_i^2$$

最大时, 判决  $H_i$  假设成立

令  $\hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_k$ , 使

$$2s_i \hat{\mathbf{x}} - s_i^2$$

最大时, 判决  $H_i$  假设成立

# M 元信号检测例题 9: 解续 (3)

判决规则: 使

$$2s_i\hat{\mathbf{x}} - s_i^2$$

最大时, 判决  $H_i$  假设成立。

$$H_0 : s_0 = -A,$$

$$2s_i\hat{\mathbf{x}} - s_i^2 = -2A\hat{\mathbf{x}} - A^2$$

$$H_1 : s_1 = 0,$$

$$2s_i\hat{\mathbf{x}} - s_i^2 = 0$$

$$H_2 : s_0 = A,$$

$$2s_i\hat{\mathbf{x}} - s_i^2 = 2A\hat{\mathbf{x}} - A^2$$

因此, 假设  $H_0$  的判决区域由下列方程组确定

$$\begin{cases} -2A\hat{\mathbf{x}} - A^2 \geq 0 \\ -2A\hat{\mathbf{x}} - A^2 \geq 2A\hat{\mathbf{x}} - A^2 \end{cases} \implies \begin{cases} \hat{\mathbf{x}} \leq -\frac{A}{2} \\ \hat{\mathbf{x}} \leq 0 \end{cases}$$

合并得到, 当  $\hat{\mathbf{x}} \leq -\frac{A}{2}$  时, 判决  $H_0$  假设成立。

# M 元信号检测例题 9: 解续 (4)

判决规则: 使

$$2s_i\hat{\mathbf{x}} - s_i^2$$

最大时, 判决  $H_i$  假设成立。

$$H_0 : s_0 = -A,$$

$$2s_i\hat{\mathbf{x}} - s_i^2 = -2A\hat{\mathbf{x}} - A^2$$

$$H_1 : s_1 = 0,$$

$$2s_i\hat{\mathbf{x}} - s_i^2 = 0$$

$$H_2 : s_0 = A,$$

$$2s_i\hat{\mathbf{x}} - s_i^2 = 2A\hat{\mathbf{x}} - A^2$$

因此, 假设  $H_1$  的判决区域由下列方程组确定

$$\begin{cases} 0 > -2A\hat{\mathbf{x}} - A^2 \\ 0 \geq 2A\hat{\mathbf{x}} - A^2 \end{cases} \implies \begin{cases} \hat{\mathbf{x}} > -\frac{A}{2} \\ \hat{\mathbf{x}} \leq \frac{A}{2} \end{cases}$$

合并得到, 当  $-\frac{A}{2} < \hat{\mathbf{x}} \leq \frac{A}{2}$  时, 判决  $H_1$  假设成立。

# M 元信号检测例题 9: 解续 (5)

判决规则: 使

$$2s_i\hat{\mathbf{x}} - s_i^2$$

最大时, 判决  $H_i$  假设成立。

$$H_0 : s_0 = -A,$$

$$2s_i\hat{\mathbf{x}} - s_i^2 = -2A\hat{\mathbf{x}} - A^2$$

$$H_1 : s_1 = 0,$$

$$2s_i\hat{\mathbf{x}} - s_i^2 = 0$$

$$H_2 : s_0 = A,$$

$$2s_i\hat{\mathbf{x}} - s_i^2 = 2A\hat{\mathbf{x}} - A^2$$

因此, 假设  $H_2$  的判决区域由下列方程组确定

$$\begin{cases} 2A\hat{\mathbf{x}} - A^2 > -2A\hat{\mathbf{x}} - A^2 \\ 2A\hat{\mathbf{x}} - A^2 > 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \hat{\mathbf{x}} > 0 \\ \hat{\mathbf{x}} > \frac{A}{2} \end{cases}$$

合并得到, 当  $\hat{\mathbf{x}} > \frac{A}{2}$  时, 判决  $H_2$  假设成立。

欢迎批评指正！