

# 信号检测与估值

段江涛

机电工程学院



2019 年 9 月

## ch2. 信号检测与估计理论的基础知识

### 概率论简单回顾

- 1 样本空间, 事件域, 概率
- 2 条件概率, 全概率公式
- 3 随机变量
- 4 离散型随机变量及其分布律
- 5 狄拉克函数 (Dirac 函数/ $\delta$  函数)

# 随机现象

随机现象:



落叶的运动轨迹, 气泡的扩散, 灯泡的寿命

## 随机现象特点

- 至少两种可能
- 不确定性

# 概率论中的三个组成部分

- 样本空间  $\Omega$
- 事件域  $\mathcal{F}$
- 概率  $P$

- **样本空间  $\Omega$** : 一个随机试验所有可能出现的结果的全体, 称为随机事件的样本空间。

每一个可能的结果称为基本事件, 它们的全体就是样本空间。

- **样本点  $\xi_k$** : 随机试验的一个结果, 就是某个基本事件, 也就是  $\Omega$  中的一个元素。

$$\Omega = \{\xi_k | k = 1, \dots, n\}$$

- **随机事件  $A$** : 样本空间中的某个子集称为随机事件, 简称事件 (事件是集合)。
- **事件域  $\mathcal{F}$** : 样本空间中的某些子集构成的满足如下条件的集合, 称为事件域 (又称  $\sigma$ -域)。

(1)  $\Omega \in \mathcal{F}$

(2) 若  $A \in \mathcal{F}$ , 则  $A$  的补  $\bar{A} \in \mathcal{F}$

(3) 若  $A_n \in \mathcal{F}, n = 1, 2, \dots$ , 则  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

## Example

一个盒子中有 10 个相同的球, 5 个白色, 5 个黑色, 搅匀后从中任意摸取一球。

样本点:  $\xi_1 = \{\text{取得白球}\}$ ,  $\xi_2 = \{\text{取得黑球}\}$

样本空间:  $\Omega = \{\xi_1, \xi_2\}$

## Example

一个盒子中有 10 个相同的球, 编号 1, 2, ..., 10, 从中取一球。

样本空间:  $\Omega = \{1, 2, \dots, 10\}$

随机事件:  $A = \{6 \text{ 号球}\} = \{6\}$ ,  $B = \{\text{偶数编号球}\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ ,

$\bar{B} = \{\text{奇数编号球}\}$ ,  $C = \{\text{编号小于等于 5 的球}\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

事件 A 是基本事件, 而 B 和 C 则由多个基本事件所组成, 并且  $A, B, C \subset \Omega$ 。

空集  $\emptyset$  可以看作  $\Omega$  的子集, 在任意一次试验中不可能有此事件发生, 称为不可能事件。

# 事件 $A$ 的概率 $P(A)$

事件域中的元素就是随机事件。如果这些事件的随机性能够由定义在事件域  $\mathcal{F}$  上的具有非负性, 归一性和可列加性的实函数  $P(A)$  来确定, 则称  $P$  是定义在二元组  $(\Omega, \mathcal{F})$  上的概率, 而称  $P(A)$  为事件  $A$  的概率。

(1) 非负性。  $P(A) \geq 0$

(2) 归一性。  $P(\Omega) = 1$

(3) 可列加性。  $A_1, A_2, \dots, A_n$  互不相容 ( $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$ ), 则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

# 等可能概型 (古典概型)

- 样本空间的元素 (即基本事件) 只有有限个, 不妨设为  $n$  个,  
 $\Omega = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$
- 每个基本事件出现的可能性是相等的, 即有  $P(\xi_1) = P(\xi_2) = \dots = P(\xi_n)$
- 事件域  $\mathcal{F}$  为  $\Omega$  的所有子集的全体, 即是  $Pwr(\Omega)$ ,  $\Omega$  的幂集, 共有  $2^n$  个事件,  
 $\emptyset \in \mathcal{F}, \Omega \in \mathcal{F}$ .
- 由概率的有限可加性知  

$$1 = P(\Omega) = \sum_{i=1}^n P(\xi_i) \implies P(\xi_i) = \frac{1}{n}, (i = 1, \dots, n)$$
- 对任意一个随机事件  $A \subseteq \mathcal{F}$ , 如果  $A$  是  $k$  个基本事件的和, 即  
 $A = \{\xi_{i_1}\} \cup \{\xi_{i_2}\} \cup \dots \cup \{\xi_{i_k}\}$ , 则

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{A \text{ 中所包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}$$



## Example

将一枚硬币抛掷 3 次, (1) 设事件  $A_1$  为“恰有一次出现正面”, 求  $P(A_1)$ ; (2) 设事件  $A_2$  为“至少一次出现正面”, 求  $P(A_2)$ 。

- ① 正面用  $H$  表示, 反面用  $T$  表示。则

样本空间  $\Omega = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$

事件  $A_1 = \{HTT, THT, TTH\}$ 。

$\Omega$  中包含有限个元素, 且由对称性知, 每个基本事件发生的可能性相同。所以,  $P(A_1) = \frac{3}{8}$ 。

- ② 由于  $\overline{A_2} = \{TTT\}$ , 于是

$$P(A_2) = 1 - P(\overline{A_2}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

# 样本空间的选取

为求一个事件的概率, 样本空间可以有不同的取法, 但一定要保证基本事件和求概率事件数的计算都要在**同一个样本空间**中进行, 否则会导致谬误!

## Example

一个盒子中有 10 个相同的球, 编号 1, 2, ..., 10, 从中取一球, 求此球的号码为偶数的概率。

样本空间  $\Omega = \{1, 2, \dots, 10\}$

事件  $A = \{\text{偶数编号球}\} = \{2\} \cup \{4\} \cup \{6\} \cup \{8\} \cup \{10\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ 。

$$P(A) = \frac{|A|}{n} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

另外一种解法:

$\Omega = \{A, \bar{A}\}$ ,  $A = \{\text{编号为偶数的球}\}$ ,  $\bar{A} = \{\text{编号为奇数的球}\}$ ,  $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, A, \bar{A}\}$ , 由  $A, \bar{A}$  的对称性, 即得  $P(A) = \frac{1}{2}$

# 样本空间的选取

## Notes

- 两种解法的样本空间  $\Omega$  不同 (从而事件域  $\mathcal{F}$  是不同的)。

①  $\Omega = \{1, 2, \dots, 10\}$

②  $\Omega = \{A, \bar{A}\}$

- 严格地说, 两者所描述的随机试验是不同的。

例如对于第二种解法来说,  $B = \{\text{号码为 4 的球}\}$  并不属于事件域  $\mathcal{F}$ , 就是说  $B$  不是一个事件, 从而也就没有概率可言。

但对第一种解法,  $B$  是事件, 而且  $P(B) = \frac{1}{10}$ 。

- 一定要保证基本事件和求概率事件数的计算都要在同一个样本空间中进行。

# 条件概率

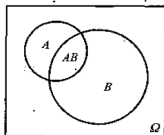
## Definition

若  $\Omega, \mathcal{F}, P$  是一个概率空间,  $B \in \mathcal{F}$ , 且  $P(B) > 0$ , 则对任意的  $A \in \mathcal{F}$ , 称

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

为在已知事件 B 发生的条件下, 事件 A 发生的条件概率。

$$P(A|B) = \frac{S_{AB}}{S_B} = \frac{S_{AB}/S_\omega}{S_B/S_\omega} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$



# 条件概率的性质及其推论

条件概率  $P(\bullet|B)$  的具备概率的三个基本性质

- ① 非负性: 对任意的  $A \in F, P(A|B) \geq 0$ ;
- ② 规范性:  $P(\Omega|B) = 1$ ;
- ③ 可列加性: 对任意的一列两两互不相容的事件  $A_i (i = 1, 2, \dots)$ , 有

$$P \left[ \bigcup_{i=1}^{+\infty} (A_i|B) \right] = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i|B)$$

## Corollary

概率的乘法公式:  $P(AB) = P(B)P(A|B)$

## Corollary

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 A_2) \cdots P(A_n|A_1 A_2 \cdots A_{n-1})$$

## Example

一个家庭中有两个小孩, 已知其中有一个是女孩, 问这时另一个小孩也是女孩的概率有多大?

$$\Omega = \{(\text{男}, \text{男}), (\text{男}, \text{女}), (\text{女}, \text{男}), (\text{女}, \text{女})\}$$

$$A = \{\text{已知有一个是女孩}\} = \{(\text{男}, \text{女}), (\text{女}, \text{男}), (\text{女}, \text{女})\}$$

$$B = \{\text{另一个也是女孩}\} = \{(\text{女}, \text{女})\}$$

于是所求概率为

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$$

# 概率树/全概率公式

概率树思想: 为了求解复杂事件的概率, 往往可以先把它分解成两个 (或若干个) 互不相容的较简单的事件之并。求出这些较简单事件的概率, 再利用加法公式即得所要求的复杂事件的概率。把这个方法一般化, 便的到下述定理。

## Theorem

设  $B_1, B_2, \dots$  是一列互不相容的事件, 且有

$$\bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i = \Omega, P(B_i) > 0$$

则对任一事件  $A$ , 有

$$P(A) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(B_i)P(A|B_i)$$

## Example

某工厂有 4 条流水线生产同一种产品, 该 4 条流水线的产品分别占总产量的 15%, 20%, 30%, 35%, 又这 4 条流水线的不合格品率依次为 0.05, 0.04, 0.03 及 0.02. 现从出厂产品中任取一件, 问

- ① 恰好抽到不合格品的概率为多少?
- ② 第 4 条流水线应承担的责任?



解: (1) 令

$A = \{\text{任取一件, 恰好抽到不合格品}\}$

$B = \{\text{任取一件, 恰好抽到第 } i \text{ 条流水线的产品, } (i = 1, 2, 3, 4)\}$

于是由全概率公式可得

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=1}^4 P(B_i)P(A|B_i) = 0.15 \times 0.05 + 0.20 \times 0.04 + 0.30 \times 0.03 + 0.35 \times 0.02 \\ &= 0.0315 = 3.15\% \end{aligned}$$

实际上,  $P(A|B_i)$  可以从过去生产的产品中统计出来, 称为**先验概率**。

(2) 从概率论的角度考虑可以按  $P(B_i|A)$  的大小来追究第  $i$  条  $i = 1, 2, 3, 4$  流水线的责任。

$$P(AB_4) = P(B_4)P(A|B_4) = 0.35 \times 0.02 = 0.007$$

由条件概率的定义知

$$P(B_4|A) = \frac{P(AB_4)}{P(A)} = \frac{P(B_4)P(A|B_4)}{\sum_{i=1}^4 P(B_i)P(A|B_i)} = \frac{0.007}{0.0315} \approx 0.222$$

# 相互独立事件

条件概率:  $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$

一般的概率乘法公式:  $P(AB) = P(A)P(B|A)$

如果“事件 B 发生与否不受事件 A 的影响”:  $P(B) = P(B|A)$

乘法公式变为:  $P(AB) = P(A)P(B)$

## Definition

对任意的两个事件 A,B, 若

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

成立, 则称事件 A,B 是相互独立的, 简称为独立的。

依这个定义, 不难验证:

若 A 与 B 相互独立, 则  $\{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}$  中的任意一个与  $\{\emptyset, B, \bar{B}, \Omega\}$  中的任意一个仍相互独立。

分别掷两枚均匀的硬币, 令

$$A = \{\text{硬币甲出现正面}\} \quad B = \{\text{硬币乙出现正面}\}$$

验证事件  $A, B$  是相互独立的。

Proof.

$$\text{样本空间} = \{(\text{正}, \text{正}), (\text{正}, \text{反}), (\text{反}, \text{正}), (\text{反}, \text{反})\}$$

共还有 4 个基本事件, 它们是等可能的, 各有概率为  $1/4$ , 而

$$A = \{(\text{正}, \text{正}), (\text{正}, \text{反})\}$$

$$B = \{(\text{正}, \text{正}), (\text{反}, \text{正})\}$$

$$AB = \{\text{正}, \text{正}\}$$

由此知

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$$

这时有

$$P(AB) = \frac{1}{4} = P(A)P(B)$$

成立, 所以  $A, B$  事件是相互独立的。

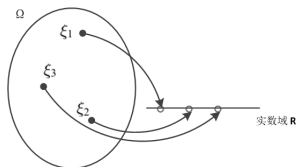


## Definition

设  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  是一概率空间,  $X = X(\xi), \xi \in \Omega$  是定义在  $\Omega$  上的单值实函数, 如果对任一实数  $x$ , 集合  $\{\xi | X(\xi) \leq x\} \in \mathcal{F}$  则称  $X = X(\xi)$  为  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  上的一个**随机变量**。

随机变量  $X(\xi)$  的定义域为样本空间  $\Omega$ , 它的值域是实数  $\mathbb{R}$ 。所以, 随机变量  $X(\xi)$  实际上是一个映射, 这个映射为每个来自概率空间的结果 (样本点)  $\xi$  赋予一个实数  $x$ 。这种映射必须满足条件:

- (1) 对任一  $x$ , 集合  $\{\xi | X(\xi) \leq x\} \in \mathcal{F}$  (即, 使得  $X(\xi) \leq x$  的所有样本点  $\xi$  所组成的集合) 是这个概率空间中的一个事件, 并有确定的概率  $P\{X(\xi) \leq x\}$ ;
- (2)  $P\{X(\xi) = \infty\} = 0, P\{X(\xi) = -\infty\} = 0$



## Example

将一枚硬币抛掷 3 次, 正面用  $H$  表示, 反面用  $T$  表示, 则样本空间

$$\Omega = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$$

令随机变量  $X(\xi)$  表示投掷得到正面的总数。则

$$X = X(\xi) = \begin{cases} 3, & \xi = \{HHH\} \\ 2, & \xi = \{HHT, HTH, THH\} \\ 1, & \xi = \{HTT, THT, TTH\} \\ 0, & \xi = \{TTT\} \end{cases}$$

$X = 2$ , 对应样本点的集合  $A = \{HHT, HTH, THH\}$ , 是一个事件, 其概率

$P\{X = 2\} = P(A) = 3/8$ 。类似地有

$$P\{X \leq 1\} = P\{\{X = 0\} \cup \{X = 1\}\} = P\{HTT, THT, TTH, TTT\} = \frac{1}{2}$$

随机变量的取值随试验的结果而定, 而试验的各个结果出现有一定的概率, 因而随机变量的取值有一定的概率。

### Definition

设  $X = X(\xi)$  是随机变量, 若  $L$  是一个实数集合,  $L \subseteq \mathbb{R}$ , 将  $X$  在  $L$  上取值写成  $\{X \in L\}$ . 它表示事件  $B = \{\xi | X(\xi) \in L\}$ . 即  $B$  是由  $\Omega$  中使得  $X(\xi) \in L$  的所有样本点  $\{\xi\}$  所组成的事件, 此时有

$$P\{X \in L\} = P(B) = P\{\xi | X(\xi) \in L\}$$

### Notes

随机变量  $X = X(\xi)$  就是试验结果 (即样本点) 和实数之间的一一对应关系。虽然在试验之前不能肯定随机变量  $X = X(\xi)$  会取哪一个数值, 但是对于任一实数  $a$ , 我们可以研究  $\{X = X(\xi) = a\}$  发生的概率, 也就是  $X(\xi)$  取值的统计规律。

# 随机变量的分布函数

## Definition

设  $X$  是随机变量, 对  $\forall x \in \mathbb{R}$ , 称函数

$$F(x) = P\{X \leq x\}, -\infty < x < \infty$$

为随机变量  $X$  的一维 (累积) 分布函数 [(cumulative) distribution function]。

对于任意实数  $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ , 有

$$P\{x_1 < X \leq x_2\} = P\{X \leq x_2\} - P\{X \leq x_1\} = F(x_2) - F(x_1)$$

## Notes

如果将  $X$  看成是数轴上的随机点的坐标, 那么, 分布函数  $F(x)$  在  $x$  处的函数值就表示  $X$  落在区间  $(-\infty, x]$  上的概率。

## 分布函数性质

- ① 单调不减性: 对  $\forall x_1 < x_2$ , 恒有  $F(x_1) \leq F(x_2)$

对于任意实数  $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ , 有

$$F(x_2) - F(x_1) = P\{x_1 < X \leq x_2\} \geq 0$$

- ② 规范性:  $0 \leq F(x) \leq 1$ , 且

$$F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

- ③ 右连续性: 对  $\forall x_0$ , 恒有  $F(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x) = F(x_0)$

## 几何说明

将  $X \in [0, x]$  的端点  $x$  沿数轴无限向左移动 (即  $x \rightarrow -\infty$ ), 则“随机点  $X$  落在点  $x$  左边”这一事件趋于不可能事件, 从而概率趋于 0, 即有  $F(-\infty) = 0$ ;

将  $X \in [0, x]$  的端点  $x$  沿数轴无限向右移动 (即  $x \rightarrow \infty$ ), 则“随机点  $X$  落在点  $x$  左边”这一事件趋于必然事件, 从而概率趋于 1, 即有  $F(\infty) = 1$ ;



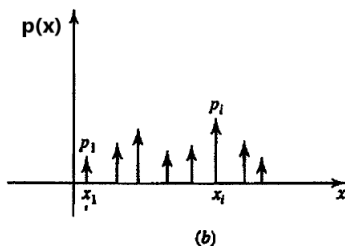
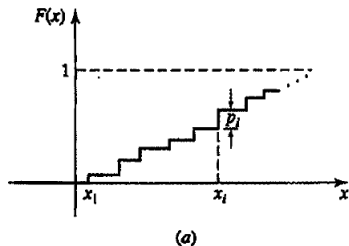
# 随机变量的概率密度函数 $p(x)$

## Definition

设连续随机变量  $X$  的一维累积分布函数为  $F(x)$ , 如果  $F(x)$  对  $x$  的一阶导数存在, 则有

$$p(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dF(x)}{dx}$$

式中,  $p(x)$  称为随机变量  $X = X(\xi)$  的一维概率密度函数, 简称概率密度函数 (probability density function, p.d.f)



# 随机变量概率密度函数 $p(x)$ 的性质

- ① 根据随机变量  $x(\xi)$  的  $p(x)$  与  $F(x)$  的关系, 有

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(u) du$$

- ② 对所有  $x$ ,  $p(x)$  是非负函数, 即

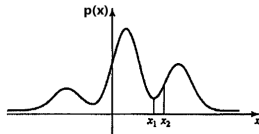
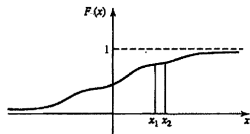
$$p(x) \geq 0, \quad -\infty < x < +\infty$$

- ③  $p(x)$  对  $x$  的全域积分结果等于 1, 一般表示为

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1$$

- ④ 随机变量  $x(\xi)$  落在区间  $[x_1, x_2]$  内的概率为

$$P\{x_1 \leq x(\xi) \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx$$



## Definition (离散型随机变量)

定义在样本空间  $\Omega$  上, 取值于实数域  $\mathbb{R}$ , 且只取有限个或可列个值的变量  $X = X(\xi)$ , 称作是一维 (实值) 离散型随机变量。

## Definition (离散型随机变量的概率)

设离散型随机变量  $X$  所有可能取的值为  $x_k (k = 1, 2, \dots)$ ,  $X$  取各个可能值的概率, 即事件  $\{X = x_k\}$  的概率为

$$P\{X = x_k\} = p_k, k = 1, 2, \dots$$

由概率的定义,  $p_k$  满足如下两个条件:

①  $p_k \geq 0, k = 1, 2, \dots$

②  $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$

因为  $\{X = x_1\} \cup \{X = x_2\} \cup \dots$  是必然事件, 且

$$\{X = x_j\} \cap \{X = x_k\} = \emptyset, k \neq j \text{ 故}$$

$$1 = P\left[\bigcup_{k=1}^{\infty} \{X = x_k\}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} P\{X = x_k\} = 1$$

# 离散型随机变量 $X$ 的分布律

离散型随机变量  $X$  的分布律的解析表达式:

$$P\{X = x_k\} = p_k, k = 1, 2, \dots$$

可用表格形式表示如下:

离散型随机变量  $X$  的分布律

$X$	$x_1$	$x_2$	$\cdots$	$x_n$	$\cdots$
$p_k$	$p_1$	$p_2$	$\cdots$	$p_n$	$\cdots$

## Example

某产品 40 件, 其中次品 3 件, 现从中任取 3 件。(1) 求取出的 3 件产品中所含次品数  $X$  的分布律; (2) 求取出的产品中至少有一件次品的概率; (3) 求离散型随机变量  $X$  的分布函数  $F(x)$ 。

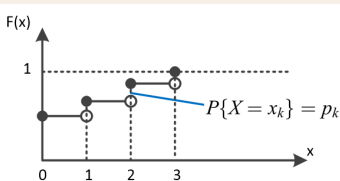
解:

$$(1) \quad P\{X=0\} = \frac{C_{37}^3}{C_{40}^3} = 0.7865 \quad P\{X=1\} = \frac{C_3^1 C_{37}^2}{C_{40}^3} = 0.2022$$

$$P\{X=2\} = \frac{C_3^2 C_{37}^1}{C_{40}^3} = 0.0112 \quad P\{X=3\} = \frac{C_3^3}{C_{40}^3} = 0.0001$$

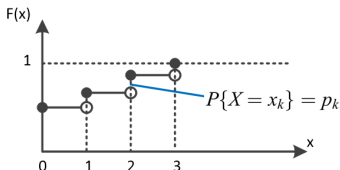
$$(2) \quad P\{X \geq 1\} = 1 - P\{X=0\} = 1 - 0.7865 = 0.2135$$

$$(3) \text{ 由分布函数定义得: } F(x) = P\{X \leq x\} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.7865, & 0 \leq x < 1 \\ 0.9887, & 1 \leq x < 2 \\ 0.9999, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$$



由  $F(x)$  的图示看到,  $F(x)$  是一个阶梯状的右连续函数 ( $F(x+0) = F(x)$ ), 在  $x=k$  处有跳跃, 跳跃度为在  $X=k$  处的概率  $p_k = P\{X=k\}$ 。

由随机变量  $X$  的分布函数  $F(x)$ , 可以计算



$$P(X \leq x) = F(x)$$

$$P(X = x) = F(x) - F(x - 0)$$

$$P(X < x) = F(x - 0)$$

$$P(X > x) = 1 - F(x)$$

$$P(X \geq x) = 1 - F(x - 0)$$

进一步, 形如  $\{x_1 \leq X \leq x_2\}$ ,  $\{x_1 < X < x_2\}$ ,  $\{x_1 < X \leq x_2\}$ ,  $\{x_1 \leq X < x_2\}$  等一些事件及它们经过有限次或可列次并、交、差运算以后的概率, 都可以由  $F(x)$  计算出来。

$F(x)$  全面地描述了随机变量  $X$  的统计规律。既然分布函数能够描述一般的随机变量的统计规律, 因而分布函数这个概念比分布列更重要。只不过对离散型随机

# 狄拉克函数 (Dirac 函数/ $\delta$ —函数)

## Definition ( $\delta$ —函数)

对于任意的无穷次可微的函数  $f(t)$ , 如果满足:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t)dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\varepsilon}(t)f(t)dt$$

其中:

$$\delta_{\varepsilon}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{\varepsilon}, & 0 \leq t < \varepsilon \\ 0, & t > \varepsilon \end{cases}$$

则称  $\delta_{\varepsilon}(t)$  的弱极限为  $\delta$  函数, 记为  $\delta(t)$  显然, 对于任意的  $\varepsilon > 0$ , 有:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\varepsilon}(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon}dt = 1 \implies \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

# 狄拉克函数 (Dirac 函数/ $\delta$ —函数)

## 注

- ①  $\delta(t)$  在  $t = 0$  点的取值为  $\infty$ , 在  $t \neq 0$  点的取值为 0, 并且满足  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$ 。
- ② 工程 (信号处理等) 上  $\delta$ —函数也称为单位脉冲或单位冲激函数。

## $\delta$ —函数的筛选性质

若  $f(t)$  为无穷此可微的函数, 则有:  $\int_I \delta(t) f(t) dt = f(0)$

其中  $I$  是包含点  $t = 0$  的任意区间。特殊地, 有:  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0)$

更一般地, 我们有:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = f(t_0)$$



# 离散型随机变量分布律的 $\delta$ —函数表示

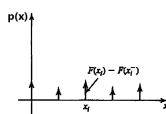
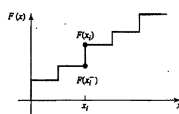
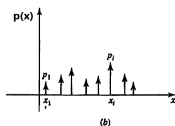
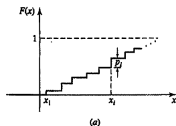
设离散型随机变量  $X$  的分布律为:  $P\{X = x_i\} = p_i, i = 1, 2, \dots$ , 则由  $\delta$ —函数的筛选性质可以定义离散型随机变量  $X$  的概率密度函数为:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i \delta(x - x_i)$$

因为, 由  $\delta$ —函数的筛选性质, 离散型随机变量  $X$  的分布函数可以表示为:

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \sum_{x_i \leq x} p_i = \int_{-\infty}^x \sum_{i=1}^{\infty} p_i \delta(u - x_i) du$$

$$P\{X = x_i\} = F(x_i) - F(x_i^-) = p_i$$



# 离散型随机变量与连续性随机变量的统一

工程上, 常用离散型随机变量分布律的  $\delta$ -函数表示法, 将离散型随机变量的分布律表示成概率密度函数的形式, 因此与连续型随机变量的概率密度函数  $p(x)$  一样进行统一处理。

$$P\{x_1 \leq X \leq x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx$$

离散型随机变量:

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \sum_{x_i \leq x} p_i = \int_{-\infty}^x \sum_{i=1}^{\infty} p_i \delta(u - x_i) du$$

$$p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i \delta(x - x_i)$$

连续型随机变量:

$$p(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dF(x)}{dx}, \quad F(x) = P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^x p(u) du$$

## Example

抛掷一枚硬币: 样本空间:  $\Omega = \{H, T\}$ ,  $H$  表示正面,  $T$  表示反面. 正面的概率  $p$ , 反面的概率  $q$ . 定义随机变量  $X = X(\xi)$ ,  $\xi \in \Omega$  满足:

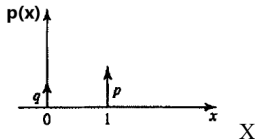
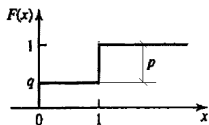
$$X(\xi = H) = 1 \quad X(\xi = T) = 0,$$

求分布函数  $F(x)$  和概率密度函数  $p(x)$ , 其中:  $-\infty < x < \infty$ .

$$P\{X = 0\} = q, \quad P\{X = 1\} = p$$

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \sum_{x_i \leq x} p_i = \int_{-\infty}^x \sum_{i=1}^{\infty} p_i \delta(u - x_i) du$$

$$p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i \delta(x - x_i)$$



## Example

事件  $A$ , 试验的样本空间:  $\Omega = \{A, \bar{A}, \emptyset\}$ . 定义随机变量  $X = X(\xi)$ , 满足:

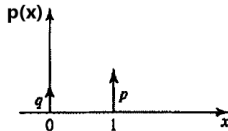
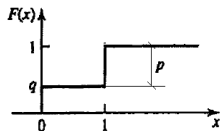
$$X(\xi) = 1, \quad \xi \in A$$

$$X(\xi) = 0, \quad \xi \in \bar{A}$$

$$P\{X = 1\} = P(A) = p, \quad P\{X = 0\} = P(\bar{A}) = q = 1 - p$$

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \sum_{x_i \leq x} p_i = \int_{-\infty}^x \sum_{i=1}^{\infty} p_i \delta(u - x_i) du$$

$$p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i \delta(x - x_i)$$



## Example

抛掷两枚硬币: 随机变量  $X = X(\xi)$  表示正面数目。

样本空间:  $\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$ ,  $H$  表示正面,  $T$  表示反面。

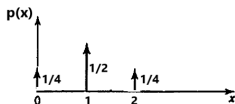
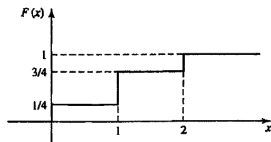
随机变量  $X(HH) = 2$ ,  $X(HT) = 1$ ,  $X(TH) = 1$ ,  $X(TT) = 0$

求  $F(x)$  和  $p(x)$ .

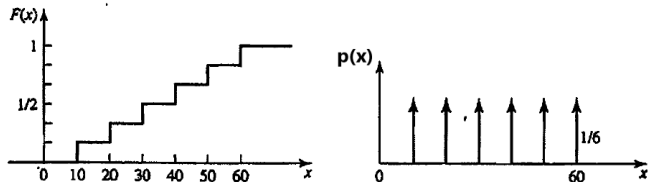
$$P\{X=0\} = \frac{1}{4}, \quad P\{X=1\} = \frac{2}{4}, \quad P\{X=2\} = \frac{1}{4}$$

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \sum_{x_i \leq x} p_i = \int_{-\infty}^x \sum_{i=1}^{\infty} p_i \delta(u - x_i) du$$

$$p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i \delta(x - x_i)$$



掷一枚骰子: 样本空间:  $\Omega = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ 。定义随机变量  $X = X(\xi), \xi \in \Omega$   
满足:  $X(f_i) = 10i$  求  $F(x)$  和  $p(x)$ , 其中:  $-\infty < x < \infty$ .



$$F(100) = P\{X(\xi) \geq 60\} = P(\Omega) = 1$$

$$F(35) = P\{X(\xi) \leq 35\} = P\{f_1, f_2, f_3\} = \frac{3}{6}$$

$$F(30.01) = P\{X(\xi) \leq 30.01\} = P\{f_1, f_2, f_3\} = \frac{3}{6}$$

$$F(30) = P\{X(\xi) \leq 30\} = P\{f_1, f_2, f_3\} = \frac{3}{6}$$

$$F(29.9) = P\{X(\xi) \leq 29.9\} = P\{f_1, f_2\} = \frac{2}{6}$$

欢迎批评指正！