Computing 5, 178—184 (1970)

Eine Bemerkung zur Zustandsreduktion unvollständiger Automaten

Von

W. Brauer, Bonn

(Eingegangen am 27. Mai 1969)

Zusammenfassung — Summary

Eine Bemerkung zur Zustandsreduktion unvollständiger Automaten. Die klassischen Resultate über die Zustandsreduktion vollständiger deterministischer Automaten (vgl. [2]) lassen sich völlig auf unvollständige deterministische Automaten übertragen. Das beruht vor allem darauf, daß sich, im Gegensatz zu der in der Literatur verbreiteten Auffassung (vgl. etwa [2], S. 45), auch bei unvollständigen Automaten der Begriff der Äquivalenz zweier Zustände (ganz analog zum vollständigen Fall) einführen läßt (was auch schon Schmitt [7] erkannte), und daß der Begriff der Zustandshomomorphie ebenfalls sinnvoll übertragen werden kann. Der Beweis wird dadurch sehr einfach, daß in Analogie zur normalen Ein-Punkt-Vervollständigung partieller Algebren (vgl. [6]) einem unvollständigen Automaten in eindeutiger Weise ein vollständiger so zugeordnet wird, daß die Minimalitätseigenschaft erhalten bleibt.

Note on State Reduction of Incomplete Automata. The classical results on state reduction for complete deterministic automata (see [2]) can be proved for incomplete deterministic automata, too. This is especially due to the fact that, in spite of a widespread opinion (see e. g. [2], p. 45), the notion of equivalence of states of incomplete automata can be defined in a similar way as in the complete case (this has also been remarked by Schmitt [7]), and that the notion of state homomorphism may likewise be generalized. The proof becomes very easy, since, in analogy to the normal one-point compactification of a partial algebra (see [6]), we associate to each incomplete automaton a unique complete automaton such that minimality is preserved.

1. Definitionen

Ein *unvollständiger deterministischer Automat* A, im folgenden kurz *Automat* genannt, ist ein Quintupel $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$, wobei X, S und Y endliche Mengen sind (X Eingabe-, Y Ausgabealphabet, S Zustandsmenge), δ eine Abbildung einer Teilmenge D des cartesischen Produkts $S \times X$ in S und λ eine Abbildung einer Teilmenge L von $S \times X$ in Y ist. Der Automat A heißt *vollständig*, wenn δ und λ auf ganz $S \times X$ definiert sind.

Ist $S' \subseteq S$, so heißt $A' = (X, S', Y', \delta/S', \lambda/S')$ ein *Teilautomat* von A, dabei sei $Y' \subseteq Y$ sowie $\delta' := \delta/S'$ bzw. $\lambda' := \lambda/S'$ die Einschränkung von δ bzw. λ auf $S' \times X$, und für $(s, x) \in S' \times X$ gelte: $\delta'(s, x)$ bzw. $\lambda'(s, x)$ ist nur definiert, wenn $\delta(s, x) \in S'$ bzw. $\lambda(s, x) \in Y'$.

Sei X^* das freie Monoid über X. Die Erweiterung der Definitionsbereiche von δ und λ auf passende Teilmengen von $S \times X^*$ nehmen wir wie in [2], Definition 2.2 vor:

Für $x = x_1 \ldots x_n \in X^*$ mit $n \geqslant 1$ und $x_i \in X$, $1 \leqslant i \leqslant n$, sei $\delta(s, x)$ definiert, wenn mit $s_1 := s$ gilt: $s_{i+1} := \delta(s_i, x_i)$ ist definiert für $i = 1, \ldots, n$. Es sei dann $\delta(s, x) := s_{n+1}$ sowie $\delta(s, \Lambda) := s$.[1]

Ferner sei $\lambda(s, x)$ definiert, wenn (mit obigen Bezeichnungen) $s_n = \delta(s, x_1 \ldots x_{n-1})$ und $\lambda(s_i, x_i)$ für $i = 1, \ldots, n$ definiert sind. Es sei dann $\lambda(s, x) := \lambda(s_1, x_1)\, \lambda(s_2, x_2) \ldots \lambda(s_n, x_n)$ sowie $\lambda(s, \Lambda) := \Lambda$.

Jedes $x \in X^*$ erzeugt nun eine Abbildung δ_x aus S in S:

$$\delta_x(s) := \begin{cases} \delta(s, x), & \text{falls } \delta(s, x) \text{ definiert ist} \\ \text{undefiniert sonst.} \end{cases}$$

$D(x)$ bezeichne den Definitionsbereich von δ_x. Die Menge aller δ_x bildet ein Monoid von partiellen Abbildungen von S in sich — das sogenannte *Transitionsmonoid* von A.

Jedes $s \in S$ definiert andererseits eine Abbildung λ_s aus X^* in Y^*, die sogenannte *durch s bestimmte Automatenabbildung*:

$$\lambda_s(x) := \begin{cases} \lambda(s, x), & \text{falls } \lambda(s, x) \text{ definiert ist} \\ \text{undefiniert sonst.} \end{cases}$$

$L(s)$ sei der Definitionsbereich von λ_s. Die Automatenabbildung λ_s heißt *eigentlich*, wenn $L(s)$ nicht die Menge $\{\Lambda\}$ ist, s heißt dann ein *eigentlicher Zustand*. Mit S_e bezeichnen wir die Menge der eigentlichen Zustände von A (die leer sein kann), und der Automat $A_e = (X, S_e, Y, \delta_e := \delta/S_e, \lambda_e := \lambda/S_e)$ heiße der *eigentliche Teilautomat* von A. Bei den folgenden Überlegungen werden wir uns im wesentlichen nur mit dem eigentlichen Teilautomaten befassen, da nur dieser für das Ein-Ausgabe-Verhalten des Automaten von Bedeutung ist, denn für $s \in S_e$ ist stets $\lambda_{es} = \lambda_s$ (also auch $L_e(s) = L(s)$). Man beachte aber, daß $D_e(x) = \{s \mid s \in S_e,\ \delta(s, x) \in S_e\}$ im allgemeinen von $D(x)$ verschieden ist.

Ist A vollständig, so ist jedes δ_x für alle $s \in S$ und jedes λ_s für alle $x \in X^*$ definiert, und A stimmt mit seinem eigentlichen Teilautomaten überein.

Im Falle vollständiger Automaten nennt man zwei Zustände $s, s' \in S$ äquivalent, wenn $\lambda_s = \lambda_{s'}$ ist (vgl. [2], Def. 1.3 und [3], Def. 3). Diese Definition läßt sich auch für unvollständige Automaten verwenden, wenn man beachtet, daß zwei Abbildungen genau dann gleich sind, wenn sie denselben Definitionsbereich besitzen und auf ihm übereinstimmen (vgl. auch [7], Def. 4), und daß es bei der Definition der Äquivalenz von Automaten nur auf die eigentlichen Automatenabbildungen ankommt.

Seien also $A^i = (X, S^i, Y, \delta^i, \lambda^i)$, $i = 1, 2$, Automaten. Dann heißen zwei Zustände $s^i \in S^i$ $(i = 1, 2)$ *äquivalent* wenn $\lambda^1_{s^1} = \lambda^2_{s^2}$ ist.

[1] Λ sei das leere Wort.

Die Automaten A^1 und A^2 heißen *äquivalent* ($A^1 \equiv A^2$), wenn die Mengen der eigentlichen Automatenabbildungen von A^1 und A^2 gleich sind, d. h. wenn $\{\lambda_s^1 \mid s \in S_e^1\} = \{\lambda_s^2 \mid s \in S_e^2\}$ ist.

Der Automat A heißt *reduziert*, wenn keine zwei Zustände aus S äquivalent sind und $A = A_e$ ist, d. h. jeder Zustand von A ein eigentlicher ist.

Auch bei der Übertragung des Homomorphiebegriffs vom vollständigen auf den unvollständigen Fall wird davon ausgegangen, daß das, was an einem Automaten interessiert, die Menge seiner eigentlichen Automatenabbildungen ist, so daß von einem Homomorphismus nur zu verlangen ist, daß er diese Menge nicht ändert. Seien also A^1, A^2 Automaten wie oben, so heißt eine Abbildung h von S_e^1 auf S_e^2 ein *Homomorphismus* von A^1 auf A^2, wenn

$$\bigwedge_{s \in S_e^1} \bigwedge_{x \in X^*} [h(\delta^1(s,x)) = \delta^2(h(s),x) \wedge \lambda^1(s,x) = \lambda^2(h(s),x)].$$

Wir schreiben dann $A^2 = h(A^1)$ oder $A^1 \gtrsim A^2$.

h heißt *Isomorphismus*, wenn h eineindeutig ist, A^1 und A^2 heißen dann isomorph ($A^1 \cong A^2$).

Der Automat A heißt *homomorph reduziert*, wenn jeder Homomorphismus von A auf einen Automaten A' schon ein Isomorphismus von A auf A' und $A = A_e$ ist. Es ist klar, daß aus $A^1 \gtrsim A^2$ folgt $A^1 \equiv A^2$.

Sei $z(A)$ die Anzahl der Zustände von A (d. h. der Elemente von S). Dann heißt A *minimal*, wenn es keinen zu A äquivalenten Automaten A' mit $z(A') < z(A)$ gibt. Für vollständige Automaten sind die obigen Definitionen offensichtlich die klassischen.

2. Problemstellung

Sei A ein Automat, dann ist zu fragen:

1. Existiert
   a) ein reduzierter Automat A_r mit $A_r \equiv A$,
   b) ein homomorph reduzierter Automat A_h mit $A_h \equiv A$,
   c) ein minimaler Automat A_m mit $A_m \equiv A$?
2. Sind im Fall ihrer Existenz die Automaten A_r, A_h und A_m eindeutig bestimmt und welche Beziehungen bestehen zwischen ihnen?
3. Gibt es einen Algorithmus zur Bestimmung von A_r, A_h bzw. A_m (falls deren Existenz gesichert ist)?

Die Fragen 1b und 1c sind trivialerweise zu bejahen, da $z(A)$ stets als endlich vorausgesetzt ist. Ferner ist klar, daß ein minimaler Automat homomorph reduziert und ein reduzierter Automat homomorph reduziert und minimal ist.

Für vollständiges A sind die Antworten auf alle obigen Fragen bekannt (vgl. [2], Theorem 1.3): Zu jedem vollständigen Automaten A existiert bis auf Isomorphie eindeutig ein minimaler zu A äquivalenter Automat A_m, dieser ist reduziert und homomorph reduziert, und umgekehrt ist jeder zu A äquivalente reduzierte bzw. homomorph reduzierte Automat minimal, ferner gibt es einen Algorithmus zur Bestimmung von A_m.

Wir werden zeigen, daß diese Aussage auch für unvollständige Automaten gilt. Das geschieht dadurch, daß auf eindeutige Weise jedem unvollständigen Automaten ein vollständiger so zugeordnet wird, daß die Eigenschaften, reduziert, homomorph reduziert oder minimal zu sein, erhalten bleiben. Die klassische Formulierung des Reduktionsproblems für unvollständige Automaten (vgl. [2], S. 45) unterscheidet sich von der obigen dadurch, daß nicht ein minimaler Automat mit gleicher Leistung, sondern nur mit mindestens der gleichen Leistung gesucht wird, der im allgemeinen auch tatsächlich mehr leistet als der gegebene Automat und deshalb zu diesem nicht äquivalent ist.

3. Vervollständigung

Lemma 1. *Zu jedem (unvollständigen) Automaten* $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$ *existiert eindeutig ein vollständiger Automat* $A^0 = (X^0, Y^0, \delta^0, \lambda^0)$ *mit* $X^0 = X$, $S^0 = S_e \cup \{0\}$ $(0 \notin S)$ *und* $Y^0 = Y \cup \{1\}$ $(1 \notin Y)$, *so daß*

$$\bigwedge_{s \in S^0} \bigwedge_{x \in X^*} [x \in L(s) \Leftrightarrow \lambda^0(s, x) = \lambda(s, x)] \wedge \qquad (*)$$

$$[x \neq \Lambda \Rightarrow (\delta^0(s, x) \neq 0 \Leftrightarrow s \in D_e(x) \wedge x \in L(s))]$$

A^0 *heiße die Vervollständigung von* A.

Beweis. Wir definieren λ^0 und δ^0 folgendermaßen:

$$\bigwedge_{s \in S^0} \bigwedge_{x \in X} \lambda^0(s, x) := \begin{cases} \lambda(s, x), & \text{falls } x \in L(s) \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\bigwedge_{s \in S^0} \bigwedge_{x \in X} \delta^0(s, x) := \begin{cases} \delta(s, x), & \text{falls } s \in D_e(x) \text{ und } x \in L(s) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist offensichtlich A^0 vollständig. Um $(*)$ nachzuweisen, sei $s_1 := s \in S_e$ und $x = x_1 \ldots x_n \in X^*$ mit $x_i \in X$ ($n \geqslant 2$, sonst ist nichts zu beweisen). Ist $x \in L(s)$, so ist $s_{i+1} := \delta(s_i, x_i) \in S_e$ für $i = 1, \ldots, n-1$ und $\lambda(s_i, x_i)$ für $i = 1, \ldots, n$ definiert. Dann gilt $\lambda^0(s_i, x_i) \neq 1$ für $i = 1, \ldots, n$, also $\lambda^0(s, x) = \lambda^0(s_1, x_1) \ldots \lambda^0(s_n, x_n) = \lambda(s_1, x_1) \ldots \lambda(s_n, x_n) \in Y^*$. Ist umgekehrt $\lambda^0(s, x) \in Y^*$, so ist $s = s_1 \neq 0$ sowie $s_{i+1} := \delta^0(s_i, x_i) \neq 0$ für $i = 1, \ldots, n-1$ und $\lambda^0(s_i, x_i) \neq 1$, also $\lambda(s_i, x_i) = \lambda^0(s_i, x_i)$ für $i = 1, \ldots, n$ definiert, so daß $x \in L(s)$ gilt. Der Rest von $(*)$ ergibt sich unmittelbar aus der Definition von δ^0. Ebenso erkennt man sofort, daß aufgrund von $(*)$ der Automat A^0 eindeutig bestimmt ist.

Korollar 1.1. A *ist isomorph zu dem Teilautomaten* $A' = (X, S_e, Y, \delta^0/S_e, \lambda^0/S_e)$ *von* A^0.
Der Beweis folgt ohne weiteres aus $(*)$. Man beachte aber, daß zwar $\lambda^0/S_e = \lambda_e$, aber nicht notwendig $\delta^0/S_e = \delta_e$ ist.

Bemerkung. Diese Vervollständigung eines unvollständigen Automaten durch Adjunktion eines Zustandes entspricht, abgesehen von der Beschränkung auf den eigentlichen Teilautomaten, sowohl der bekannten normalen Ein-Punkt-Vervollständigung einer partiellen Algebra als auch der aus der Theorie der Halbgruppen bekannten Idee von V. V. Vagner [8] (Theorem 2.3), einer Halbgruppe von partiellen Transformationen einer Menge (hier des Transitionsmonoids des Automaten) durch Hinzunahme eines Elements zur Menge eine isomorphe Halbgruppe von totalen Transformationen der vergrößerten Menge zuzuordnen; in unserem Falle kommt noch eine durch das Ausgabeverhalten des Automaten bedingte Änderung des Transitionsmonoids hinzu. Daß sich das Transitionsmonoid eines unvollständigen Automaten durch Hinzunahme eines Zustandes in ein Monoid totaler Transformationen umwandeln läßt, hat auch schon Narasimhan [5] bemerkt.

Korollar 1.2. *Seien A^0, B^0 die Vervollständigungen der Automaten A, B, dann gilt:*

(i) $A \simeq B \Leftrightarrow A^0 \simeq B^0$.

(ii) $A \gtrsim B \Leftrightarrow A^0 \gtrsim B^0$.

(iii) $A \equiv B \Leftrightarrow A^0 \equiv B^0$.

(iv) A reduziert $\Leftrightarrow A^0$ reduziert.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus Lemma 1.

Lemma 2. *Ist A ein (unvollständiger) Automat, $(A^0)_m$ der minimale Automat zu A^0 und A_m irgendein minimaler Automat mit $A_m \equiv A$, so gilt für die Vervollständigung $(A_m)^0$ von A_m: $(A_m)^0 \simeq (A^0)_m$.*

Beweis. Aus der Reduktionstheorie der vollständigen Automaten und Korollar 1.2 (iii) folgt die Existenz eines Homomorphismus h von $(A_m)^0$ auf $(A^0)_m$. Sei $B := h\,(A_m)$. Dann ist offenbar $(A^0)_m = B^0$ und $B \equiv A_m$. Aus der Minimalität von A_m folgt daher $B \simeq A_m$, so daß nach Korollar 1.2 (i) gilt $(A^0)_m = B^0 \simeq (A_m)^0$.

Jetzt sind die gestellten Fragen schnell beantwortet.

4. Resultate

Satz 1. *Zu jedem (unvollständigen) Automaten A existiert bis auf Isomorphie eindeutig ein äquivalenter minimaler Automat A_m; dieser ist reduziert und homomorph reduziert.*

Ferner ist jeder zu A äquivalente reduzierte bzw. homomorph reduzierte Automat minimal.

$z\,(A_m)$ ist gleich der Anzahl der verschiedenen Automatenabbildungen λ_s von A.

Beweis. Die Existenz eines minimalen Automaten $A_m \equiv A$ folgt, wie schon bemerkt, aus der Endlichkeit von $z\,(A)$. Nach Lemma 2 ist $(A_m)^0 \simeq (A^0)_m$, also $(A_m)^0$ bis auf Isomorphie eindeutig, so daß nach Korollar 1.2 (i) auch A_m bis auf Isomorphie eindeutig festliegt.

Natürlich ist A_m homomorph reduziert, und da $(A_m)^0$ reduziert ist, muß es nach Korollar 1.2 (iv) auch A_m sein, woraus auch die Behauptung über $z\,(A_m)$ folgt.

Ist nun B reduziert bzw. homomorph reduziert mit $B \equiv A$, so ist nach Korollar 1.2 auch $B^0 \equiv A^0$ reduziert bzw. homomorph reduziert, also $B^0 \simeq (A^0)_m \simeq (A_m)^0$ wegen Lemma 2 und somit, wieder nach Korollar 1.2 (i) $B \simeq A_m$.

Korollar. *Ist A ein Automat, A_m der minimale Automat zu A und B ein Automat mit $B \equiv A$, so gibt es einen Homomorphismus von B auf A_m.*
Zum Beweis hat man nur zu beachten, daß ein minimales homomorphes Bild von B homomorph reduziert ist.

Satz 2. *Die folgende Vorschrift liefert einen Algorithmus zur Bestimmung des minimalen zum Automaten A äquivalenten Automaten.*

1. Man bilde den eigentlichen Teilautomaten A_e von A durch Weglassen der uneigentlichen Zustände.

2. Man bilde A^0 wie im Beweis von Lemma 1.

3. Man konstruiere den minimalen Automaten $(A^0)_m \simeq (A_m)^0$ zu (dem vollständigen Automaten) A^0 mit Hilfe eines der bekannten Algorithmen.

4. Man bilde den Teilautomaten $A_m = (X, S_m, Y, \delta^0_m/S_m, \lambda^0_m/S_m)$ von $(A_m)^0 = (X, S^0_m, Y^0, \delta^0_m, \lambda^0_m)$ im Sinne von Korollar 1.1.

Der Beweis ergibt sich sofort aus den Lemmata 1 und 2 und der klassischen Theorie der vollständigen (deterministischen) Automaten.

5. Ergänzende Bemerkungen

Die obigen Überlegungen lassen sich in abgewandelter Form auch durchführen, wenn man die Erweiterung des Definitionsbereichs von λ auf eine passende Teilmenge von $S \times X^*$ in anderer Weise als in 1. vornimmt.

Definiert man z. B. unter den gleichen Voraussetzungen wie in 1. etwa $\lambda (s, x) = \lambda (s_n, x_n)$ (vgl. [4], Chap. 7), so sind nur einige der weiteren Definitionen aus 1. sinngemäß abzuändern, und man hat jetzt die entsprechende Theorie für den vollständigen Fall heranzuziehen (vgl. [4]). Wie man bei anderen Erweiterungen des Definitionsbereichs von λ vorgehen kann, ist in [1], Abschnitt 6 dargestellt, dort wird auch noch auf die Zustandsreduktion unvollständiger erkennender Automaten eingegangen.

Literatur

[1] Brauer, W.: Zur Zustandsreduktion unvollständiger Automaten, Seminarber. d. Inst. f. Theorie d. Automaten u. Schaltnetzwerke d. Ges. f. Math. u. Datenverarbeitung, Bonn, **6** (1968).

[2] Ginsburg, S.: An Introduction to Mathematical Machine Theory, Reading, Massachusetts: Addison-Wesley. 1962.

[3] Gluschkow, W. M.: Theorie der abstrakten Automaten, Berlin: Deutscher Verlag d. Wiss. 1963.

[4] Miller, R. E.: Switching Theory, Vol. 2, New York: Wiley. 1965.

[5] Narasimhan, R.: Minimizing Incompletely Specified Sequential Switching Functions, IRE Trans. on Electr. Computers **10**, 531–532 (1961).
[6] Schmidt, J.: Allgemeine Algebra, Vorlesungsausarbeitung, Bonn. 1966.
[7] Schmitt, A.: Zur Theorie der nichtdeterministischen und unvollständigen Automaten, Comp. **4**, 56–74 (1969).
[8] Vagner, V. V.: Representations of Ordered Semigroups, Amer. Math. Soc. Translations (2) **36**, 295–336 (1964).

Dr. Wilfried Brauer
Institut für Theorie der Automaten und Schaltnetzwerke
der Gesellschaft für Mathematik
und Datenverarbeitung m. b. H., Bonn
D-5201 Birlinghoven (Schloß)
Bundesrepublik Deutschland

Berichtigung

Zu E. Fehlberg: Klassische Runge-Kutta-Formeln fünfter und siebenter Ordnung mit Schrittweiten-Kontrolle, Computing **4**, 93–106 (1969).

Tabelle 2 auf Seite 103 enthält einen Druckfehler: Der Koeffizient β_{124} lautet statt 4494/1025 richtig 4496/1025 ($= \beta_{104}$). Herr Doz. Dr. J. Maczynski aus Warszawa, Polen, hat mich dankenswerterweise auf diesen Druckfehler aufmerksam gemacht.

Eigentümer, Herausgeber und Verleger: Springer-Verlag, A-1010 Wien, Mölkerbastei 5. — Für den Textteil verantwortlich: Dr. W. Schwabl, A-1010 Wien, Mölkerbastei 5. — Für den Anzeigenteil verantwortlich: Alois Hailwax, A-1030 Wien, Paracelsusgasse 8. — Druck: Paul Gerin, A-1021 Wien, Zirkusgasse 13.