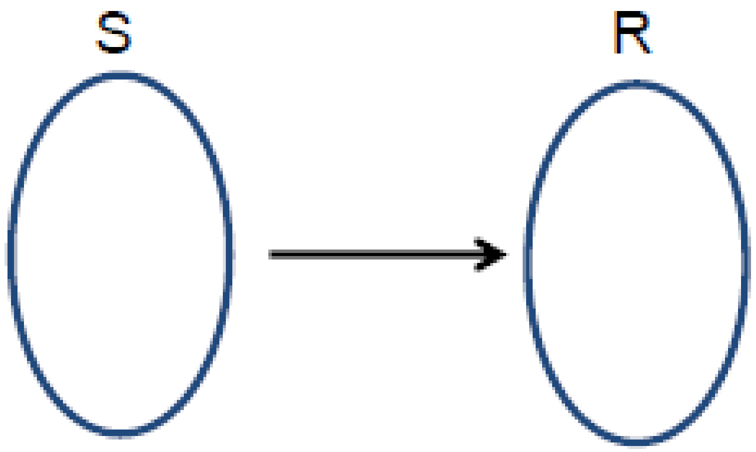
VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

DOCENTE: JOHANNA TROCHEZ GONZALEZ

INSTITUTO TECNOLÓGICO METROPOLITANO

VARIABLE ALEATORIA DISCRETA (V.A)

Es una variable que asume valores numéricos asociados con la salida aleatoria de un experimento, donde uno y solo un valor numérico es asignado a cada punto muestral. El dominio de una v.a es el espacio muestral y cuyo rango es el conjunto de números reales



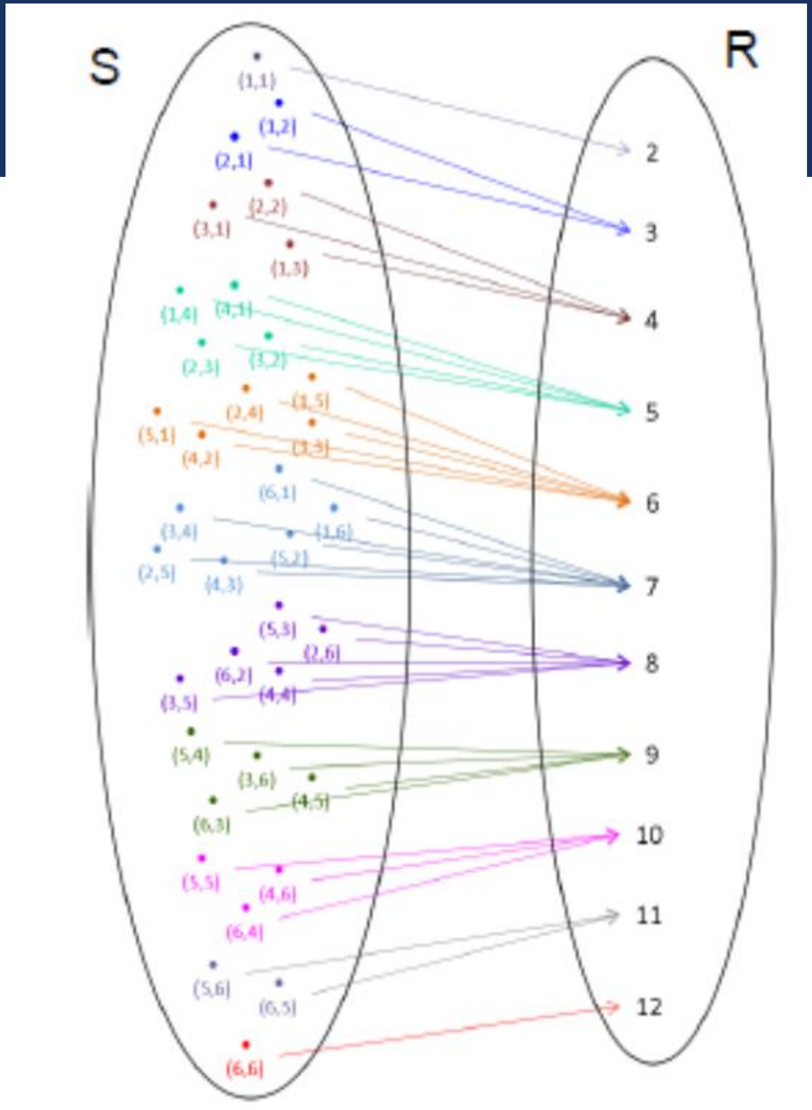
EJEMPLOS DE VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

- Número de ventas
- Número de llamadas
- Personas en línea
- Errores por pagina
- Número de hijos por familia

EJEMPLO

- Se lanzan dos dados: sea x la variable aleatoria obtenida al sumar el par de números obtenidos en los dos dados.

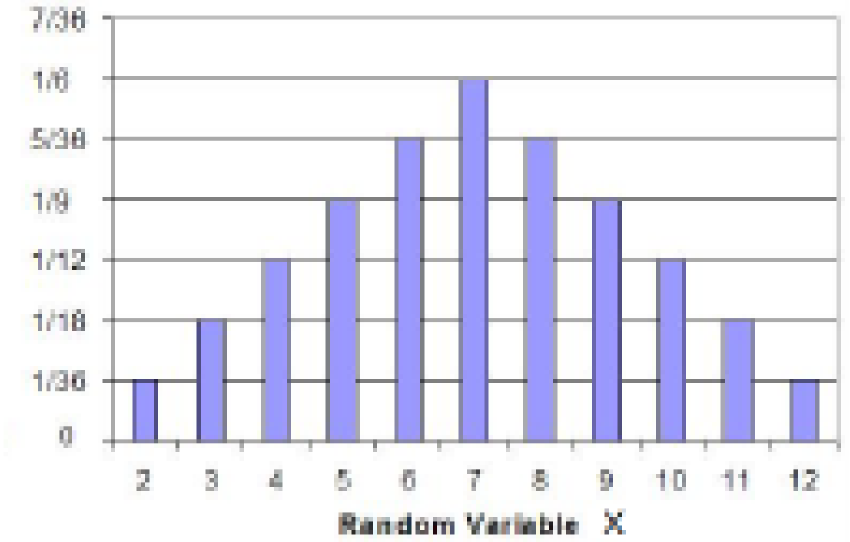
	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)



X	P(X=x)
2	1/36
3	2/36
4	3/36
5	4/36
6	5/36
7	6/36
8	5/36
9	4/36
10	3/36
11	2/36
12	1/36

FUNCION DE DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD (PDF)

La función de distribución de probabilidad es un grafico tabla o formula que especifica la probabilidad asociada con cada posible salida de la variable aleatoria.



X	P(X=x)
2	1/36
3	1/18
...	
7	1/6
...	
11	1/18
12	1/36

$$P(X = x) = f(x)$$

DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD DE X

- La *distribución de probabilidad de X* dice cómo está distribuida (asignada) la probabilidad total de 1 entre los varios posibles valores de *X*.

CONDICIONES DE UNA PDF

1. $f(x_i) \geq 0$
2. $\sum_{i=1}^{x} f(x_i) = 1$
3. $f(x_i) = P(X = x_i)$

EJEMPLO

- Una gasolinera tiene seis bombas. Sea X el número de bombas que están en servicio a una hora particular del día. Suponga que la distribución de probabilidad de X es como se da en la tabla siguiente;

x	0	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	0.05	0.10	0.15	0.25	0.20	0.15	0.10

- Halle la probabilidad de que cuando mucho dos bombas estén en servicio:

$$P(X \leq 2) = P(X = 0 \text{ o } 1 \text{ o } 2) = p(0) + p(1) + p(2) = 0.05 + 0.10 + 0.15 = 0.30$$

- Halle la probabilidad de que por lo menos 3 bombas
- El cual es complementario a que cuando mucho hallan dos bombas en servicio

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0.30 = 0.70$$

La probabilidad de que entre 2 y 5 bombas inclusive estén en servicio

$$P(2 \le X \le 5) = P(X = 2, 3, 4 \text{ o } 5) = 0.15 + 0.25 + 0.20 + 0.15 = 0.75$$

La probabilidad de que el numero de bombas este estrictamente entre 2 y 5 es

$$P(2 < X < 5) = P(X = 3 \text{ o } 4) = 0.25 + 0.20 = 0.45$$

EJEMPLO

- Suponga que f(x) representa una función de densidad de probabilidad dada por:

$$f(x) = \frac{2x + 1}{25}, \quad x = 0, 1, 2, 3, 4$$

OBTENGA LAS SIGUIENTES PROBABILIDADES:

(a) $P(X = 4)$ $$P(X=4)=f(4)=\frac{2\times4+1}{25}=\frac{9}{25}$$

(b) $P(X \leq 1)$ $$P(X\leq1)=f(0)+f(1)=\frac{2\times0+1}{25}+\frac{2\times1+1}{25}=\frac{4}{25}$$

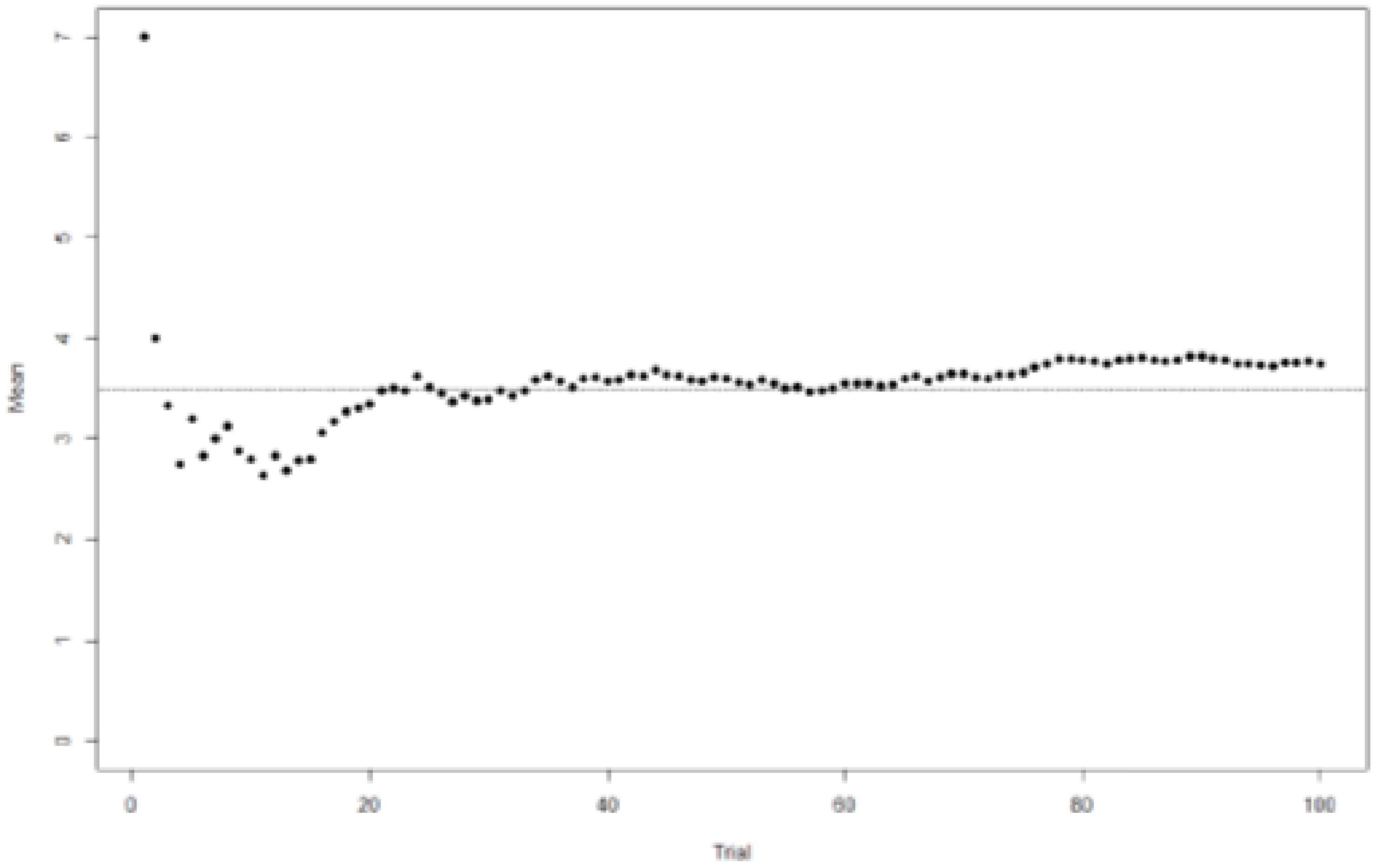
(c) $P(2 \leq X < 4)$ $$P(2\leq X<4)=f(2)+f(3)=\frac{2\times2+1}{25}+\frac{2\times3+1}{25}=\frac{12}{25}$$

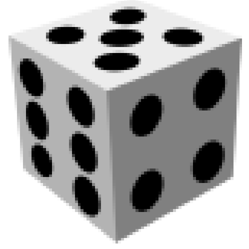
(d) $P(X > -10)$ $$P(X>-10)=f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=1$$

MEDIA O VALOR ESPERADO

$$E(X) = \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i \, f(x_i)$$

ILUSTRACIÓN DE VALOR ESPERADO





VARIANZA Y DESVIACIÓN ESTÁNDAR

- La varianza y desviación estándar de una variable aleatoria discreta esta dada por:

$$Var(X) = \sum_{i \in D} (x_i - \mu)^2 \; f(x_i)$$

$$V(X) = \sigma^2 = \left[\sum_D x^2 \cdot p(x)\right] - \mu^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$Sd(X) = \sqrt{Var(X)}$$

VARIANZA

La varianza de una variable aleatoria x con pdf f(x) y valor medio μ es:

$$V(X) = E(X^2) - \mu^2$$

EJEMPLO

- El número de mensajes enviados por hora sobre una red de computadora tiene la siguiente distribución:

x = number of messages	10	11	12	13	14	15
$f(x)$	0.08	0.15	0.30	0.20	0.20	0.07

DETERMINE LA MEDIA Y LA DESVIACIÓN ESTÁNDAR DE EL NUMERO DE MENSAJES ENVIADOS POR HORAS

$$E(X) = 10(0.08) + 11(0.15) + \cdots + 15(0.07) = 12.5$$

$$V(X) = 10^2(0.08) + 11^2(0.15) + \cdots + 15^2(0.07) - 12.5^2 = 1.85$$

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1.85} = 1.36$$

FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD ACUMULADA

La **función de distribución acumulativa** (fda) $F(x)$ de una variable aleatoria discreta X con función masa de probabilidad $p(x)$ se define para cada número x como

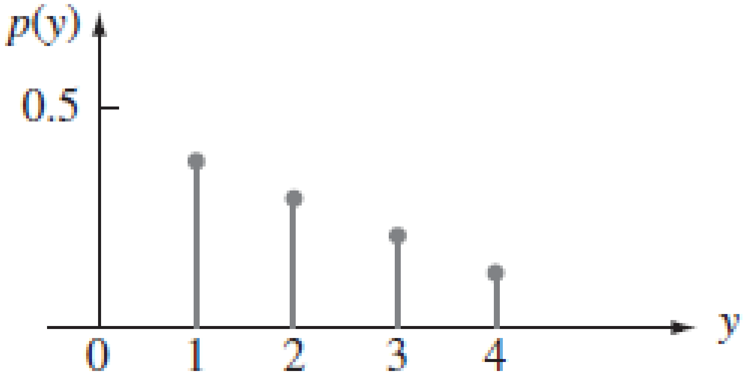
$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{y:\, y \leq x} p(y)$$

Para cualquier número x, F(x) es la probabilidad de que el valor observado de X será cuando mucho x.

EJEMPLO

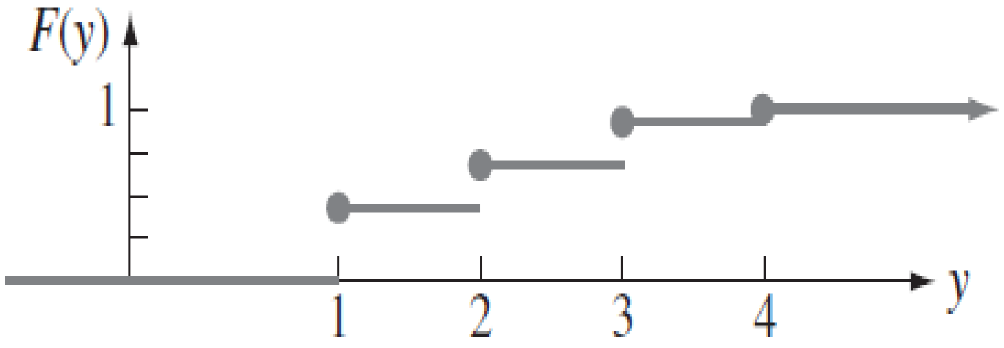
Considere 6 donantes de sangre de los cuales solo dos son O+, sea y la va que denota el numero de ensayos hasta encontrar una persona con este tipo de sangre. La pdf está dada por

y	1	2	3	4
$p(y)$	0.4	0.3	0.2	0.1



FUNCIÓN ESCALONADA

$$F(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 1 \\ 0.4 & \text{si } 1 \leq y < 2 \\ 0.7 & \text{si } 2 \leq y < 3 \\ 0.9 & \text{si } 3 \leq y < 4 \\ 1 & \text{si } 4 \leq y \end{cases}$$



Para una variable aleatoria discreta X, la gráfica de F(x) mostrará un salto con cada valor posible de X y será plana entre los valores posibles. Tal gráfica se conoce como función escalonada.

PROPOSICIÓN PARA VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

- Para dos números cualesquiera *a* y *b* con *a* ≤ *b*.

$$\boldsymbol{P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a-1)}$$

- donde "*a*-" representa el valor posible de *X* más grande que es estrictamente menor que *a*. En particular, si los únicos valores posibles son enteros y si *a* y *b* son enteros, entonces
- Con *a*=*b* se obtiene

$$\boldsymbol{P(x = a) = F(a) - F(a-1)}$$

- $P(x > k) = 1 - P(x \leq k)$
- $P(x \geq k) = 1 - P(x \leq k - 1)$
- $P(x < k) = 1 - P(x \leq k - 1)$
- $P(x = k) = P(x \leq k) - P(x \leq k - 1)$

EJEMPLO

En un taller de servicio automotriz especializado en afinaciones se sabe que 45% de todas las afinaciones se realizan en automóviles de cuatro cilindros, 40% en automóviles de seis cilindros y 15% en automóviles de ocho cilindros. Sea X el número de cilindros en el siguiente carro que va a ser afinado.

- **a.** ¿Cuál es la función masa de probabilidad de X?
- **b.** Realice un histograma de la función masa de probabilidad
- **c.** ¿Cuál es la probabilidad de que el siguiente carro afinado sea de por lo menos seis cilindros? ¿Más de seis cilindros?
- Halle la función acumulada y grafíquela.
- Halle la media y la varianza de la función de probabilidad

VALOR ESPERADO DE UNA FUNCIÓN LINEAL

Si x es una variable aleatoria continua con pdf f(x) con a y b constantes:

$$E[aX + b] = aE[X] + b$$

1. Con cualquier constante a, $E(aX) = a \cdot E(X)$ (considérese $b = 0$).
2. Con cualquier constante b, $E(X + b) = E(X) + b$ (considérese $a = 1$).

VARIANZA DE UNA FUNCIÓN LINEAL

Si x es una variable aleatoria continua con pdf f(x) con a y b constantes

$$V[aX + b] = a^2 V[X]$$

Un distribuidor de enseres para el hogar vende tres modelos de congeladores verticales de 13.5, 15.9 y 19.1 pies cúbicos de espacio de almacenamiento, respectivamente. Sea X la cantidad de espacio de almacenamiento adquirido por el siguiente cliente que compre un congelador. Suponga que X tiene la función masa de probabilidad

x	13.5	15.9	19.1
$p(x)$	0.2	0.5	0.3

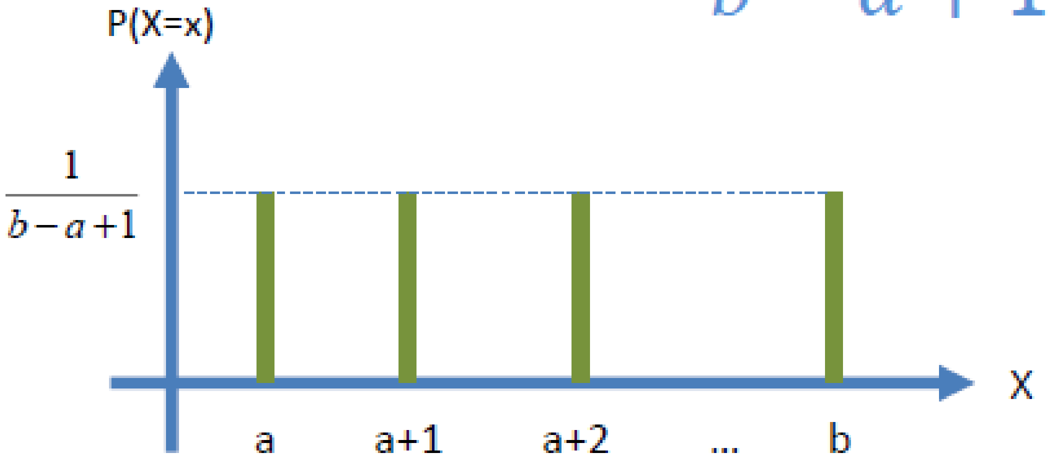
- **a.** Calcule $E(X)$, $E(x^2)$ y $V(X)$.
- **b.** Si el precio de un congelador de X pies cúbicos de capacidad es $25X$ - 8.5, ¿cuál es el precio esperado pagado por el siguiente cliente que compre un congelador?
- **c.** ¿Cuál es la varianza del precio $25X$ - 8.5 pagado por el siguiente cliente?
- **d.** Suponga que aunque la capacidad nominal de un congelador X, la real es $h(X)$=X-0.01X2. ¿Cuál es la capacidad real esperada del congelador adquirido por el siguiente cliente?

- $P(x > k) = 1 - P(x \leq k)$
- $P(x \geq k) = 1 - P(x \leq k - 1)$
- $P(x < k) = 1 - P(x \leq k - 1)$
- $P(x = k) = P(x \leq k) - P(x \leq k - 1)$

DISTRIBUCIÓN UNIFORME DISCRETA

- Sea X una variable aleatoria uniforme discreta con función de distribución de probabilidad dada por

$$P(X = x) = f(x) = \frac{1}{b - a + 1}$$



- Si X sigue una distribución con parámetros a y b, luego:

$$X \sim U(a, b)$$

VALOR ESPERADO Y VARIANZA

- Si x es una variable aleatoria uniforme y discreta con parámetros a y b:

$$E(X) = \frac{b+a}{2} \quad \text{and} \quad V(X) = \frac{(b-a+1)^2-1}{12}$$

Sea X la variable aleatoria que denota el numero de líneas telefónicas en uso, de 48 líneas existentes, que se encuentran en uso en un tiempo particular. Asuma que X es una variable aleatoria encuentre la varianza E(X) y V(X)

$$E(X) = \frac{48+0}{2} = 24$$

$$V(X) = \frac{(48-0+1)^2-1}{12} = 200$$

EXPERIMENTOS DE BERNOULLI

- Son experimentos con solo dos resultados

EXPERIMENTOS BINOMIALES

- Consiste en una secuencia de *n* experimentos llamados *ensayos* **(*n*)**, donde *n* se fija antes del experimento.
- Cada ensayo puede dar por resultado un éxito (*E*) y falla (*F*).
- Cada ensayo es determinado por el éxito o fracaso,
- **X** es el numero de éxitos
- La probabilidad de éxito en cada ensayo es constante **(p)**
- La probabilidad de fracaso está dada por **(q)**
- **p+q=1**
- Las salidas de cada ensayo son independientes

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Una variable aleatoria binomial es el numero de éxitos x en n ensayos repetidos de un experimento binomial, la pdf está dada por:

$$P(X = x) = f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

with $x = 0, 1, 2, \ldots, n$

p es la probabilidad de éxito en un ensayo individual

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL ACUMULADA

$$p = P(X \leq x) = F(x) = \sum_{k=0}^{x} \binom{n}{x} p^{x} (1-p)^{n-x}$$

Con x=0,1,2,3….n

NOTACIÓN

Si x sigue una distribución binomial con parámetros n y p luego:

$$x \sim B(n, p)$$

$$E(X) = n\,p \text{ and } V(X) = n\,p\,(1-p)$$

EJEMPLO

- Cada bus tiene probabilidad de contener daños, Asuma que los buses son independientes sin importan la presencia del daño

- Encuentre la probabilidad de que en los próximos 18 buses exactamente 2 tengan daños
- Luego x es una variable aleatoria binomial con parámetro p=0.1 y n=18 luego;

$$P(X = 2) = \binom{18}{2} 0.1^2 (1 - 0.1)^{18-2} = 0.284$$

- Determine la probabilidad de que al menos 4 buses tengan daños

$$P(X \geq 4) = \sum_{x=4}^{18} \binom{18}{x} 0.1^{x} (1 - 0.1)^{18-x}$$

- Es mas fácil usar el evento complementario;

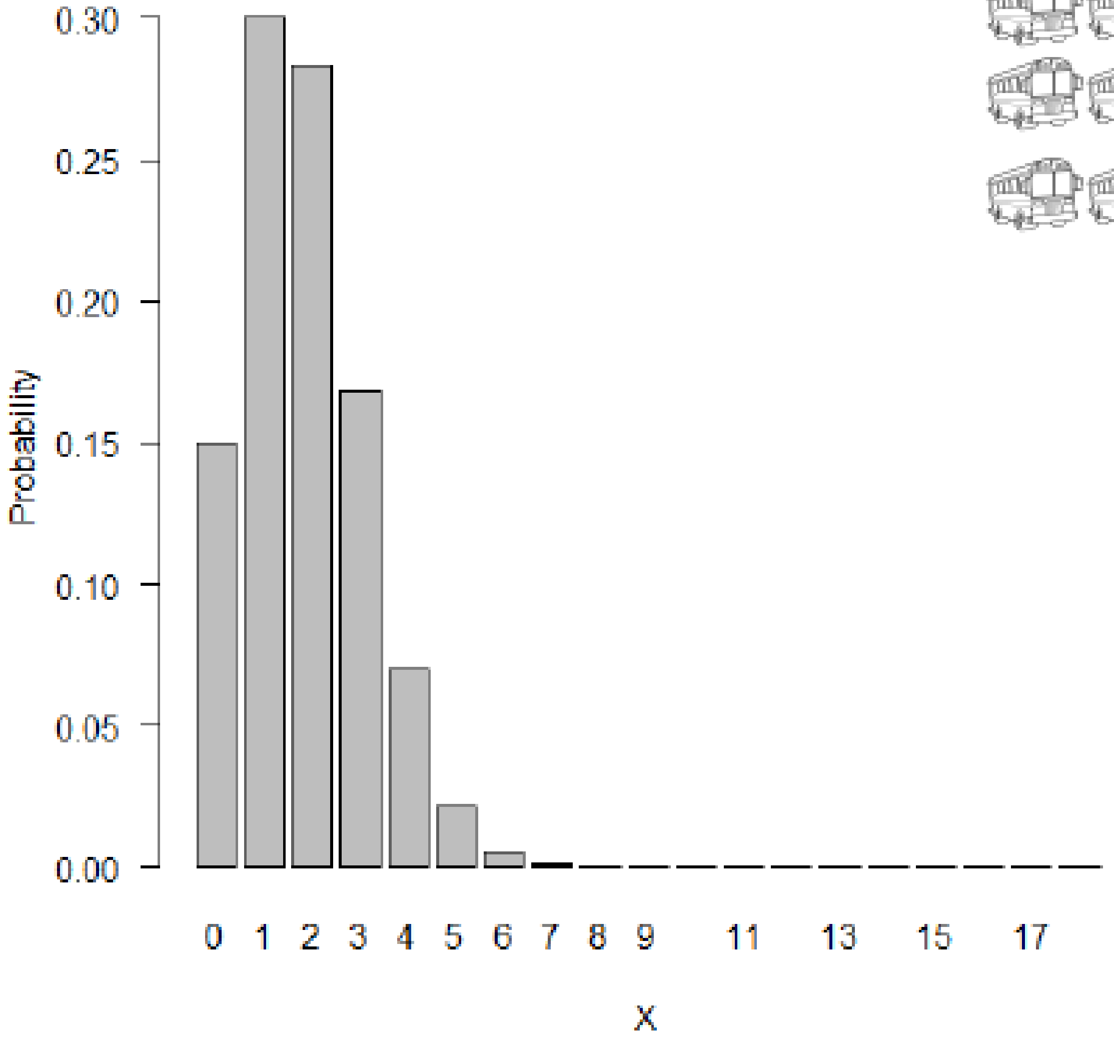
$$P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - \sum_{x=0}^{3} \binom{18}{x} 0.1^x (1 - 0.1)^{18-x}$$

$$P(X \geq 4) = 1 - [0.150 + 0.300 + 0.284 + 0.168]$$

$$P(X \geq 4) = 0.098$$

- En una muestra con n=18 y p=0,1 cual es el numero esperado de buses con daños

$$E(X) = n \times p = 18 \times 0.1 = 1.8\, busses$$


0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
Probability
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 11 13 15 17
X

$n = 18$

$p = 0.1$