FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD CONTINUAS

DOCENTE: JOHANNA TROCHEZ GONZÁLEZ

MSC EN CIENCIAS ESTADÍSTICA

INSTITUTO TECNOLÓGICO METROPOLITANO

VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

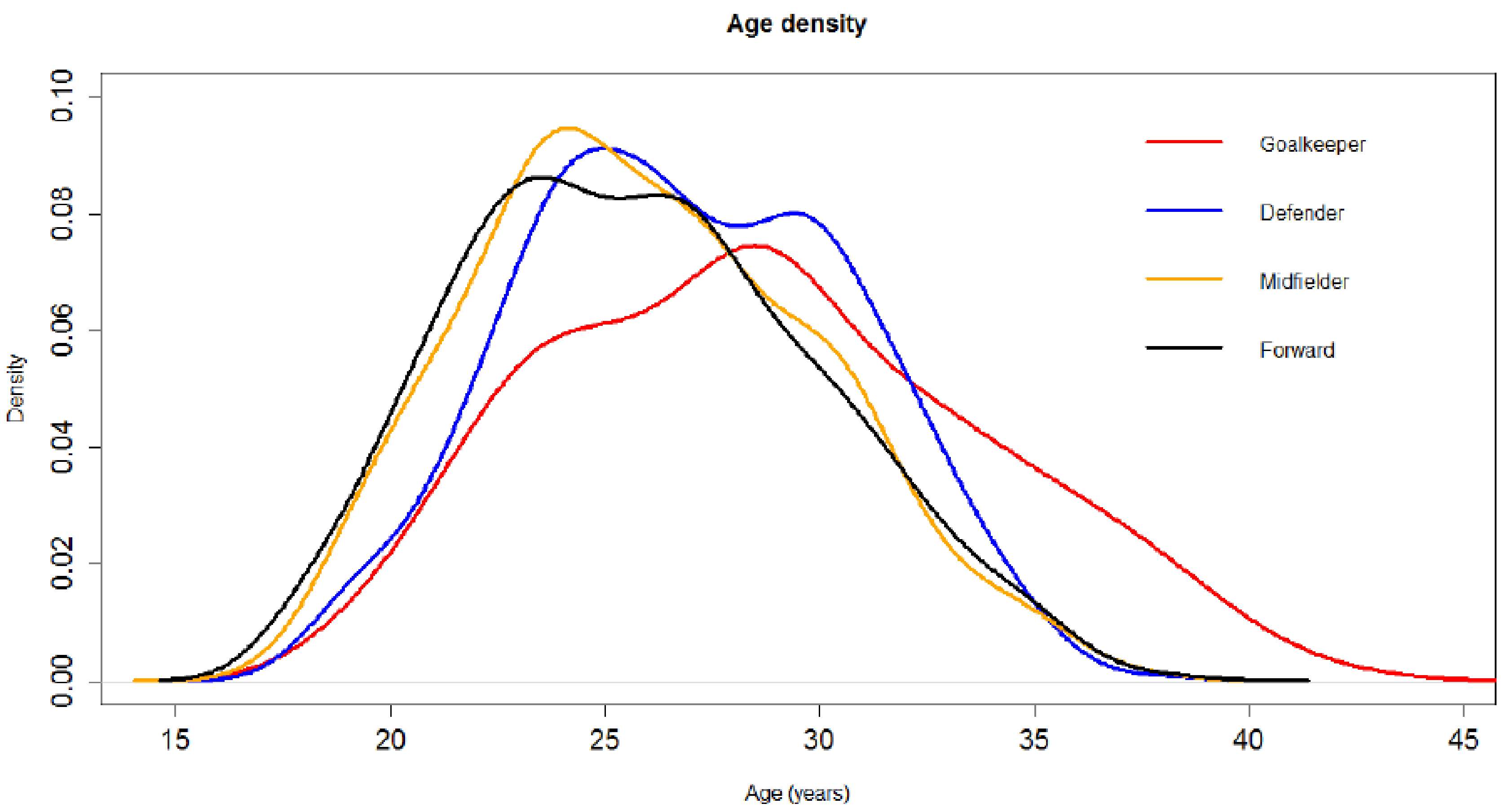
- Velocidad del carro
- La concentración de un químico
- Las alturas de personas en una población
- Consumo de electricidad en kw




VARIABLE ALEATORIA CONTINUA

Una variable aleatoria es **continua** si *ambas* de las siguientes condiciones aplican:

- **1.** Conjunto de todos los valores posibles desde $(-\infty, \infty)$
- **2.** Ningún valor posible de la variable aleatoria tiene probabilidad positiva, esto es, $P(X=c)= 0$ con cualquier valor posible de c.


Age density
Goalkeeper
Defender
Midfielder
Forward
Density
0.00
0.02
0.04
0.06
0.08
0.10
15
20
25
30
35
40
45
Age (years)

FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD

Sea X una variable aleatoria continua. Entonces, una distribución de probabilidad (fdp) de X es una función f(x) tal que para dos números cualesquiera a y b con a ≤ b,

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Es decir, la probabilidad de que X asuma un valor en el intervalo [a, b] es el área sobre este intervalo y bajo la gráfica de la función de densidad,

FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD

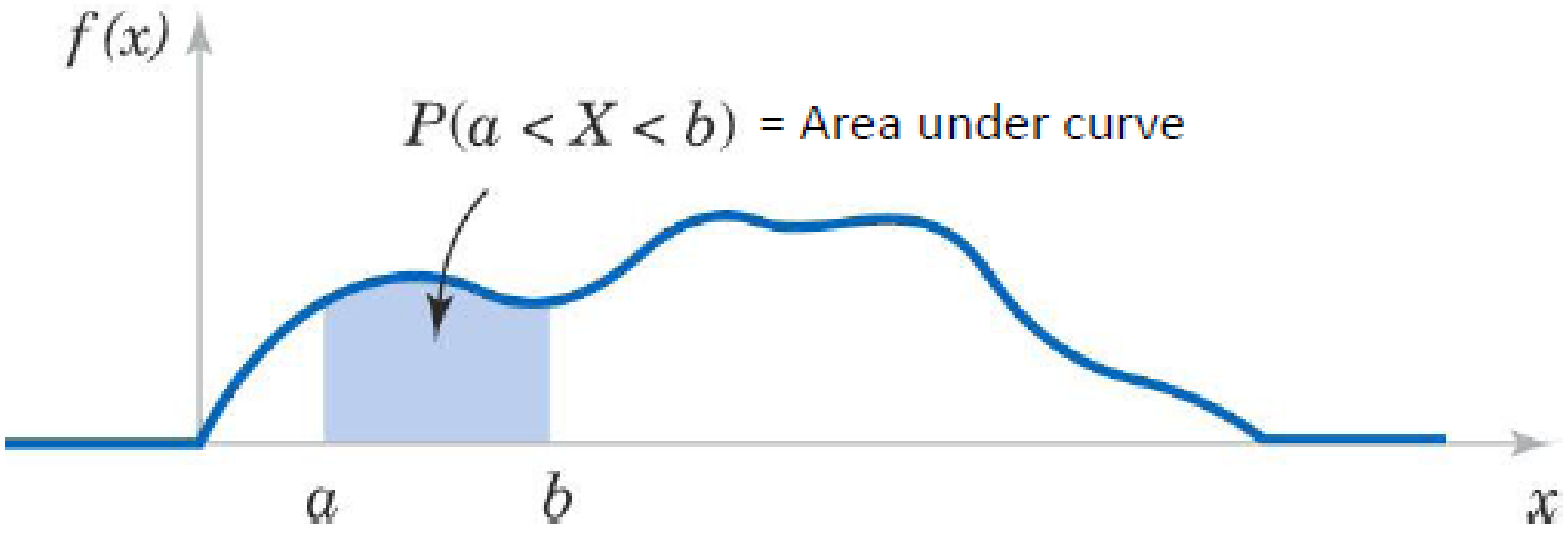


Figure Probability is determined from the area under $f(x)$ from a to b.

PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD

1. $f(x) > 0$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1$

Formulas de Integrales

1. $\int kf(u)\,du = k\int f(u)\,du$

2. $\int [f(u) \pm g(u)]\,du = \int f(u)\,du \pm \int g(u)\,du$

3. $\int du = u + c$

4. $\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$

5. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

6. $\int e^u du = e^u + C$

7. $\int \sin u\,du = -\cos u + C$

8. $\int \cos u\,du = \sin u + C$

9. $\int \tan u\,du = -\ln\,|\sec u + \tan u| + C$

10. $\int \cot u\,du = \ln\,|\sin u| + C$

11. $\int \sec u\,du = \ln\,|\sec u + \tan u| + C$

12. $\int \csc u\,du = -\ln\,|\csc u + \cot u| + C$

13. $\int sec^2\,u\,du = \tan u + C$

14. $\int csc^2\,u\,du = -\cot u + C$

15. $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$

16. $\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$

17. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$

18. $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a} + C$

19. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}arcsec\frac{|u|}{a} + C$

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN ACUMULADA DE UNA VARIABLE ALEATORIA X

$$F(X) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

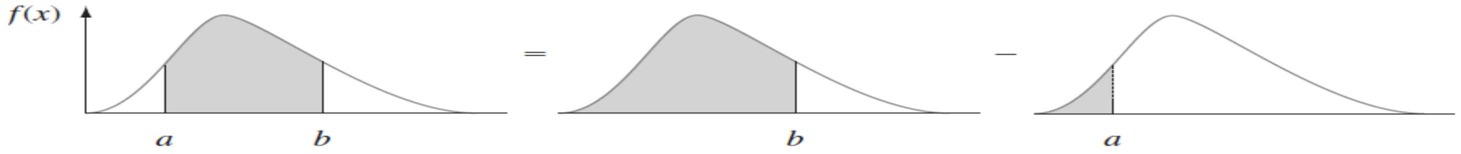
Proposición

Sea x una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad f(x) y función de distribución acumulada F(x). entonces con cualquier número a

$$\boldsymbol{P(x > a) = 1 - F(a)}$$

para dos números cualesquiera a y b con a<b.

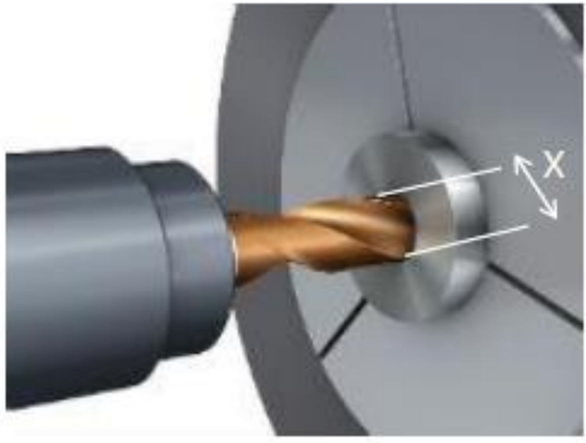
$$\boldsymbol{P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a)}$$



EJEMPLO

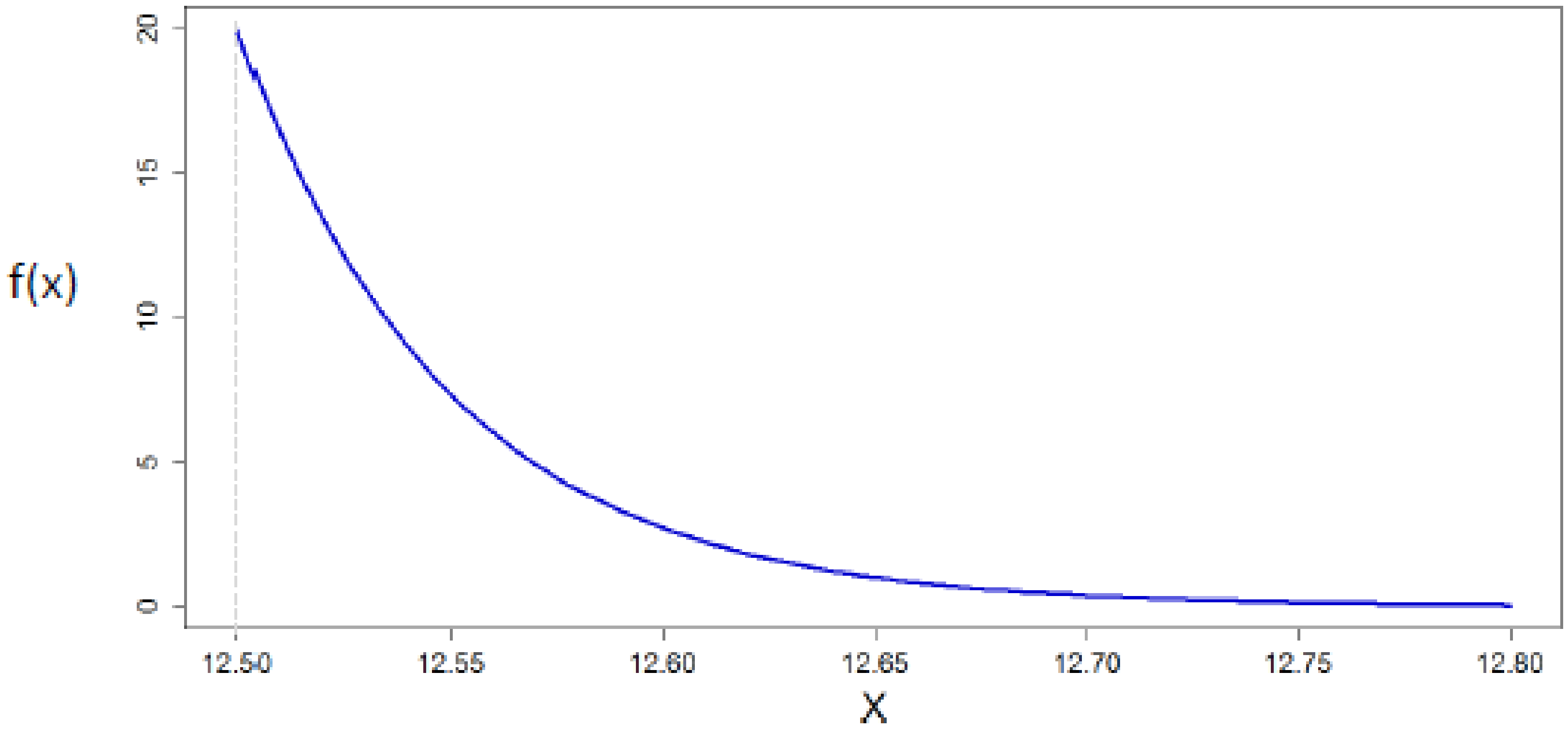
x denota el diámetro del agujero perforado en una hoja de metal, el diámetro objetivo es de 12.5 mm, perturbaciones aleatorias ocasionan agujeros más grandes. Datos históricos muestran que la distribución de x puede ser modelada mediante la función de densidad de probabilidad

$$f(x) = 20e^{-20(x-12.5)} \quad con \quad x > 12.5\, mm$$



Analice la función de distribución de probabilidad:

$$f(x) = 20e^{-20(x-12.5)} \text{ para } x > 12.5\,mm$$

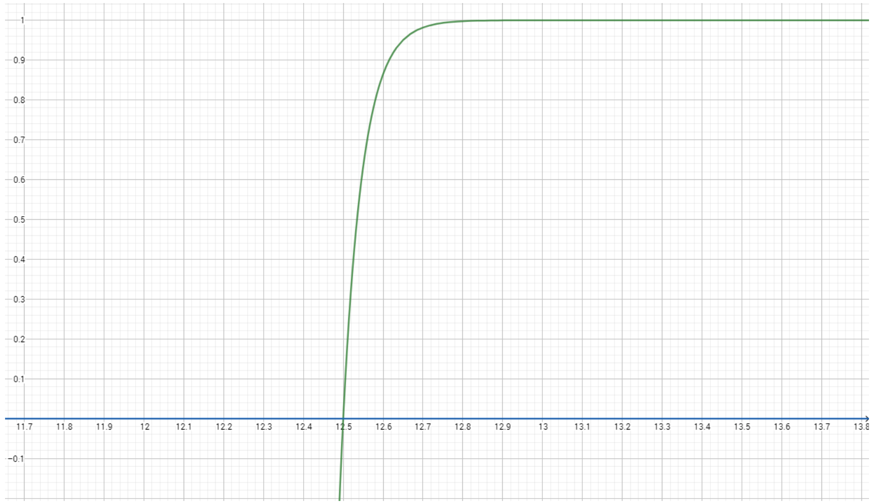


OBTENGA LA FDA

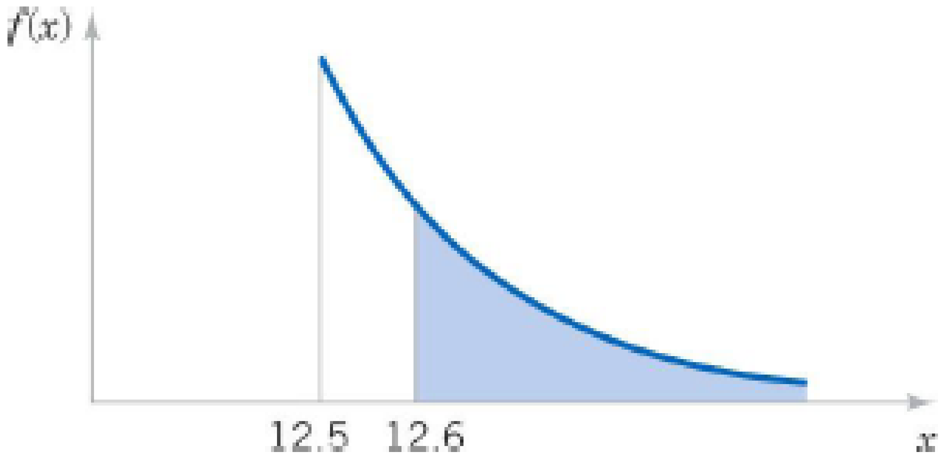
$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

$$F(\mathrm{x}) = \int_{-12.5}^{x} 20e^{-20(x-12.5)}dx$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad con\ x < 12.5 \\ 1 - e^{-20(x-12.5)} \quad con\ x \geq 12.5 \end{cases}$$



Si una parte con diámetro es más grande que 12.6 mm se desecha, ¿Qué proporción de partes se desecha?



$$F(x) = 1 - e^{x}$$

$$P(x > 12.6) = 1 - P(x \leq 12.6)$$

$$P(x > 12.6) = 1 - (1 - e^{-20(x-12.5)})$$

$$= e^{-2}$$

$$P(X > 12.60) = \int_{12.6}^{\infty} 20e^{-20(x-12.5)}dx = 0.135$$

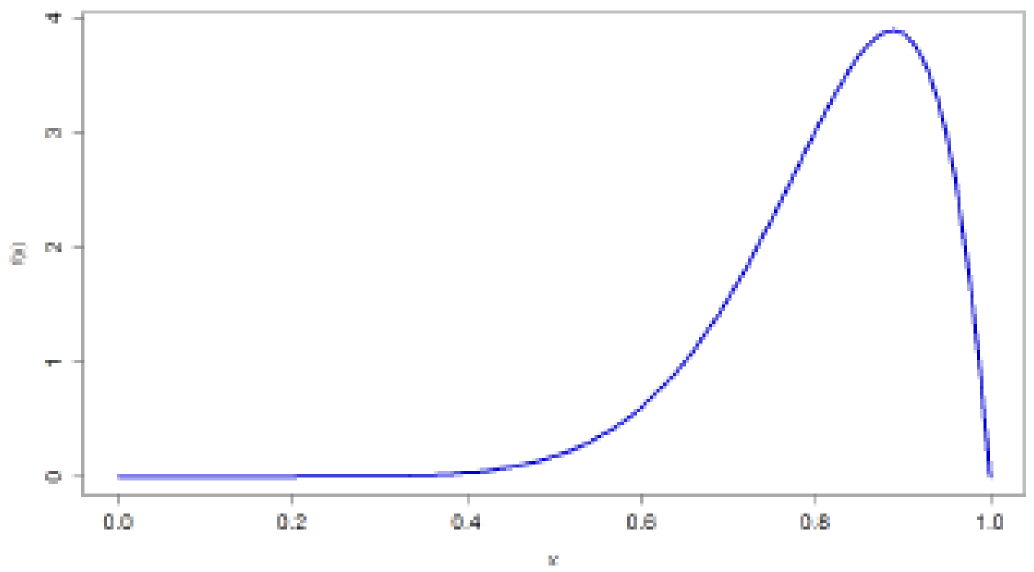
EJEMPLO

Sea x la cantidad de espacio ocupado por un artículo en un contenedor, la pdf de x es:

$$f(x) = \begin{cases} 90x^8(1-x) & if \;\; 0 < x < 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

Grafique la pdf

$$f(x) = \begin{cases} 90x^8(1-x) & if\ \ 0 < x < 1 \\ 0 & otherwisse \end{cases}$$



Obtenga la función de distribución acumulada.

For x<0

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\, du = 0$$

For 0<x<1

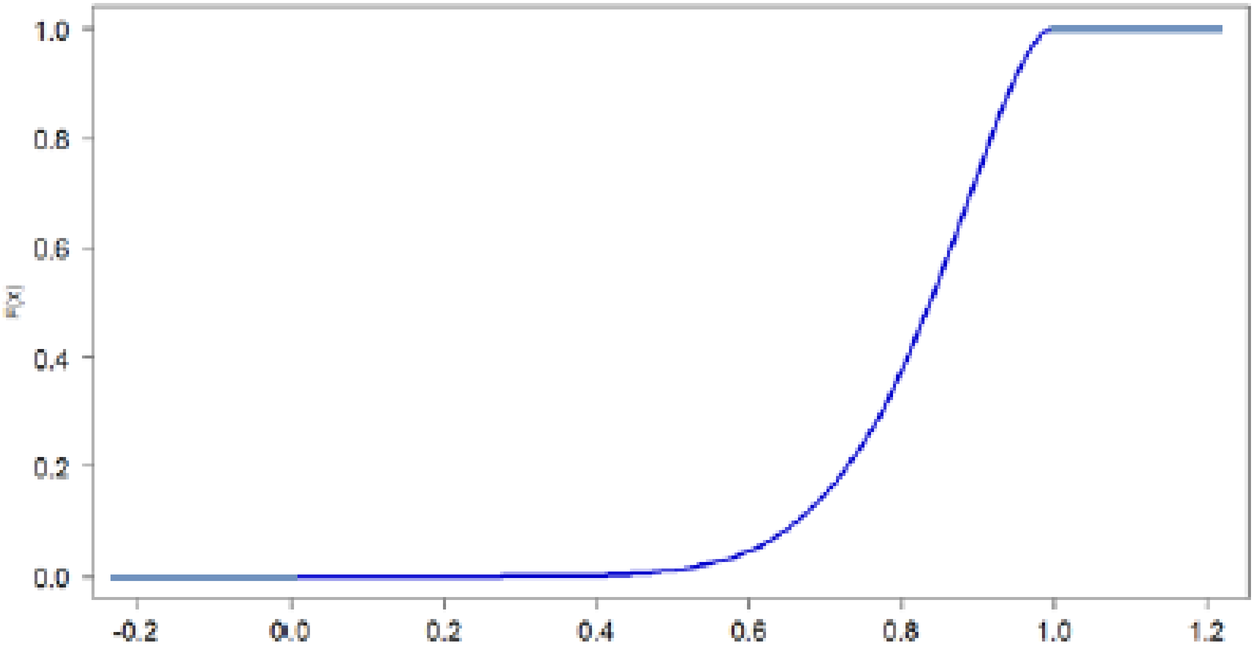
$$F(x) = \int_{0}^{x} 90u^8(1-u)du = x^9(10-9x)$$

For x>1

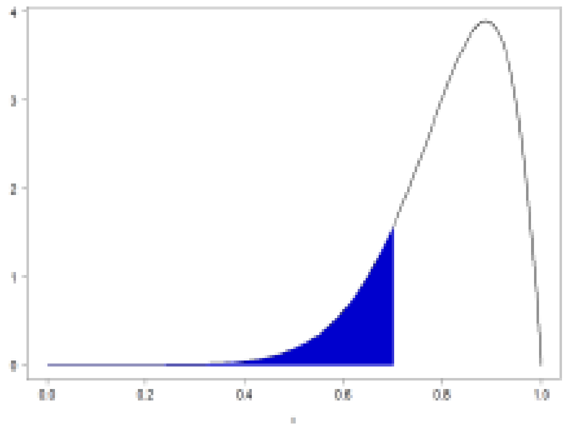
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 90u^8(1-u)du = 1$$

LA FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN ACUMULADA ES:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & if\ x < 0 \\ x^9(10-9x) & if\ 0 < x < 1 \\ 1 & if\ x > 1 \end{cases}$$

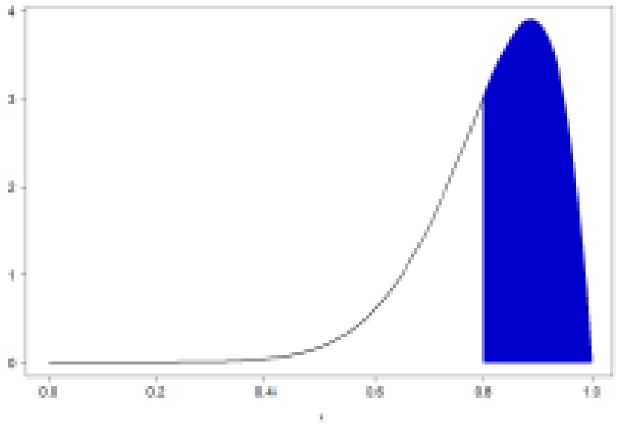


CUÁL ES LA PROBABILIDAD P(X≤0.7)



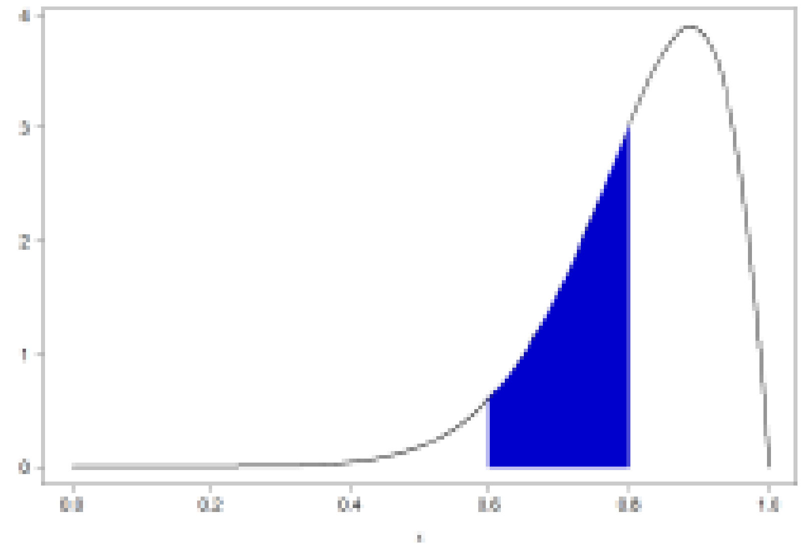
$$P(X < 0.7) = F(0.7) = 0.7^9(10 - 9 \times 0.7) = 0.1496$$

CUÁL ES LA P(X>0.8)



$$P(X > 0.8) = 1 - F(0.8) = 1 - 0.8^9(10 - 9 \times 0.8) = 0.6241$$

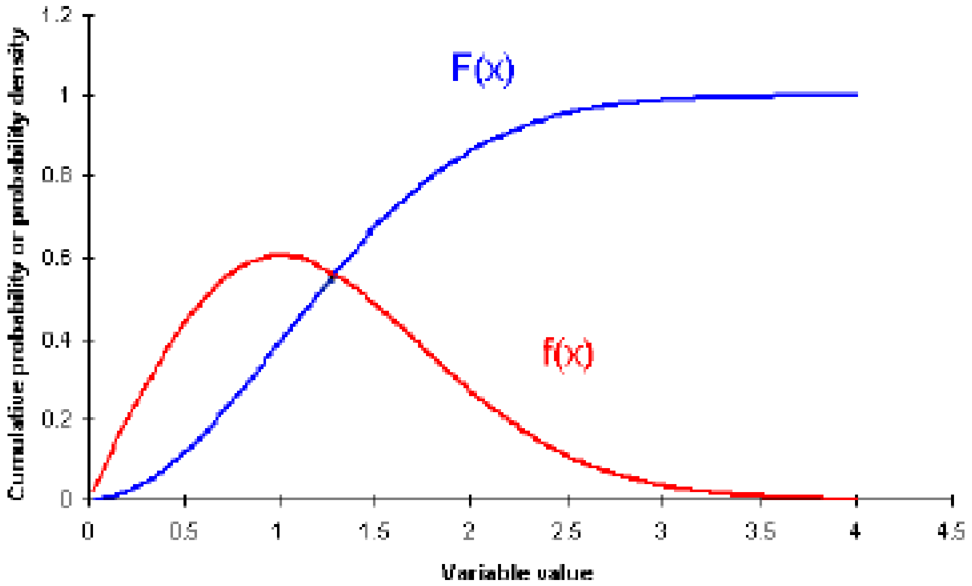
P(0.6<X<0.8)



$$P(0.6 < X < 0.8) = F(0.8) - F(0.6) = 0.3294$$

RELACIÓN ENTRE F(X) Y F(X)

$$f(x) \underset{\text{Derivate}}{\overset{\text{Integrate}}{\rightleftarrows}} F(x)$$



VALOR ESPERADO

El valor esperado para una variable aleatoria x con función de distribución de probabilidad f(x) es:

$$E(X) = \mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} x \ f(x)dx$$

VARIANZA

La varianza de una variable aleatoria x con pdf f(x) y valor medio μ es:

$$V(X) = E(X^2) - \mu^2$$

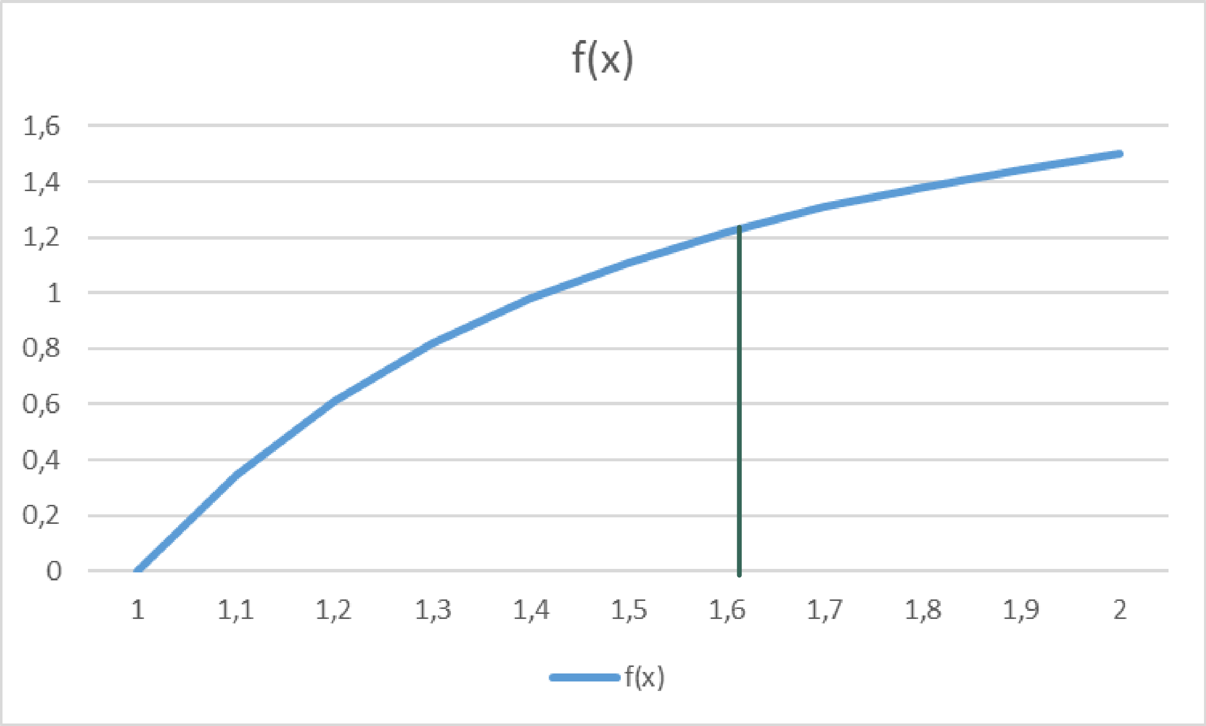
EJEMPLO

La demanda semanal de gas propano (en miles de galones) de una instalación particular es una variable aleatoria *X* con función de densidad de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} 2\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right) & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

1. Grafique la pdf

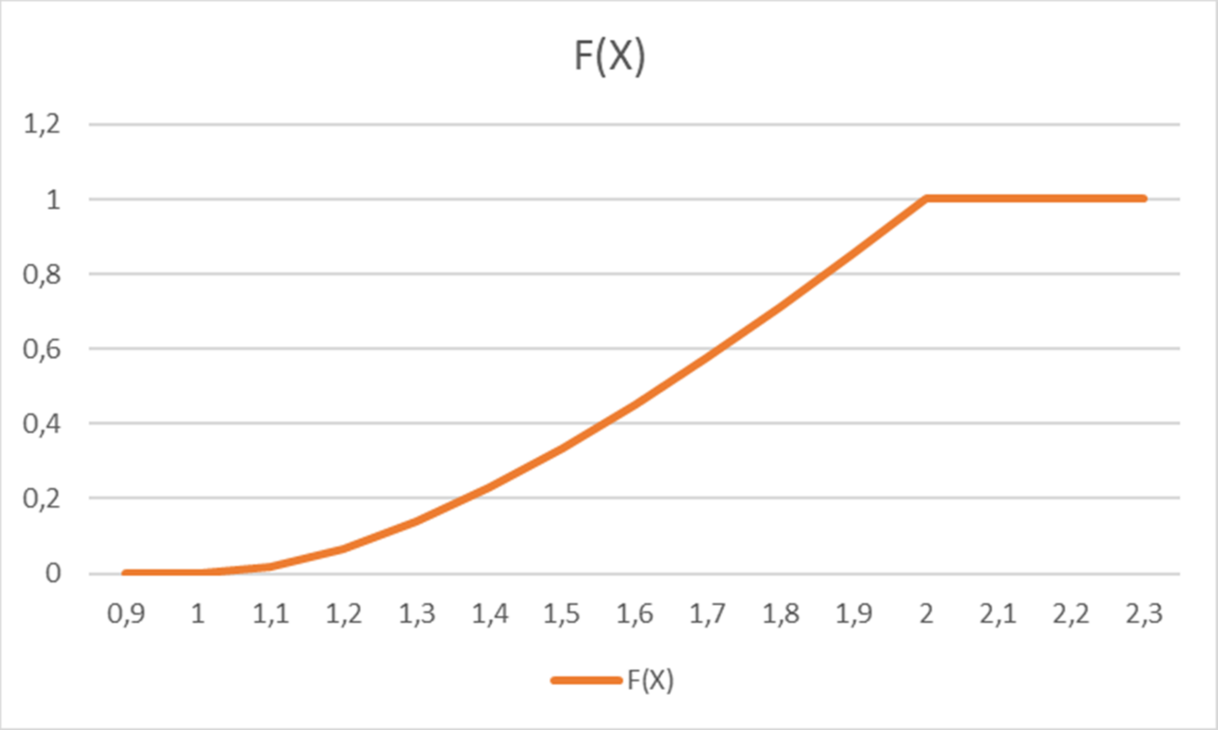
FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD



1. Sea la función de distribución acumulada

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad con\ x < 1 \\ 2\left(x + \frac{1}{x} - 2\right) \quad con \quad 1 \leq x < 2 \\ 1 \quad con\ x \geq 2 \end{cases}$$

1. Grafique la FDA
2. Halle la p(x<1.8), P(x<0.5), p(x<2.5)



DISTIBUCIÓN NORMAL

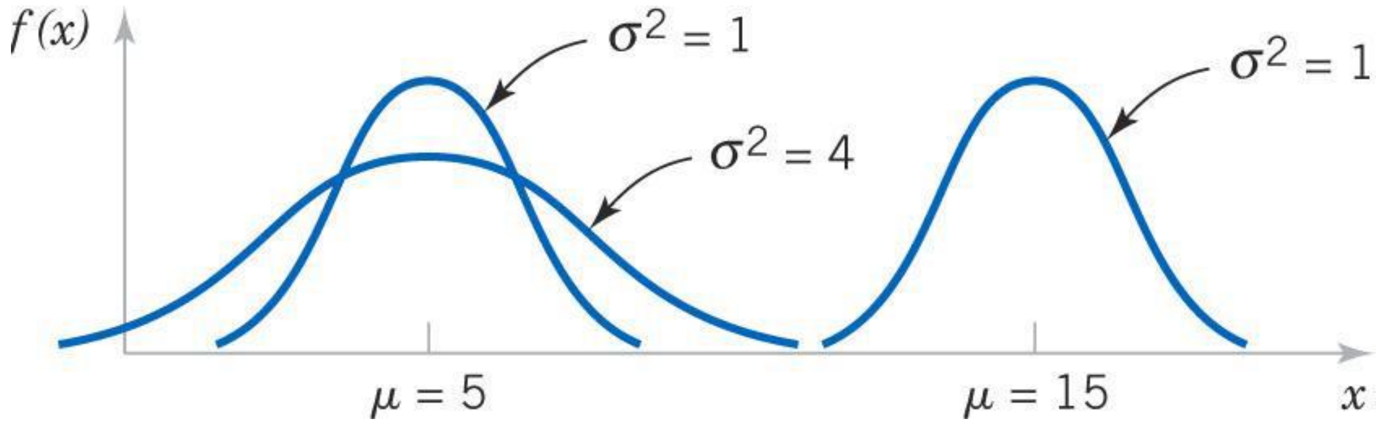
Una distribución ampliamente usada es la distribución normal o gaussiana

VER LA APLICACIÓN

- http://www.disfrutalasmatematicas.com/datos/quincunce.html

PARÁMETROS DE LA DISTRIBUCIÓN

Esta distribución depende de los parámetros de localización y escala, determinados por la media (μ) y la desviación estándar (σ).



FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL

Una variable aleatoria x con

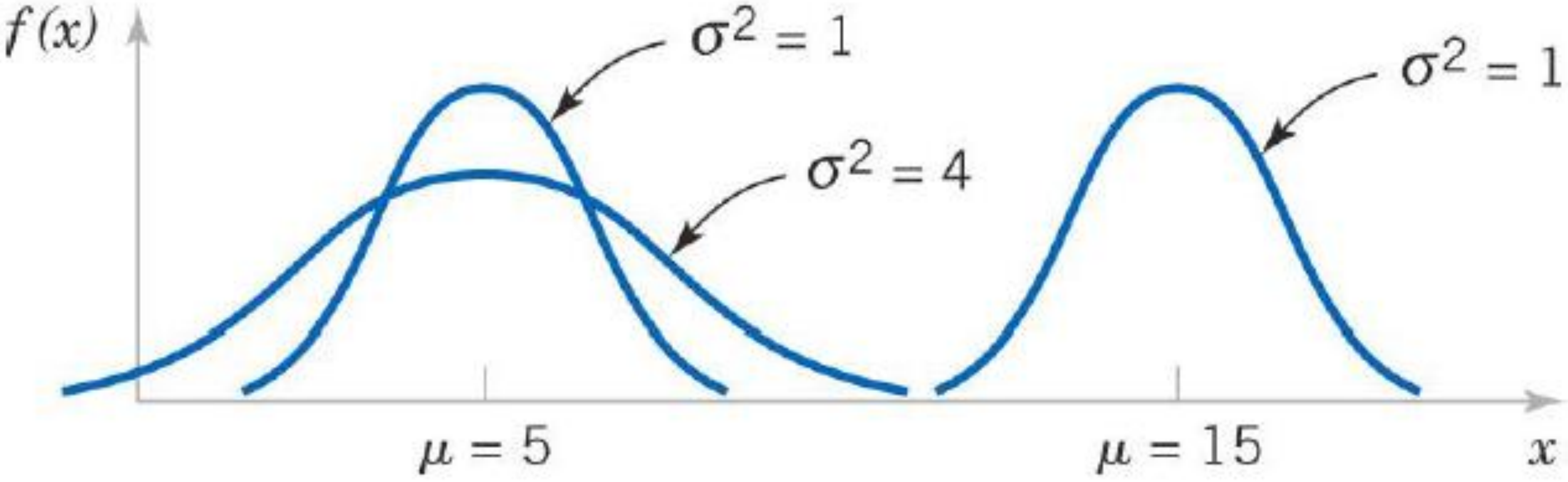
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

es una variable aleatoria con parámetros $\mu \in R$ y $\sigma>0$.

La variable aleatoria se denota de la forma $x \sim N(\mu, \sigma^2)$

VALOR ESPERADO Y VARIANZA

$$E(X) = \mu \quad \text{and} \quad V(X) = \sigma^2$$

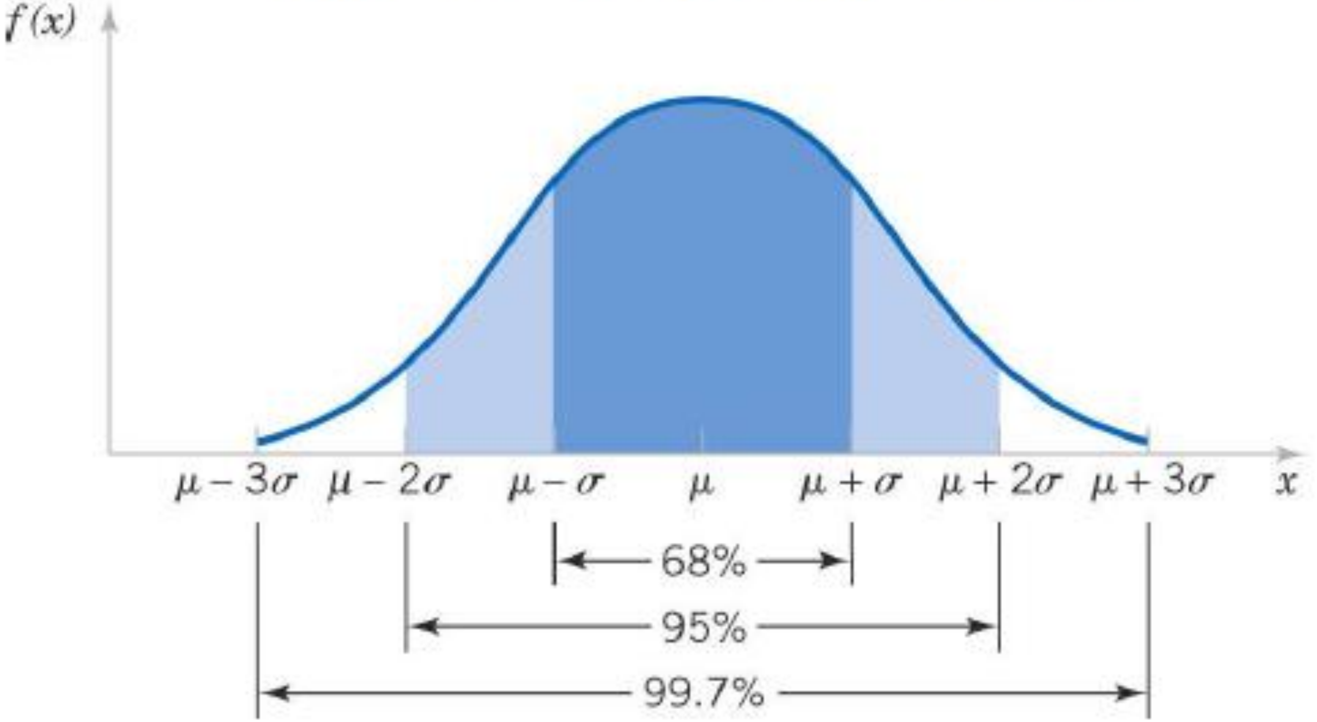


REGLA EMPIRICA

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0.6827$$

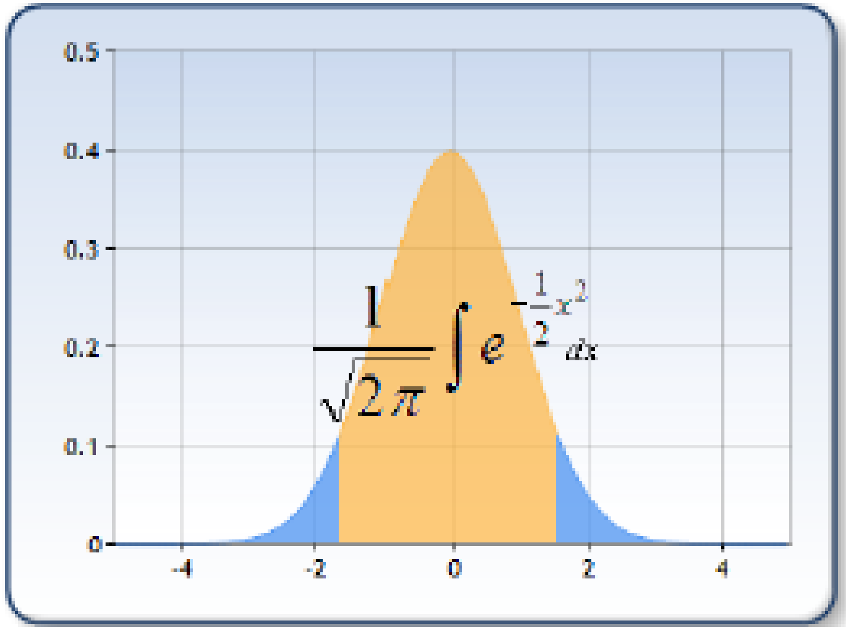
$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0.9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0.9973$$



DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR

Una variable aleatoria normal con $\mu = 0$ y $\sigma = 1$, es llamada una variable aleatoria normal estándar y se denota como z

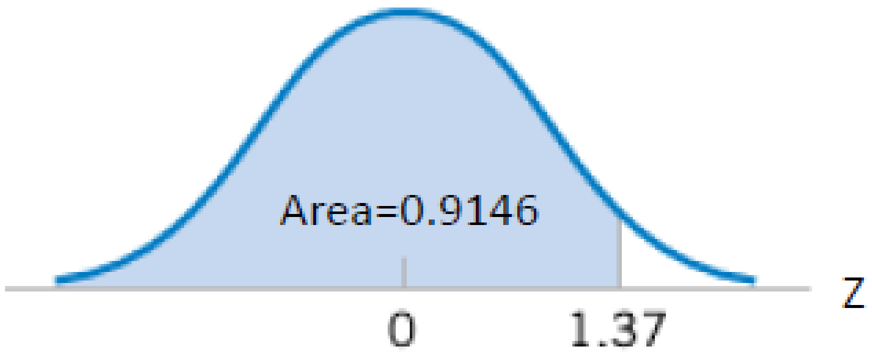


$$z \sim N(0,1)$$

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN ACUMULADA

La función de distribución acumulada se denota como

$$\Phi(x) = P(Z < z) = F(z)$$

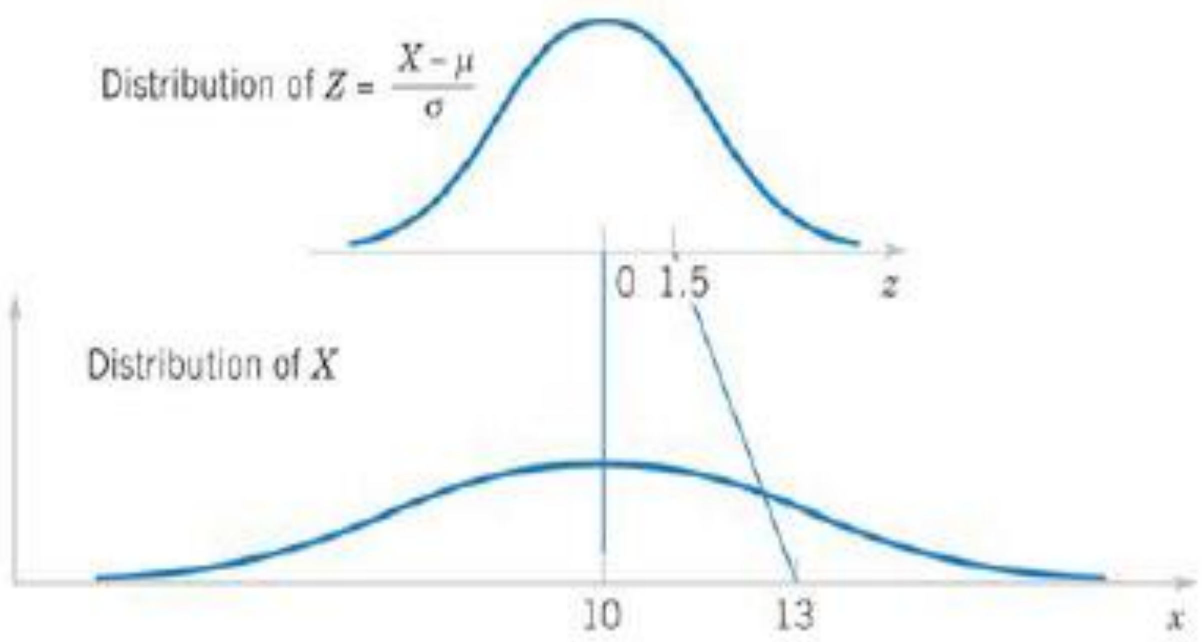


COMO ESTANDARIZAR UNA VARIABLE ALEATORIA?

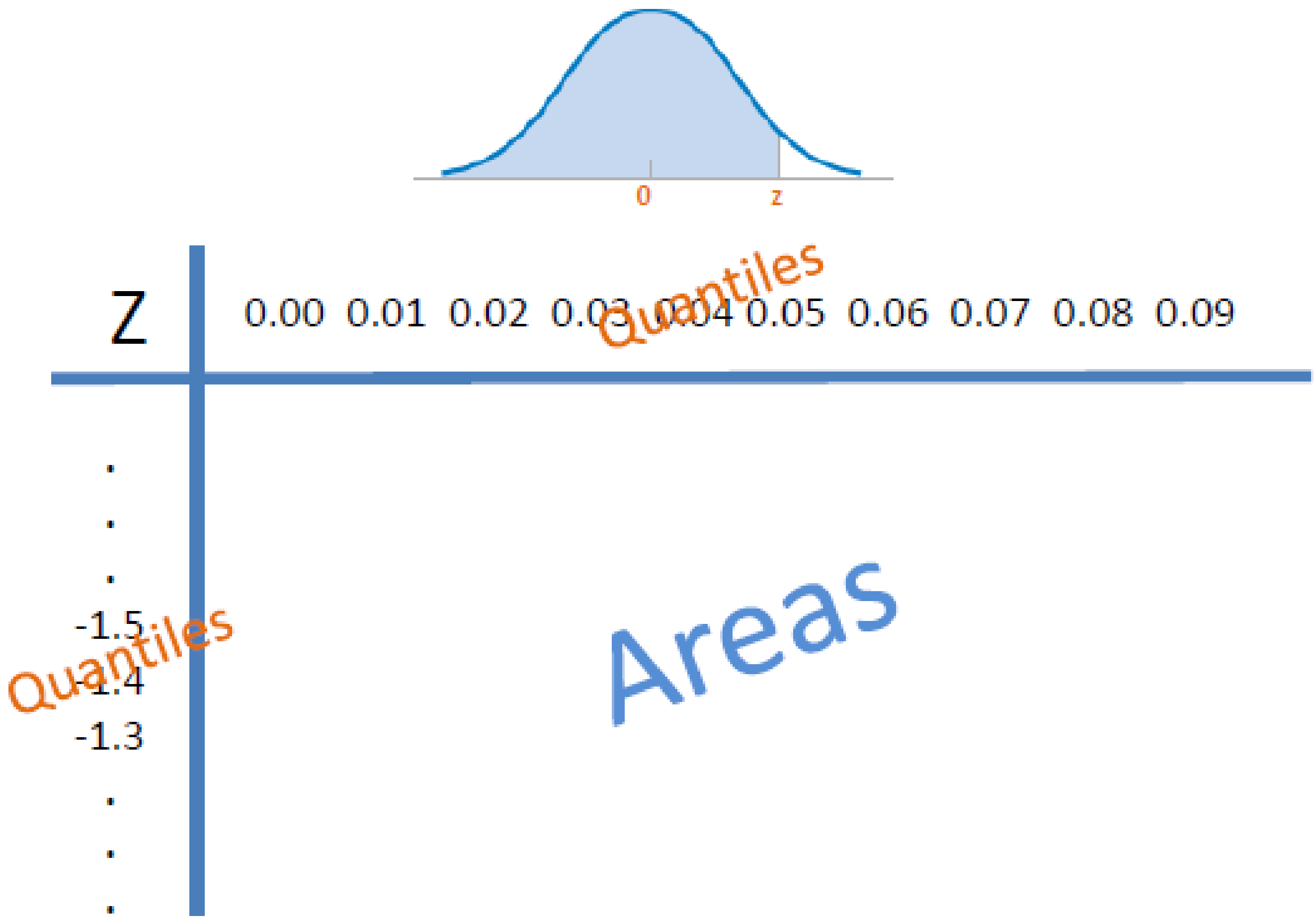
Suponga x es una variable aleatoria normal con media μ y varianza σ^2, para estandarizar la variable se debe usar la formula:

$$z = \frac{(x - \mu)}{\sigma}$$

Z es una variable aleatoria normal estándar.



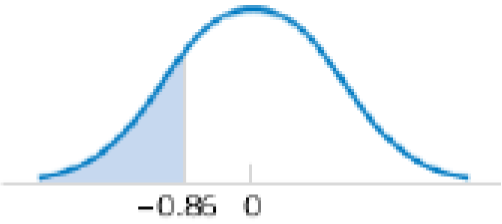
ESTRUCTURA DE LA TABLA NORMAL



EJEMPLOS

Assume Z is a standard normal random variable.

Find $P(Z \leq -0.86)$.

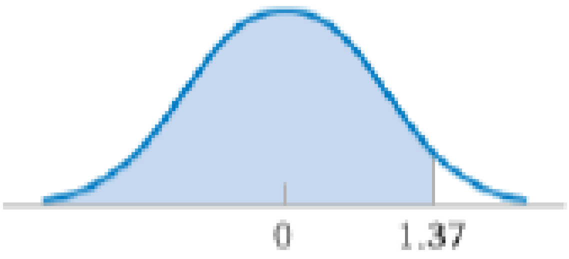


On table

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
⋮										
−0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
−0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	$\boxed{0.1949}$	0.1922	0.1894	0.1867
−0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148

Assume Z is a standard normal random variable.

Find $P(Z \leq 1.37)$.

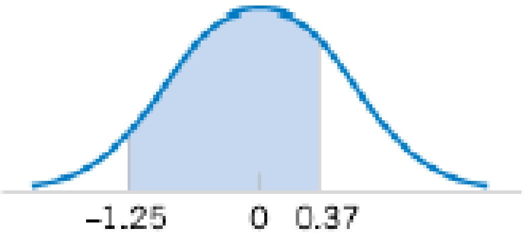


On table

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
⋮										
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	$\boxed{0.9147}$	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319

Assume Z is a standard normal random variable.

Find $P(-1.25 \leq Z \leq 0.37)$.

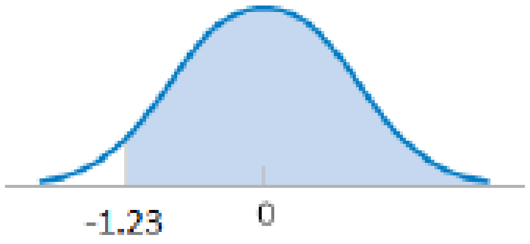


On table

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
⋮										
−1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	$\boxed{0.1056}$	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
⋮										
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	$\boxed{0.6443}$	0.6480	0.6517

Assume Z is a standard normal random variable.

Find $P(Z > -1.23)$.



On table

z	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
⋮										
−1.2	0.1151	0.1131	0.1112	$\boxed{0.1093}$	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985

EJERCICIOS

En cada caso, determine el valor de la constante c que hace que el enunciado de probabilidad sea Correcto.

a. $\phi(c) = 0.9838$

b. $P(0 \leq Z \leq c) = 0.291$

c. $P(c \leq Z) = 0.121$

d. $P(Z \leq -c) = 0.9082$

e. $P(-c \leq Z \leq c) = 0.668$

f. $P(|Z| \leq c) = 0.28$

g. $P(|Z| > c) = 0.016$

ALGUNAS PROPIEDADES

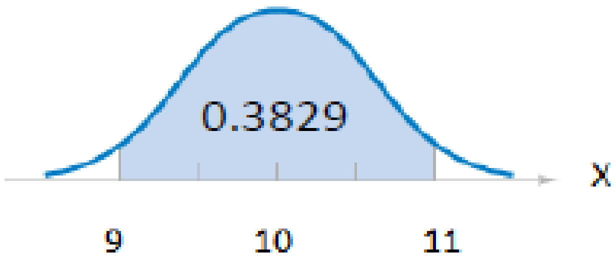
a. $P(Z \leq -c) = 1 - P(Z \leq c)$

b. $P(|Z| \leq c) = 2P(Z \leq c) - 1$

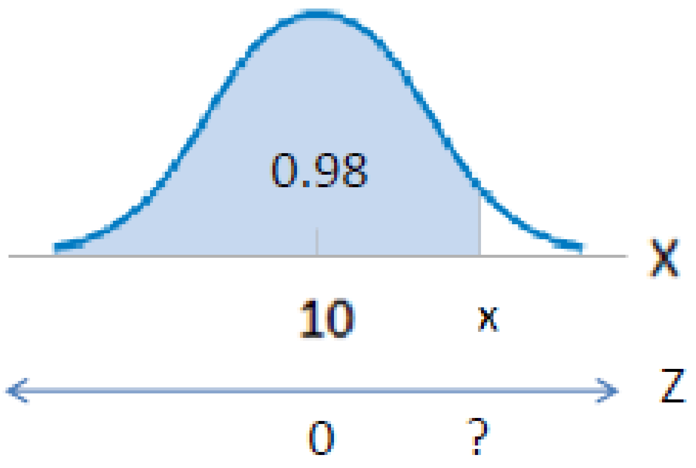
EJEMPLO

Sea X una variable aleatoria que representa la medida del diámetro de un tornillo, esta variable X tiene una distribución normal con μ=10 y σ=2 mm.

Cuál es la probabilidad de que dicha medida este entre 9 y 11 mm?



$$P(9 < X < 11) = P\left(\frac{9-10}{2} < \frac{x-10}{2} < \frac{11-10}{2}\right)$$
$$= P(-0.5 < z < 0.5)$$
$$= P(z < 0.5) - P(z < -0.5)$$
$$= 0.69146 - 0.30854 = 0.38292$$



z	0.05	0.06
⋮		
1.9	0.9744	0.9750
2.0	0.9798	0.9803

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$2.05 = \frac{x - 10}{2}$$

$$x = 14.1$$

Suponga que la fuerza que actúa en una columna que ayuda a soportar un edificio está normalmente distribuida con media de 15.0 kips y desviación estándar de 1.25 kips. ¿Cuál es la probabilidad de que la fuerza **:**

a. sea de más de 18 kips?

b. esté entre 10 y 12 kips?

c. Difiera de 15.0 kips en cuando mucho 1.5 desviaciones estándar?

La concentración de sustrato (mg/cm3) del afluente que llega a un reactor está normalmente distribuida con μ=0.30 y σ= 0.06.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que la concentración exceda de 0.25?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que la concentración sea cuando mucho de 0.10?

c. ¿Cómo caracterizaría el 5% más grande de todos los valores de concentración?

APROXIMACIONES A LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

La distribución binomial y poisson se convierten en distribuciones simétricas en la medida en que sus tamaños muestrales se incrementan.

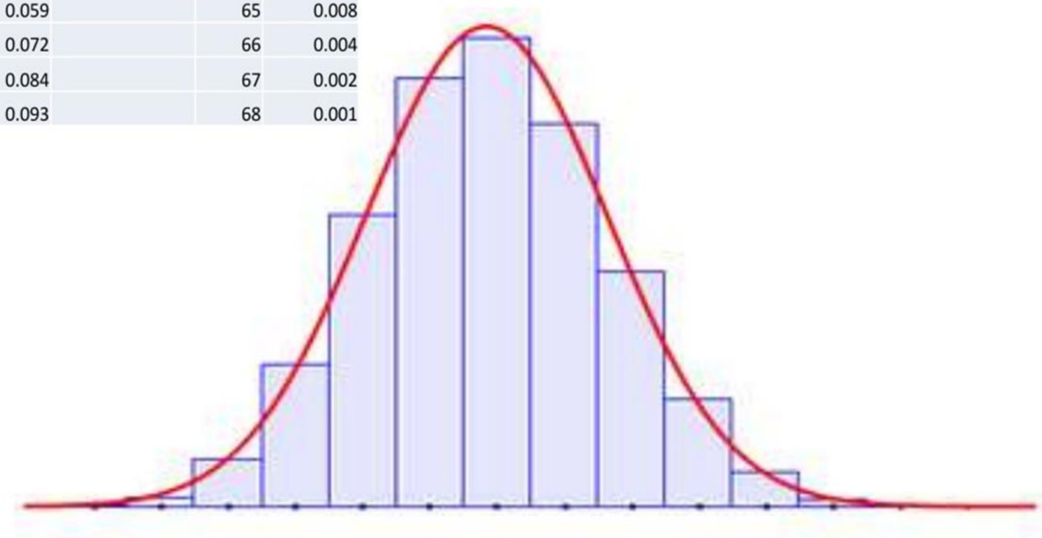
Para cálculos manuales la aproximación normal es practica, probabilidades exactas de las distribuciones binomial y poisson, de medias grandes, requieren tecnología.

FACTOR DE CORRECCIÓN POR CONTINUIDAD

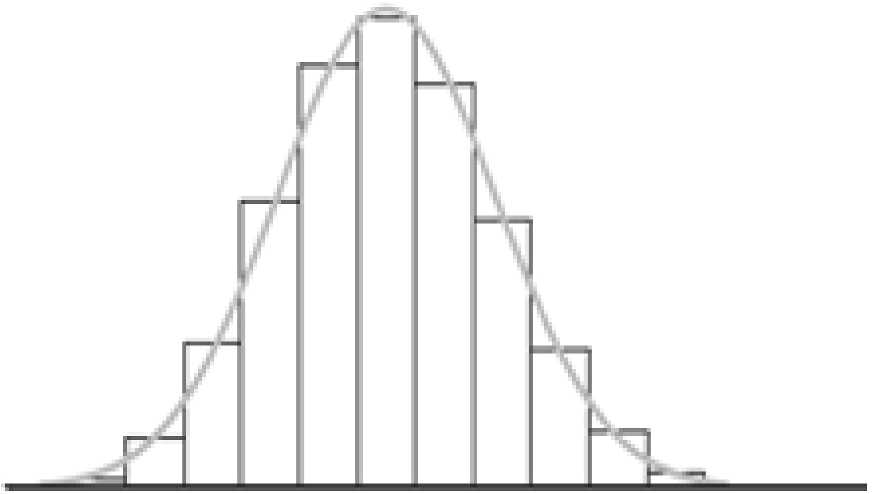
0.5

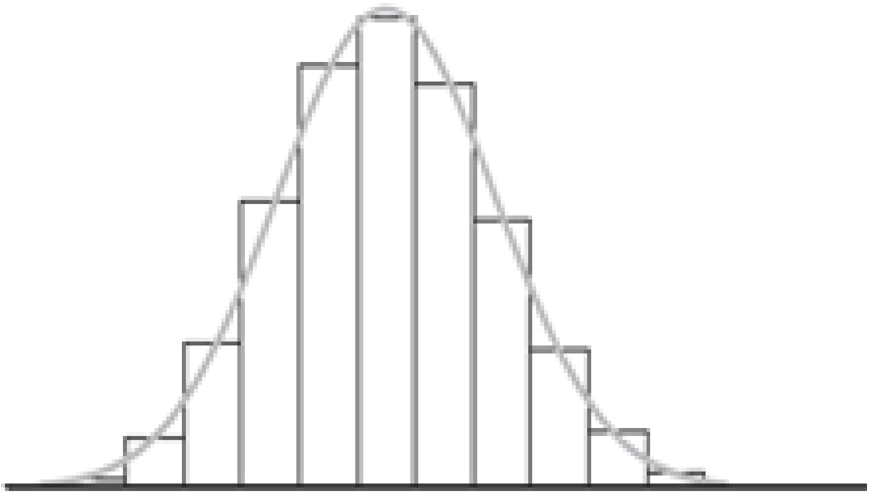
43	0.001	56	0.097
44	0.002	57	0.095
45	0.003	58	0.088
46	0.006	59	0.077
47	0.009	60	0.063
48	0.015	61	0.048
49	0.023	62	0.034
50	0.033	63	0.023
51	0.045	64	0.014
52	0.059	65	0.008
53	0.072	66	0.004
54	0.084	67	0.002
55	0.093	68	0.001

Factor de corrección por continuidad

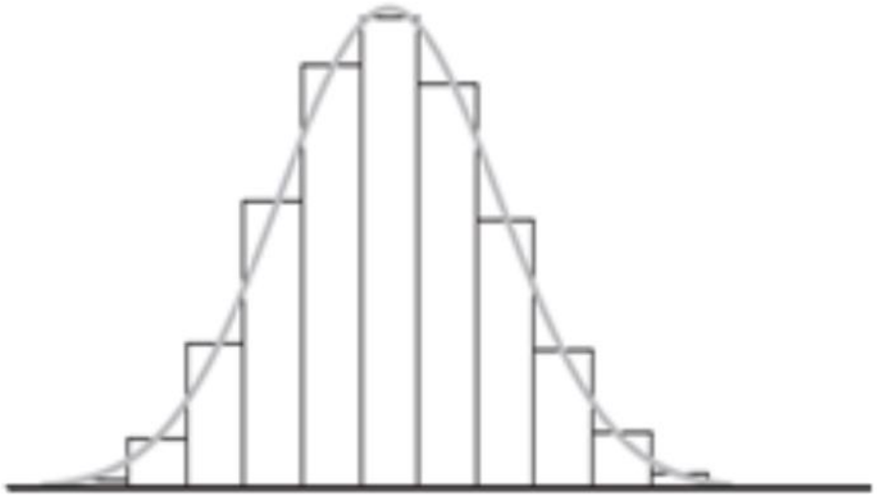


- $P(x < k) = P(x \leq k - 0.5)$ $P(x > k) = P(x > k + 0.5)$

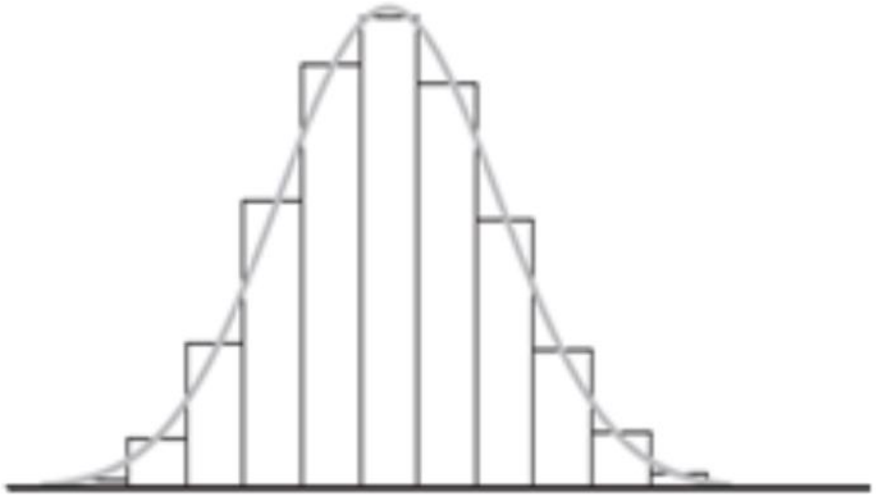




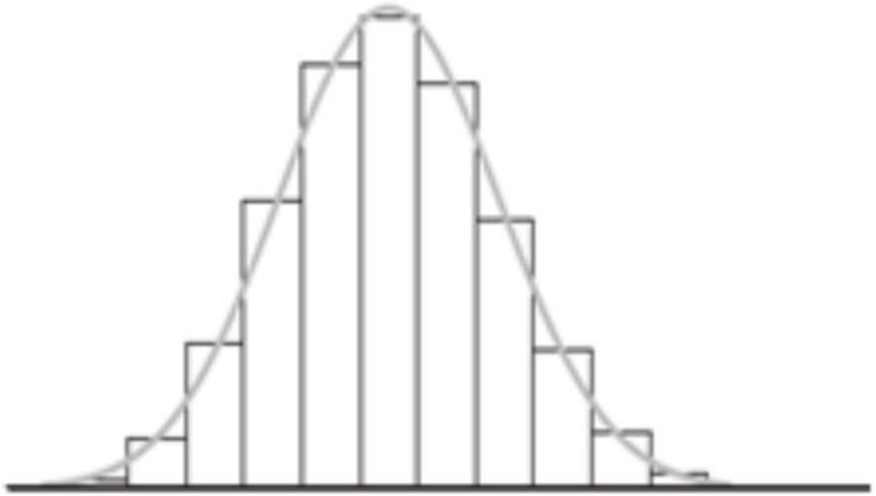
- $P(x = k) = P(k - 0.5 < k < k + 0.5)$



- $P(x \geq k) = 1 - P(x \leq k - 0.5)$



$P(x \leq k) = P(x \leq k + 0.5)$



APROXIMACIÓN NORMAL A LA BINOMIAL

La normal es una buena aplicación si

$n>10$ $np>5$ $n(1-p)>5$

Asi los parámetros son:

$$\mu = n\,p$$

$$\sigma = \sqrt{n\,p\,(1-p)}$$

La variable aleatoria se denota de la forma:

$$x_i \sim N(np, npq)$$

Un hotel tiene 100 habitaciones, la probabilidad de que una habitación este ocupada una noche es de 0.6. ¿cual es la probabilidad de que 75 habitaciones o mas estén ocupadas una noche?

<u>Here we have that</u>

$n = 100$

$p = 0.6$

$np = 60$

$n(1-p) = 40$

$\mu = 60$

$\sigma = \sqrt{100 \times 0.6 \times (1-0.6)}$ =4.89

Estimación mediante la distribución binomial

Mediante aproximación a la normal

$$P(X \geq 75) = \sum_{i=75}^{100} \binom{100}{i} 0.6^i 0.4^{100-i}$$

$$P(x \geq 75) = 1 - P(x < 75)$$

Aplicando factor de corrección

$$= 1 - P(x < 75 - 0.5)$$

Estandarizando:

$$= 1 - P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \leq \frac{74.5 - 60}{4.89}\right)$$

$$= 1 - P(z \leq 2.96)$$

$$= 1 - 0.9985$$

=0.0015

EJEMPLO

La gerencia de un restaurante encontró que 70% de sus nuevos clientes regresa a su establecimiento.

En una semana que hubo 80 consumidores nuevos. ¿Cuál es la probabilidad de que 60 o más regresen en otra ocasión?

ES BINOMIAL PORQUE:

1. Existen 2 posibilidades (regresen o no regresen)
2. Se puede contar el numero de éxitos
3. Los ensayos son independientes
4. La probabilidad de que una persona regrese sigue siendo 0.7 para cada uno de los 80 clientes

La probabilidad de que una determinada máquina fabrique una pieza defectuosa es 0.01. En un año se fabrican 2000 piezas.

¿Cuál es la probabilidad de que el número de piezas defectuosas producidas en un año sea mayor que 30?

Suponga que sólo 75% de todos los conductores en un estado usan con regularidad el cinturón de seguridad. Se selecciona una muestra aleatoria de 500 conductores. ¿Cuál es la probabilidad de que

a. Entre 360 y 400 (inclusive) de los conductores en la muestra usen con regularidad el cinturón de seguridad?

b. Menos de 400 de aquellos en la muestra usen con regularidad el cinturón de seguridad?

APROXIMACIÓN A LA DISTRIBUCIÓN POISSON

Si en una distribución poisson $\lambda>25$, se puede usar la distribución normal con

$$\mu = \lambda$$

$$\sigma = \sqrt{\lambda}$$

La variable aleatoria se denota como

$$x_i \sim N(\lambda, \lambda)$$

$$P(X \leq 950) = \sum_{x=0}^{950} \frac{e^{-1000}1000^x}{x!} \quad \text{... too hard manually!}$$

$$\approx P(X < 950.5) = P\left(Z < \frac{950.5 - 1000}{\sqrt{1000}}\right)$$

$$= P(Z < -1.57) = 0.058$$

En un proceso de fabricación se sabe que el nº aleatorio de unidades defectuosas producidas diariamente, viene dado por la ley de probabilidad de Poisson Po(λ=10).

Determinar la probabilidad de que, en 150 días, el nº de unidades defectuosas producidas supere 1.480 unidades.