



UNIVERSIDAD  
DE GRANADA



PRACTICUM

MÁSTER EN MATEMÁTICAS

# Integradores simplécticos en sistemas mecánicos simples

Jose Torrente Teruel

**Tutor:**

Cédric M. Campos

*Departamento de Matemática Aplicada, Ciencia  
e Ingeniería de los Materiales y Tecnología Elec-  
trónica, Universidad Rey Juan Carlos*

Septiembre  
2022





# Sobre la memoria

Esta memoria se ha escrito con

motivo de la materia *Practicum* para la obtención del Máster Interuniversitario en Matemáticas de la UGR. He recibido una amplia formación en Mecánica Geométrica, estudiando en profundidad la teoría de integración variacional (simpléctica) y aplicando esta a ciertos ejemplos de interés. A lo largo de la memoria, se describen los problemas en creciente complejidad, desde el péndulo simple hasta una bola que rueda en un plano rotatorio, lo que a su vez me ha tomado tiempo en creciente cantidad.

El grupo de investigación dentro del cual se enmarca este trabajo es la red de [Geometría, Mecánica y Control](#). Una gran parte del conocimiento que se desarrolla en esta trata con técnicas numéricas y analíticas dentro del estudio de sistemas mecánicos. De esta forma, se consigue aplicar la teoría moderna de Mecánica Hamiltoniana y Lagrangiana en otras áreas de la Ingeniería o la Tecnología, como puede ser el control de sistemas en la industria, robótica, etc.

Por último, he asistido a [seminarios](#) semanales o bisemanales organizados en el ICMAT, en los que se han tratado numerosos temas alrededor de esta materia, además del [Encuentro Iberoamericano](#) y el [XXIII Encuentro de Invierno](#) en Geometría, Mecánica y Control. En este último di una charla relacionada con mi TFM, pero esta fue única en cuanto a dirección de contenidos a la teoría de optimización, obteniendo una formación mucho más dirigida a los contenidos que se tratan en este trabajo.



# Índice

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Péndulo</b>	<b>3</b>
1.1. Péndulo simple . . . . .	3
1.2. Péndulo doble . . . . .	6
1.3. Péndulo elástico . . . . .	10
<b>2. Disco de Euler</b>	<b>12</b>
2.1. Disco vertical . . . . .	14
2.2. Disco de Euler . . . . .	18
<b>3. Bola rodando</b>	<b>22</b>
<b>A. El grupo de rotaciones <math>SO(3)</math></b>	<b>28</b>
<b>B. Pequeña derivación de la ecuación (39)</b>	<b>29</b>

## Introducción

La información de un sistema mecánico (libre de fuerzas) se codifica en una función conocida como Lagrangiano,  $L: Q \rightarrow \mathbb{R}$ . El espacio donde este evoluciona es el espacio de configuración,  $Q$ , el cual se considera una variedad diferenciable debido a la posible no linealidad de los espacios donde se trabaja. Su fibrado tangente,  $TQ$ , se conoce como espacio de fases (en velocidades) (Abraham and Marsden, 1978; de León and Rodrigues, 1989). En nuestro caso, trabajamos sistemas mecánicos simples, los cuales se caracterizan por presentar el Lagrangiano descompuesto en dos términos:

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q),$$

donde  $T: TQ \rightarrow \mathbb{R}$  es la energía cinética del sistema y  $V: Q \rightarrow \mathbb{R}$  es la energía potencial. La dinámica del sistema  $(Q, L)$  viene determinada por las conocidas como ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} D_3 L(t, q(t), \dot{q}(t)) - D_2 L(t, q(t), \dot{q}(t)) = 0, \quad (1)$$

donde  $q(t)$  es cualquier curva (diferenciable) que realiza el sistema en el espacio de configuración  $Q$  y  $D_i L$  son las parciales respecto a la coordenada  $i$ -ésima del Lagrangiano,  $i = 2, 3$ . Esta teoría admite una descripción intrínseca geométrica a partir de campos de vectores (Abraham and Marsden, 1978; de León and Rodrigues, 1989), que posibilita la adición de fuerzas de forma natural. Además, a partir de la transformada de Legendre, se puede realizar una descripción en momentos, dando lugar a las ecuaciones de Hamilton:

$$\begin{aligned} \frac{dq^i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q^i}. \end{aligned} \quad (2)$$

Nuestro objetivo es obtener integradores numéricos para los sistemas mecánicos, debido a la no existencia de soluciones analíticas a las ecuaciones de movimiento para la mayoría de estos. Para ello, se introduce una teoría discreta en analogía a lo que hemos descrito en el apartado anterior. Consideramos  $Q \times Q$  el espacio de estados discretos, como una versión discreta de  $TQ$ , y las curvas dinámicas serán de la forma  $q_d: \{k\}_{k=1}^N \rightarrow Q$ , para cierto  $N \in \mathbb{N}$ . A partir de una regla de cuadratura y considerando un tamaño de paso  $h > 0$ , discretizamos el Lagrangiano (o energía cinética y potencial por separado), obteniendo un Lagrangiano discreto  $L_d^k: Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ . De esta forma, la dinámica del sistema discreto se obtiene a partir de las llamadas ecuaciones de Euler-Lagrange discretas:

$$D_1 L_d^k(q_k, q_{k+1}) + D_2 L_d^{k-1}(q_{k-1}, q_k) = 0 \quad \text{para cada } k = 1, \dots, N-1, \quad (3)$$

donde  $D_1 L_d^k(q_k, q_{k+1}) \in T_{q_k}^* Q$  y  $D_2 L_d^k(q_k, q_{k+1}) \in T_{q_{k+1}}^* Q$  corresponden a  $dL_d^k(q_k, q_{k+1})$  bajo la identificación  $T_{(q_k, q_{k+1})}^*(Q \times Q) \cong T_{q_k}^* Q \times T_{q_{k+1}}^* Q$ , i.e.,  $D_i L_d^k(q_k, q_{k+1}) =$

$P_i dL_d^k(q_k, q_{k+1})$ , para  $P_i: T_{q_k}^*Q \times T_{q_{k+1}}^*Q \longrightarrow T_{q_{k+i-1}}^*Q$ ,  $i=1,2$ , las respectivas proyecciones. Equivalentemente, se obtiene una descripción en momentos, obteniendo las llamadas ecuaciones de Hamilton discretas:

$$p_{k+1} = D_2 L_d^k(q_k, q_{k+1}), \quad (4)$$

$$p_k = -D_1 L_d^k(q_k, q_{k+1}). \quad (5)$$

Una consecuencia crucial de esta descripción (variacional debido a la obtención de las ecuaciones a partir de un funcional acción) es que se conserva la forma simpléctica canónica del espacio de fases en momentos  $T^*Q$  (Marsden and West, 2001). De esta forma, se está conservando parte de la estructura geométrica y provoca que los integradores tengan un excelente comportamiento a tiempos largos, manteniendo una acotación de la energía.

Especial atención hay que dedicar a los sistemas mecánicos cuyas ligaduras no son integrables, conocidos como sistemas no holónomos. Denotamos por  $\mathcal{D} \subset TQ$  a la distribución de ligaduras, que vendrá descrita por  $m$  funciones linealmente independientes:

$$\phi^j = \sum_{i=1}^n \mu_i^j(q) \dot{q}^i = 0, \quad j = 1, \dots, m,$$

donde  $n$  es la dimensión del espacio de configuración  $Q$ . La dinámica de estos sistemas se computa a partir de un principio de Lagrange-d'Alembert (Bloch et al., 1996; Bloch, 2007), obteniendo la dinámica local de la forma:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = \sum_{j=1}^m \lambda_j \mu_i^j, \quad i = 1, \dots, n, \quad (6a)$$

$$\phi^j = \sum_{i=1}^n \mu_i^j(q) \dot{q}^i = 0, \quad j = 1, \dots, m. \quad (6b)$$

Las funciones  $\mu^j = \sum_{i=1}^n \mu_i^j(q) dq^i$ ,  $j = 1, \dots, m$  se pueden ver como una base del anulador de la distribución de ligaduras  $\mathcal{D}^0$  y las funciones  $\lambda^j$  se denominan multiplicadores de Lagrange. Existen versiones geométricas de estas ecuaciones, pero explicarlas aquí se sale del objetivo de esta introducción.

En recientes trabajos se han desarrollado los llamados integradores no holónomos (Cortés, 2002; de León et al., 2002), que veremos que también presentan buen comportamiento en la energía al igual que en otras propiedades geométricas, como puede ser la conservación de la aplicación momento no holónoma discreta. Al realizar una discretización, se obtiene una distribución de ligaduras discreta  $\mathcal{M}_c$ . Las ecuaciones de movimiento discretas vendrán dadas a partir de (3) añadiendo un término extra:

$$D_1 L_d^k(q_k, q_{k+1}) + D_2 L_d^{k-1}(q_{k-1}, q_k) = \sum_{j=1}^m (\lambda_k)_j \mu^j \quad \text{for all } k = 1, \dots, N-1, \quad (7)$$

donde de nuevo  $\{\mu^j\}$  son una base de  $\mathcal{D}^0$ .

Por otro lado, en sistemas con simetrías, el espacio de configuración  $Q$  suele ser un grupo de Lie, por lo que se pueden utilizar herramientas propias de estos espacios para calcular las ecuaciones dinámicas continuas y discretas. En particular, usaremos las acciones a izquierdas  $\mathcal{L}$  y a derechas  $\mathcal{R}$  y las acciones adjuntas  $\text{Ad}$  y  $\text{ad}$ . Trivializando la distribución de ligaduras a izquierdas, las ecuaciones de Euler-Lagrange trivializadas a izquierdas para sistemas no holónomos vienen dadas por:

$$\frac{d}{dt} D_{\xi}^* L = \text{ad}_{\xi}^* (D_{\xi}^* L) + \mathcal{L}_g^* (D_g L) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \mu^j. \quad (8)$$

Por último, realizando una discretización como hemos descrito anteriormente, las ecuaciones discretas resultan

$$\mathcal{L}_{g_k}^* (D_1 L_d^k) - \mathcal{R}_{f_k}^* (D_2 L_d^k) + \mathcal{L}_{f_{k-1}}^* (D_2 L_d^{k-1}) = \sum_{j=1}^m (\lambda_k)_j \mu^j, \quad k = 1, \dots, N-1. \quad (9)$$

Existe una descripción alternativa en términos de grupoides de Lie (Iglesias et al., 2008). En este caso, dada una base local de campos de vectores  $\{X_a\}$  de  $\mathcal{D}$ , las ecuaciones no holónomas discretas vienen dadas por:

$$\overleftarrow{X}_a(q_{k-1}) (L_d^{k-1}) - \overrightarrow{X}_a(q_k) (L_d^k) = 0, \quad (10)$$

donde  $\overleftarrow{X}(q) = (\mathcal{L}_q)_* X(q)$  y  $\overrightarrow{X}(q) = (\mathcal{R}_q)_* X(q)$ .

Esta memoria incluye 3 secciones distintas. Una primera donde simulamos el péndulo en 3 configuraciones distintas: simple, doble y elástico; en segundo lugar, consideramos el disco de Euler, trabajando primero con el disco vertical; y por último, una bola en un plano que rota. En todas las simulaciones consideraremos  $N = 2^{12}$  iteraciones, ya que serán suficientes para ilustrar la conservación de la estructura geométrica de los ejemplos. Todos los archivos programados en *Julia* se pueden encontrar en <https://github.com/jtt98/Sistemas-mecanicos>, donde se pueden computar todas las gráficas que aquí mostramos.

## 1. Péndulo

### 1.1. Péndulo simple

En esta primera subsección vamos a ilustrar la diferencia de comportamiento entre los integradores simplécticos con otros métodos que no lo son, en particular con el método de Euler. Para ello, consideramos un péndulo simple de barra rígida e inelástica de longitud y masa unidad. Seguiremos la visión geométrica que hemos introducido (Cushman and Bates, 2015).

En este caso, tenemos un espacio de configuración  $Q = \mathbb{R}$  (o en otro caso  $Q = ] - \pi, \pi]$ , a través de una identificación de la recta real) y los elementos serán  $q = \theta \in Q$ . El Hamiltoniano viene dado de forma general por:

$$\begin{aligned} H: T^*\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (q, p) &\longmapsto \frac{1}{2} p^2 - V(q), \end{aligned}$$



donde  $V(q) = \cos q$ .

Para obtener el Lagrangiano de este sistema, basta con realizar un cambio de variables a partir de la transformada  $(q, \dot{q}) = (q, \frac{\partial H}{\partial p}) = (q, p)$ , de donde  $p = \dot{q}$ . De esta forma,  $L(q, \dot{q}) = p\dot{q} - H(q, p(\dot{q}))$ , y por tanto,

$$\begin{aligned} L: T\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (q, \dot{q}) &\longmapsto \frac{1}{2}\dot{q}^2 + V(q). \end{aligned}$$

Las ecuaciones de movimiento (1) son las habituales, y en este caso utilizaremos las ecuaciones de Hamilton (2) a las que le aplicaremos el método de Euler. Estas serán:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= p, \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = V'(q), \end{aligned}$$

por lo que resultan en

$$\ddot{q} = V'(q) = -\sin q. \quad (11)$$

### Dinámica discreta

Como va a ser habitual, la discretización del sistema comienza con una discretización de las velocidades. Dado un tamaño de paso  $h > 0$ , en este caso tenemos:

$$\dot{q}(kh) \simeq v_k = \frac{1}{h}(q_{k+1} - q_k),$$

donde  $\{q_k\}$  son las trayectorias dinámicas discretas que buscamos. Por otro lado, vamos a utilizar una regla de punto medio para la discretización del potencial,

$$V(\theta^1, \theta^2) \simeq \frac{1}{2}(V(\theta_k^1, \theta_k^2) + V(\theta_{k+1}^1, \theta_{k+1}^2)).$$

y por tanto, el Lagrangiano discreto toma la siguiente expresión,

$$L_d^k = L_d^k(q_k, q_{k+1}) = \frac{1}{2} \left( \frac{q_{k+1} - q_k}{h} \right)^2 + \frac{1}{2}V(q_k) + \frac{1}{2}V(q_{k+1}).$$

A través de la notación  $D_1 L_d^k \equiv \frac{\partial L_d^k}{\partial q_k}$  y  $D_2 L_d^k \equiv \frac{\partial L_d^k}{\partial q_{k+1}}$ , las ecuaciones de Euler-Lagrange discretas (3) resultan:

$$-\frac{1}{h}v_k + \frac{1}{h}v_{k-1} + V'(q_k) = 0 \implies q_{k+1} = 2q_k - q_{k-1} - h^2 \sin q_k.$$

Como vamos a utilizar el método de Euler para las ecuaciones de Hamilton, las ecuaciones simplécticas en momentos (4) vienen dadas por

$$\begin{aligned} p_k &= -D_1 L_d^k = \frac{q_{k+1} - q_k}{h^2} - \frac{1}{2}V'(q_k) \\ p_{k+1} &= D_2 L_d^k = \frac{q_{k+1} - q_k}{h^2} + \frac{1}{2}V'(q_k) = p_k + \frac{1}{2}(V'(q_k) + V'(q_{k+1})). \end{aligned}$$

Este método se ha de resolver para obtener  $(q_{k+1}, p_{k+1})$  a partir de  $(q_k, p_k)$ , por lo que basta con despejar la primera de las ecuaciones discretas:

$$q_{k+1} = q_k + h^2 p_k + \frac{1}{2} h^2 V'(q_k). \quad (12)$$

Por otro lado, el conocido método de Euler para estas ecuaciones viene dado por:

$$\begin{aligned} v_k &= \frac{1}{h}(q_{k+1} - q_k), \\ \frac{1}{h}(v_{k+1} - v_k) &= \frac{1}{2}(V'(q_k) + V'(q_{k+1})), \end{aligned}$$

de donde basta despejar  $v_{k+1}$  en la segunda ecuación para obtener un método explícito.

Por último, para cada  $k = 1, 2, \dots$ , la energía discreta se puede tomar

$$E_d^k := \frac{1}{2} \left( \frac{q_{k+1} - q_k}{h} \right)^2 - \frac{1}{2} (V(q_k) + V(q_{k+1})).$$

## Experimentos numéricos

Brevemente ilustramos dos ejemplos donde comparamos el comportamiento en energía de los métodos utilizados. En primer lugar, considerando un tamaño de paso  $h = 0.001$ , obtenemos en la figura 1 una simulación en la cual aparentemente se tienen idénticas trayectorias. Sin embargo, vemos que la energía crece cuando se utiliza el método de Euler. En la figura 2, tomando  $h = 0.02$ , observamos más claramente ese crecimiento de energía incluso en las trayectorias. A mayor tiempo todas ellas reflejan una conservación de la estructura geométrica por parte del integrador simpléctico, mientras que esto no ocurre para el método de Euler. Todo esto es válido para cualquier método usual que no venga de una derivación variacional, como puede ser el método de Runge-Kutta ([Campos et al., 2011](#)).

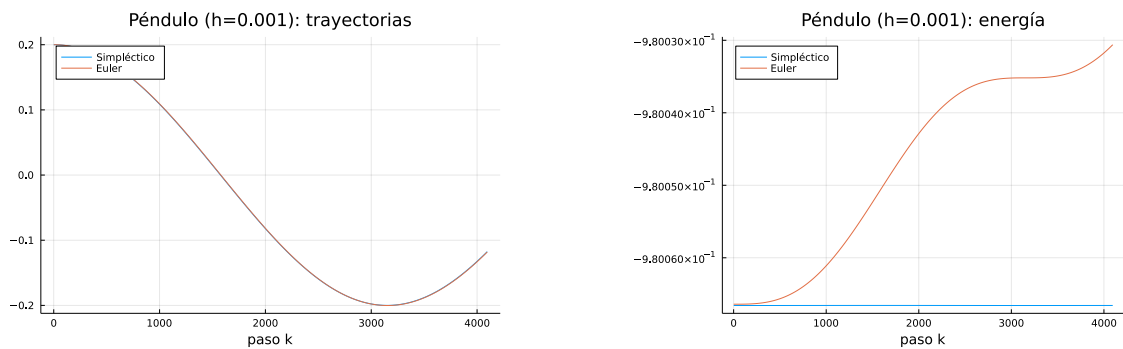


Figura 1: Trayectoria y energía del péndulo simple utilizando el método de Euler y un método variacional simpléctico, con condiciones iniciales  $h = 0.001$ ,  $q_0 = 0.2$  y  $v_0 = 5 \times 10^{-4}$ .

Por tanto, de aquí en adelante usaremos métodos simplécticos para la simulación de los sistemas mecánicos que vamos a exponer.

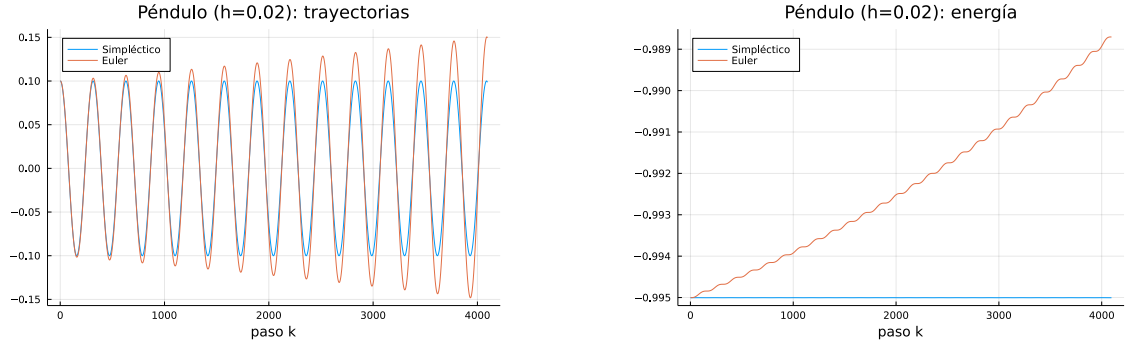


Figura 2: Trayectoria y energía del péndulo simple utilizando el método de Euler y un método variacional simpléctico, con condiciones iniciales  $h = 0.02$ ,  $q_1 = 0.1$  y  $v_1 = 1 \times 10^{-3}$ .

## 1.2. Péndulo doble

A lo largo de este apartado, vamos a considerar un péndulo doble de barras rígidas e inelásticas de longitud  $L_1, L_2$  y masas  $m_1, m_2$ . Se suponen hipótesis ideales de no rozamiento, campo gravitatorio uniforme  $F_g = -mg(0, 0, 1)$  y distribución de masas homogénea a lo largo de las barras. En todos los ejemplos que trabajamos se utilizarán condiciones ideales. El espacio de configuración es  $Q = ]-\pi, \pi[ \times ]-\pi, \pi[$ , aunque en la práctica los péndulos pueden dar vueltas debido a una velocidad inicial suficientemente grande, por lo que se puede reescribir todo lo que sigue en  $Q = \mathbb{R}^2$ .

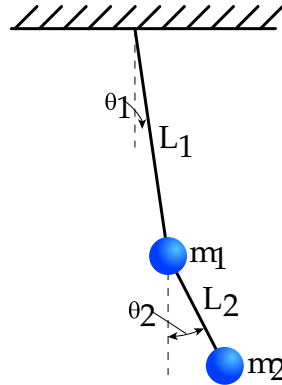


Figura 3: Péndulo doble (JabberWok, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1601029>).

La energía cinética de este sistema viene dada por

$$T(\theta^1, \theta^2, \dot{\theta}^1, \dot{\theta}^2) = \frac{1}{2}[(m_1 + m_2)L_1^2(\dot{\theta}^1)^2 + m_2L_2^2(\dot{\theta}^2)^2 + 2m_2L_1L_2\dot{\theta}^1\dot{\theta}^2\cos(\theta^1 - \theta^2)],$$

y la energía potencial

$$V(\theta^1, \theta^2) = -(m_1 + 2m_2)gL_1 \cos \theta^1 - m_2gL_2 \cos \theta^2.$$

Luego, el Lagrangiano es

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} [(m_1 + m_2) L_1^2 (\dot{\theta}^1)^2 + m_2 L_2^2 (\dot{\theta}^2)^2 + 2m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}^1 \dot{\theta}^2 \cos(\theta^1 - \theta^2)] \\ + (m_1 + 2m_2) g L_1 \cos \theta^1 + m_2 g L_2 \cos \theta^2, \quad (13)$$

donde  $q = (\theta^1, \theta^2)$  y  $\dot{q} = (\dot{\theta}^1, \dot{\theta}^2)$ . Por tanto, basta con computar los términos correspondientes en (1) para obtener las ecuaciones de movimiento de este sistema:

$$\begin{cases} 0 = (m_1 + m_2) L_1 \ddot{\theta}^1 + m_2 L_2 \ddot{\theta}^2 \cos(\theta^1 - \theta^2) \\ \quad + m_2 L_2 (\dot{\theta}^2)^2 \sin(\theta^1 - \theta^2) + (m_1 + m_2) g \sin \theta^1, \\ 0 = L_2 \ddot{\theta}^2 + L_1 \ddot{\theta}^1 \cos(\theta^1 - \theta^2) - L_1 (\dot{\theta}^1)^2 \sin(\theta^1 - \theta^2) + g \sin \theta^2 = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Además, la energía  $E = T + V$  vendrá dada por

$$E(\theta^1, \theta^2, \dot{\theta}^1, \dot{\theta}^2) = \frac{1}{2} [(m_1 + m_2) L_1^2 (\dot{\theta}^1)^2 + m_2 L_2^2 (\dot{\theta}^2)^2 + 2m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}^1 \dot{\theta}^2 \cos(\theta^1 - \theta^2)] \\ - (m_1 + 2m_2) g L_1 \cos \theta^1 - m_2 g L_2 \cos \theta^2. \quad (15)$$

### Dinámica discreta

Las ecuaciones (14) son claramente implícitas, lo cual lleva en la práctica a la utilización de integradores numéricos, en nuestro caso integradores simplécticos de las ecuaciones de movimiento. Para discretizar el Lagrangiano usamos una regla de cuadratura en cada paso  $k$ , a partir de una discretización de la velocidad angular dada por

$$\dot{\theta}^i(kh) \simeq v_k^i := \frac{(\theta^i)_{k+1} - (\theta^i)_k}{h}, \quad i = 1, 2,$$

y un potencial discreto dado por la regla del punto medio de la misma forma que hicimos para el péndulo simple, esto es,

$$V(\theta^1(kh), \theta^2(kh)) \simeq \frac{1}{2} (V(\theta_k^1, \theta_k^2) + V(\theta_{k+1}^1, \theta_{k+1}^2)),$$

donde  $\{q_k = (\theta_k^1, \theta_k^2) : k = 1, 2, \dots\}$  son las trayectorias dinámicas discretas a obtener. Considerando una regla tipo Euler para la discretización de la energía cinética, se obtiene un Lagrangiano discreto de la forma

$$L_d^k = L_d^k(q_k, q_{k+1}) = T(q_k, v_k) - \frac{1}{2} V(q_k) - \frac{1}{2} V(q_{k+1}),$$

donde  $q_k = (\theta_k^1, \theta_k^2)$  y  $v_k = (v_k^1, v_k^2)$ . Nótese que estas discretizaciones serán de orden 1 respecto del tamaño de paso. Estas consideraciones en principio arbitrarias provocan que las ecuaciones discretas sean explícitas salvo una ecuación

de segundo grado. En efecto, las ecuaciones de Hamilton discretas vienen dadas por

$$\begin{aligned}
p_k &= -D_1 L_d^k = \left( (m_1 + m_2)(L_1)^2 \frac{v_k^1}{h} + m_2 L_1 L_2 \frac{v_k^2}{h} \cos(\theta_k^1 - \theta_k^2) \right. \\
&\quad + m_2 L_1 L_2 v_k^1 v_k^2 \sin(\theta_k^1 - \theta_k^2) + \frac{1}{2}(m_1 + 2m_2)g L_1 \sin \theta_k^1, \\
&\quad m_2 (L_2)^2 \frac{v_k^2}{h} + m_2 L_1 L_2 \frac{v_k^1}{h} \cos(\theta_k^1 - \theta_k^2) \\
&\quad \left. - m_2 L_1 L_2 v_k^1 v_k^2 \sin(\theta_k^1 - \theta_k^2) + \frac{1}{2}m_2 g L_2 \sin \theta_k^2 \right) \\
p_{k+1} &= D_2 L_d^k = \left( (m_1 + m_2)(L_1)^2 \frac{v_k^1}{h} + m_2 L_1 L_2 \frac{v_k^2}{h} \cos(\theta_k^1 - \theta_k^2) \right. \\
&\quad - \frac{1}{2}(m_1 + 2m_2)g L_1 \sin \theta_{k+1}^1, \\
&\quad \left. m_2 (L_2)^2 \frac{v_k^2}{h} + m_2 L_1 L_2 \frac{v_k^1}{h} \cos(\theta_k^1 - \theta_k^2) - \frac{1}{2}m_2 g L_2 \sin \theta_{k+1}^2 \right).
\end{aligned}$$

Estas ecuaciones de Hamilton discretas son equivalentes a las ecuaciones de Euler-Lagrange discretas, pero en este caso facilitan la resolución y por ello las usamos. El método numérico asociado consiste en obtener  $(q_{k+1}, p_{k+1})$  dado  $(q_k, p_k)$ . Por tanto, basta con resolver auxiliariamente  $(v_k^1, v_k^2)$  a partir del conocido  $p_k$ , el cual se obtiene de forma implícita. Obsérvese que estas ecuaciones son cuadráticas en  $(v_k^1, v_k^2)$ , por lo que se tienen dos valores posibles para éstos, de los cuales uno solo es válido.

### Experimentos numéricos

En este apartado consideramos arbitrariamente las constantes  $g = 1$ ,  $m_1 = 55/24$ ,  $m_2 = 3/8$ ,  $L_1 = 1$  y  $L_2 = 8/3$ . Como hemos dicho, tenemos que resolver un sistema de ecuaciones implícito de la forma:

$$\left. \begin{aligned} a_1 v_1 + b_1 v_2 + c v_1 v_2 &= d_1 \\ a_2 v_1 + b_2 v_2 - c v_1 v_2 &= d_2 \end{aligned} \right\}$$

Obtenemos así 2 posibles soluciones para los valores de  $(v_k^1, v_k^2)$ , de las que escogemos el que más se aproxima al anterior paso  $(v_{k-1}^1, v_{k-1}^2)$ . De esta forma se han computado algunas simulaciones que ilustran el buen comportamiento de los integradores simplécticos y aproximan la dinámica del sistema continuo.

Un caso extremo consiste en dar un impulso inicial al sistema demasiado elevado, por lo que el péndulo doble sólo da vueltas. Por ejemplo, tomando  $h = 0.008$ ,  $q_0 = (0.1, 0.1)$  y  $q_1 = (0.12, 0.12)$ , se obtiene lo que vemos en la figura 4. Un segundo ejemplo lo mostramos en la figura 5, donde se consideran unas nuevas condiciones iniciales que provocan el comportamiento caótico habitual del péndulo doble. Vemos que el ángulo  $\theta^1$  mantiene una oscilación de menor amplitud y más constante en comparación con  $\theta^2$ , como cabría esperar. En ambos casos se están conservando unos 7 órdenes de magnitud en la energía.

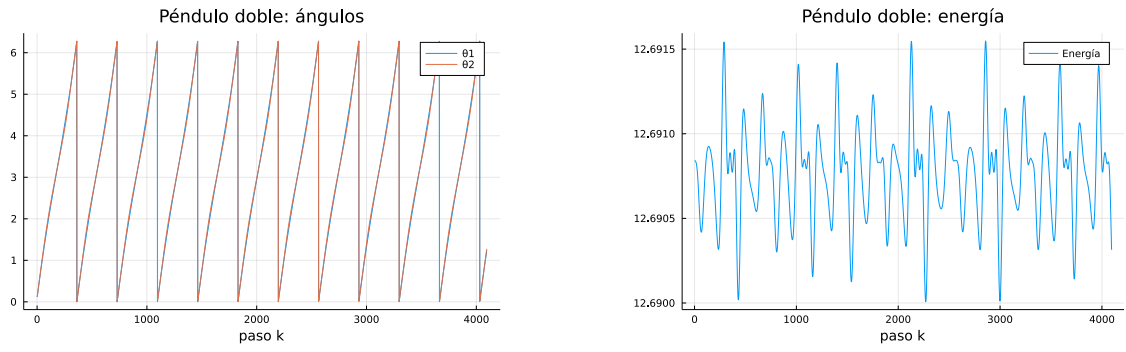


Figura 4: Ángulos módulo  $2\pi$  y energía del péndulo doble, con condiciones iniciales  $h = 0.008$ ,  $q_0 = (0.1, 0.1)$  y  $q_1 = (0.12, 0.12)$ .

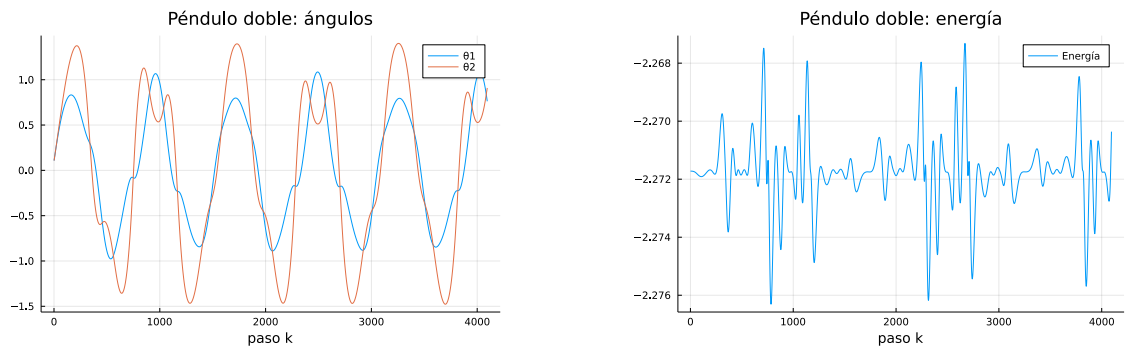


Figura 5: Ángulos y energía del péndulo doble con condiciones iniciales  $h = 0.01$ ,  $q_0 = (0.1, 0.1)$  y  $q_1 = (0.108, 0.108)$ .

### 1.3. Péndulo elástico

En esta subsección consideramos un péndulo simple con barra elástica, fijo en un extremo a un punto. Modelamos dicha barra como un muelle (lineal) de constante elástica  $s$ , de la que cuelga una masa  $m$  en el extremo no fijo, y cuya longitud en reposo es  $l$ .

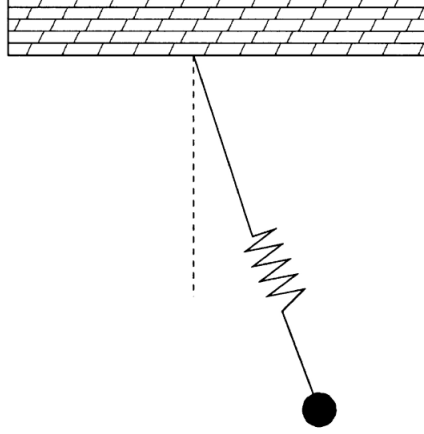


Figura 6: Péndulo elástico (figura 1 en [Tuwankotta and Quispel \(2003\)](#)).

El Hamiltoniano de este sistema viene dado por ([Tuwankotta and Quispel, 2003](#)):

$$H(z, \phi, p_z, p_\phi) = \frac{1}{2\sigma} \left( p_z^2 + \frac{p_\phi^2}{(z+1)^2} \right) + \frac{\sigma}{2} \omega_z^2 \left( z + \left( \frac{\omega_\phi}{\omega_z} \right)^2 \right)^2 - \sigma \omega_\phi^2 (z+1) \cos \phi, \quad (16)$$

donde  $\omega_z = \sqrt{s/m}$ ,  $\omega_\phi = \sqrt{g/l}$  y  $\sigma = ml^2$ . Escogiendo adecuadamente las unidades se puede eliminar de las expresiones la constante  $\sigma$ . Con esta última consideración y teniendo en cuenta las expresiones

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \frac{\partial H}{\partial p_z} = p_z, \\ \dot{\phi} &= \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{(z+1)^2}, \end{aligned}$$

las ecuaciones que rigen la dinámica del sistema (2) resultan

$$\begin{aligned} \ddot{z} &= \dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = \phi^2 (z+1)^2 + \omega_z^2 \left( z + \left( \frac{\omega_\phi}{\omega_z} \right)^2 \right)^2 - \omega_\phi^2 \cos \phi, \\ 2(z+1)\dot{z}\dot{\phi} + (z+1)^2\ddot{\phi} &= \dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = \omega_\phi^2 (z+1) \sin \phi. \end{aligned}$$

La bibliografía consultada da cuenta del desconocimiento de solución analítica a estas ecuaciones, y de hecho es improbable que exista. Por tanto, de nuevo tenemos un sistema mecánico muy interesante al que podemos aplicar la teoría conocida de integración simpléctica.

Por otro lado, para particularizar la teoría discreta en este ejemplo, necesitamos conocer el Lagrangiano  $L = \langle p, \dot{q} \rangle - H(q, p(\dot{q}))$ , con  $q = (z, \varphi)$  y  $p = (p_z, p_\varphi)$ , que vendrá dado por:

$$L(z, \varphi, \dot{z}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} \left( \dot{z}^2 + \dot{\varphi}^2 (z+1)^2 \right) - \frac{1}{2} \omega_z^2 \left( z + \left( \frac{\omega_\varphi}{\omega_z} \right)^2 \right)^2 + \omega_\varphi^2 (z+1) \cos \varphi. \quad (17)$$

De forma clara, el Lagrangiano está dividido en energía cinética

$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \left( \dot{z}^2 + \dot{\varphi}^2 (z+1)^2 \right), \quad (18)$$

menos energía potencial

$$V(q) = \frac{1}{2} \omega_z^2 \left( z + \left( \frac{\omega_\varphi}{\omega_z} \right)^2 \right)^2 - \omega_\varphi^2 (z+1) \cos \varphi. \quad (19)$$

### Dinámica discreta

Análogamente a lo realizado en el caso del péndulo doble, dado un tamaño de paso  $h > 0$ , las velocidades se pueden aproximar en cada tiempo discreto de la forma

$$\begin{aligned} \dot{z}(kh) &\simeq v_k^z := \frac{z_{k+1} - z_k}{h}, \\ \dot{\varphi}(kh) &\simeq v_k^\varphi := \frac{\varphi_{k+1} - \varphi_k}{h}, \end{aligned}$$

donde  $\{q_k = (z_k, \varphi_k) : k = 1, 2, \dots\}$  son las trayectorias dinámicas discretas que queremos obtener. De nuevo, un Lagrangiano discreto vendrá determinado por la regla del punto medio aplicada al potencial y una regla de tipo Euler para la energía cinética, de forma que

$$L_d^k = L_d^k(q_k, q_{k+1}) = T(q_k, v_k) - \frac{1}{2} V(q_k) - \frac{1}{2} V(q_{k+1}),$$

donde  $v_k = (v_k^z, v_k^\varphi)$ . Ahora, las ecuaciones de Hamilton discretas (4) resultan

$$\begin{aligned} p_k &= -D_1 L_d^k = \left( \frac{1}{h} v_k^z - (v_k^\varphi)^2 (z_k + 1) + \frac{1}{2} \omega_z^2 \left( z_k + \left( \frac{\omega_\varphi}{\omega_z} \right)^2 \right) - \frac{1}{2} \omega_\varphi^2 \cos \varphi_k, \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{h} v_k^\varphi (z_k + 1)^2 + \frac{1}{2} \omega_\varphi^2 (z_k + 1) \sin \varphi_k \right), \\ p_{k+1} &= D_2 L_d^k = \left( \frac{1}{h} v_k^z - \frac{1}{2} \omega_z^2 (z_{k+1} + \left( \frac{\omega_\varphi}{\omega_z} \right)^2) + \frac{1}{2} \omega_\varphi^2 \cos \varphi_{k+1}, \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{h} v_k^\varphi (z_k + 1)^2 - \frac{1}{2} \omega_\varphi^2 (z_{k+1} + 1) \sin \varphi_{k+1} \right). \end{aligned}$$

Obsérvese que ahora el método es explícito, ya que para cada paso  $k = 2, 3, \dots$ , de la segunda coordenada de  $p_k$  se obtiene  $v_k^\varphi$  y posteriormente de la primera se tiene  $v_k^z$ . Así, como en los ejemplos anteriores, se obtienen  $q_{k+1} = (z_{k+1}, \varphi_{k+1})$  en cada paso del método  $k$  a partir de  $q_k = (z_k, \varphi_k)$ .



## Experimentos numéricos

A lo largo de este apartado consideramos  $\omega_z = \omega_\varphi = 1$  por simplicidad. En las figuras 7 y 8 mostramos los resultados para  $h = 0.002$ , donde observamos un comportamiento oscilatorio de todas las variables. Las figuras 9 y 10 muestran un segundo caso, donde  $h = 0.0035$  y hemos aumentado el número de iteraciones para comprobar la actuación a tiempos mayores. Destacamos la acotación prevista en energía para ambos casos.

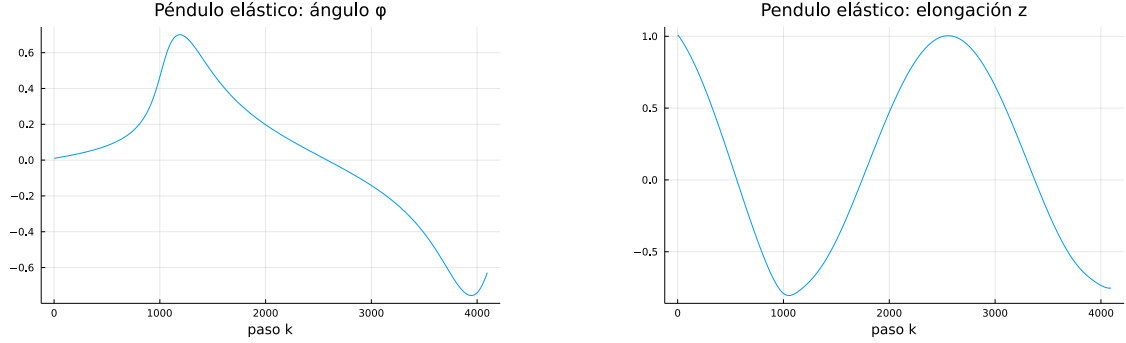


Figura 7: Ángulo y elongación del péndulo elástico con condiciones iniciales  $h = 0.002$ ,  $q_0 = (1.011, 0.01)$  y  $q_1 = (1.01, 0.0101)$ .

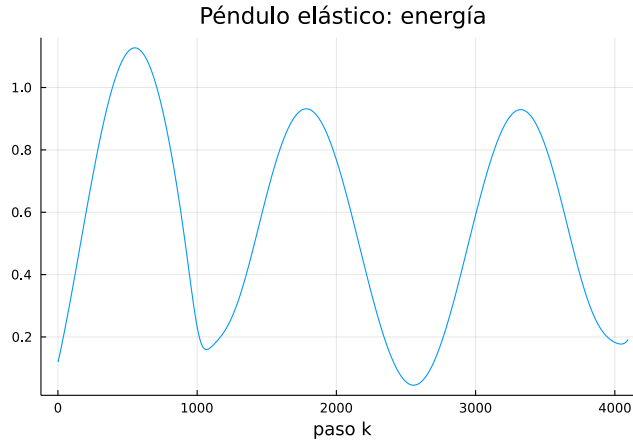


Figura 8: Energía del péndulo elástico con condiciones iniciales  $h = 0.002$ ,  $q_0 = (1.011, 0.01)$  y  $q_1 = (1.01, 0.0101)$ .

## 2. Disco de Euler

Este segundo ejemplo de sistema mecánico nos da otro punto de vista acerca de la teoría de integración simpléctica. En concreto, trabajaremos con una dinámica no holónoma, lo que nos llevará a utilizar una serie de técnicas más complejas dentro de la teoría de integración geométrica, como comentamos en la introducción del trabajo.

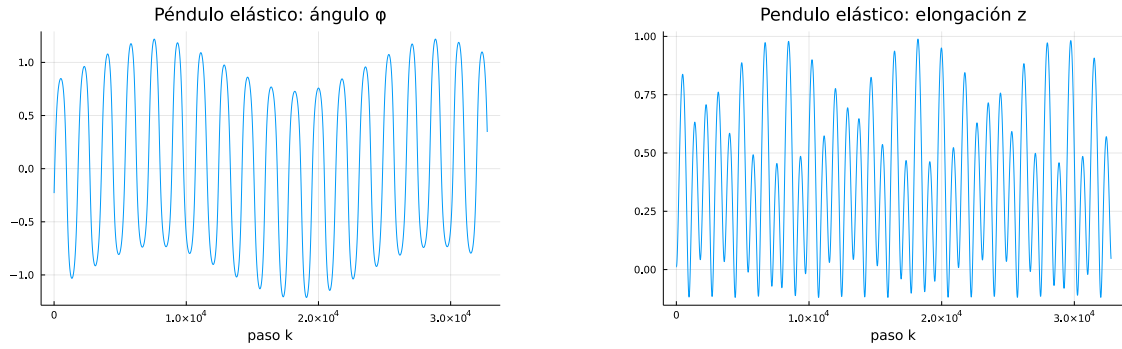


Figura 9: Ángulo y elongación del péndulo elástico con condiciones iniciales  $h = 0.0035$ ,  $q_0 = (0.011, -0.23)$  y  $q_1 = (0.011, -0.225)$ .

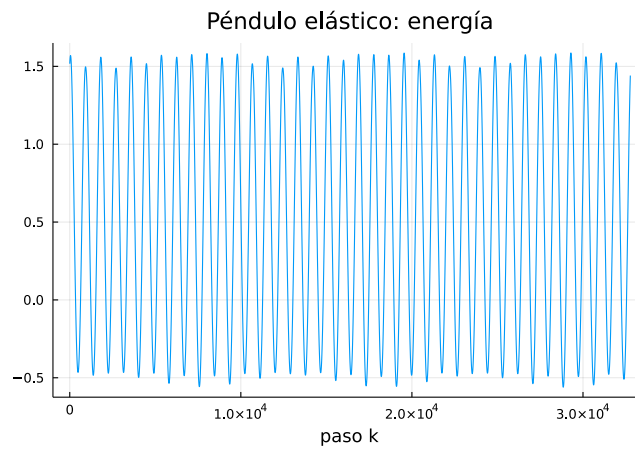


Figura 10: Energía del péndulo elástico con condiciones iniciales  $h = 0.0035$ ,  $q_0 = (0.011, -0.23)$  y  $q_1 = (0.011, -0.225)$ .

## 2.1. Disco vertical

En primer lugar, consideramos el sistema en cuestión simplificado, suponiendo que éste no puede oscilar lateralmente (Bloch, 2007, Subsección 1.4.1). Denotaremos  $m$  la masa del disco,  $I$  el momento de inercia normal y  $J$  el momento de inercia paralelo al disco.

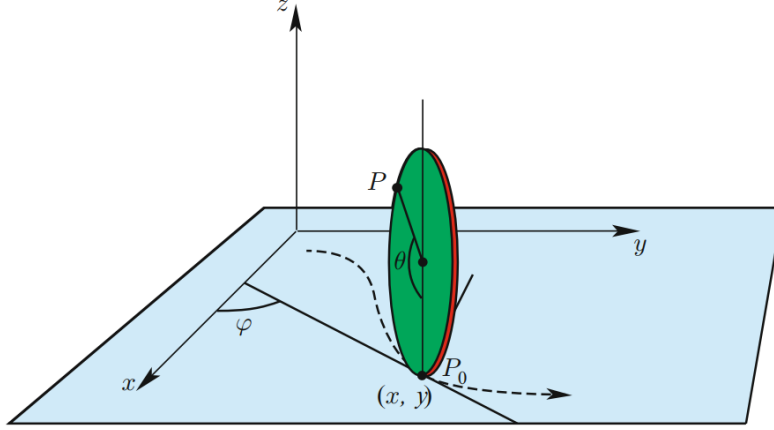


Figura 11: Disco vertical (figura 1.4.1 en Bloch (2007)).

El espacio de configuración será  $Q = \text{SE}(2) \times \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ , cuyos elementos vendrán dados por  $q = (x, y, \varphi, \theta) \in Q$  (véase figura 11). La energía potencial será constante debido a que el disco no oscila, por lo que el sistema únicamente consta de energía cinética:

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2. \quad (20)$$

Las ligaduras son de tipo no holónomas:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= a\dot{\theta} \cos \varphi \\ \dot{y} &= a\dot{\theta} \sin \varphi \end{aligned} \right\}, \quad (21)$$

las cuales dan lugar a una distribución de ligaduras de la forma

$$\mathcal{D}_q = \{(q, \dot{q}) \in TQ : (\dot{x}, \dot{y}) = a\dot{\theta}u\}, \quad (22)$$

donde  $u := (\cos \varphi, \sin \varphi)$ .

Este sistema posee como grupo de simetrías  $G = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ , mediante la acción  $R_{(a,b,\alpha)}(x, y, \varphi, \theta) = (x + a, y + b, \varphi, \theta + \alpha)$ , para cada  $(a, b, \alpha) \in G$ . Así, se puede definir un fibrado principal  $\pi: Q \rightarrow Q/G$ . De esta forma, se obtiene la dinámica del sistema mecánico a partir de un proceso de reducción (para más información véase Cendra et al. (2001); Cendra and Díaz (2007)). En particular, reducimos el espacio de fases mediante el grupo de simetrías,  $TQ/G \cong \mathbb{R}^3 \times T\mathbb{S}^1$ , sobre el que tenemos definida la siguiente distribución de ligaduras

$$\mathcal{D}_c = L(\{S_1 = a \cos \varphi s_1 + a \sin \varphi s_2 + s_3, s_4\}), \quad (23)$$

donde  $s_1 = (E_1, 0)$ ,  $s_2 = (E_2, 0)$ ,  $s_3 = (E_3, 0)$  y  $s_4 = (0, \frac{\partial}{\partial \varphi})$ , siendo  $\{E_1, E_2, E_3\}$  la base usual en  $\mathbb{R}^3$ .

Las ecuaciones de movimiento de este sistema son un caso particular del disco de Euler (disco que puede oscilar lateralmente), por lo que en el siguiente apartado veremos las ecuaciones generales directamente.

### Dinámica discreta

Dado un tamaño de paso  $h > 0$ , la discretización de las velocidades vendrá dada por:

$$\dot{q}(kh) \simeq \frac{1}{h}(q_{k+1} - q_k),$$

donde  $\{q_k = (x_k, y_k, \varphi_k, \theta_k)\}$  es la trayectoria discreta a determinar. En lo que sigue, denotaremos  $v_k^i := \frac{1}{h}(q_{k+1}^i - q_k^i)$ , donde  $i = x, y, \varphi, \theta$ . Operando mediante una regla de punto medio, tenemos una distribución de ligaduras discreta como sigue

$$\mathcal{M}_c = \{(q_0, q_1) \in (Q \times Q)/G : v_0^x = av_0^\theta \cos \varphi_{0+1/2}, v_0^y = av_0^\theta \sin \varphi_{0+1/2}\}, \quad (24)$$

donde se denota  $\varphi_{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\varphi_k + \varphi_{k+1})$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Por otro lado, el Lagrangiano discreto vendrá dado de forma trivial

$$L_d^k = L_d^k(v_k) = \frac{1}{2}m((v_k^x)^2 + (v_k^y)^2) + \frac{1}{2}I(v_k^\theta)^2 + \frac{1}{2}J(v_k^\varphi)^2. \quad (25)$$

Finalmente, las ecuaciones dinámicas discretas (10) vendrán dadas por:

$$\begin{aligned} \overleftarrow{S}_1 \Big|_{(\theta_k, \theta_{k+1}, \varphi_k, \varphi_{k+1}, v_k^x, v_k^y, v_k^\theta)} L_d^k - \overrightarrow{S}_1 \Big|_{(\theta_{k+1}, \theta_{k+2}, \varphi_{k+1}, \varphi_{k+2}, v_{k+1}^x, v_{k+1}^y, v_{k+1}^\theta)} L_d^k &= 0, \\ \overleftarrow{S}_2 \Big|_{(\theta_k, \theta_{k+1}, \varphi_k, \varphi_{k+1}, v_k^x, v_k^y, v_k^\theta)} L_d^k - \overrightarrow{S}_2 \Big|_{(\theta_{k+1}, \theta_{k+2}, \varphi_{k+1}, \varphi_{k+2}, v_{k+1}^x, v_{k+1}^y, v_{k+1}^\theta)} L_d^k &= 0, \\ v_k^x - av_k^\theta \cos \varphi_{k+\frac{1}{2}} &= 0, \quad v_k^y - av_k^\theta \sin \varphi_{k+\frac{1}{2}} = 0, \\ v_{k+1}^x - av_{k+1}^\theta \cos \varphi_{k+1+\frac{1}{2}} &= 0, \quad v_{k+1}^y - av_{k+1}^\theta \sin \varphi_{k+1+\frac{1}{2}} = 0, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \overleftarrow{S}_1 &= \frac{\partial}{\partial v_k^\theta} + a \cos \varphi_{k+1} \frac{\partial}{\partial v_k^x} + a \sin \varphi_{k+1} \frac{\partial}{\partial v_k^y}, & \overleftarrow{S}_2 &= \frac{\partial}{\partial \varphi_{k+1}}, \\ \overrightarrow{S}_1 &= \frac{\partial}{\partial v_k^\theta} + a \cos \varphi_{k+1} \frac{\partial}{\partial v_k^x} + a \sin \varphi_{k+1} \frac{\partial}{\partial v_k^y}, & \overrightarrow{S}_2 &= -\frac{\partial}{\partial \varphi_k}. \end{aligned}$$

Por tanto, desarrollando y reorganizando estas ecuaciones, el integrador numérico resulta:

$$I(v_{k+1}^\theta - v_k^\theta) + ma[(v_{k+1}^x - v_k^x) \cos \varphi_{k+1} + (v_{k+1}^y - v_k^y) \sin \varphi_{k+1}] = 0, \quad (26a)$$

$$v_{k+1}^\varphi - v_k^\varphi = 0, \quad (26b)$$

$$v_k^x - av_k^\theta \cos \varphi_{k+\frac{1}{2}} = 0, \quad v_k^y - av_k^\theta \sin \varphi_{k+\frac{1}{2}} = 0, \quad (26c)$$

$$v_{k+1}^x - av_{k+1}^\theta \cos \varphi_{k+1+\frac{1}{2}} = 0, \quad v_{k+1}^y - av_{k+1}^\theta \sin \varphi_{k+1+\frac{1}{2}} = 0. \quad (26d)$$

## Experimentos numéricos

Para resolver las ecuaciones (26) en cada paso  $k = 1, 2, \dots$ , y en particular (26a), basta con utilizar (26c) y (26d) y despejar  $v_{k+1}^\theta$ ,

$$v_{k+1}^\theta = \frac{v_k^\theta + \frac{2}{a}v_k^x \cos \varphi_{k+1} + \frac{2}{a}v_k^y \operatorname{sen} \varphi_{k+1}}{1 + 2 \cos(\varphi_{k+1} - \varphi_{k+1+\frac{1}{2}})}, \quad (27)$$

donde hemos tenido en cuenta el momento de inercia de un disco “idealmente sin grosor”,  $I = \frac{1}{2}ma^2$ . Por tanto, las ecuaciones presentan resolución explícita. Nótese además que en todas las ecuaciones podemos cancelar los términos que dependen del tamaño de paso  $h > 0$ , por lo que en este caso sólo representa el orden de magnitud de la energía del sistema.

En lo que sigue consideramos las constantes  $m = a = 1$ . Además, en las simulaciones no trabajamos con las variables  $v_k^i$ , sino que lo hacemos con las variables  $\Delta q_k^i = hv_k^i$  que no dependen del tamaño de paso  $h$ . Tomaremos en todas ellas  $h = 0.01$ .

En un primer ejemplo, le damos un impulso inicial al disco, imponiendo movimiento del punto de contacto con el plano  $(x, y)$  y del ángulo interno  $\theta$ . En este caso la energía y el ángulo  $\varphi$  se mantienen totalmente constantes, por lo que sólo mostramos la trayectoria y el ángulo interno en la figura 12. Otro caso interesante se muestra en la figura 13, donde únicamente damos un impulso inicial al ángulo  $\varphi$ , por lo que se produce un giro de velocidad constante por parte del disco sobre sí mismo. Por último, en la figura 14 mostramos un ejemplo en el que damos un impulso inicial a los 2 ángulos, por lo que se produce una trayectoria periódica y circular. Además, mostramos la energía donde se intuyen errores de tipo numérico exclusivamente, los cuales intuimos que se deben a alcanzar la precisión máquina en los cálculos de las expresiones. Esto parece adelantar lo que ocurrirá en el caso físicamente correcto, que mostramos en la siguiente subsección.

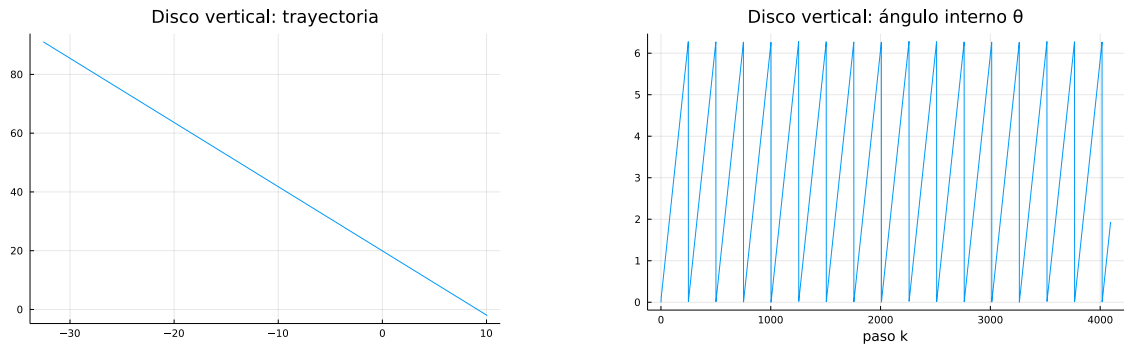


Figura 12: Trayectoria y ángulo interno  $\theta$  de un disco vertical para condiciones iniciales  $q_1 = (10.01, -2, 2, 0)$  y  $q_2 = (10.04 - 2.02.00.1)$ .

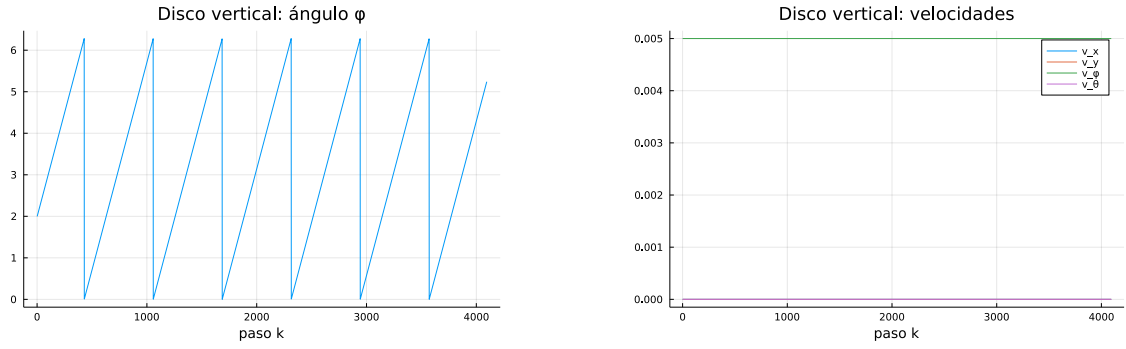


Figura 13: Ángulo  $\phi$  y velocidades de un disco vertical para condiciones iniciales  $q_1 = (1, -2, 2, 0)$  y  $q_2 = (1, -2, 2.01, 0)$ .

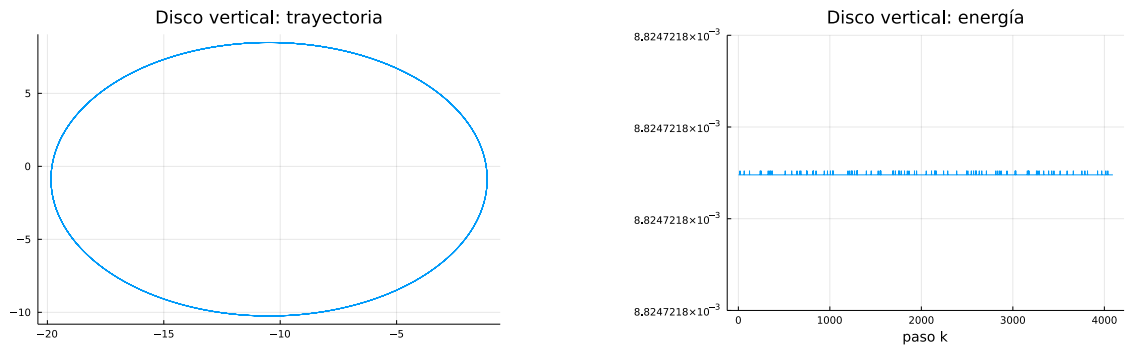


Figura 14: Trayectoria y energía de un disco vertical para condiciones iniciales  $q_1 = (-2, 3, 2, 0)$  y  $q_2 = (-2, 3.1, 2.01, 0.1)$ .

## 2.2. Disco de Euler

En este segundo caso, vamos a simular el sistema conocido como disco de Euler. Este consiste en un disco sobre un plano fijo, pero el cual puede oscilar lateralmente. Por tanto, se trata de añadir una variable extra al disco vertical del apartado anterior. La motivación, y de hecho, los detalles se encuentran en [Campos et al. \(2011\)](#). Aquí damos un breve resumen de los resultados y los traducimos a *Julia*.

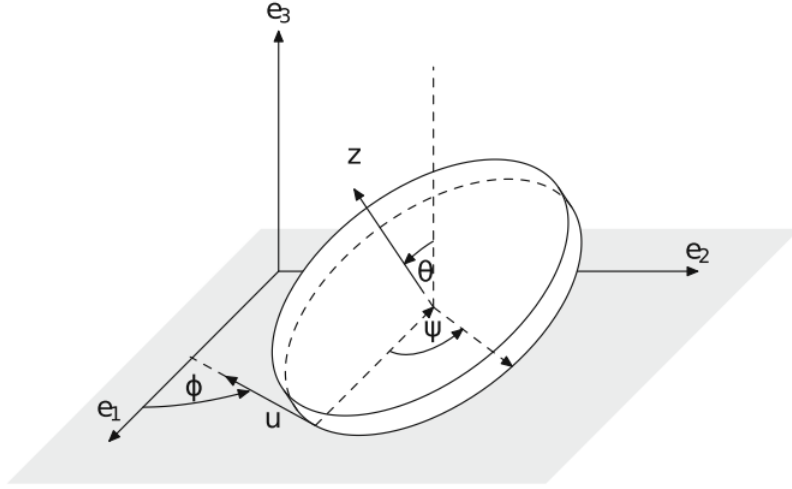


Figura 15: Disco de Euler (figura 1 en [Campos et al. \(2011\)](#)).

Siguiendo la notación que utilizan [Campos et al. \(2011\)](#), el espacio de configuración viene dado por  $Q = ]0, \frac{\pi}{2}[ \times S^1 \times S^1 \times \mathbb{R}^2$  y un elemento  $q \in Q$  será  $q = (\theta, \varphi, \psi, x, y)$  (véase figura 15, donde denotamos  $\varphi$  por  $\phi$ ). Consideramos  $r$  el radio del disco,  $M$  su masa,  $I_i$  su momento de inercia respecto del eje  $i = 1, 2, 3$  ( $x, y, z$ ) y grosor  $re$ . La distribución de ligaduras será:

$$\mathcal{D}_q = \{(q, \dot{q}) : (\dot{x}, \dot{y}) = \dot{\psi}ru\},$$

donde  $u$  es el vector unitario  $u = -(\cos \varphi, \sin \varphi)$  tangente al disco en el punto de contacto  $(x, y)$ . Nótese que en el caso anterior tomamos el opuesto de  $u$ , lo que provocará un cambio de signo en las ecuaciones discretas. Utilizando estas ligaduras, el Lagrangiano del sistema se reduce, obteniendo

$$\begin{aligned} L(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}, \bar{v}) = & \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta + (\bar{I}_1 + \bar{e}^2) (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) \\ & + \bar{I}_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 + (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) / r^2 - \bar{e} \dot{\varphi}^2 \sin 2\theta \\ & + 2\dot{x}(\dot{\theta} \sin \theta \sin \varphi - \dot{\varphi} \cos \theta \cos \varphi + \bar{e}(\dot{\varphi} \cos \varphi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi)) / r \\ & - 2\dot{y}(\dot{\theta} \sin \theta \cos \varphi + \dot{\varphi} \cos \theta \sin \varphi + \bar{e}(\dot{\varphi} \sin \varphi \sin \theta - \dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi)) / r \\ & - 2g/r(\sin \theta + \bar{e} \cos \theta), \end{aligned}$$

donde se ha redefinido  $L$  como  $2L/Mr^2$  y se escribe  $\bar{I}_i = I_i/Mr^2$  y  $\bar{e} = e/2$ .

Las ecuaciones de movimiento (en este caso conocidas como ecuaciones de Lagrange-d'Alembert-Poincaré (Cendra and Díaz, 2007)) vienen dadas por:

$$\begin{aligned}
(\dot{x}, \dot{y}) &= \dot{\psi} r u, \\
0 &= ((1 + \bar{I}_3) \cos \theta - \bar{e} \sin \theta) \ddot{\varphi} + \bar{I}_3 \ddot{\psi} + \langle (\ddot{x}, \ddot{y}), u \rangle / r \\
&\quad - ((2 + \bar{I}_3) \sin \theta + 2\bar{e} \cos \theta) \dot{\theta} \dot{\varphi}, \\
0 &= \left( (\bar{I}_1 + (\bar{e})^{-2}) \sin^2 \theta + (1 + \bar{I}_3) \cos^2 \theta - \bar{e} \sin 2\theta \right) \ddot{\varphi} + \bar{I}_3 \ddot{\psi} \cos \theta \\
&\quad + (\cos \theta - \bar{e} \sin \theta) \langle (\ddot{x}, \ddot{y}), u \rangle / r \\
&\quad - \left( (1 - \bar{I}_1 + \bar{I}_3 - \bar{e}^2) \sin 2\theta + 2\bar{e} \cos 2\theta \right) \dot{\theta} \dot{\varphi} - \bar{I}_3 \dot{\theta} \dot{\psi} \sin \theta, \\
0 &= (1 + \bar{I}_1 + \bar{e}^2) \ddot{\theta} + \left( (1 - \bar{I}_1 + \bar{I}_3 - \bar{e}^2) / 2 \sin 2\theta + \bar{e} \cos 2\theta \right) \dot{\varphi}^2 \\
&\quad + \bar{I}_3 \dot{\varphi} \dot{\psi} \sin \theta + (\sin \theta + \bar{e} \cos \theta) \langle (\ddot{y}, -\ddot{x}), u \rangle / r + g/r (\cos \theta - \bar{e} \sin \theta).
\end{aligned}$$

### Dinámica discreta

De forma similar a los ejemplos anteriores, ahora pasando por un proceso de reducción, se obtiene un Lagrangiano discreto de la forma:

$$\begin{aligned}
L_d^k(\theta_k, \theta_{k+1}, \varphi_k, \varphi_{k+1}, \Delta\theta_k, \Delta x_k, \Delta y_k) \\
&= \Delta\theta_k^2 + \Delta\varphi_k^2 \cos^2 \left( \theta_{k+\frac{1}{2}} \right) + (\bar{I}_1 + \bar{e}^2) \left( \Delta\theta_k^2 + \Delta\varphi_k^2 \sin^2 \left( \theta_{k+\frac{1}{2}} \right) \right) \\
&\quad + \bar{I}_3 \left( \Delta\varphi_k \cos \left( \theta_{k+\frac{1}{2}} \right) + \Delta\theta_k \right)^2 + (\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2) / r^2 - \bar{e} \Delta\varphi_k^2 \sin \left( 2\theta_{k+\frac{1}{2}} \right) \\
&\quad + 2\Delta x_k \left( \Delta\theta_k \sin \left( \theta_{k+\frac{1}{2}} \right) \sin \left( \varphi_{k+\frac{1}{2}} \right) - \Delta\varphi_k \cos \left( \theta_{k+\frac{1}{2}} \right) \cos \left( \varphi_{k+\frac{1}{2}} \right) \right) / r \\
&\quad + 2\Delta x_k \bar{e} \left( \Delta\varphi_k \sin \left( \theta_{k+\frac{1}{2}} \right) \cos \left( \varphi_{k+\frac{1}{2}} \right) + \Delta\theta_k \cos \left( \theta_{k+\frac{1}{2}} \right) \sin \left( \varphi_{k+\frac{1}{2}} \right) \right) / r \\
&\quad - 2\Delta y_k \left( \Delta\theta_k \sin \left( \theta_{k+\frac{1}{2}} \right) \cos \left( \varphi_{k+\frac{1}{2}} \right) + \Delta\varphi_k \cos \left( \theta_{k+\frac{1}{2}} \right) \sin \left( \varphi_{k+\frac{1}{2}} \right) \right) / r \\
&\quad - 2\Delta y_k \bar{e} \left( \Delta\varphi_k \sin \left( \theta_{k+\frac{1}{2}} \right) \sin \left( \varphi_{k+\frac{1}{2}} \right) - \Delta\theta_k \cos \left( \theta_{k+\frac{1}{2}} \right) \cos \left( \varphi_{k+\frac{1}{2}} \right) \right) / r \\
&\quad - 2h^2 g / r \left( \sin \left( \theta_{k+\frac{1}{2}} \right) + \bar{e} \cos \left( \theta_{k+\frac{1}{2}} \right) \right).
\end{aligned} \tag{28}$$

donde hemos considerado  $\Delta q_k^i = h v_k^i$ ,  $i = \theta, \varphi, \psi, x, y$ , al igual que realizamos en las simulaciones del apartado anterior. Además, sin pérdida de generalidad, redefinimos el Lagrangiano discreto multiplicando por  $h^2$ .

Por otro lado, la distribución de ligaduras discreta (reducida)  $\mathcal{M}_c \subset (Q \times Q)/G$  viene determinada por

$$\Delta x_k = -\Delta\theta_k r \cos \varphi_{k+\frac{1}{2}} \quad \text{and} \quad \Delta y_k = -\Delta\theta_k r \sin \varphi_{k+\frac{1}{2}}.$$

Computando las correspondientes ecuaciones no holónomas discretas (10), se



obtiene finalmente

$$\begin{aligned}
0 = & 4 \left( 1 + \bar{I}_1 + \bar{e}^2 \right) (\Delta\theta_{k+1} - \Delta\theta_k) \\
& + 2h^2 g/r \left( \cos \left( \theta_{k+\frac{1}{2}} \right) + \cos \left( \theta_{k+1+\frac{1}{2}} \right) - \bar{e} \left( \sin \left( \theta_{k+\frac{1}{2}} \right) + \sin \left( \theta_{k+1+\frac{1}{2}} \right) \right) \right) \\
& + \Delta\varphi_k^2 \left( \left( 1 - \bar{I}_1 + \bar{I}_3 - \bar{e}^2 \right) \sin \left( 2\theta_{k+\frac{1}{2}} \right) + 2\bar{e} \cos \left( 2\theta_{k+\frac{1}{2}} \right) \right) \\
& + \Delta\varphi_{k+1}^2 \left( \left( 1 - \bar{I}_1 + \bar{I}_3 - \bar{e}^2 \right) \sin \left( 2\theta_{k+1+\frac{1}{2}} \right) + 2\bar{e} \cos \left( 2\theta_{k+1+\frac{1}{2}} \right) \right) \\
& + 2\Delta\varphi_k \Delta\theta_k \left( (1 + \bar{I}_3) \sin \left( \theta_{k+\frac{1}{2}} \right) + \bar{e} \cos \left( \theta_{k+\frac{1}{2}} \right) \right) \\
& + 2\Delta\varphi_{k+1} \Delta\theta_{k+1} \left( (1 + \bar{I}_3) \sin \left( \theta_{k+1+\frac{1}{2}} \right) + \bar{e} \cos \left( \theta_{k+1+\frac{1}{2}} \right) \right) , \\
0 = & \left( 1 + \bar{I}_1 + \bar{I}_3 + \bar{e}^2 \right) (\Delta\phi_{k+1} - \Delta\phi_k) \\
& - \Delta\varphi_k \left( \left( 1 - \bar{I}_1 + \bar{I}_3 - \bar{e}^2 \right) \cos \left( 2\theta_{k+\frac{1}{2}} \right) - 2\bar{e} \sin \left( 2\theta_{k+\frac{1}{2}} \right) \right) \\
& + \Delta\varphi_{k+1} \left( \left( 1 - \bar{I}_1 + \bar{I}_3 - \bar{e}^2 \right) \cos \left( 2\theta_{k+1+\frac{1}{2}} \right) - 2\bar{e} \sin \left( 2\theta_{k+1+\frac{1}{2}} \right) \right) \\
& + \Delta\theta_k \left( (\Delta\theta_k + 2n) \sin \left( \theta_{k+\frac{1}{2}} \right) - 2(1 + \bar{I}_3 - \bar{e}\Delta\theta_0/2) \cos \left( \theta_{k+\frac{1}{2}} \right) \right) \\
& + \Delta\theta_{k+1} \left( (\Delta\theta_{k+1} - 2n) \sin \left( \theta_{k+1+\frac{1}{2}} \right) + 2(1 + \bar{I}_3 + \bar{e}\Delta\theta_{k+1}/2) \cos \left( \theta_{k+1+\frac{1}{2}} \right) \right) , \\
0 = & -\bar{I}_3 \left( \Delta\phi_k \cos \left( \theta_{k+\frac{1}{2}} \right) - \Delta\phi_{k+1} \cos \left( \theta_{k+1+\frac{1}{2}} \right) \right) \\
& - \Delta\theta_k (\bar{I}_3 + \cos(\Delta\varphi_k/2)) \\
& + \Delta\theta_{k+1} (\bar{I}_3 + \cos(\Delta\varphi_{k+1}/2)) \\
& - \Delta\varphi_k \cos(\Delta\phi_k/2) \left( \cos \left( \theta_{k+\frac{1}{2}} \right) - \bar{e} \sin \left( \theta_{k+\frac{1}{2}} \right) \right) \\
& + \Delta\varphi_{k+1} \cos(\Delta\phi_{k+1}/2) \left( \cos \left( \theta_{k+1+\frac{1}{2}} \right) - \bar{e} \sin \left( \theta_{k+1+\frac{1}{2}} \right) \right) \\
& - \Delta\theta_k \sin(\Delta\phi_k/2) \left( \sin \left( \theta_{k+\frac{1}{2}} \right) + \bar{e} \cos \left( \theta_{k+\frac{1}{2}} \right) \right) \\
& - \Delta\theta_{k+1} \sin(\Delta\phi_{k+1}/2) \left( \sin \left( \theta_{k+1+\frac{1}{2}} \right) + \bar{e} \cos \left( \theta_{k+1+\frac{1}{2}} \right) \right) .
\end{aligned}$$

### Experimentos numéricos

En lo que sigue, consideramos las constantes  $M = r = I_1 = I_2 = 1$ ,  $g = 9.8$ ,  $I_3 = 2.5$  y  $e = 0$ .

En primer lugar, podemos simular un disco vertical imponiendo condiciones iniciales fijas para todas las variables excepto para el ángulo de giro  $\psi$ , produciendo un disco vertical al igual que en el apartado anterior. En la figura 16 vemos que la energía se conserva salvo errores numéricos debidos a alcanzar la “precisión máquina”, como vimos en el último caso del apartado anterior. En un segundo ejemplo, figura 17, imponiendo condiciones iniciales en las que el disco oscila y gira, observamos las ondulaciones propias de esas oscilaciones y además una conservación de la energía en 11 órdenes de magnitud.

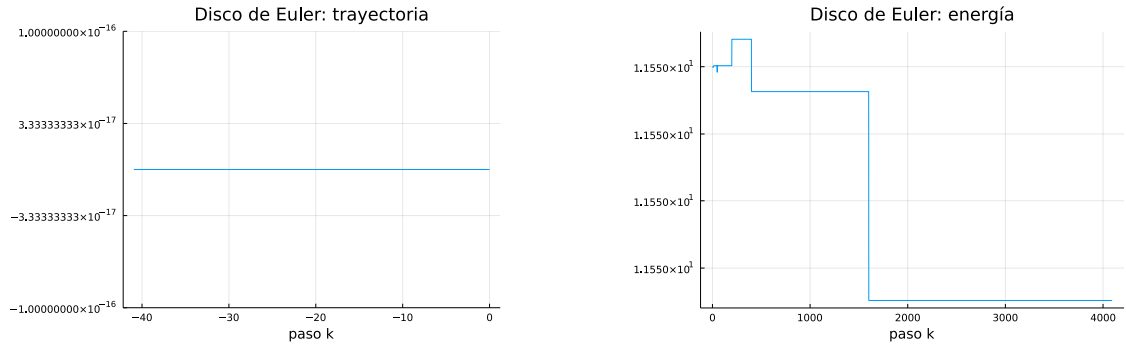


Figura 16: Trayectoria y energía de un disco de Euler para condiciones iniciales  $h = 0.01$ ,  $q_1 = (\pi/2, 0, 0, 0, 0)$  y  $q_2 = (\pi/2, h, 0, 0, 0)$ .

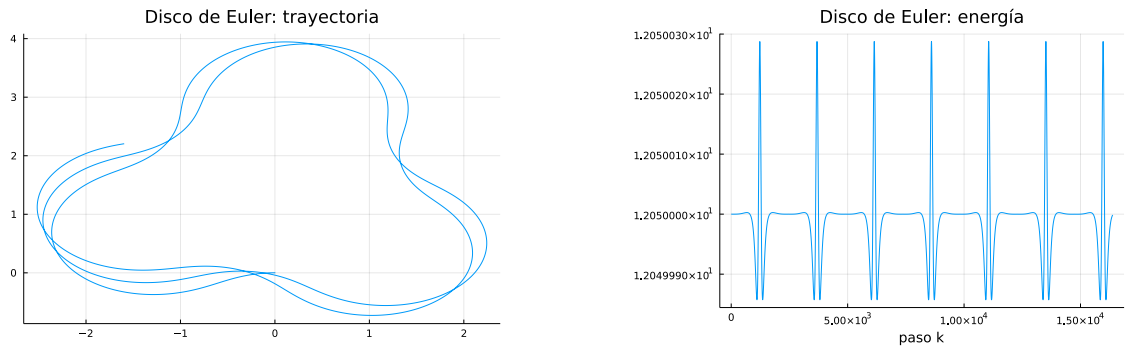


Figura 17: Trayectoria y energía de un disco de Euler para condiciones iniciales  $h = 0.001$ ,  $q_1 = (\pi/2, 0, 0, 0, 0)$  y  $q_2 = (\pi/2, h, h, h, h)$ .

### 3. Bola rodando

Consideramos una bola homogénea de radio  $a \in \mathbb{R}^+$ , que rueda sin deslizar sobre un plano horizontal (estático o rotando). De esta forma, la energía potencial es nula y el sistema sólo consta de energía cinética. Denotaremos  $m$  la masa de la bola y  $J = \frac{2}{5}ma^2$  el momento de inercia de esta.

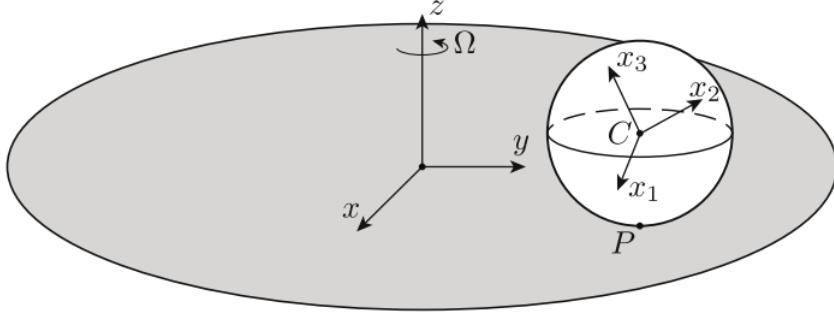


Figura 18: Bola en un plano en rotación (figura 1 en [Bizyaev et al. \(2018\)](#)).

El espacio de configuración del sistema viene dado por  $Q = \mathbb{R}^2 \times \text{SO}(3)$ . Así, las variables serán de la forma  $q = (X, R) \in Q$ , donde  $X$  es la posición del centro de la bola proyectada sobre el plano y  $R$  es la matriz de rotación que representa la posición angular de ésta.

Tenemos dos sistemas de referencia distintos: uno estático  $Ox_0y_0\gamma$  y otro comóvil al plano que rota  $Ox_1y_1\gamma$ , donde  $\gamma = (0, 0, 1)$ . Las velocidades lineal y angular de la bola en el sistema estático se denotan  $v_0, \omega_0$ . En este caso, el Lagrangiano viene dado por

$$L = \frac{1}{2}m|v_0|^2 + \frac{1}{2}J|\omega_0|^2,$$

junto con la ligadura

$$f = v_0 + a\gamma \times \omega_0 + \Omega X \times \gamma = 0. \quad (29)$$

Observamos que en este sistema de referencia la ligadura no es homogénea, lo cual constituye una complicación mayor para desarrollar la teoría de integración. Por ello, se realiza un cambio de coordenadas hacia el sistema en rotación de la forma

$$\left. \begin{aligned} v_0 &= \dot{X} + \Omega\gamma \times X \\ \omega_0 &= \omega + \Omega\gamma \end{aligned} \right\}.$$

De este modo, el sistema mecánico vendrá descrito por el Lagrangiano

$$L(X, R, \dot{X}, \omega) = \frac{1}{2}m|\dot{X}|^2 + m\Omega\dot{X} \cdot (\gamma \times X) + \frac{1}{2}J|\omega|^2 + J\Omega\omega \cdot \gamma + \frac{1}{2}m\Omega^2|X|^2, \quad (30)$$

junto con la ligadura

$$f = \dot{X} - a\omega \times \gamma = 0, \quad (31)$$

donde  $\hat{\omega} = R^t \dot{R} \in \mathfrak{so}(3)$ .

A partir de todo ello, tenemos la siguiente distribución de ligaduras

$$\mathcal{D}_{(X,R)} = \{(X, R, \dot{X}, \omega) \in \mathbb{R}^5 : \dot{X} = a\omega \times \gamma\}, \quad (32)$$

donde tomamos el vector  $\omega \in \mathbb{R}^3$  correspondiente a  $\dot{R} = R\hat{\omega} \in T_R \text{SO}(3)$ . En este caso, utilizaremos la teoría de multiplicadores de Lagrange para obtener las ecuaciones dinámicas discretas. Por tanto, necesitamos calcular el aniquilador de la distribución de ligaduras, que vendrá dado de forma sencilla por la combinación lineal de dos vectores

$$\mathcal{D}_{(X,R)}^0 = L(\{(1, 0, 0, -a, 0), (0, 1, a, 0, 0)\}).$$

Calculemos ahora las ecuaciones de movimiento de este sistema. Para ello, tenemos:

$$\begin{aligned} D_X L &= -m\Omega\gamma \times \dot{X} + m\Omega^2 X, \\ D_{\dot{X}} L &= m\dot{X} + m\Omega\gamma \times X \\ D_\omega L &= J\omega + J\Omega\gamma. \end{aligned}$$

Por tanto, teniendo en cuenta que  $\text{ad}_\omega^* \eta \equiv -\text{ad}_\omega \eta = -\omega \times \eta$  mediante la identificación  $\mathfrak{so}(3)^* \equiv \mathbb{R}^3 \equiv \mathfrak{so}(3)$ , las ecuaciones (6) y (8) resultan:

$$\begin{aligned} m\ddot{X} + 2m\Omega\gamma \times \dot{X} - m\Omega^2 X &= (\lambda_1, \lambda_2), \\ J\dot{\omega} - J\Omega\gamma \times \omega &= a(\lambda_2, -\lambda_1, 0), \\ \dot{X} &= a\omega \times \gamma. \end{aligned} \quad (33)$$

Observamos que de nuevo tenemos un sistema de ecuaciones acopladas del cual no conocemos solución.

### Dinámica discreta

Dado un tamaño de paso  $h > 0$  y para cada paso  $k = 1, 2, \dots$ , las velocidades lineal y angular se pueden tomar:

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_k &= \frac{1}{h} R_k^t (R_{k+1} - R_k) = \frac{1}{h} (F_k - I), \\ v_k &= \frac{1}{h} (X_{k+1} - X_k), \end{aligned}$$

donde  $F_k := R_k^t R_{k+1} \in \text{SO}(3)$  es la actualización de las rotaciones en cada paso y

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es la matriz identidad. Luego, se induce una distribución de ligaduras discreta de la forma

$$\mathcal{M}_c = \{(X_0, R_0, X_1, R_1) \in (\mathbb{R}^2 \times \text{SO}(3))^2 : F = R_0^t R_1, X_1 - X_0 = a(F - I)\gamma\}. \quad (34)$$

Vemos que, dados  $X_k, F_k, k = 1, 2, \dots$ , para obtener  $X_{k+1}$  basta con considerarlo dentro de este espacio. Sin embargo, debido a que  $F_k - I$  sólo será antisimétrica de forma aproximada, existe un residuo en la tercera componente de  $X_{k+1}$ . En las simulaciones lo despreciamos.

Por otro lado, sustituimos los valores de las discretizaciones de las velocidades en el Lagrangiano continuo y aplicamos una regla del punto medio sobre los términos en que aparece  $X$ , es decir,  $X(kh) \simeq \frac{1}{2}(X_k + X_{k+1})$ . Así, se obtiene un Lagrangiano discreto de la forma:

$$\begin{aligned} L_d^k &= L_d^k(X_k, R_k, X_{k+1}, R_{k+1}) = L_d^k(X_k, X_{k+1}, F_k) \\ &= \frac{m}{2h^2} |X_{k+1} - X_k|^2 + \frac{1}{8} m \Omega^2 |X_k + X_{k+1}|^2 + \frac{m\Omega}{h} (x_k y_{k+1} - x_{k+1} y_k) \\ &\quad - \frac{ma^2}{5h^2} \text{tr}[F_k(I + h\Omega\hat{\gamma})], \end{aligned} \quad (35)$$

donde denotamos  $X_k = (x_k, y_k) \in \mathbb{R}^2$  y por abuso del lenguaje  $L_d^k = L_d^k(X_k, X_{k+1}, F_k)$ . Resta obtener las derivadas del Lagrangiano respecto de  $X_k$  y  $X_{k+1}$ , que notaremos  $D_{1X}L_d^k$  y  $D_{2X}L_d^k$ , respectivamente, y respecto de  $F_k$ , que notaremos  $D_F L_d^k$ . Estas serán:

$$\begin{aligned} D_{1X}L_d^k &= -\frac{m}{h^2}(X_{k+1} - X_k) + \frac{1}{4}m\Omega^2(X_k + X_{k+1}) + \frac{m\Omega}{h}X_{k+1} \times \gamma, \\ D_{2X}L_d^k &= \frac{m}{h^2}(X_{k+1} - X_k) + \frac{1}{4}m\Omega^2(X_k + X_{k+1}) - \frac{m\Omega}{h}\gamma \times X_k, \\ \mathcal{L}_{F_k}^* D_F L_d^k &= \frac{ma^2}{5h^2}(F_k - F_k^t)^\vee + \frac{ma^2\Omega}{5h}(\hat{\gamma}F_k + F_k^t\hat{\gamma})^\vee \\ &= \frac{ma^2}{5h^2}([(I + h\Omega\hat{\gamma})F_k]^-)^\vee, \\ \mathcal{R}_{F_k}^* D_F L_d^k &= \frac{ma^2}{5h^2}(F_k - F_k^t)^\vee + \frac{ma^2\Omega}{5h}(F_k\hat{\gamma} + \hat{\gamma}F_k^t)^\vee \\ &= \frac{ma^2}{5h^2}([F_k(I + h\Omega\hat{\gamma})]^-)^\vee, \end{aligned}$$

donde de nuevo abusamos el lenguaje al identificar  $\mathfrak{so}(3) \equiv \mathbb{R}^3$  en las trivializaciones a izquierdas y derechas de la derivada respecto  $F \in \text{SO}(3)$ , e introducimos la notación  $R^- := R - R^t$ . Obsérvese que, aunque las velocidades angulares discretas son la función  $\vee$  de matrices *aproximadamente* antisimétricas, estas ecuaciones sí son exactas en este sentido, pues transportamos a  $\mathbb{R}^3$  la antisimetrización de ciertas matrices.

Finalmente, obtengamos los integradores numéricos a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange discretas de este sistema, en las que usaremos multiplicadores de Lagrange para imponer las ligaduras discretas. Teniendo en cuenta la base que genera al aniquilador del fibrado de ligaduras  $\mathcal{D}^0$ , por simplicidad en los cálculos posteriores, tomemos la base proporcional a esta:

$$\left\{ \frac{m}{h^2}(1, 0, 0, -a, 0), \frac{m}{h^2}(0, 1, a, 0, 0) \right\}.$$

Introduciendo una familia biparamétrica de multiplicadores de Lagrange  $\lambda_{1k}, \lambda_{2k} \in \mathbb{R}$  para esta base, las ecuaciones de movimiento (7) y (9) junto con la ecuación

de ligadura discreta resultan en este caso:

$$\begin{aligned} [(-1 + \frac{1}{4}h^2\Omega^2)I - h\Omega\hat{\gamma}]X_{k+1} + 2(1 + \frac{1}{4}h^2\Omega^2)X_k \\ + [(-1 + \frac{1}{4}h^2\Omega^2)I + h\Omega\hat{\gamma}]X_{k-1} = (\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, 0), \end{aligned} \quad (36a)$$

$$-\frac{a}{5}([F_k(I + h\Omega\hat{\gamma})]^-)^\vee + \frac{a}{5}([(I + h\Omega\hat{\gamma})F_{k-1}]^-)^\vee = \gamma \times (\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, 0), \quad (36b)$$

$$X_{k+1} = X_k + a(F_k - I)\gamma. \quad (36c)$$

Dados  $X_{k-1}, X_k \in \mathbb{R}^2$  y  $F_{k-1} \in \text{SO}(3)$ , buscamos resolver este sistema de ecuaciones para obtener  $q_{k+1} = (X_{k+1}, F_k) \in \mathbb{R}^2 \times \text{SO}(3)$ . Mediante la ecuación (36c), podemos sustituir el valor de  $X_{k+1}$  en (36a) y obtenemos los valores de los multiplicadores de Lagrange  $(\lambda_{1k}, \lambda_{2k}) \in \mathbb{R}^2$ , ambos respecto de  $F_k$ :

$$(\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, 0) = a(A - h\Omega\hat{\gamma})F_k\gamma - aA\gamma + (B - h\Omega\hat{\gamma})X_k + (A + h\Omega\hat{\gamma})X_{k-1}, \quad (37)$$

donde ahora definimos por simplificación

$$A = -1 + \frac{1}{4}h^2\Omega^2 \quad \text{and} \quad B = 1 + \frac{3}{4}h^2\Omega^2.$$

Por último, sustituyendo (36c) y (37) en la ecuación (36b), y reordenando, se obtiene la ecuación implícita a resolver:

$$([F_k(I + h\Omega\hat{\gamma})]^-)^\vee + 5(AI - h\Omega\hat{\gamma})\hat{\gamma}F_k\gamma = \alpha_k \in \mathbb{R}^3, \quad (38)$$

definiendo  $\alpha_k := ([F_k(I + h\Omega\hat{\gamma})]^-)^\vee - \frac{5}{a}[(BI - h\Omega\hat{\gamma})\hat{\gamma}X_k + (AI + h\Omega\hat{\gamma})\hat{\gamma}X_{k-1}]$ , que depende de las variables conocidas en cada paso  $k = 2, 3, \dots$

## Experimentos numéricos

La resolución explícita de la ecuación (38) para hacerla resoluble numéricamente no es nada trivial, pero su derivación puede consultarse en el Apéndice B. En resumen, definiendo  $F_k = \text{cay}(\hat{\xi})$  para cierto  $\xi \in \mathbb{R}^3$ , desarrollando y simplificando en (38) se obtiene una ecuación implícita no lineal:

$$\begin{aligned} \alpha + \alpha \times \xi = \left(4 + 10A - 2h\Omega\tilde{\xi}_3(1 + 5\frac{\tilde{\xi}_3^2 - |\tilde{\xi}|^2}{1 + |\tilde{\xi}|^2}) - \xi \cdot \alpha\right)\tilde{\xi} \\ + \left(2h\Omega(1 - 5\frac{\tilde{\xi}_3^2 - |\tilde{\xi}|^2}{1 + |\tilde{\xi}|^2}) - 10A\tilde{\xi}_3\right)\gamma - 10h\Omega(1 + \frac{\tilde{\xi}_3^2 - |\tilde{\xi}|^2}{1 + |\tilde{\xi}|^2})\gamma \times \xi, \end{aligned} \quad (39)$$

donde  $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \tilde{\xi}_3) \in \mathbb{R}^3$ . Esta última la resolvemos en cada paso  $k = 2, 3, \dots$  a partir de la librería *NLsolve.jl* de *Julia*.

En todo lo que sigue, consideraremos las constantes  $a = m = 1$ . Las condiciones iniciales vendrán dadas por la elección de  $(X_1, F_1) \in \mathbb{R}^2 \times \text{SO}(3)$ . En particular, seleccionamos  $F_1$  como producto de rotaciones básicas, es decir, rotaciones a lo largo de los ejes de referencia.

En primer lugar, si tomamos  $\Omega = 0$ , estamos considerando una bola rodando en un plano estático. En este caso, la trayectoria es o bien un punto (para rotación respecto del eje 0Z) o bien una línea recta cuya dirección depende exclusivamente de la rotación inicial que consideremos. Por ejemplo, dado  $h = 0.001$ , si  $F_1$  es

una rotación respecto del eje 0X de ángulo  $\theta = -0.05$ , se obtiene una trayectoria recta cuya energía se muestra en la figura 19a. Escogiendo  $h = 0.1$  y  $F_1$  una rotación a lo largo del eje 0Y de ángulo  $\theta = 0.3$ , observamos tenemos los resultados de la figura 19b. En ambos casos estamos alcanzando la “precisión máquina”, la única razón que puede explicar este tipo de gráficas en la energía.

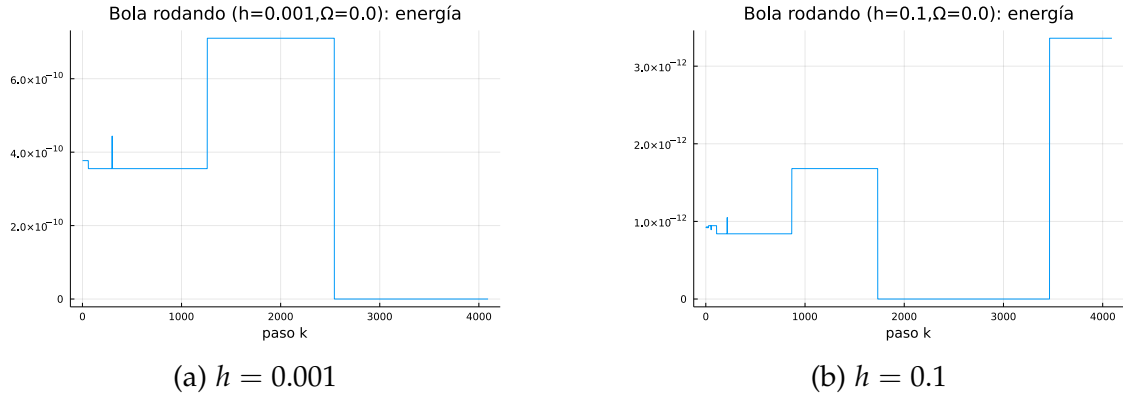


Figura 19: Energía (normalizada a su valor mínimo) de una bola sobre un plano estático bajo diferentes condiciones iniciales.

En el caso más interesante, podemos considerar el plano rotando, i.e.,  $\Omega \neq 0$ . Si tomamos constantes  $h = 0.02$  y  $\Omega = 1$ , y condiciones iniciales  $X_1 = (0,0)$ ,  $F_1$  rotación respecto del eje OY con ángulo  $\theta = -0.1$ , se obtiene la figura 20. Ahora vemos que se conservan solamente 3 órdenes de magnitud, lo cual puede deberse a una “peor” selección de condiciones iniciales, presionando a la simulación hasta una zona cercana al límite de estabilidad.

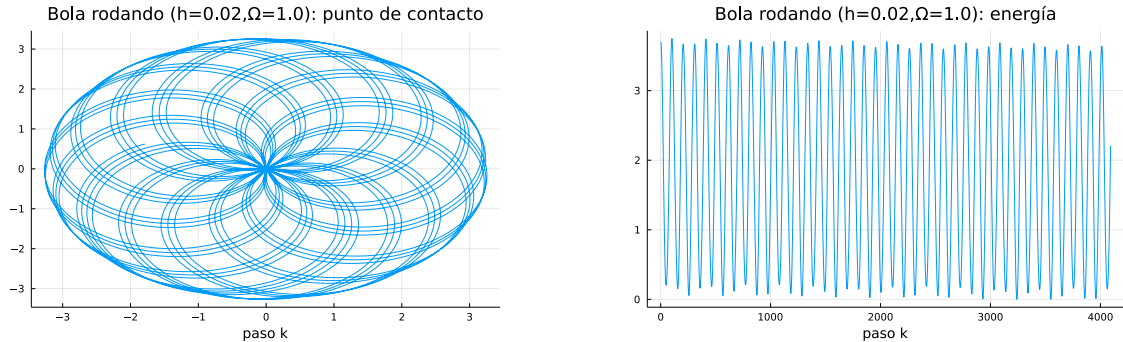


Figura 20: Trayectoria y energía (normalizada a su valor mínimo) de una bola sobre un plano en rotación con condiciones iniciales  $X_1 = (0,0)$ ,  $F_1$  rotación respecto del eje OX con ángulo  $\theta = -0.1$ .

Imágenes similares aparecen cuando la bola no sale del centro de la mesa. Por ejemplo, en la figura 21 se muestran los resultados tomando  $h = 0.001$  y  $\Omega = 1.5$ , y condiciones iniciales  $X_1 = (2,0)$ ,  $F_1$  rotación respecto del eje OY con ángulo  $\theta = 0.002$ . Observamos en este caso una conservación de la energía de unos 6 órdenes de magnitud. Además, vemos que se necesitan algunas iteraciones más para completar el ciclo que describe la bola alrededor del centro de la mesa.

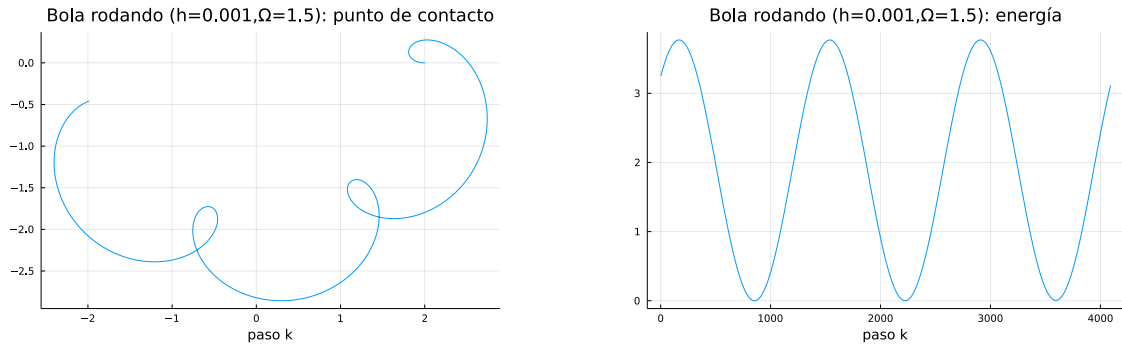


Figura 21: Trayectoria y energía (normalizada a su valor mínimo) de una bola sobre un plano en rotación con condiciones iniciales  $X_1 = (2, 0)$ ,  $F_1$  rotación respecto del eje OY con ángulo  $\theta = 0.002$ .

## Referencias

- Abraham, R. and Marsden, J. (1978). *Foundations of Mechanics*. Benjamin/Cummings Publishing Co. Inc. Advanced Book Program, Reading, Mass.
- Bizyaev, I. A., Borisov, A. V., and Mamaev, I. S. (2018). Dynamics of the Chaplygin ball on a rotating plane. *Russian Journal of Mathematical Physics*, pages 423–433.
- Bloch, A. (2007). *Nonholonomic Mechanics and Control*. Interdisciplinary Applied Mathematics. Springer New York.
- Bloch, A. M., Krishnaprasad, P. S., Marsden, J. E., and Murray, R. M. (1996). Nonholonomic mechanical systems with symmetry. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 136:21–99.
- Campos, C. M., Cendra, H., Díaz, V. A., and de Diego, D. M. (2011). Discrete Lagrange-d'Alembert-Poincaré equations for Euler's disk. *Rev. la Real Acad. Ciencias Exactas, Fis. y Nat. Ser. A. Mat.* 2011 1061, 106(1):225–234.
- Cendra, H. and Díaz, V. A. (2007). The Lagrange-D'Alembert-Poincaré equations and integrability for the Euler's disk. *Regular and Chaotic Dynamics*, 12:56–67.
- Cendra, H., Marsden, J. E., and Ratiu, T. S. (2001). *Geometric Mechanics, Lagrangian Reduction, and Nonholonomic Systems*. Springer Berlin Heidelberg.
- Cortés, J. (2002). *Geometric, Control and Numerical Aspects of Nonholonomic Systems*. Geometric, Control, and Numerical Aspects of Nonholonomic Systems. Springer.
- Cushman, R. H. and Bates, L. M. (2015). *Global Aspects of Classical Integrable Systems*. Birkhäuser Verlag.
- de León, M. and Rodrigues, P. R. (1989). *Methods of differential geometry in analytical mechanics*, volume 158 of *North-Holland Mathematics Studies*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam.



- de León, M., Martin de Diego, D., and Santamaria-Merino, A. (2002). Geometric integrators and nonholonomic mechanics. *Journal of Mathematical Physics*, 45.
- Iglesias, D., Marrero, J. C., de Diego, D. M., and Martínez, E. (2008). Discrete nonholonomic lagrangian systems on lie groupoids. *Journal of Nonlinear Science*, 18:221–276.
- Iserles, A., Munthe-Kaas, H. Z., Nørsett, S. P., and Zanna, A. (2000). Lie-group methods. *Acta Numerica*, 9:215–365.
- Lee, T. (2008). *Computational geometric mechanics and control of rigid bodies*. PhD thesis, University of Michigan.
- Marsden, J. E. and West, M. (2001). Discrete mechanics and variational integrators. *Acta Numer.*, 10:357–514.
- Tuwankotta, J. and Quispel, G. (2003). Geometric numerical integration applied to the elastic pendulum at higher-order resonance. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 154(1):229–242.

## A. El grupo de rotaciones $SO(3)$

El grupo ortogonal  $O(3)$  se define como el conjunto de todas las matrices  $R \in GL(3, \mathbb{R})$  tales que  $R^t = R^{-1}$ , es decir, las aplicaciones lineales sobre  $\mathbb{R}^3$  que preservan el producto escalar. El grupo ortogonal especial  $SO(3)$  es la componente conexa de  $\det^{-1}(\{1\})$  en  $O(3)$ , es decir,  $R \in SO(3)$  si y sólo si  $R^t R = I_3$  y  $\det R = 1$ . Se suele llamar *grupo de rotaciones* porque se corresponde físicamente con el conjunto de aplicaciones de rotación sobre el espacio euclidiano  $\mathbb{R}^3$ . Esta definición proporciona a  $SO(3)$  una estructura de grupo de Lie conexo y compacto (Cushman and Bates, 2015). Su álgebra de Lie es

$$\mathfrak{so}(3) = T_e SO(3) = \{A \in GL(3, \mathbb{R}) : A + A^t = 0\},$$

es decir,  $\mathfrak{so}(3)$  es el conjunto de matrices reales  $3 \times 3$  antisimétricas. Además, mediante la aplicación  $\vee : \mathfrak{so}(3) \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definida por

$$\left( \begin{array}{ccc} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{array} \right)^\vee = (a_1, a_2, a_3) =: a,$$

se tiene una identificación  $\mathfrak{so}(3) \cong \mathbb{R}^3$ . La inversa se denota  $\wedge : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathfrak{so}(3)$ , y algunas veces de la forma  $\hat{x} = \wedge(x) \in \mathfrak{so}(3)$ ,  $x \in \mathbb{R}^3$ . De hecho, estas son isometrías respecto de una cierta métrica en  $\mathfrak{so}(3)$  (métrica de Killing). Además, debido a que son espacios vectoriales, se permite la identificación también entre el espacio dual  $\mathfrak{so}(3)^* \cong (\mathbb{R}^3)^* \cong \mathbb{R}^3 \cong \mathfrak{so}(3)$ .

Por otro lado, dados  $x \in \mathbb{R}^3$  y  $R \in \text{SO}(3)$ , existen dos retracciones bien conocidas en este espacio: la aplicación exponencial,

$$\exp(\hat{x}) = e^{\hat{x}} = I + \frac{\sin r}{r} \hat{x} + \frac{1}{2} \frac{\sin^2(r/2)}{(r/2)^2} \hat{x}^2, \quad (40a)$$

$$\log(R) = \frac{\phi(R)}{2 \sin \phi(R)} (R - R^t), \quad (40b)$$

considerando  $|x| < \pi$  y  $\phi(R) := \cos^{-1}(\frac{1}{2} \text{tr } R - \frac{1}{2})$ , y la aplicación Cayley,

$$\text{cay}(\hat{x}) = (I - \hat{x})^{-1}(I + \hat{x}) = I + \frac{2}{1+r^2}(\hat{x} + \hat{x}^2), \quad (41a)$$

$$\text{cay}^{-1}(R) = \frac{1}{1+\text{tr}(R)}(R - R^t). \quad (41b)$$

suponiendo  $\text{tr } R \neq -1$ .

Dados  $x, y \in \mathbb{R}^3$ , se satisfacen las siguientes propiedades (Iserles et al., 2000):

$$\text{tr}(\hat{x}^2) = -2|x|^2 \quad (42a)$$

$$\hat{x}^3 = -|x|^2 \hat{x} \quad (42b)$$

$$(x \otimes x)(y) = (x \cdot y)x \quad (42c)$$

$$x \otimes x = |x|^2 I + \hat{x}^2 \quad (42d)$$

$$\hat{x}y = x \times y \quad (42e)$$

$$\hat{x}\hat{y} = y \otimes x - (x \cdot y)I \quad (42f)$$

$$[\hat{x}, \hat{y}] = \hat{x}\hat{y} - \hat{y}\hat{x} = \widehat{x \times y} \quad (42g)$$

$$\hat{x}\hat{y}\hat{x} = -(x \cdot y)\hat{x} \quad (42h)$$

$$\hat{x}^2\hat{y} + \hat{y}\hat{x}^2 = -|x|^2\hat{y} - (x \cdot y)\hat{x} \quad (42i)$$

donde  $(x \otimes y)(z) := (y \cdot z)x$ , para cada  $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ .

## B. Pequeña derivación de la ecuación (39)

El objetivo de este apéndice es mostrar brevemente los pasos de la derivación de (39) a partir de (38). Nos vamos a basar a lo expuesto en Lee (2008), subsección 3.3.8. Para ello, dado  $k = 2, 3, \dots$ , consideramos  $\xi \in \mathbb{R}^3$  tal que

$$F_k = \text{cay}(\widehat{\xi}) = \frac{I + \widehat{\xi}}{I - \widehat{\xi}} = I + \frac{2}{1+r^2}(\widehat{\xi} + \widehat{\xi}^2), \quad (43)$$

siendo  $r = |\xi|$ . Ambas expresiones nos serán útiles en este desarrollo. En primer lugar aplicamos la función  $\vee$  y sustituimos (43) en (38). A partir de (42), se tiene

$$\begin{aligned} \widehat{\gamma F_k \gamma} &= [\widehat{\gamma}, \widehat{F_k \gamma}], \\ \widehat{\gamma^2 F_k \gamma} &= \gamma \times (\gamma \times F_k \gamma) = (\gamma \cdot (F_k \gamma))\widehat{\gamma} - \widehat{F_k \gamma} \gamma \\ &= (\gamma \cdot (F_k \gamma))\widehat{\gamma} - F_k \gamma F_k^t. \end{aligned}$$

Multiplicando a derechas por  $I + \widehat{\xi}$  y a izquierdas por  $I - \widehat{\xi}$  en (38), junto con las sustituciones que habíamos comentado, obtenemos 4 términos a computar:

$$\begin{aligned}
(1) & (I + \widehat{\xi}) \left( [(I + h\Omega\widehat{\gamma})]^- \right)^\vee (I - \widehat{\xi}) = 4\widehat{\xi} + 2h\Omega(1 - \xi_3)\widehat{\gamma}, \\
(2) & (I - \widehat{\xi}) (\widehat{\gamma F_k \gamma}) (I + \widehat{\xi}) = -2\xi_3\widehat{\gamma} + 2\widehat{\xi}, \\
(3) & (I - \widehat{\xi}) (\gamma \cdot (F_k \gamma)) \widehat{\gamma} (I + \widehat{\xi}) = \left(1 + \frac{2}{1+r^2}(\xi_3^2 - r^2)\right) (\widehat{\gamma} + \widehat{\gamma \times \xi} + \xi_3\widehat{\xi}), \\
(4) & (I - \widehat{\xi}) F_k \widehat{\gamma} F_k^t (I + \widehat{\xi}) = \widehat{\gamma} + \widehat{\xi \times \gamma} + \xi_3\widehat{\xi}.
\end{aligned}$$

Por último, teniendo en cuenta estas expresiones y las constantes que aparecen en (38), se obtiene la ecuación (39):

$$\begin{aligned}
\alpha + \alpha \times \xi &= \left(4 + 10A - 2h\Omega\xi_3 \left(1 + 5\frac{\xi_3^2 - |\xi|^2}{1 + |\xi|^2}\right) - \xi \cdot \alpha\right) \xi \\
&+ \left(2h\Omega \left(1 - 5\frac{\xi_3^2 - |\xi|^2}{1 + |\xi|^2}\right) - 10A\xi_3\right) \gamma - 10h\Omega \left(1 + \frac{\xi_3^2 - |\xi|^2}{1 + |\xi|^2}\right) \gamma \times \xi.
\end{aligned}$$