

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

OBÁLKA SYSTÉMU PLÔCH
DIPLOMOVÁ PRÁCA

2024

BC. JANA TUTKOVÁ

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

OBÁLKA SYSTÉMU PLÔCH
DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Počítačová grafika a geometria
Študijný odbor: 1113 Matematika
Školiace pracovisko: Katedra algebry a geometrie
Školiteľ: doc. RNDr. Pavel Chalmovianský, PhD.

Bratislava, 2024
Bc. Jana Tutková



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Jana Tutková
Študijný program: počítačová grafika a geometria (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Obálka systému plôch
Envelope of a system of surfaces

Anotácia: Cieľom práce je študovať základné vlastnosti obálky systému plôch. Zameriame sa na jednoparametrické systémy kvadrík v trojrozmernom priestore. Okrem teoretických podkladov očakávame aj numerické experimenty a príklady postupov. Načrtne aplikácie, v ktorých sa obálky používajú.

Cieľ: Študovať a opísať niektoré vlastnosti obálky systému kvadratických plôch.

Literatúra: do Carmo: Differential geometry of curves and surfaces, Dover Publications Inc., 2017
Pottmann, Wallner: Computational Line Geometry, Springer, 2001

Kľúčové slová: obálka plôch, systém kvadratických plôch

Vedúci: doc. RNDr. Pavel Chalmovianský, PhD.
Katedra: FMFI.KAG - Katedra algebry a geometrie
Vedúci katedry: doc. RNDr. Pavel Chalmovianský, PhD.

Spôsob sprístupnenia elektronickej verzie práce: prípustná pre vlastnú VŠ

Dátum zadania: 13.12.2022

Dátum schválenia: 14.12.2022

doc. RNDr. Andrej Ferko, PhD.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Pod'akovanie: Tu môžete pod'akovať školiteľovi, prípadne ďalším osobám, ktoré vám s prácou nejako pomohli, poradili, poskytli dáta a podobne.

Abstrakt

Slovenský abstrakt v rozsahu 100-500 slov, jeden odstavec. Abstrakt stručne sumarizuje výsledky práce. Mal by byť pochopiteľný pre bežného informatika. Nemal by teda využívať skratky, termíny alebo označenie zavedené v práci, okrem tých, ktoré sú všeobecne známe.

Kľúčové slová: obálka plôch, systém kvadratických plôch

Abstract

Abstract in the English language (translation of the abstract in the Slovak language).

Keywords: envelope of surfaces, system of surfaces

Obsah

Úvod	1
1 Obálky v rovine	3
1.1 Jednparametrický systém	3
1.2 Obálka jednparametrického systému nadplôch	5
1.3 Výpočet obálky	11
1.3.1 Prístup algebraickej geometrie	11
1.3.2 Prístup projektívnej geometrie	13
1.3.3 Kinematický prístup	14
1.3.4 Obálky a ODR	15
1.3.5 Lokálne prieniky	16
1.4 Aplikácie obálok a predošlá práca	18
2 Matematický model	21
2.1 Obálka elipsoidov	21
2.2 Obálka elíps	22
2.2.1 Zmena bázy	22
2.2.2 Výpočet obálky elíps	23
3 Implementácia	25
3.1 Motivácia	25
3.2 Špecifikácia	25
3.3 Blender	25
3.4 Skriptovanie	25
3.5 Python	26
3.5.1 Knižnice	26
3.5.2 Implementácia	27
3.5.3 Programovacie prostredie	27
4 Výsledky práce	29
Príloha A	35

Zoznam obrázkov

1.1	Systém kružníc.	3
1.2	Zobrazenie prvkov systému.	5
1.3	Sústredné kružnice.	8
1.4	Obálka systému podľa charakterizácie.	9
1.5	Obálka systému podľa definície.	9
1.6	Systém elíps.	10
1.7	Obálka vypočítaná rezultantom.	12
1.8	Systém priamok v normálovom tvare.	15
1.9	Regulárne riešenia a obálka.	16
1.10	Webbov most.	19

Zoznam tabuliek

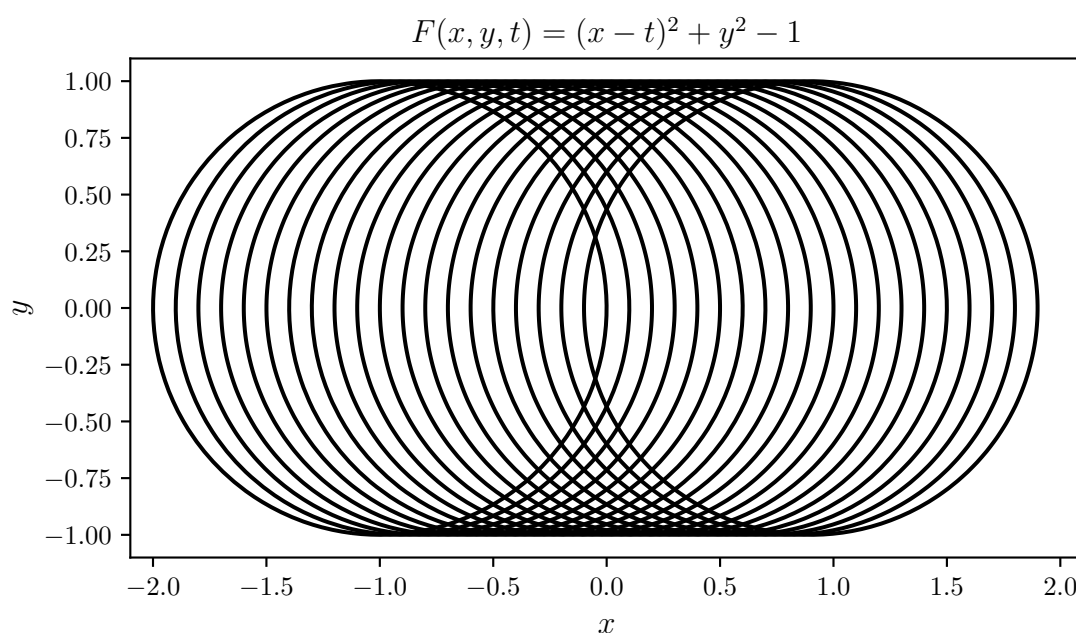
Úvod

Kapitola 1

Obálky v rovine

1.1 Jednparametrický systém

Ak nakreslíme kružnice so stredom na x-ovej osi s polomerom 1, ako na obrázku, pohľad nám upútajú horizontálne priamky $y = \pm 1$ idúce ponad a popod systém kružníc.



Obr. 1.1: Systém kružníc.

Každá z týchto priamok sa dotýka každej kružnice v jednom bode a v tomto bode majú spoločnú dotyčnicu. V nasledovnom texte túto myšlienku matematicky opíšeme, na základe nej zostrojíme tzv. obálku systému kriviek alebo plôch a porovnáme prístupy ich výpočtu. Budeme pracovať v reálnom vektorovom priestore so štandardným skalárnym súčinom, teda v euklidovskom priestore, rozmeru $n = 2, 3$. Najprv ilustrujeme príklady obálok a ich výpočet pre $n = 2$, neskôr pre $n = 3$. Po celý čas predpokladáme, že všetky zobrazenia sú dostatočne veľakrát diferencovateľné. Tučným písmom

značíme vektorovú funkciu a parametre pre prehľadnosť zápisov vynechávame, ak sú z kontextu zrejmé.

Vo všeobecnosti, začneme v \mathbb{R}^2 s jednoparametrickým systémom kriviek daným funkciou, v \mathbb{R}^3 máme jednoparametrický systém plôch.

Definícia 1.1. *Nech $F: \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}$ je funkcia v premenných x_1, x_2, \dots, x_n a v parametri t , kde $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval. Definujeme jednoparametrický systém nadplôch ako systém množín*

$$\mathcal{F} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid F(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = 0, t \in I\}.$$

V $n = 2$ budeme pre lepšiu prehľadnosť značiť premenné x_1, x_2 ako x, y , pre $n = 3$ pribudne x_3 ako z . Pre lepšiu prehľadnosť neskôr označíme dvojicu (x, y) alebo trojicu (x, y, z) ako X , potom $\mathcal{F} = \{X \in \mathbb{R}^n \mid F(X, t) = 0, t \in I\}$.

Pre horeuvedený prípad teda máme jednoparametrický systém kružníc so stredmi kružníc, ktoré ležia na úsečke parametrizovanej $(t, 0)$ pre $t \in [-1, 1]$ a konštantným polomerom pre každú kružnicu $r = 1$ daný implicitnou funkciou

$$\mathcal{F} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y, t) = 0, t \in [-1, 1]\},$$

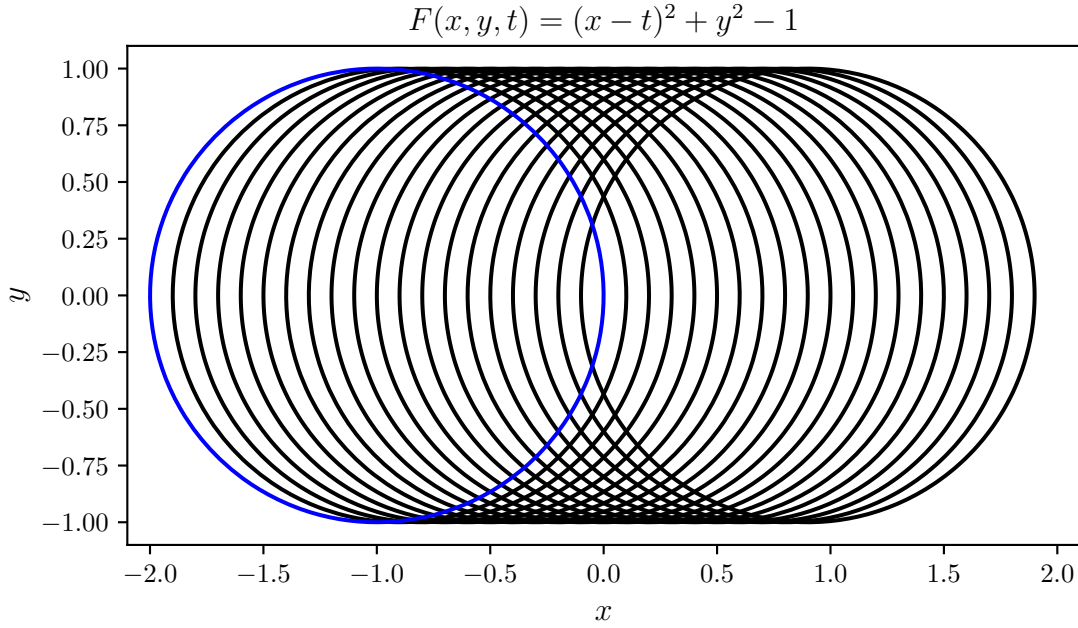
kde

$$F(x, y, t) = (x - t)^2 + y^2 - 1.$$

Systém budeme ilustrovať zobrazením niektorých prvkov systému pre diskkrétne hodnoty parametra t . Pre $t = -1$ je zodpovedajúci prvok systému $\mathcal{F}_{-1} \in \mathcal{F}$ kružnica s implicitnou rovnicou

$$F_{-1}(x, y) = F(x, y, -1) = (x + 1)^2 + y^2 - 1.$$

Často budeme pre pevný parameter t_0 označovať prislúchajúcu rovnicu $F_{t_0}(X)$ a množinu bodov, ktoré rovnicu spĺňajú označíme \mathcal{F}_{t_0} .



Obr. 1.2: Modrou farbou je vyznačená kružnica systému v parametri $t = -1$.

1.2 Obálka jednoparametrického systému nadplôch

Najskôr definujeme obálku jednoparametrického systému kriviek v \mathbb{R}^2 . Uvedieme charakterizáciu obálok, ktorú možno použiť na výpočet pre jednoduchšie jednoparametrické systémy. Následne túto charakterizáciu použijeme ako definíciu pre obálku jednoparametrického systému plôch v \mathbb{R}^n .

Definícia 1.2. Definujme gradient funkcie $F: \mathbb{R}^2 \times I \rightarrow \mathbb{R}$ vzhľadom na x a y ako

$$\nabla F(x, y, t) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, t), \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, t) \right).$$

Predpokladáme, že $\nabla F(x, y, t) \neq \vec{0}$.

Definícia 1.3. Obálkou systému kriviek \mathcal{F} je parametrizovaná krivka $\gamma(t): J \subseteq I \rightarrow \mathbb{R}^2$ taká, že

1. $\gamma(t) \in \mathcal{F}_t$ pre všetky $t \in J$,
2. $\dot{\gamma}(t) \perp \nabla F(\gamma(t), t)$.

Obálka $\gamma(t)$ sa dotýka každej krivky zo systému $F(x, y, t)$ v bode (x, y) pre nejaké t a v tomto bode má s krivkou zo systému rovnakú dotyčnicu. To znamená, že každý bod obálky $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ spĺňa rovnicu systému $F(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) = 0$ pre nejaké t , a teda platí prvá podmienka $\gamma(t) \in \mathcal{F}_t$. Gradient funkcie $\nabla F(x, y, t)$ je normálový vektor k $F(x, y, t)$ v regulárnom bode (x, y) a parametri t . V spoločnom bode (x, y) a parametri

t chceme rovnaký smer dotykového vektora pre $\gamma(t)$ a $F(x, y, t)$, z čoho vyplýva, že $\dot{\gamma}(t)$ a dotykový vektor k funkcii $F(x, y, t)$ sú lineárne závislé, z čoho dostávame $\dot{\gamma}(t) \perp \nabla F(\gamma(t), t)$, druhú podmienku v definícii obálky. Interval J , na ktorom dostávame výslednú obálku môže byť menší ako interval I , na ktorom bol definovaný systém kriviek, teda máme $J \subseteq I$. Ak by bol gradient $\nabla F(x, y, t)$ v nejakom bode nulový, nevieme nájsť jednoznačne dotykový vektor obálky a systému.

Veta 1.1. *Regulárna krivka $\gamma(t): J \subseteq I \rightarrow \mathbb{R}^2$ kde $t \in J \subseteq I$ je obálkou jednoparametrického systému \mathcal{F} práve vtedy, keď spĺňa:*

1. $F(\gamma(t), t) = 0$,
2. $\frac{\partial F}{\partial t}(\gamma(t), t) = 0$.

Dôkaz. Táto odlišná charakterizácia je ekvivalentná definícii, ktorú sme postavili na geometrických podmienkach. Stačí zistiť korešpondenciu podmienok.

1. Ako sme už vysvetlili, každý bod obálky $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ spĺňa rovnicu jednoparametrického systému $F(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) = 0$ pre nejaké t , teda podmienky

$$F(\gamma(t), t) = F(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) = 0$$

a

$$\gamma(t) \in \mathcal{F}_t$$

sú ekvivalentné.

2. Derivujme $F(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t)$ podľa parametra t , kde $\dot{\gamma}(t) = (\dot{\gamma}_1(t), \dot{\gamma}_2(t))$.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) \cdot \dot{\gamma}_1(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) \cdot \dot{\gamma}_2(t) + \frac{\partial F}{\partial t}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) \cdot 1 = 0.$$

Nakoľko požadujeme, aby gradient funkcie $\nabla F(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t)$ bol kolmý na $\dot{\gamma}(t)$ tak

$$\langle \nabla F(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t), \dot{\gamma}(t) \rangle = 0,$$

teda platí

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) \cdot \dot{\gamma}_1(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) \cdot \dot{\gamma}_2(t) = 0,$$

z čoho dostávame

$$\frac{\partial F}{\partial t}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), t) = 0.$$

□

Obálka sa počíta riešením rovníc

$$\begin{aligned} F(x, y, t) &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) &= 0. \end{aligned}$$

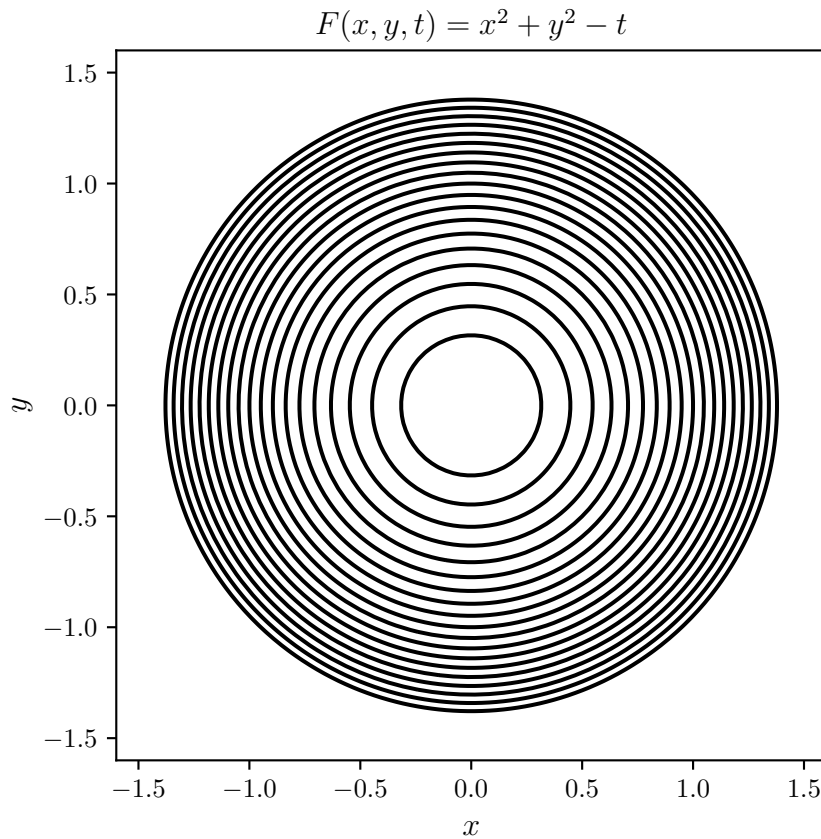
Často sa v literatúre môžeme stretnúť s rôznymi opismi obálky, ktoré však bez ďalších predpokladov nemusia definovať rovnakú množinu bodov. Príkladom je ďalšia charakterizácia obálky ako množiny limitných bodov prienikov kriviek systému. Vzťahy medzi jednotlivými charakterizáciami možno nájsť v [8].

Dokonca, daný systém nemusí mať obálku. Príkladom sú sústredné kružnice s rastúcim polomerom.

Príklad 1. Obálku systému sústredných kružníc pre $t \in I = [\frac{1}{10}, 2]$ rátame ako systém rovníc

$$\begin{aligned} F(x, y, t) &= x^2 + y^2 - t, \\ \frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) &= -1. \end{aligned}$$

Z druhej rovnice máme $t = -1 \neq 0$, teda systém nemá riešenie. Aj keď by sa nám mohlo zdať, že by obálkou mohli byť body kružnice s najväčším polomerom \mathcal{F}_2 a kružnice s najmenším polomerom $\mathcal{F}_{\frac{1}{10}}$, práve podmienka existencie takej krivky $\gamma(t)$, ktorá by patrila do systému kružníc \mathcal{F} pre všetky t z intervalu $J \subseteq I$, nie je splnená.



Obr. 1.3: Sústredné kružnice.

Prístup, ktorý sme využili pre jednoparametrický systém kriviek, možno zovšeobecniť pre ľubovoľný jednoparametrický systém plôch v \mathbb{R}^n .

Definícia 1.4. (Charakterizácia.) *Obálkou jednoparametrického systému plôch \mathcal{F} je množina bodov \mathcal{E} daná*

$$\mathcal{E} = \{X \in \mathbb{R}^n : \exists t \in \mathbb{R} \mid F(X, t) = \frac{\partial F}{\partial t}(X, t) = 0\}.$$

Ak by sme chápali obálku podľa definície ako množinu bodov, problém by sme mohli riešiť ako systém nelineárnych rovníc v parametri t , kde chceme z rovníc

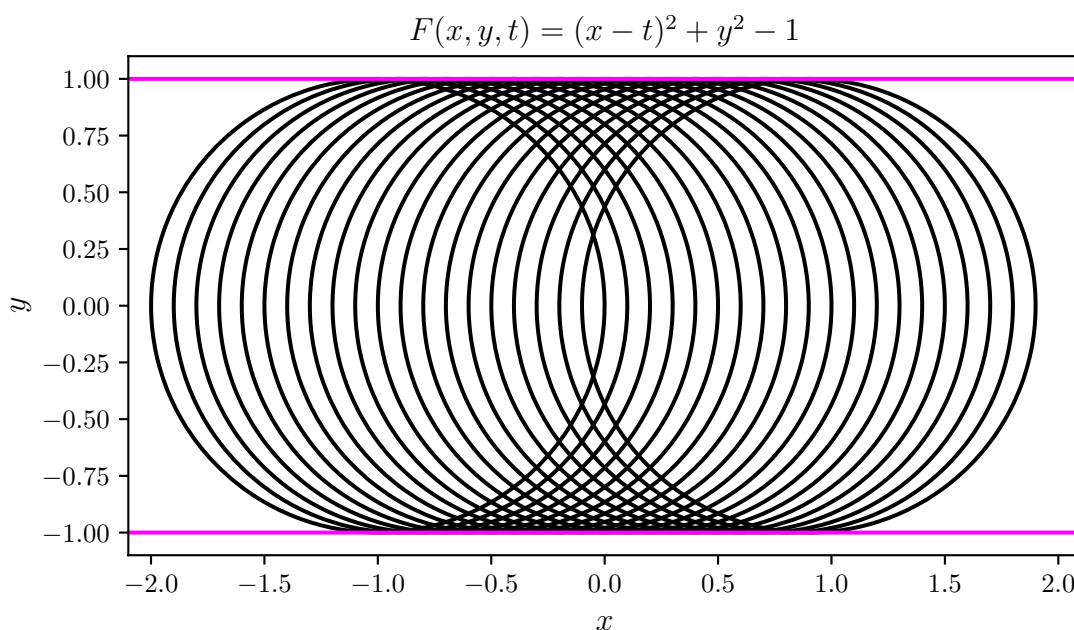
$$\begin{aligned} F(x, y, t) &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) &= 0. \end{aligned}$$

eliminovať t . Na riešenie nelineárneho systému dvoch rovníc síce existujú pokročilé nástroje, no eliminovaním parametra t strácame informáciu o tom, kde je obálka definovaná.

Príklad 2. Pre náš príklad $F(x, y, t) = (x - t)^2 + y^2 - 1 = 0$ máme

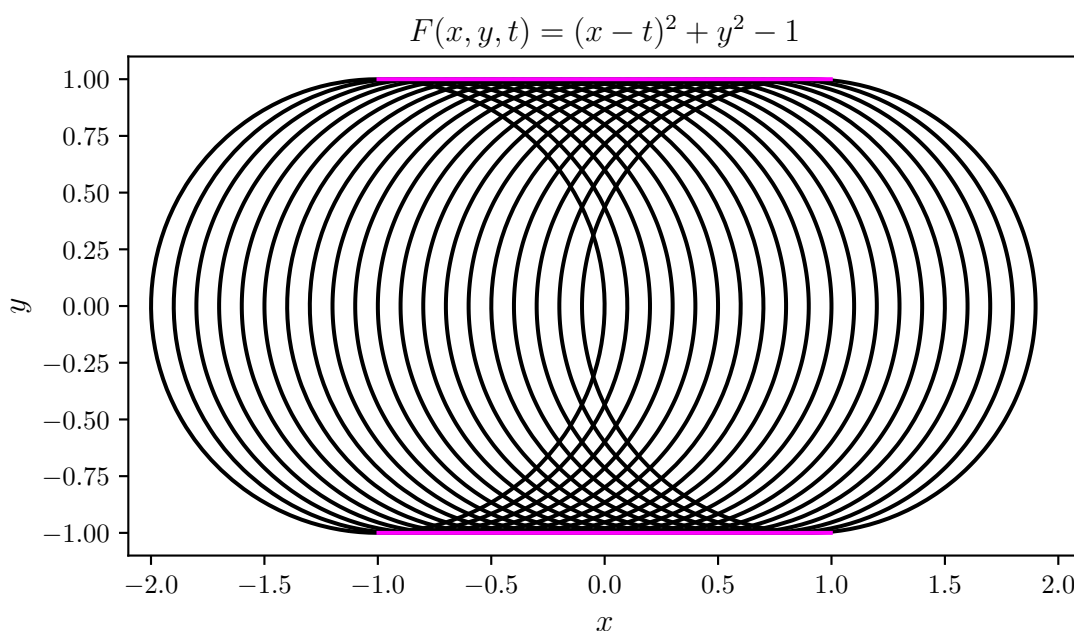
$$\frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = 2(t - x) = 0.$$

Ak $t = x$, tak $y^2 = 1$. Teda obálka je podľa tejto charakterizácie $y = \pm 1$, ako sme očakávali.



Obr. 1.4: Obálka systému podľa charakterizácie.

V skutočnosti sú obálkou úsečky $y = \pm 1$ definované na intervale $[-1, 1]$.



Obr. 1.5: Obálka systému podľa definície.

Tento problém možno ošetriť tak, že budeme uvažovať systémy kriviek, ktoré sú v parametri t definované na celej reálnej priamke \mathbb{R} .

Príklad 3. Počítajme obálku systému kriviek, znázorneného na obrázku 1.6, ktorý je daný vzťahmi

$$F(x, y, t) = \frac{x^2}{(t^2 + 1)^2} + (y - 2t)^2 - 1,$$

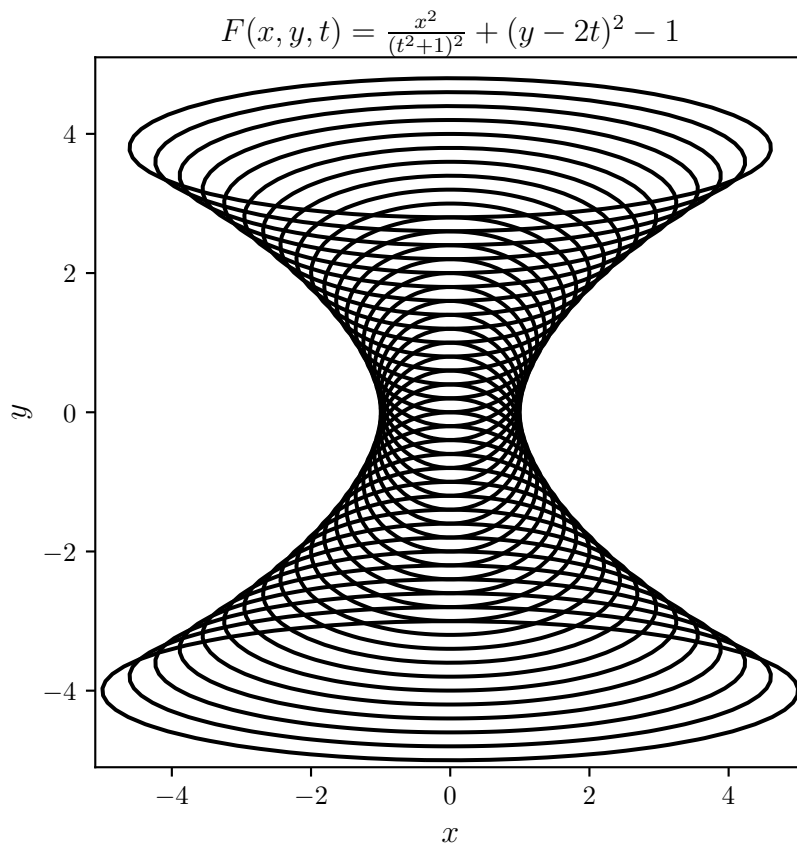
$$\frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = -\frac{4x^2 t}{(t^2 + 1)^3} - 4(y - 2t).$$

Vynásobením prvej rovnice $\lambda(t) = (t^2 + 1)^2$ a derivovaním získavame

$$F^\lambda = 4t^6 - 4t^5 y + t^4 y^2 + 7t^4 - 8t^3 y + 2t^2 y^2 + 2t^2 - 4ty + x^2 + y^2 - 1,$$

$$F_t^\lambda = 24t^5 - 20yt^4 + 4y^2 t^3 + 28t^3 - 24yt^2 + 4y^2 t + 4t - 4y.$$

Na obrázku 1.6 je znázornený tento systém elíps pre $t \in [-2, 2]$ s krokom $\Delta t = 0.1$. Obálku nájdeme ako riešenie rovníc $F^\lambda \cap F_t^\lambda$. Rovnice sú však príliš vysokého stupňa v parametri t , preto nevieme implicitnú rovnicu obálky bez vhodného nástroja vyjadriť. V ďalšej časti rozoberieme prístupy výpočtu.



Obr. 1.6: Systém elíps.

1.3 Výpočet obálky

Vo väčšine prípadov sú rovnice charakterizujúce obálku systému plôch príliš vysokého stupňa v parametri t a nedokážeme z nich ľahko odvodiť rovnicu obálky, preto pristupujeme aj k numerickým riešeniam. Spoľahlivá aproximácia obálky je jednou z aktuálnych výskumných tém. Na začiatok si však rozoberme existujúce analytické prístupy. Naledujúce prístupy sú prevzaté z [30].

1.3.1 Prístup algebraickej geometrie

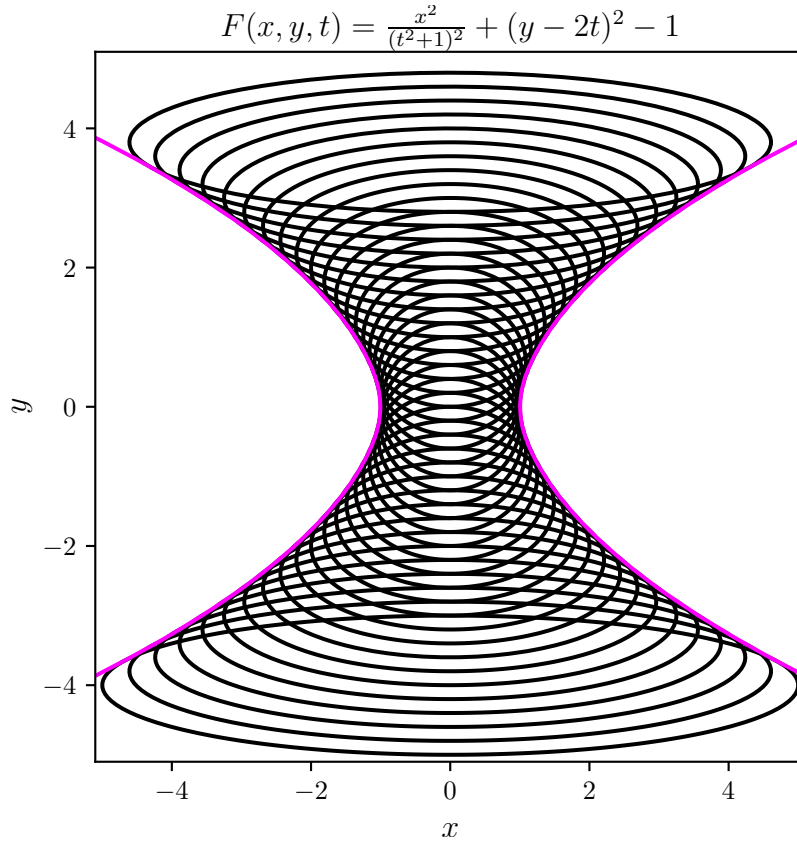
Dokonca aj v prípade jednoduchého príkladu ako 3, obe polynomicke rovnice charakterizujúce obálku sú vysokého stupňa v parametri t , preto je odstránenie parametera t náročné bez vhodného nástroja. Štandardným aparátom na túto úlohu sú Gröbnerove bázy. Gröbnerove bázy sú kľúčovým pojmom v algebraickej geometrii a počítačovej algebre. Ide o špeciálnu množinu polynómov vo viacerých premenných, ktoré majú niekoľko dôležitých vlastností a zohrávajú kľúčovú úlohu pri riešení rôznych matematických problémoch vrátane riešenia sústav polynomických rovníc, zjednodušovania polynómov a dokazovania rôznych algebraických tvrdení. Vybudovanie tejto teórie je pomerne zdĺhavé, preto odkážeme na bohaté teoretické pozadie v [12]. Najprv vypočítame Gröbnerovu bázu Buchbergerovým algoritmom pre ideál generovaný sústavou polynomických rovníc, ktorá obsahuje všetky premenné vrátane tej, ktorú chceme eliminovať. Z Gröbnerovej bázy vyberieme polynómy, ktoré obsahujú premennú, ktorú chceme eliminovať. Tieto polynómy použijeme na vyjadrenie tejto premennej v závislosti od ostatných premenných. Po vyriešení nových rovníc získame výraz, ktorý opisuje vzťah medzi zvyšnými premennými a eliminovanou premennou. Týmto spôsobom úspešne eliminujeme premennú. Pokúsme sa vypočítať Gröbnerovu bázu príkladu 3 vzhľadom na lexikografické usporiadanie monómov $t > x > y$. Keďže výpočet Gröbnerovej bázy trvá pomerne dlho, neuvádzame postup a výsledok možno nájsť v prílohe 4.

Gröbnerova báza vzhľadom na iné usporiadanie, napr. grevlex je zvyčajne vypočítaná oveľa rýchlejšie a jej polynómy majú krajšie koeficienty, no na druhej strane, tento prístup nie je vo všeobecnosti možné použiť na odstránenie premennej t z rovníc.

Existujú aj iné metódy na riešenie polynomických rovníc, ktoré nie sú závislé na usporiadaní monómov. Spôsob, ako nájsť polynóm, ktorý leží v prvom eliminačnom ideáli, ktorý je nezávislý na Gröbnerovej báze a monómických usporiadaniach, využíva teóriu rezultantov. Rezultant je determinant matice polynómov.

Hoci výpočet determinantov veľkých matic je výpočtovo aj časovo náročný problém, existujú metódy, ako vypočítať determinant efektívnejšie. V príklade 3 uvedieme výsledný polynóm $Res(F^\lambda, F_t^\lambda, t)$ a ukážeme obálku nájdenu rezultantom, pozri 1.7.

$$\begin{aligned} \text{Res}(F^\lambda, F_t^\lambda, t) = & 191102976x^{10} + 262144x^8y^6 - 9584640x^8y^4 + 83165184x^8y^2 - \\ & 633470976x^8 - 16384x^6y^{10} - 81920x^6y^8 - 14483456x^6y^6 - 113311744x^6y^4 + 96419840x^6y^2 + \\ & 698368000x^6 - 16384x^4y^{12} - 294912x^4y^{10} - 2998272x^4y^8 - 18284544x^4y^6 - 74956800x^4y^4 - \\ & 184320000x^4y^2 - 256000000x^4. \end{aligned}$$



Obr. 1.7: Obálka vypočítaná rezultantom.

Navyše táto metóda, rovnako ako metóda založená na eliminačnej teórii s použitím Gröbnerových báz, nám vypočíta správnu obálku len vtedy, ak uvažujeme parameter t jednoparametrického systému z celej reálnej priamky. Ak obmedzíme oblasť parametra na interval, tak obálka zvyčajne nemôže byť daná implicitnou rovnicou, a preto je potrebné nájsť nejakú parametrizáciu obálky.

Pri použití rezultantov máme lepšiu kontrolu nad zložitou výpočtu. Pre dané dva polynómy totiž vieme, ako sa konštruuje rezultant, a tak vieme odhadnúť, s akými veľkými polynómami sa bude počas výpočtu manipulovať, avšak pri hľadaní Gröbnerovej bázy je ťažké odhadnúť, aké zložité S-polynómy sa behom algoritmu vyskytnú. Nie je zriedkavosťou, že S-polynómy sú podstatne komplikovanejšie než vstupné polynómy a výsledná Gröbnerova báza.

1.3.2 Prístup projektívnej geometrie

Body duálneho projektívneho priestoru \mathbb{P}^3 možno stotožniť s nadrovinami v \mathbb{R}^3 . Plochu v duálnom projektívnom priestore možno teda interpretovať ako množinu všetkých jej dotykových nadrovín. Pomocou duálneho prístupu sa dá dokázať, že obálky jednoparametrických systémov sú racionálne pre racionálne vstupné údaje. Potrebné teoretické pozadie možno nájsť v [24], z čoho čerpajú články s mnohými výsledkami [20], [21] a príklady pre výpočet obálky možno nájsť v [30].

Príklad 4. Uvažujme dva systémy kružníc \mathcal{F} s konštantným polomerom $\frac{1}{2}$ a \mathcal{G} s funkciou polomeru $\frac{t}{2}$, ktorých stredy ležia na rovinnej krivke $m(t) = (t^3, t^2)$, kde $t \in \mathbb{R}$. So systémom

$$\mathcal{F} = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid (x - t^3)^2 + (y - t^2)^2 - \frac{1}{4} = 0, t \in \mathbb{R}\}.$$

korešponduje v cyklografickom modeli krivka $m_1 = (t^3, t^2, \frac{1}{2}) \subset \mathbb{R}^3$. Pre

$$\mathcal{G} = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid (x - t^3)^2 + (y - t^2)^2 - \frac{t^2}{4} = 0, t \in \mathbb{R}\}$$

máme v cyklografickom modeli krivku $m_2(t) = (t^3, t^2, \frac{t}{2})$. Kružnice korešpondujúce s $t < 0$ sú negatívne orientované a orientácia sa mení pre kružnice korešpondujúce s $t > 0$. Pre $t = 0$ je prvok $\mathcal{F}_0 \in \mathcal{F}$ bod $(0, 0) \in m(t)$, čo je kružnica s nulovým polomerom a bez určenej orientácie. Krivka $m(t)$ je ortogonálna projekcia oboch kriviek m_1 a m_2 a často sa nazýva stredná os (*medial axis*) jednoparametrického systému. Pozrite si obrázok pre krivky $m_1, m_2 \subset \mathbb{R}^3$, jednoparametrické systémy \mathcal{F} a \mathcal{G} rovinných kružníc a ich stredné osy.

Rovnakým spôsobom môžeme definovať jednoparametrický systém sfér v \mathbb{R}^3 ako obraz kriviek v \mathbb{R}^4 . Jedným z dôležitých výsledkov je, že pomocou cyklografického zobrazenia racionálnej krivky možno rozhodnúť o reálnosti obálky a to tak, že cyklografický obraz $m(t) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ má reálnu obálku práve vtedy, keď pre všetky $t \in I$ platí

$$\langle \dot{m}(t), \dot{m}(t) \rangle \geq 0$$

a rovnosť platí len pre izolované hodnoty t , kde za skalárny súčin vezmeme pseudo-skalárny súčin vyjadrený ako $\langle \dot{m}(t), \dot{m}(t) \rangle = m_1^2(t) + m_2^2(t) + \dots + m_n^2(t) - m_{n+1}^2(t)$.

Pre príklad tak 4 máme

$$\langle \dot{m}(t), \dot{m}(t) \rangle = 9t^4 - 4t^2 = t^2(9t^2 - 4) \geq 0, \text{ pre } t \in I = \mathbb{R} \setminus \{[-\frac{2}{3}, 0) \cup (0, \frac{2}{3}]\},$$

preto na tomto intervale existuje reálna obálka.

1.3.3 Kinematický prístup

Ďalším zo spôsobov, ako chápať jednoparametrické systémy plôch v \mathbb{R}^n je pozeráť sa na ne ako na množinu všetkých transformácií daného povrchu \mathcal{P} . Povrch \mathcal{P} sa transformuje na ostatné prvky systému prostredníctvom prvkov vhodnej grupy transformácií. Táto množina transformácií má okrem štruktúry grupy aj štruktúru hladkej variety (*smooth manifold*). Tieto grupy nazývame Lieove grupy.

Príklad 5. Ilustrujme tento postup na jednoduchom rovinnom príklade. Transformujme zobrazením g_t priamku l , kde pre každé $t \in \mathbb{R}$, zodpovedá g_t rotácii.

$$\begin{aligned} l: x(u) &= 1 \\ y(u) &= u \end{aligned}$$

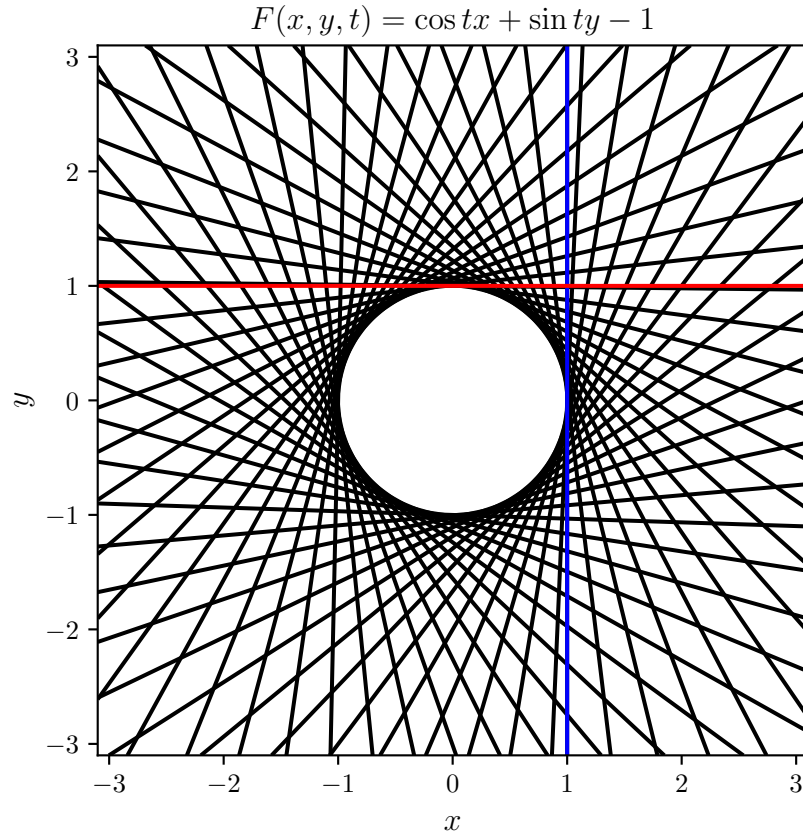
Vo všeobecnosti

$$g_t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Grupa všetkých rotácií je $SO(n)$ a nazýva sa špeciálna ortogonálna grupa. Pre $t = 0$, dostávame priamku l . Pre iné t , napríklad $t = \frac{\pi}{2}$, dostávame priamku

$$\begin{aligned} g_t(l): x(u) &= -u \\ y(u) &= 1. \end{aligned}$$

Na obrázku 1.8 je znázornená priamka l modrou farbou, transformovaná priamka $g_t(l)$ červenou farbou.



Obr. 1.8: Systém priamok v normálovom tvare.

Transformácie g_t z príkladu sú prvkami Lieovej grupy $SO(n)$. Ďalšie známe príklady maticových Lieových grúp sú ortogonálna grupa $O(n)$, unitárna $U(n)$ a špeciálna unitárna grupa $SU(n)$. Pre nájdenie podrobnejších informácií, sa môže čitateľ obrátiť na ľubovoľnú úvodnú učebnicu o Lieových grupách a Lieových algebrách, ako je napríklad [15]. Použili sme štruktúru Lieovej grupy, aby sme opísali, ako sa grupa transformuje daný povrch. Ďalej, využijúc štruktúru hladkej variety môžeme opísať jednoparametrický systém plôch výlučne pomocou terminológie Lieových grúp. Táto teória sa aplikuje na nájdenie parametrizácie obálok kvadratických plôch. Viac o tomto prístupe možno nájsť v [30].

1.3.4 Obálky a ODR

Obálky súvisia aj so štúdiom obyčajných diferenciálnych rovníc, a najmä ich singulárnych riešení. Predpokladajme, že jednoparametrický systém kriviek \mathcal{F} je riešením nejakej diferenciálnej rovnice prvého rádu. Potom môže existovať aj ďalšia krivka spĺňajúca túto diferenciálnu rovnicu, ktorá je dotyčnicou k \mathcal{F} v každom bode. Táto krivka je obálka. V literatúre sa nazýva aj singulárne riešenie diferenciálnej rovnice. Uvažujme ODR

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4x\frac{dy}{dx} + 4y = 0.$$

Jej regulárnym riešením sú integrálne krivky

$$y = -t^2 + 2tx, \text{ kde } t \in \mathbb{R}.$$

Riešenie môžeme reprezentovať ako jednoparametrický systém kriviek \mathcal{F} s funkciou

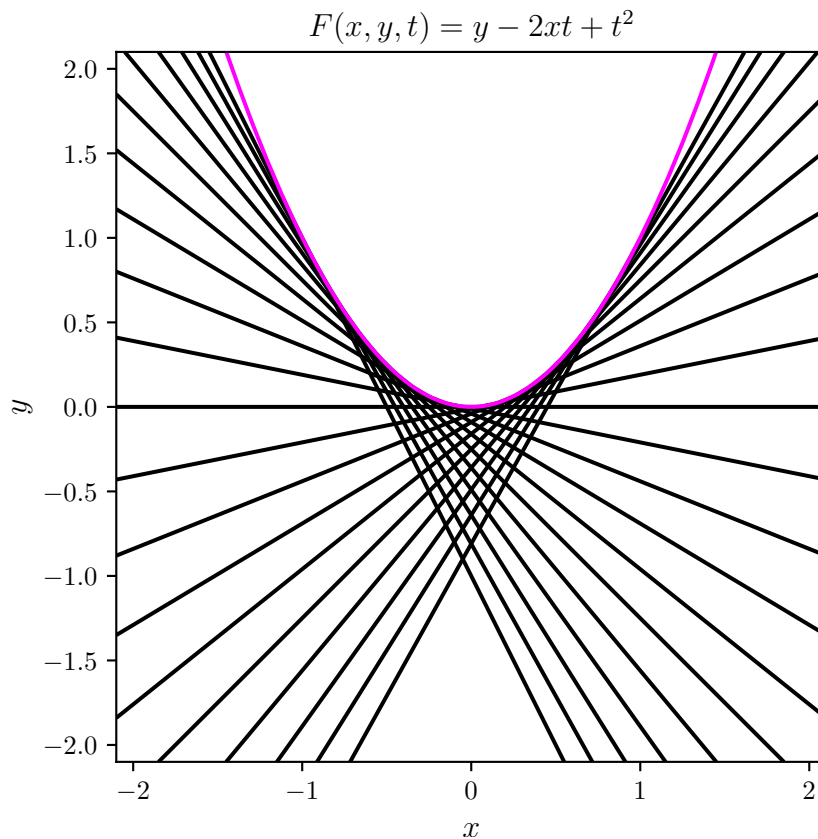
$$F(x, y, t) = t^2 - 2tx + y.$$

Derivovaním podľa parametra t dostávame

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = 2t - 2x,$$

z čoho máme $t = x$ a dosadením do funkcie máme $F = -x^2 + y$, teda obálka je $y = x^2$.

Obálka tohto jednoparametrického systému priamok, ktorou je parabola $y = x^2$, rieši taktiež diferenciálnu rovnicu. Viac o tomto prístupe možno nájsť v [10].



Obr. 1.9: Regulárne riešenia a obálka.

1.3.5 Lokálne prieniky

Lokálny prienik systému kriviek \mathcal{F} pozostáva z prienikov nekonečne blízkych susedných kriviek systému. Definujme túto myšlienku formálne.

Definícia 1.5 (Lokálny prienik). *Lokálny prienik systému \mathcal{F} je množina všetkých prienikov infinitezimálne blízkyh prvkov pre všetky parametre $t \in I$. Označuje sa ako \mathcal{L} a platí $\mathcal{L} := \bigcup_{t \in I} \mathcal{L}_t$ kde*

$$\mathcal{L}_t = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_t \cap F_{t+\varepsilon}$$

pre nejaké pevné $t \in I$.

Lokálny priesečník regulárneho systému sa v mnohých prípadoch zhoduje s jeho obálkou. Ilustrujme to na nasledovnom príklade.

Príklad 6. Vezmime dva ľubovoľné, ale odlišné prvky systému $F(x, y, t) = y - 2tx - t$. Pre fixné parametre $t_1 \neq t_2$ tak máme

$$F(x_1, y_1, t_1) = y_1 - 2t_1x_1 - t_1^2,$$

$$F(x_2, y_2, t_2) = y_2 - 2t_2x_2 - t_2^2.$$

Označme priesečník týchto dvoch priamok $Q = (q_x, q_y)^T$. Pre priesečník Q platí

$$F(Q, t_1) = 0 = F(Q, t_2),$$

odkiaľ vyplýva

$$(t_2 - t_1)(2q_x + t_1 + t_2) = 0.$$

Keďže podľa predpokladu $t_1 \neq t_2$, jediné riešenie tejto rovnice je $q_x = -\frac{t_1 + t_2}{2}$ a priesečník je potom daný

$$Q = \left(-\frac{t_1 + t_2}{2}, -t_1 t_2\right)^T.$$

Definujme $\varepsilon := t_2 - t_1$ a nechajme ε smerovať k nule, dostávame priesečník

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{pmatrix} -t_1 - \frac{\varepsilon}{2} \\ -t_1(t_1 + \varepsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t_1 \\ -t_1^2 \end{pmatrix}.$$

Po reparametrizácii $t_1(t) = -t$ je ľahké vidieť, že množina všetkých týchto priesečníkov $\mathcal{L} = \{(t, -t^2) : t \in \mathbb{R}\} = \mathcal{E}$, ktorá predstavuje lokálny priesečník, sa zhoduje s vypočítanou množinou bodov obálky.

Dôsledok 1.1. Nech je daný systém \mathcal{F} . Každý bod lokálneho priesečníka systému \mathcal{L} je aj bodom obálky systému \mathcal{E} . Teda platí

$$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{E}.$$

Dôkaz. Pre každý bod $Q \in \mathcal{L}$ lokálneho prieniku systému \mathcal{F} existuje podľa definície 1.5 aspoň jedno $t_0 \in I$, pre ktoré $Q \in \mathcal{L}_{t_0}$, a teda Q patrí do prieniku nekonečne blízkyh prvkov pre \mathcal{F} pre t_0 , to znamená, že platí

$$F(Q, t_0) = \frac{\partial F}{\partial t}(Q, t_0) = 0,$$

čo je z definície 1.4 bod obálky \mathcal{E} . □

1.4 Aplikácie obálok a predošlá práca

Vzhľadom na výskyt obálok v aplikáciách sa obálkam venuje veľká pozornosť. Stručne spomenieme niektoré aplikácie a odkážeme na literatúru.

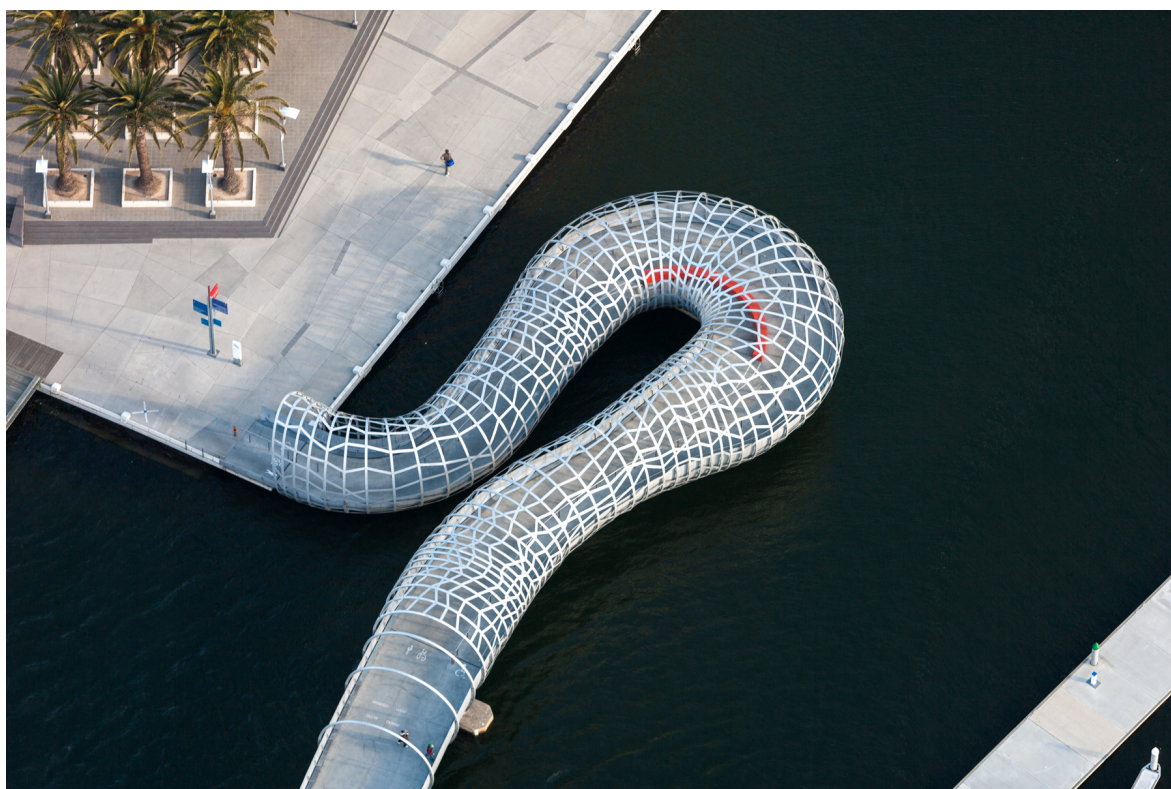
Výpočet obálky pohybujúcej sa plochy sa vyskytuje pri simulácii a CNC obrábaní. CNC obrábanie (*Computer Numerical Control machining*) je výrobný subtraktívny proces, pri ktorom počítač riadi stroje, napríklad vŕtačky, frézy a sústruhy tak, aby neustále odlamovali nadbytočnosti z obrobku. Tento postup sa vykonáva, kým sa nevytvorí požadovaný tvar. Rezný nástroj vytvára pri rýchlom otáčavom pohybe okolo svojej osi rotačnú plochu. Takto vytvorená plocha je časť obálky pohybujúceho sa nástroja. CNC frézovanie má široké priemyselné využitie v odvetviach ako letecký priemysel, zdravotníctvo a spotrebná elektronika. V článku [28] sa možno dočítať viac o výpočte obálok pri 5-osovom CNC obrábaní.

Obálky sa používajú aj na výpočet trajektórie projektilu vo vzduchu. Riešime klasický problém pohybu hmotného bodu (projektilu) vrhaného pod uhlom k horizontu. S nulovou silou odporu vzduchu je analytické riešenie dobre známe, trajektória projektilu je parabola. So zohľadnením odporu vzduchu úloha nemá presné analytické riešenie, a preto sa vo väčšine prípadov rieši numericky. Silu odporu vzduchu berieme do úvahy s konštantným členom odporu. Systém trajektórií vzniká pri vrhnutí projektilu s rovnakou počiatočnou rýchlosťou, ale s rôznymi uhlami hodu. Na určenie maximálneho rozsahu letu projektilu sa tak použije rovnica obálky [13].

Medzi ďalšie aplikácie obálok patrí tollerancing – krivka s kontrolou chyby, bezkolízne plánovanie pohybu robota – uvažujeme o konvexných kompaktných krivkách reprezentujúcich pohyb robota v rovine, ktorý mení svoj lokálny tvar pomocou systému afinných transformácií. Dizajn písma – konštrukcia znakov v písmach pre typografické systémy. O ďalších aplikáciach sa čitateľ dozvie v [22].

Kanálové plochy (*channel surfaces*), rúrkové plochy/potrubia (*pipe surfaces*), *rolling ball blends* a prirodzené kanálové plochy (*natural channel surfaces*) sa vyskytujú ako zmiešavacie povrchy a prechodové plochy medzi potrubiami. Kanálové plochy sú používané v počítačom podporovanom geometrickom dizajne (*Computer Aided Geometric Design*). V ďalšom texte si ukážeme ich konštrukciu ako obálku sfér.

Obálky - kanálové plochy sa využívajú aj v architektúre. Ako príklad uvádzame Webbov most (*Webb Bridge*), obr. 1.10 v Melbourne v Austrálii. Tvar mosta vzdáva hold histórii domorodého obyvateľstva a je vytvorený podľa tradičnej rybárskej pasce Koorie, ktorá sa používala na lov úhorov.



Obr. 1.10: Webbov most. [31]

Kapitola 2

Matematický model

Upravme rovnice pre obálku sféry tak, aby zodpovedali obálke elipsoidov. Vezmime elipsoid so škálovaním v smere súradnicových osí konštantnými reálnymi číslami a, b, c . Upravme škálovanie elipsoidu tak, aby a , škálovanie v smere osi x zodpovedalo škálovaniu v dotykovom smere priestorovej krivky $m(t)$. Teda pre elipsoid s rovnicou

$$\frac{(x - m_1(t))^2}{a^2} + \frac{(y - m_2(t))^2}{b^2} + \frac{(z - m_3(t))^2}{c^2} = 1$$

zmeníme štandardnú bázu $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ na bázu Frenetovho repéra $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ v každom bode krivky $m(t)$. Naše očakávanie je, že obálku elipsoidu škálovaného v dotykovom smere budeme môcť zostrojiť ako obálku kružníc, a teda, deriváciou jednoparametrického systému elipsoidov je podľa parametra t bude opäť rovina. V ďalších výpočtoch budeme parameter t pre väčšiu prehľadnosť zápisov vynechávať.

2.1 Obálka elipsoidov

Obálku sfér vieme zapísať skalárnym súčinom, no existuje však aj všeobecný zápis pre plochy druhého rádu, a to maticový

$$S : X^T M(t) X = 0.$$

Všeobecné rovnice pre sféru v priestore sú $x^2 + y^2 + z^2 - 2xm_1 - 2ym_2 - 2zm_3 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 - r^2 = 0$, potom maticový zápis

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -m_1 \\ 0 & 1 & 0 & -m_2 \\ 0 & 0 & 1 & -m_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 & m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 - r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Podobne zapíšme rovnice pre elipsoid Q

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 2\frac{xm_1}{a^2} - 2\frac{ym_2}{b^2} - 2\frac{zm_3}{c^2} + \frac{m_1^2}{a^2} + \frac{m_2^2}{b^2} + \frac{m_3^2}{c^2} - 1 = 0,$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 & \frac{-\dot{m}_1}{a^2} \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 & \frac{-\dot{m}_2}{b^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{c^2} & \frac{-\dot{m}_3}{c^2} \\ \frac{-\dot{m}_1}{a^2} & \frac{-\dot{m}_2}{b^2} & \frac{-\dot{m}_3}{c^2} & \frac{m_1}{a^2} + \frac{m_2}{b^2} + \frac{m_3}{c^2} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

potom deriváciu elipsoidu

$$-\frac{\dot{m}_1 x}{a^2} + \frac{\dot{m}_2 y}{b^2} + \frac{\dot{m}_3 z}{c^2} + \frac{m_1 \dot{m}_1}{a^2} + \frac{m_2 \dot{m}_2}{b^2} + \frac{m_3 \dot{m}_3}{c^2} = 0,$$

v maticovom zápise

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{-\dot{m}_1}{a^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-\dot{m}_2}{b^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-\dot{m}_3}{c^2} \\ \frac{-\dot{m}_1}{a^2} & \frac{-\dot{m}_2}{b^2} & \frac{-\dot{m}_3}{c^2} & \frac{2m_1 \dot{m}_1}{a^2} + \frac{2m_2 \dot{m}_2}{b^2} + \frac{2m_3 \dot{m}_3}{c^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

je rovina kolmá na dotykový vektor $\dot{m}(t)$, ak platí, že vektory $(\dot{m}_1, \dot{m}_2, \dot{m}_3)$ a $(\frac{\dot{m}_1}{a^2}, \frac{\dot{m}_2}{b^2}, \frac{\dot{m}_3}{c^2})$ sú lineárne závislé. Ak budeme elipsoid škálovať tak, že a, b, c budú škálovacie faktory také, aby sa elipsoid naškaloval v dotykovom smere, tak kolmá rovina na dotykový vektor vytne kružnicu, pretože elipsoid je v ostatných smeroch homogénny. Vyriešme toto odvodenie pre jednoduchší prípad.

2.2 Obálka elíps

2.2.1 Zmena bázy

Nech $m(t): I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ je aspoň dvakrát diferencovateľná krivka, položíme elipsu Q s osami $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ na túto krivku v každom bode $t \in I$.

$$\frac{(x - m_1(t))^2}{a_0^2} + \frac{(y - m_2(t))^2}{b_0^2} = 1$$

Matica prechodu k novej báze je tvaru

$$A(t) = \begin{pmatrix} \vec{t}(t) & \vec{n}(t) \end{pmatrix},$$

čo po rozpísaní do súradníc $\vec{t}(t) = \frac{1}{\|\dot{m}(t)\|}(\dot{m}_1(t), \dot{m}_2(t))$ a $\vec{n}(t) = \frac{1}{\|\dot{m}(t)\|}(-\dot{m}_2(t), \dot{m}_1(t))$ dáva

$$A(t) = \frac{1}{\|\dot{m}(t)\|} \begin{pmatrix} \dot{m}_1(t) & \dot{m}_2(t) \\ \dot{m}_2(t) & -\dot{m}_1(t) \end{pmatrix}$$

Keďže sme maticu $A(t)$ zostrojili tak, aby bola ortogonálna, ľahko dostávame aj vyjadrenie inverznej matice

$$A^{-1}(t) = A^T(t) = \frac{1}{\|\dot{m}(t)\|} \begin{pmatrix} \dot{m}_1(t) & \dot{m}_2(t) \\ \dot{m}_2(t) & -\dot{m}_1(t) \end{pmatrix}$$

Vyjadrieme elipsu Q v novej báze nasledovnou transformáciou

$$\frac{u^2(t)}{a^2} + \frac{v^2(t)}{b^2} = 1,$$

kde

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\|\dot{m}(t)\|} \begin{pmatrix} \dot{m}_1(t) & \dot{m}_2(t) \\ n_1(t) & n_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - m_1(t) \\ y - m_2(t) \end{pmatrix}$$

Elipsa Q sa potom transformuje na

$$\frac{1}{\|\dot{m}\|^2} \left((x - m_1)^2 \left(\frac{\dot{m}_1^2}{a^2} + \frac{\dot{m}_2^2}{b^2} \right) + 2(x - m_1)(y - m_2)\dot{m}_1\dot{m}_2 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) + (y - m_2)^2 \left(\frac{\dot{m}_2^2}{a^2} + \frac{\dot{m}_1^2}{b^2} \right) \right) = 1 \quad (2.1)$$

Po vynásobení rovnice štvorcom normy $\|\dot{m}\|^2$ a členom a^2b^2 sa výraz zjednoduší

$$\begin{aligned} & (x - m_1)^2(b^2\dot{m}_1^2 + a^2\dot{m}_2^2) + 2(x - m_1)(y - m_2)\dot{m}_1\dot{m}_2(b^2 - a^2) \\ & + (y - m_2)^2(b^2\dot{m}_2^2 + a^2\dot{m}_1^2) - a^2b^2\|\dot{m}\|^2 = 0, \end{aligned}$$

kde konštanta a zabezpečí škálovanie elipsy v dotykovom smere a konštanta b určí škálovanie v normálovom smere. Výber orientácie normály nemá na výsledok žiaden vplyv. Štandardne uvažujeme $\vec{n} = (-\dot{m}_2, \dot{m}_1)$.

Príklad 7 (Parabola). Majme parabolu s parametrizáciou $m(t) = (t, t^2)$, kde $\dot{m}(t) = (1, 2t)$, Transformujme elipsu v stredovom zápise so škálovaním v smere súradnicových osí

$$\frac{(x - t)^2}{a_0^2} + \frac{(y - t^2)^2}{b_0^2} = 1$$

na elipsu so škálovaním v dotykovom a normálovom smere

$$\begin{aligned} & (x - t)^2(b^2 + 4a^2t^2) + 2(x - t)(y - t^2)2t(b^2 - 4a^2t^2) + (y - t^2)^2(4b^2t^2 + a^2) \\ & - a^2b^2(1 + 4t^2) = 0. \end{aligned}$$

2.2.2 Výpočet obálky elíps

Prepíšme rovnicu 2.1 do maticového zápisu. Máme kužeľosečku Q tvaru

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

ktorá má v maticovom tvare vyjadrenie $Q : X^T M(t) X = 0$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} & \frac{D}{2} \\ \frac{B}{2} & C & \frac{E}{2} \\ \frac{D}{2} & \frac{E}{2} & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

Všetky prvky matice $M(t)$ sú závislé od t .

Jej koeficienty po vynásobení normou $\|\dot{m}\|^2$ sú tvaru

$$\begin{aligned} A &= \frac{\dot{m}_1^2}{a^2} + \frac{\dot{m}_2^2}{b^2} \\ \frac{B}{2} &= \dot{m}_1 \dot{m}_2 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \\ C &= \frac{\dot{m}_2^2}{a^2} + \frac{\dot{m}_1^2}{b^2} \\ \frac{D}{2} &= -m_1 \left(\frac{\dot{m}_1^2}{a^2} + \frac{\dot{m}_2^2}{b^2} \right) - m_2 \dot{m}_1 \dot{m}_2 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \\ \frac{E}{2} &= -m_2 \left(\frac{\dot{m}_2^2}{a^2} + \frac{\dot{m}_1^2}{b^2} \right) - m_1 \dot{m}_1 \dot{m}_2 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \\ F &= m_1^2 \left(\frac{\dot{m}_1^2}{a^2} + \frac{\dot{m}_2^2}{b^2} \right) + 2m_1 m_2 \dot{m}_1 \dot{m}_2 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) + m_2^2 \left(\frac{\dot{m}_2^2}{a^2} + \frac{\dot{m}_1^2}{b^2} \right) - \|\dot{m}\|^2 \end{aligned}$$

Determinant matice $M(t)$ je $-\frac{1}{a^2 b^2} < 0$. Matica reprezentuje elipsu.

Pozrime sa deriváciu jednoparametrického systému elíps podľa parametra t , označme \dot{Q} . Máme teda kužeľosečku \dot{Q} tvaru

$$\dot{A}x^2 + \dot{B}xy + \dot{C}y^2 + \dot{D}x + \dot{E}y + \dot{F} = 0$$

ktorej priradíme maticu $\dot{M}(t)$.

$$\begin{aligned} \dot{A} &= 2 \left(\frac{\dot{m}_1 \ddot{m}_1}{a^2} + \frac{\dot{m}_2 \ddot{m}_2}{b^2} \right) \\ \frac{\dot{B}}{2} &= 2(\ddot{m}_1 \dot{m}_2 + \dot{m}_1 \ddot{m}_2) \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \\ \dot{C} &= 2 \left(\frac{\dot{m}_2 \ddot{m}_2}{a^2} + \frac{\dot{m}_1 \ddot{m}_1}{b^2} \right) \\ \frac{\dot{D}}{2} &= -2\dot{m}_1 \left(\frac{\dot{m}_1^2}{a^2} + \frac{\dot{m}_2^2}{b^2} \right) - 4m_1 \dot{m}_1 \dot{m}_2 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \\ \frac{\dot{E}}{2} &= -2\dot{m}_2 \left(\frac{\dot{m}_2^2}{a^2} + \frac{\dot{m}_1^2}{b^2} \right) - 4m_2 \dot{m}_1 \dot{m}_2 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \\ \dot{F} &= 2 \left(m_1 \dot{m}_1 \left(\frac{\dot{m}_1^2}{a^2} + \frac{\dot{m}_2^2}{b^2} \right) + m_2 \dot{m}_2 \left(\frac{\dot{m}_2^2}{a^2} + \frac{\dot{m}_1^2}{b^2} \right) + 2m_1 m_2 \dot{m}_1 \dot{m}_2 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \right) - \|\dot{m}\|^2 \end{aligned}$$

Determinant matice $\dot{M}(t) = 0$, čo znamená, že kužeľosečka je singulárna. Pozrime sa na hodnotu subdeterminantu $\dot{M}_{33}(t) = \dot{A}\dot{C} - \frac{\dot{B}^2}{4} < 0$. To znamená, že kužeľosečka sa degeneruje na dve rôznobežné priamky.

Kapitola 3

Implementácia

V tejto časti opisujeme jazyk, ktorý sme vybrali a rôzne knižnice a doplnky, pomocou ktorých sme vyvíjali časti nášho doplnku. Takisto uvedieme dôvody výberu.

3.1 Motivácia

3.2 Špecifikácia

3.3 Blender

Blender je bezplatný softvér s otvoreným zdrojovým kódom, určený pre prácu s objektmi v 3D priestore. Využíva OpenGL, štandard v priemysle pre renderovanie, a je kompatibilný s operačnými systémami Windows, Linux a macOS. Blender poskytuje širokú škálu nástrojov pre tvorbu 3D obsahu vrátane modelovania, animácie, simulácie fyzikálnych procesov, úpravy videa a efektových vizualizácií. S relatívne nízkymi nárokmi na pamäť a disk je vhodný aj pre menej výkonné počítače. Jeho rozhranie je optimalizované pomocou OpenGL pre konzistentný výkon na rôznych hardvérových platformách. Je ideálny pre jednotlivcov a malé štúdiá, ktoré využívajú jeho jednotnú pipeline. S podporou komunity blender.org/community a malým spustiteľným súborom je Blender flexibilným a výkonným nástrojom pre tvorbu 3D obsahu na rôzne platformy [2].

3.4 Skriptovanie

Pre skúsených užívateľov Blender umožňuje rozšírenie svojej funkcionality a vytvorenie vlastných nástrojov pomocou skriptovacieho jazyka Python. Tento jazyk je integrovaný priamo do softvéru, teda nie je potreba samostatnej inštalácie Pythonu. Okrem toho

Blender obsahuje špeciálnu knižnicu bpy, ktorá slúži na vykonávanie príkazov v Blenderi.

Používateľ má k dispozícii niekoľko prednastavených prostredí. Na vytváranie skriptov slúži prostredie Scripting, ktoré obsahuje okná na písanie, úpravu textu a Python konzolu. Je možné pracovať aj v externom programovacom prostredí [3].

3.5 Python

Jediným jazykom, ktorý je k dispozícii na skriptovanie v Blenderi, je programovací jazyk Python. Python je interpretovaný, vysokoúrovňový a dynamický jazyk, ktorý má široké uplatnenie v rôznych odvetviach. Jeho charakteristickým rysom je používanie odsadenia, ktoré má v tomto programovacom jazyku kľúčový význam, pretože slúži ako indikátor bloku kódu. V našej aplikácii pracujeme s verziou 3.11 jazyka Python.

3.5.1 Knižnice

Pip je systém, ktorý spravuje knižnice pre jazyk Python. Je prepojený s úložiskom pythonovských knižníc PyPI (Python Package Index). Pre jeho používanie nie je potrebná inštalácia, keďže je obsiahnutý v súboroch, ktoré používateľ získa inštalovaním Pythonu.

- **sympy**: Táto knižnica pre jazyk Python poskytuje nástroje na symbolické výpočty, algebraické manipulácie, riešenie rovníc a ďalšie matematické operácie potrebné pre pokročilé výpočty.
- **numpy**: Táto knižnica pre jazyk Python poskytuje nástroje na manipuláciu s vektormi, maticami, poliami a ďalšími objektami potrebnými pre zložitejšie výpočty.
- **matplotlib.pyplot**: Táto knižnica v jazyku Python poskytuje rozhranie na tvorbu vizualizácií a grafického zobrazenia dát. Je často využívaná na tvorbu grafov, histogramov, kontúrových máp a ďalších typov vizuálnych reprezentácií dát.
- **math**: Knižnica math v jazyku Python poskytuje základné matematické funkcie a konštanty pre numerické výpočty. Obsahuje funkcie ako \sin , \cos , \log a ďalšie, ako aj konštanty ako π a e .
- **mathutils**: Táto knižnica je súčasťou Blenderu a poskytuje množstvo užitočných matematických funkcií a nástrojov pre prácu s 3D objektami. Obsahuje funkcie na rotácie, transformácie, výpočet normálov a ďalšie operácie v 3D priestore.

- `sys`: Knižnica `sys` v jazyku Python poskytuje prístup k niektorým systémovým špecifikáciám a funkciám. Medzi jej použitia patrí prístup k argumentom príkazového riadku, manipulácia so štandardnými vstupmi a výstupmi, manipulácia s cestami k súborom a niektoré informácie o systéme ako verzia Pythonu a platforma
- `bpy`: Ide o knižnicu Blenderu, ktorá umožňuje manipuláciu s objektmi v Blenderi pomocou príkazov vytvorených vo skriptoch.
- `time`: Pomocou tejto knižnice môže používateľ získať aktuálny čas v milisekundách.

3.5.2 Implementácia

V tejto kapitole budeme opisovať postup vývoja nášho skriptu. Takisto opíšeme jeho funkčnosť, používateľské rozhranie a postupy, ako inštalovať potrebný softvér a knižnice. Prvým krokom bol výber programovacieho prostredia. Následne sme potrebovali nastaviť toto prostredie tak, aby sme v ňom mohli pracovať zároveň s Blenderom a inštalovať všetky potrebné knižnice. Po splnení týchto krokov sme začali vyvíjať samotný skript.

3.5.3 Programovacie prostredie

Na programovanie v jazyku Python sme využívali programovacie prostredie VSCode vo verzii 1.77.1. Toto prostredie sme si vybrali pre jeho minimalistický dizajn, ktorý zjednodušuje používanie a robí ho intuitívnym a rýchlym. VSCode disponuje množstvom rozšírení, z ktorých pre našu prácu najdôležitejším je rozšírenie Blender Development. Toto rozšírenie slúži na ladenie skriptov, ktoré sa spúšťajú v prostredí Blenderu, a obsahuje aj predpripravené šablóny.

Inštalácia prostredia VSCode je možná po stiahnutí inštalačného súboru z oficiálnej webovej stránky softvéru [8]. Po stiahnutí .zip súboru požadovanej verzie programu sme spustili inštalačný súbor dvojklikom.

Rozšírenie Blender Development sme následne stiahli priamo v prostredí VSCode kliknutím na ikonu Extensions v ľavej lište rozhrania a vyhľadaním názvu rozšírenia.

Pomocou tohto rozšírenia sme vykonávali ladenie programu pomocou klávesovej skratky `Ctrl+Shift+P`. Po stlačení tejto klávesovej kombinácie v prostredí VSCode sa v hornej lište zobrazilo menu, v ktorom sme vybrali možnosť Blender: Build and Start a následne Blender súbor, v ktorom sme chceli ladenie vykonať. Týmto spôsobom sa softvér spustí, a opätovným použitím klávesovej skratky `Ctrl+Shift+P` v programovacom prostredí a výberom možnosti Blender: Run Script sa začína proces ladenia programu.

Kapitola 4

Výsledky práce

Literatúra

- [1] Babušíková J., Slodička M., Weisz J. 2000. *Numerické metódy*. Univerzita Komenského v Bratislave. ISBN 80-223-1384-X. Dostupné na internete: <http://hore.dnom.fmph.uniba.sk/~babusikova/skripta.pdf>.
- [2] Blender documentation: Blender 4.0 Reference Manual. Dostupné na internete: <https://docs.blender.org/manual/en/latest/index.html>.
- [3] Blender documentation: Blender 4.0 Python API Documentation. Dostupné na internete: <https://docs.blender.org/api/current/>.
- [4] Blender documentation: Mesh Operator. Dostupné na internete: <https://docs.blender.org/api/current/bpy.ops.mesh.html>.
- [5] Blender documentation: Context Access. Dostupné na internete: <https://docs.blender.org/api/current/bpy.context.html>.
- [6] Blender download. Dostupné na internete: <https://www.blender.org/download/>.
- [7] Biernet A. 2016. Visualisierung und grafische Anwendung von Kanalflächen. Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Naturwissenschaftliche Fakultät III. Halle (Saale). Dissertation. Dostupné na internete: <https://digital.bibliothek.uni-halle.de/hs/content/titleinfo/2416652>.
- [8] Bruce, J. W., Giblin, P. J. 1981. What Is an Envelope? *The Mathematical Gazette*, 65(433), 186-192. Dostupné na internete: <http://www.jstor.org/stable/3617131>.
- [9] do Carmo M. P. 2017. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, New York. Dover Publications Inc., Mineola. ISBN-13: 978-0-486-80699-0.
- [10] Grossfield, A. 1997. What Are Differential Equations: A Review Of Curve Families. Paper presented at 1997 Annual Conference, Milwaukee, Wisconsin. 10.18260/1-2-6898. Dostupné na internete: <https://216.185.13.174/what-are-differential-equations-a-review-of-curve-families>.

- [11] Hlavička R., Růžicková I. Numerické metody. Brno. Dostupné na internete: <http://physics.ujep.cz/jskvor/NME/DalsiSkripta/Numerika.pdf>.
- [12] Chalmovianská, J. Skriptá k predmetu Algebraická geometria. Dostupné na internete: <http://fractal.dam.fmph.uniba.sk/~pilnikova/ag1.html>.
- [13] Chudinov P. 2009. Numerical-analytical Algorithm for Constructing the Envelope of the Projectile Trajectories in Midair. Dostupné na internete: <https://doi.org/10.48550/arXiv.0902.0520>.
- [14] Karčiauskas K., Krasauskas R. 2000. Rational rolling ball blending of natural quadrics. *Mathematical Modelling and Analysis*, Volume 5, Pages 97-107. Dostupné na internete: https://www.researchgate.net/publication/233265253_Rational_rolling_ball_blending_of_natural_quadrics.
- [15] Lee, J. 2012. *Introduction to Smooth Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. New York. Springer. 2. edition. Dostupné na internete: <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9982-5>.
- [16] Maxima documentation: Maxima 5.47.0 Manual. Dostupné na internete: https://maxima.sourceforge.io/docs/manual/maxima_singlepage.html.
- [17] Maxima download. Dostupné na internete: <https://wxmaxima-developers.github.io/wxmaxima/>.
- [18] Odehnal B., Stachel H., Glaeser G. 2020. *The Universe of Quadrics*. Vienna. Springer-Verlag. ISBN 978-3-662-61052-7. Dostupné na internete: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-61053-4>.
- [19] Peternell, M., Pottmann H. 1997. Computing Rational Parametrizations of Canal Surfaces. *Journal of Symbolic Computation*, Volume 23, Issues 2–3, Pages 255-266, ISSN 0747-7171. Dostupné na internete: <https://doi.org/10.1006/jsco.1996.0087>.
- [20] Peternell M., Odehnal B., Sampoli M. L., On quadratic two-parameter families of spheres and their envelopes, *Computer Aided Geometric Design*, Volume 25, Issues 4–5, 2008, Pages 342-355, ISSN 0167-8396. Dostupné na internete: <https://doi.org/10.1016/j.cagd.2007.10.007>.
- [21] Peternell M., Pottmann H. 1998. A Laguerre geometric approach to rational offsets, *Computer Aided Geometric Design*, Volume 15, Issue 3, Pages 223-249, ISSN 0167-8396. Dostupné na internete: [https://doi.org/10.1016/S0167-8396\(97\)00024-1](https://doi.org/10.1016/S0167-8396(97)00024-1).

- [22] Pottmann H., Peternell M. 2009. Envelopes – Computational Theory and Applications. Proceedings of Spring Conference on Computer Graphics. Dostupné na internete: <https://www.geometrie.tuwien.ac.at/geom/ig/peternell/env.pdf>.
- [23] Pottmann H., Peternell M. 1998. Applications of Laguerre geometry in CAGD. *Computer Aided Geometric Design*, Volume 15, Issue 2, Pages 165-186, ISSN 0167-8396. Dostupné na internete: [https://doi.org/10.1016/S0167-8396\(97\)00023-X](https://doi.org/10.1016/S0167-8396(97)00023-X).
- [24] Pottmann, H., Wallner, J. 2001. *Computational Line Geometry*. Springer-Verlag.
- [25] PrusaSlicer download. Dostupné na internete: <https://www.prusa3d.com/cs/>.
- [26] Python documentation. Dostupné na internete: <https://docs.python.org/3/>.
- [27] Python download. Dostupné na internete: <https://www.python.org/downloads>.
- [28] Skopenkov M. et al. 2020. Characterizing envelopes of moving rotational cones and applications in CNC machining, *Computer Aided Geometric Design*, Volume 83, 101944, ISSN 0167-8396. Dostupné na internete: <https://doi.org/10.1016/j.cagd.2020.101944>.
- [29] Visual Studio Code download. Dostupné na internete: <https://code.visualstudio.com/download>.
- [30] Vráblíková J. 2022. Envelopes of implicit surfaces. Mathematical Institute of Charles University. Prague. Master's thesis. Dostupné na internete: <https://dodo.is.cuni.cz/bitstream/handle/20.500.11956/171858/120411574.pdf?sequence=1&isAllowed=y>.
- [31] Obrázok Webbov Most. Dostupné na internete: <http://www.yannarthusbertrand2.org/collection/australia/#mwl-3844>.
- [32] Obrázok Rolling ball blends. Dostupné na internete: https://www2.mathematik.tu-darmstadt.de/~ehartmann/pub/parblrb_abs/parblrb_abs.html.

Všetky online zdroje boli dostupné dňa 10.05.2024.

Príloha A

Výpočet obálky pomocou Gröbnerovej bázy pre príklad 3 so sústavou rovníc

$$\begin{aligned}F^\lambda &= 4t^6 - 4t^5y + t^4y^2 + 7t^4 - 8t^3y + 2t^2y^2 + 2t^2 - 4ty + x^2 + y^2 - 1, \\F_t^\lambda &= 24t^5 - 20yt^4 + 4y^2t^3 + 28t^3 - 24yt^2 + 4y^2t + 4t - 4y.\end{aligned}$$

Gröbnerova báza vzhľadom na lexikografické usporiadanie obsahuje 6 polynómov

$$G_{lex} = \{l_1, \dots, l_6\}, \text{ kde}$$

$$\begin{aligned}l_1 &= 8232129896496000t^3 - 15949751674461t^2y^7 - 161384046512557t^2y^5 \\&\quad - 1204463505481071t^2y^3 - 6169809854717575t^2y + 15430671472tx^2y^{12} \\&\quad + 426513396863tx^2y^{10} - 15006102325790tx^2y^8 - 319921877859794tx^2y^6 \\&\quad + 3932980083404115tx^2y^4 + 26096343414243210tx^2y^2 \\&\quad - 5927133525477120tx^2 + 8232129896496000t - 89991676024704x^6y^3 \\&\quad + 2209014462034224x^6y - 123445371776x^4y^9 + 5668842986368x^4y^7 \\&\quad - 43236019313379x^4y^5 + 216584367885756x^4y^3 - 17414290688695056x^4y \\&\quad - 138876043248x^2y^{11} + 5550943018945x^2y^9 + 43203483205279x^2y^7 \\&\quad - 2080524984593504x^2y^5 - 7412218093958823x^2y^3 + 19070089710359527x^2y \\&\quad - 15949751674461y^7 - 161384046512557y^5 - 1204463505481071y^3 \\&\quad - 6169809854717575y \\l_2 &= 1029016237062t^2x^2 + 3835312tx^2y^{11} + 224556467tx^2y^9 + 2456837050tx^2y^7 \\&\quad - 42939029714tx^2y^5 - 622020302148tx^2y^3 - 2792792777023tx^2y \\&\quad - 22367539584x^6y^2 - 142307343504x^6 - 30682496x^4y^8 + 460629376x^4y^6 \\&\quad + 9525009465x^4y^4 + 219270724812x^4y^2 + 1396561520952x^4 - 34517808x^2y^{10} \\&\quad + 312779149x^2y^8 + 27193951123x^2y^6 + 222693218689x^2y^4 + 454926520789x^2y^2 \\&\quad - 1254254177448x^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_3 = & 171502706177t^2y^8 + 2058032474124t^2y^6 + 14749232731222t^2y^4 \\
& + 51450811853100t^2y^2 + 107189191360625t^2 + 8570784208tx^2y^{11} \\
& + 447143859077tx^2y^9 + 2637043681390tx^2y^7 - 114540691274161tx^2y^5 \\
& - 650595377992068tx^2y^3 - 329349595559310tx^2y - 49984813501056x^6y^2 \\
& + 839468449296x^6 - 68566273664x^4y^8 + 1466755633792x^4y^6 \\
& + 11936450992239x^4y^4 + 413705122761564x^4y^2 + 188859580240104x^4 \\
& - 77137057872x^2y^{10} + 1191027458875x^2y^8 + 53352589022478x^2y^6 \\
& + 162741630161810x^2y^4 - 276360042692994x^2y^2 - 296888240050025x^2 \\
& + 171502706177y^8 + 2058032474124y^6 + 14749232731222y^4 + 51450811853100y^2 \\
& + 10718919136062514749232731222y^4 + 51450811853100y^2 + 107189191360625 \\
l_4 = & 3319374168tx^4 + 4112tx^2y^{12} + 419465tx^2y^{10} + 11960430tx^2y^8 + 9104606tx^2y^6 \\
& - 3087637940tx^2y^4 - 14225835735tx^2y^2 - 3841868250tx^2 - 23981184x^6y^3 \\
& - 1194801840x^6y - 32896x^4y^9 - 935808x^4y^7 + 40771323x^4y^5 + 484488324x^4y^3 \\
& + 9021165372x^4y - 37008x^2y^{11} - 1273033x^2y^9 + 53962761x^2y^7 + 1348048703x^2y^5 \\
& + 2769404571x^2y^3 - 7303869450x^2y \\
l_5 = & 16tx^2y^{13} + 1321tx^2y^{11} + 29688tx^2y^9 - 92522tx^2y^7 - 7839424tx^2y^5 \\
& - 31597167tx^2y^3 - 1560600tx^2y - 93312x^6y^4 - 2834352x^6y^2 + 3569184x^6 \\
& - 128x^4y^{10} - 1152x^4y^8 + 110331x^4y^6 + 1346274x^4y^4 + 23526288x^4y^2 \\
& - 7700184x^4 - 144x^2y^{12} - 2153x^2y^{10} + 172287x^2y^8 + 3228925x^2y^6 \\
& + 5234421x^2y^4 - 18569520x^2y^2 + 4131000x^2 \\
l_6 = & 11664x^8 + 16x^6y^6 - 585x^6y^4 + 5076x^6y^2 - 38664x^6 - x^4y^{10} - 5x^4y^8 - 884x^4y^6 \\
& - 6916x^4y^4 + 5885x^4y^2 + 42625x^4 - x^2y^{12} - 18x^2y^{10} - 183x^2y^8 - 1116x^2y^6 \\
& - 4575x^2y^4 - 11250x^2y^2 - 15625x^2
\end{aligned}$$

Eliminovaná Grobnerova báza vzhľadom na lexikografické usporiadanie

$$\begin{aligned}
g_1 &= -89991676024704x^6y^3 + 2209014462034224x^6y - 123445371776x^4y^9 \\
&\quad + 5668842986368x^4y^7 - 43236019313379x^4y^5 + 216584367885756x^4y^3 \\
&\quad - 17414290688695056x^4y - 138876043248x^2y^{11} + 5550943018945x^2y^9 \\
&\quad + 43203483205279x^2y^7 - 2080524984593504x^2y^5 - 7412218093958823x^2y^3 \\
&\quad + 19070089710359527x^2y - 15949751674461y^7 - 161384046512557y^5 \\
&\quad - 1204463505481071y^3 - 6169809854717575y \\
g_2 &= -22367539584x^6y^2 - 142307343504x^6 - 30682496x^4y^8 + 460629376x^4y^6 \\
&\quad + 9525009465x^4y^4 + 219270724812x^4y^2 + 1396561520952x^4 - 34517808x^2y^{10} \\
&\quad + 312779149x^2y^8 + 27193951123x^2y^6 + 222693218689x^2y^4 + 454926520789x^2y^2 \\
&\quad - 1254254177448x^2 \\
g_3 &= -49984813501056x^6y^2 + 839468449296x^6 - 68566273664x^4y^8 \\
&\quad + 1466755633792x^4y^6 + 11936450992239x^4y^4 + 413705122761564x^4y^2 \\
&\quad + 188859580240104x^4 - 77137057872x^2y^{10} + 1191027458875x^2y^8 \\
&\quad + 53352589022478x^2y^6 + 162741630161810x^2y^4 - 276360042692994x^2y^2 \\
&\quad - 296888240050025x^2 + 171502706177y^8 + 2058032474124y^6 \\
&\quad + 14749232731222y^4 + 51450811853100y^2 + 107189191360625 \\
g_4 &= -23981184x^6y^3 - 1194801840x^6y - 32896x^4y^9 - 935808x^4y^7 + 40771323x^4y^5 \\
&\quad + 484488324x^4y^3 + 9021165372x^4y - 37008x^2y^{11} - 1273033x^2y^9 + 53962761x^2y^7 \\
&\quad + 1348048703x^2y^5 + 2769404571x^2y^3 - 7303869450x^2y \\
g_5 &= -93312x^6y^4 - 2834352x^6y^2 + 3569184x^6 - 128x^4y^{10} - 1152x^4y^8 + 110331x^4y^6 \\
&\quad + 1346274x^4y^4 + 23526288x^4y^2 - 7700184x^4 - 144x^2y^{12} - 2153x^2y^{10} \\
&\quad + 172287x^2y^8 + 3228925x^2y^6 + 5234421x^2y^4 - 18569520x^2y^2 + 4131000x^2 \\
g_6 &= 11664x^8 + 16x^6y^6 - 585x^6y^4 + 5076x^6y^2 - 38664x^6 - x^4y^{10} - 5x^4y^8 - 884x^4y^6 \\
&\quad - 6916x^4y^4 + 5885x^4y^2 + 42625x^4 - x^2y^{12} - 18x^2y^{10} - 183x^2y^8 - 1116x^2y^6 \\
&\quad - 4575x^2y^4 - 11250x^2y^2 - 15625x^2
\end{aligned}$$

Gröbnerova báza vzhľadom na graduované reverzné lexikografické usporiadanie obsahuje 10 polynómov

$$G_{grevlex} = \{g_1, \dots, g_{10}\}, \text{ kde}$$

$$\begin{aligned}
g_1 &= -2706889t^2x^2y^2 + 48735498t^2x^2 - 248832tx^6y - 618540tx^4y^3 - 18691704tx^4y \\
&\quad - 11148241tx^2y^3 - 113858467tx^2y + 82944x^6y^2 + 1391904x^6 + 2592x^4y^6 \\
&\quad + 227460x^4y^4 + 7282128x^4y^2 + 48599388x^4 + 2592x^2y^8 + 136740x^2y^6 \\
&\quad + 5322840x^2y^4 + 25315237x^2y^2 - 49991292x^2 \\
g_2 &= -5926019t^2x^2y - 381024tx^6 + 17542tx^4y^4 + 536256tx^4y^2 + 2639556tx^4 \\
&\quad + 549118tx^2y^4 + 7633231tx^2y^2 - 2544625tx^2 + 127008x^6y - 4802x^4y^5 \\
&\quad - 137396x^4y^3 - 3196866x^4y - 4802x^2y^7 - 232456x^2y^5 - 1612916x^2y^3 \\
&\quad + 3355951x^2y \\
g_3 &= -257t^2x^2y^2 + 4998t^2x^2 - 1728tx^4y + 36tx^2y^5 - 1037tx^2y^3 - 11867tx^2y \\
&\quad + 576x^4y^2 + 5292x^4 + 540x^2y^4 + 2729x^2y^2 - 5292x^2 \\
g_4 &= 49t^2x^2y^3 + 1392t^2x^2y - 648tx^4 - 11tx^2y^4 - 983tx^2y^2 + 750tx^2 \\
&\quad + 216x^4y + 227x^2y^3 - 318x^2y \\
g_5 &= 216t^2x^4 + 227t^2x^2y^2 - 318t^2x^2 - 180tx^4y - 181tx^2y^3 + 497tx^2y + 36x^4y^2 \\
&\quad - 72x^4 + 36x^2y^4 - 179x^2y^2 + 72x^2 \\
g_6 &= 59t^4 + t^3y^3 - 61t^3y - 24t^2x^2 + 18t^2y^2 + 48t^2 + 8tx^2y + ty^3 - 61ty + 11x^2 \\
&\quad + 18y^2 - 11 \\
g_7 &= 168t^4 - 192t^3y - 42t^2x^2 + t^2y^4 + 54t^2y^2 + 121t^2 + 11tx^2y - 192ty + x^2y^2 \\
&\quad + 47x^2 + y^4 + 54y^2 - 47 \\
g_8 &= 37t^5 - 18t^3y^2 + 64t^3 + 5t^2y^3 - 17t^2y - 15tx^2 - 18ty^2 + 27t + 5x^2y + 5y^3 \\
&\quad - 17y \\
g_9 &= 6t^3x^2 - 5t^2x^2y + tx^2y^2 + tx^2 - x^2y \\
g_{10} &= 37t^4y - 29t^3y^2 + 25t^3 + 6t^2y^3 + 24t^2y - 18tx^2 - 29ty^2 + 25t + 6x^2y + 6y^3 \\
&\quad - 13y
\end{aligned}$$