计算物理导论 - Homework 10 : 全连接Ising模型

考虑一个 N 个格点的全连接Ising模型，其哈密顿量为：

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{i \neq j} J_{ij} s_i s_j,$$

其中 $s_i = \pm 1$ 为格点的自旋状态，耦合强度矩阵 J_{ij} 是对称的。 接下来让我们定义 p 个自旋态集合：

$$\{\mathbf{v}^\mu\} = \{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \cdots, \mathbf{v}^p\},$$

$\mathbf{v}^\mu$ 是可以任意选取的 N 格点的自旋组态。 对于一个给定的集合 $\{\mathbf{v}^\mu\}$，按照下述规则确定一个耦合强度矩阵：

$$J_{ij}\Big|_{i \neq j} = \frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{p} v_i^\mu v_j^\mu, \quad J_{ii} = 0.$$

定义两个自旋构型 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ 的余弦相似度：

$$S_C(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{\left|\sum_i^N u_i v_i\right|}{\sqrt{\sum_i^N u_i^2} \cdot \sqrt{\sum_i^N v_i^2}} = \frac{1}{N}\left|\sum_i^N u_i v_i\right|.$$

1. 考虑最简单的情况 $p = 1$，即初始的集合 $\{\mathbf{v}^\mu\}$ 只有一个元素 $\mathbf{v} = [v_1, v_2, \cdots, v_N]^T$。 写出一个任意自旋态 $\mathbf{s} = [s_1, s_2, \cdots, s_N]^T$ 对应的能量 $E(\mathbf{s})$. 系统的基态是什么？基态简并吗？（2分）
2. 产生一个大小为 p 的集合 $\{\mathbf{v}^\mu\}$。其中 $v_i^\nu = \mathrm{rand}(-1, +1)$ 随机选取。
   i. 取值 $N = 1000, p = 1$, 且随机生成一个初态 $\mathbf{s}$，它和集合里唯一元素的相似度 $S_C(\mathbf{s}, \mathbf{v})$ 是多少？ 现在用metropolis单自旋更新的方法来模拟 H 的基态（$\beta \to \infty$）。 当系统能量不再变化的时候，你找到的 $\mathbf{s}$ 是什么，有什么特点？ $S_C(\mathbf{s}, \mathbf{v})$ 又是多少？（2分）
   ii. 取值 $N = 2000, p = 10$。 产生一个初态集合 $\{\mathbf{s}^\mu\}$， 其中 $\mathbf{s}^\mu$ 为将 $\mathbf{v}^\mu$ 加上噪声得到，其伪代码为：

   ```
   add_noise(v, δ) = [(rand()<δ ? rand((-1,+1)) : vi) for vi in v]
   ```

   其中 $\delta \in [0, 1]$ 是噪声强度。现在取 $\delta = 0.5$。对得到的集合 $\{\mathbf{s}^\mu\}$ 都作演化，给出末态 $\mathbf{s}^\mu$ 和对应无噪声的原始构型 $\mathbf{v}^\mu$ 的相似度 $S_C^\mu = S_C(\mathbf{u}^\mu, \mathbf{v}^\mu)$。你发现了什么？（2分）
   iii. 保持 $N = 2000$ 并改变 p 的值。对于不同的 p 值，计算 S_C^μ 的分布，并用直方图画出来。这一分布随着 p 的值改变出现了什么变化？这样的变化说明了什么？（2分） hint: p 在此题可以在 $50 - 400$ 间选取。为了得到更好的分布，你可以考虑对不同的 $\{\mathbf{v}^\mu\}$ 作系综平均。
   iv. 你能解释你的发现吗？（2分） 你还有什么别的思考？