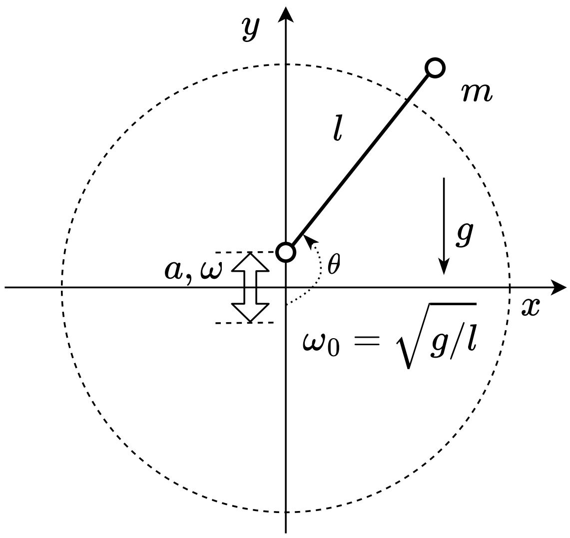
计算物理导论 - Homework 3 : 常微分方程

A. Kapitza摆

考虑如图的系统，称为Kapitza摆。



其中小球质量为 m， 固定在一个长度为 l 的轻杆的末端，并受到重力作用，重力加速度为 g。轻杆另一侧固定于一个往复电机上，作垂直振动，方程为

$$y_0(t) = \cos \omega t,$$

而摆角 θ 定义为摆偏离 y 轴负方向的角度。

1. 以 $\theta, \dot{\theta}$ 为广义坐标和广义速度，写出系统的拉格朗日量，求出系统的运动方程，并显式写出动力系统的运动方程：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(t) = f(u, t, p)$$

   其中 $u \equiv [\theta, \dot{\theta}]^T$. p 代表方程的其它可变参数，例如此处 $p = \{a, l, m, g, \omega\}$.（1分）
2. 写出一个Runge-Kutta方法求解微分方程的简单程序。(1.5分）
   hint 1: 你的程序应当具有一定的通用性。不妨想一想：任何一个别的ODE问题也可以抽象成 $f(u, t, p)$ 的形式吗？ 你理解（1）中显式写出动力系统的方程的意义了吗？
   hint 2: 使用精度较高的格式，例如课程介绍的 `RK4` 。你可以自行查找其它高精度的butcher tableau， 例如Dormand-Prince 5th order `DP5` 。
   hint 3: 函数接口设计参考python的 `scipy.integrate` 或者julia的 `DifferentialEquations.jl` 。(无强制要求）
3. 取 $l = m = g = 1, a = 0.1.$ 分别取 $\omega = 5, 10, 20,$ 保持初始条件 $\theta(0) = \frac{4}{5}\pi, \dot{\theta}(0) = 0$。你发现了什么？（2分）
4. 你如何从理论上解释你所发现现象？（0.5分）

B. 乒乓球

考虑一个乒乓球在球拍的周期拍打的作用下的运动。将乒乓球视为质点，它始终作垂直运动， 纵坐标为 $y(t)$， 受到重力加速度 g， 假设空气带来的阻尼正比于速度，阻尼系数为 γ。乒乓球受到的瞬时加速度为：

$$\ddot{y} = -g - \gamma\dot{y}$$

同时，球拍的位置随时间简谐变化：

$$h(t) = A\sin\omega t$$

其中 A 为球拍振幅。 假设当乒乓球触碰球拍时，发生**完全弹性碰撞**，且球拍质量远大于球，其速度可以视为不受影响。

1. 写出乒乓球的完整运动方程，同时写出触碰球拍时球的状态应该如何改变？ （1分）
2. 求解这个问题，你需要如何处理碰撞？（0.5分）
3. 现在取定参数 $g = 10, \gamma = 0.02, A = 0.02, \omega = 2 \times 2\pi, \dot{y}(0) = 0.$ 唯一可变参数是初始时刻释放小球的高度 $y(0) = y_0$。
   i. 取 $y_0 = 0.3$， 研究乒乓球坐标 $y(t)$ 随时间变化的情况。 展示 $t \in (0, 10)$ 的轨迹和 $t \in (990, 1000)$ 的轨迹（在同一张图也画出球拍的轨迹）。(1分)
   ii. 改变 y_0，运用学过的知识，分析不同 y_0 下乒乓球长时间轴的稳定运动模式。这些模式一致吗？如果一致，列出并分析原因；如果不一致，找出至少两个典型的模式，并且分析这些模式具有什么有趣的特点。 （1.5分）
   iii. 耗散（阻尼）在其中起到了怎样的作用？ （0.5分）
4. 这个问题有什么原理上精确的方法吗？（0.5分） hint：如果在（2）中已经使用了精确方法，可以不再赘述。