

计算物理导论-Himework 3: 常微分方程

题目描述

项目概况

结果及分析

A. Kapitza摆

1. 求出系统的运动方程

以 $\theta, \dot{\theta}$ 为广义坐标和广义速度：
得到小球的动能：

$$T = \frac{1}{2}m[(-a\omega\sin\omega t + l\dot{\theta}\sin\theta)^2 + (l\dot{\theta}\cos\theta)^2]$$

$$T = \frac{m}{2}[(l\dot{\theta})^2 + (a\omega\sin(\omega t))^2 - 2a\omega l\dot{\theta}\sin(\omega t)\sin\theta]$$

势能(以x轴为势能零点)：

$$V = mg(a\cos\omega t - l\cos\theta)$$

体系的拉格朗日量为：

$$L = T - V$$

$$L = T - V = \frac{m}{2}[(l\dot{\theta})^2 + (a\omega\sin(\omega t))^2 - 2a\omega l\dot{\theta}\sin(\omega t)\sin\theta] - mg(a\cos(\omega t) - l\cos(\theta))$$

由拉格朗日方程：

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

化简得到：

$$l\ddot{\theta} = a\omega^2 \cos(\omega t) \sin\theta - g \sin(\theta)$$

不妨将 $\dot{\theta}$ 记作 Ω ，写成题目要求的形式：

$$\frac{d}{dt} \theta = \Omega$$

$$\frac{d}{dt} \Omega = \frac{a}{l} \omega^2 \cos(\omega t) \sin\theta - \frac{g}{l} \sin(\theta)$$