题目

A．DFT和FFT

1．编写一个DFT程序，要求接受元素类型为 `complex128`（python）/ `ComplexF64`（julia） 的一维数组。返回其离散傅里叶变换。给出测试样例（例如对随机数组做DFT）并对比FFTW等库函数的结果。（1分）

2．编写一个基本的Base2 FFT程序，检查输入数组长度是否为2的幂次；如果是则执行快速傅里叶变换FFT。不可以使用和fft相关的库函数。给出数组大小从 2^4 到 2^{12} 的测试样例。（1．5分）你的程序的计算复杂度理论上是什么？对比标准库，你的程序用时如何，符合复杂度的理论预期吗？（1分）

hint：使用递归的算法即可获得本题分数，但是有兴趣的同学可以探究如何编写正向递推的程序。如果你自己写的程序在部分算例上比库函数更快（这是有可能的），想想可能的原因，并分享给大家。在测试用时的时候，请使用较为准确的测试工具，至少精确到微秒。

3．分析信号：文件 `waveform.dat` 储存了示波器测量得到的电压信号，第一列数据为采样时间轴，第二列为对应时间点的电压值。请你使用FFT分析这段信号的频域特征，看看在频谱上发现了什么。本题使用库函数的FFT即可，无需自己写（2分）

B．牛顿迭代法

使用牛顿迭代法求解复平面上的非线性方程 $f(z)=0$. 其中

$$f(z)=z^3-1,\quad z\in\mathbb{C}$$

1．这个方程的根有哪些？（1分）

2．假设 $f(z)$ 为一个未知函数，现在使用标准的牛顿法迭代求解 $f(z)$ 的零点。初始的猜测解为 z_0 。请写出求解迭代过程中，z_n 的递推公式。（1分）

3．记 $z=x+iy$ 。在 x,y 平面上，以 $(x,y)=(0,0)$ 为中心， 1 为半宽的正方形区域内，取分辨率 0.002 ，探究平面上的不同点分别收敛到哪个根上，并可视化你的结果。（1分）

4．重复（3）的过程，但是分别放缩到

（a）．以 $(-0.8,0.0)$ 为中心， 0.25 为半宽，分辨率 0.0005 。

（b）．以 $(-0.56, 0.18)$ 为中心， 0.1 为半宽，分辨率 0.0002 。

呈现你的可视化结果。（0．5分）你发现了什么有趣的现象？（1分）

项目结构

```
.
├── README.md
├── code
│   ├── A_dft.py 编写一个DFT程序并验证
│   ├── A_Base2_FFT.py 包含自己写的fft和iterative_fft程序，并记录用时
│   ├── A_wave.py 读取波形数据，并使用FFT分析
│   ├── B.py 牛顿迭代法求解复平面上的非线性方程
├── figure png文件
```

结果及讨论

A.DFT和FFT

1.编写一个DFT程序并验证

如下所示，编写 `my_dft` 函数，实现对输入的数组进行DFT计算，并返回结果。

```python
def my_dft(x_array)->np.ndarray:
    N = len(x_array)
    n = np.arange(N)
    k = n.reshape((N,1))
    M = np.exp(-2j * np.pi * k * n / N)/N**0.5
    return np.dot(M,x_array)
```

使用一个八维的随机复向量作为测试，并且使用 `np.fft` 作为标准包函数，测试数据、 `my_dft` 、 `np.fft` 给出的结果以及二者差值如下：

```
Testing data [0.5488135 +0.96366276j 0.71518937+0.38344152j 0.60276338+0.79172504j
 0.54488318+0.52889492j 0.4236548 +0.56804456j 0.64589411+0.92559664j
 0.43758721+0.07103606j 0.891773  +0.0871293j ]

My DFT result [ 1.70078929+1.52718476j  0.37800121-0.09510798j  0.22101742+0.26322719j
 -0.33969539+0.51364957j -0.2775114 +0.1659601j   0.22010342+0.25805511j
 -0.26901744+0.20978922j -0.08140811-0.11710808j]

Numpy FFT result [ 1.70078929+1.52718476j  0.37800121-0.09510798j  0.22101742+0.26322719j
 -0.33969539+0.51364957j -0.2775114 +0.1659601j   0.22010342+0.25805511j
 -0.26901744+0.20978922j -0.08140811-0.11710808j]

My DFT result - Numpy FFT result [ 2.22044605e-16+2.22044605e-16j  0.00000000e+00+1.38777878e-17j
 -8.32667268e-17+5.55111512e-17j -2.77555756e-16+0.00000000e+00j
  5.55111512e-17-3.05311332e-16j -1.38777878e-16-5.55111512e-16j
 -7.77156117e-16-9.71445147e-16j  1.52655666e-15+9.29811783e-16j]
```

由上图结果可以看出，自己编写的函数和包函数给出的结果差值极小，可以认为自己编写的dft函数具有好的离散傅里叶变换的功能。

2.编写一个FFT程序并验证

递归算法

运用递归思想，写出Base2 FFT程序如下：

```python
def fft(x):
    n = len(x)
    assert is_power_of_two(n), "输入数组的长度必须为2的幂次"
    if n==1:
        return x
    even = fft(x[0::2])
    odd = fft(x[1::2])
    T = [cmath.exp(-2j * cmath.pi * k / n) * odd[k] for k in range(n // 2)]
    # 利用离散傅里叶变换的性质:傅里叶变换的结果中前一半和后一半互为共轭
    return [even[k] + T[k] for k in range(n // 2)] + \
           [even[k] - T[k] for k in range(n // 2)]
```

首先验证程序的正确性：
使用一个八维的随机复向量作为测试，并与使用 `np.fft` 的结果进行比较，测试数据、 `fft` 、 `np.fft` 给出的结果以及二者差值如下：

```
Testing data [0.5488135 +0.96366276j 0.71518937+0.38344152j 0.60276338+0.79172504j
 0.54488318+0.52889492j 0.4236548 +0.56804456j 0.64589411+0.92559664j
 0.43758721+0.07103606j 0.891773  +0.0871293j ]

My FFT result [(4.810558553818618+4.319530794448397j), (1.0691488746735744-0.2690059935013657j), (0.6251316535958867+0.
7445189296543112j), (-0.9608036570900079+1.4528203902434071j), (-0.784920772617486+0.4694060413026291j), (0.622546494272821+0.
729890062697657j), (-0.7608962217321006+0.5933735209745091j), (-0.23025689350270728-0.3312316618113107j)]

FFTW result [ 4.81055855+4.31953079j  1.06914887-0.26900599j  0.62513165+0.74451893j
 -0.96080366+1.45282039j -0.78492077+0.46940604j  0.62254649+0.72989006j
 -0.76089622+0.59337352j -0.23025689-0.33123166j]
```

由上图结果可以看出，自己编写的函数和包函数给出的结果差值极小，可以认为自己编写的fft函数具有好的快速离散傅里叶变换的功能。

在验证了程序的正确性后给出数组大小从2^4到2^{12}的测试样例，记录程序用时。

```
my fft for size16,exection time:6.9500005338341e-05
np.fft for size16,exection time:2.9899994842708811e-05
my fft for size32,exection time:8.9899986051023e-05
np.fft for size32,exection time:1.4400051441043615e-05
my fft for size64,exection time:0.00017529999604448676
np.fft for size64,exection time:6.499991286545992e-06
my fft for size128,exection time:0.0004257000400684774
np.fft for size128,exection time:1.650000922381878e-05
my fft for size256,exection time:0.0008502000127919018
np.fft for size256,exection time:1.550000160932541e-05
my fft for size512,exection time:0.0019016999867744744
np.fft for size512,exection time:7.420004112645984e-05
my fft for size1024,exection time:0.003406899981200695
np.fft for size1024,exection time:3.550003748387098e-05
my fft for size2048,exection time:0.008181200013495982
np.fft for size2048,exection time:5.739997141063213e-05
my fft for size4096,exection time:0.015770500001963228
np.fft for size4096,exection time:0.00010310002835467458
```

由上图可以看出，我所编写的fft函数用时多于标准库的用时。

接下来分析我的代码的时间复杂度：

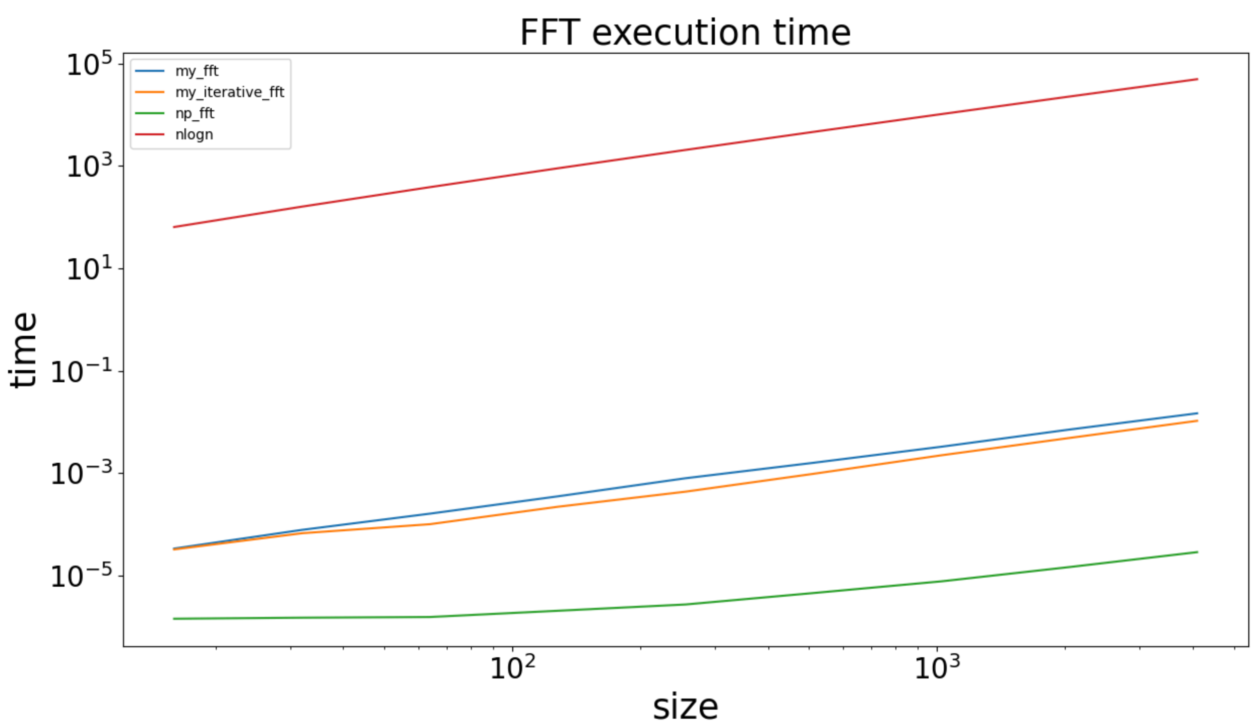
递归调用的次数为$log_2(n)$，每次递归调用

```python
    T = [cmath.exp(-2j * cmath.pi * k / n) * odd[k] for k in range(n // 2)]
        # 利用离散傅里叶变换的性质:傅里叶变换的结果中前一半和后一半互为共轭
        return [even[k] + T[k] for k in range(n // 2)] + \
               [even[k] - T[k] for k in range(n // 2)]
```

语句的时间复杂度为O（$\frac{n}{2}$）（此处考虑到离散傅里叶变换的形式，即前一半与后一半互为复共轭），递归调用的深度为$O(log_2(n))$，因此时间复杂度为$O(\frac{nlog_2(n)}{2})=O(nlog_2(n))$。
而这也是理论上最小的时间复杂度。同时不难发现该算法的空间复杂度也是$O(nlog_2(n))$
我的程序用时多于标准库函数的原因分析如下：

1. 我的程序中使用了for循环，时间上有较大的开销，即使我使用了list-generator语法，但是for循环的开销还是较大的。
2. python内置list比较慢
3. 我的程序是递归算法，多次递归进入函数也产生了一定的时间开销。

因此，我运用“蝴蝶运算”，改变了数组顺序，时间复杂度仍为$O(nlog_2(n))$，但是空间复杂度降为$O(1)$。相关代码记为 `my_iterative_fft` ，测试样例及结果如下：



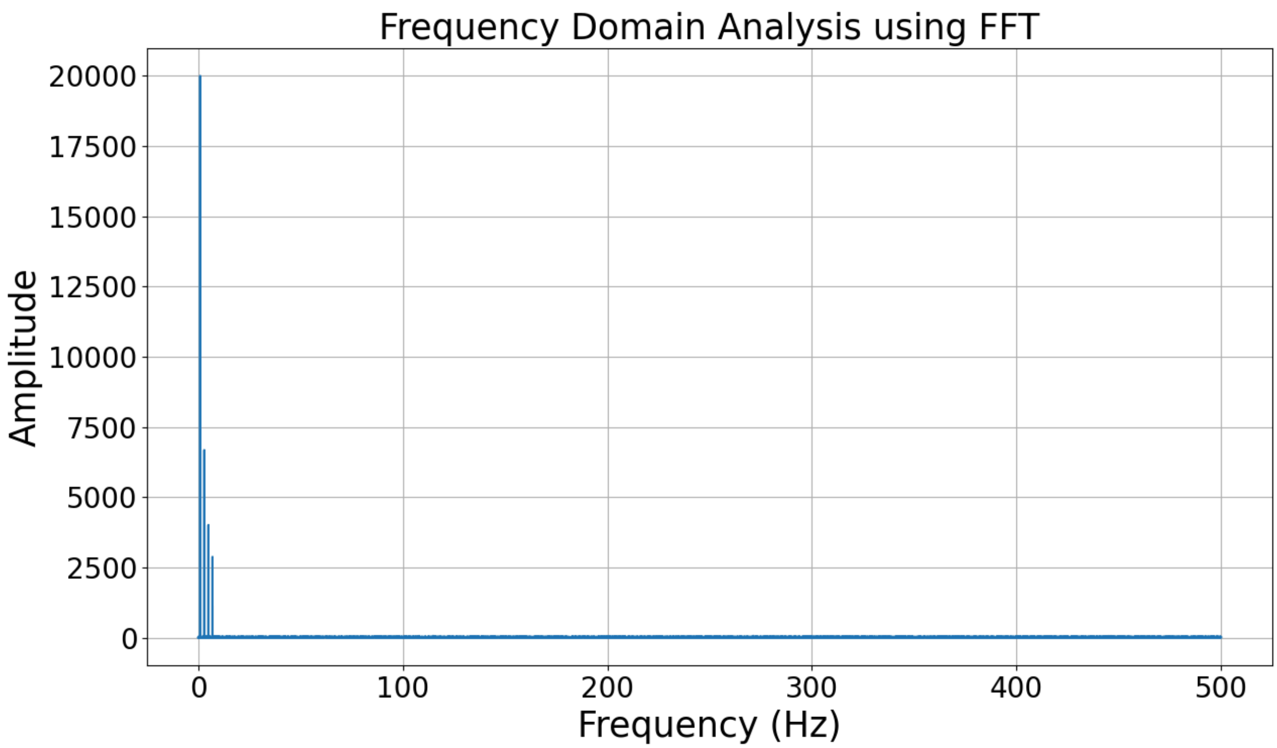
由图中可以看出，

1. 无论是我编写的 `my_fft` 还是 `my_iterative_fft` ，以及标准库函数 `np_fft` ,时间复杂度均为$O(nlog_2(n))$，与之前的理论分析吻合。

2. `my_fft` 和 `my_iterative_fft` 在算例较小的时候用时接近，在算例增加的时候， `my_fft` 用时略长于 `my_iterative_fft` ，原因为 `my_iterative_fft` 不必多次递归带入函数，减小了这部分的时间开销，在算例较大的时候有一定的时间优势。

3.分析信号

采集 `waveform.dat` 文件，将其中的数据调用库函数进行快速傅里叶变换，得到频谱如下：



由上图可以看出，该波形的频率有如下的特点：

1. 主频能量集中，大部分信号能量几种在低频区域（靠近0Hz）的位置，共有4个尖峰，说明由4个主频组成。
2. 高频区域信号较弱,大约从几十Hz到500 Hz频段的信号幅度极低接近于零，意味着信号中较高频率的成分非常小，几乎不存在，可能是存在一个频率跨度很大的噪声。

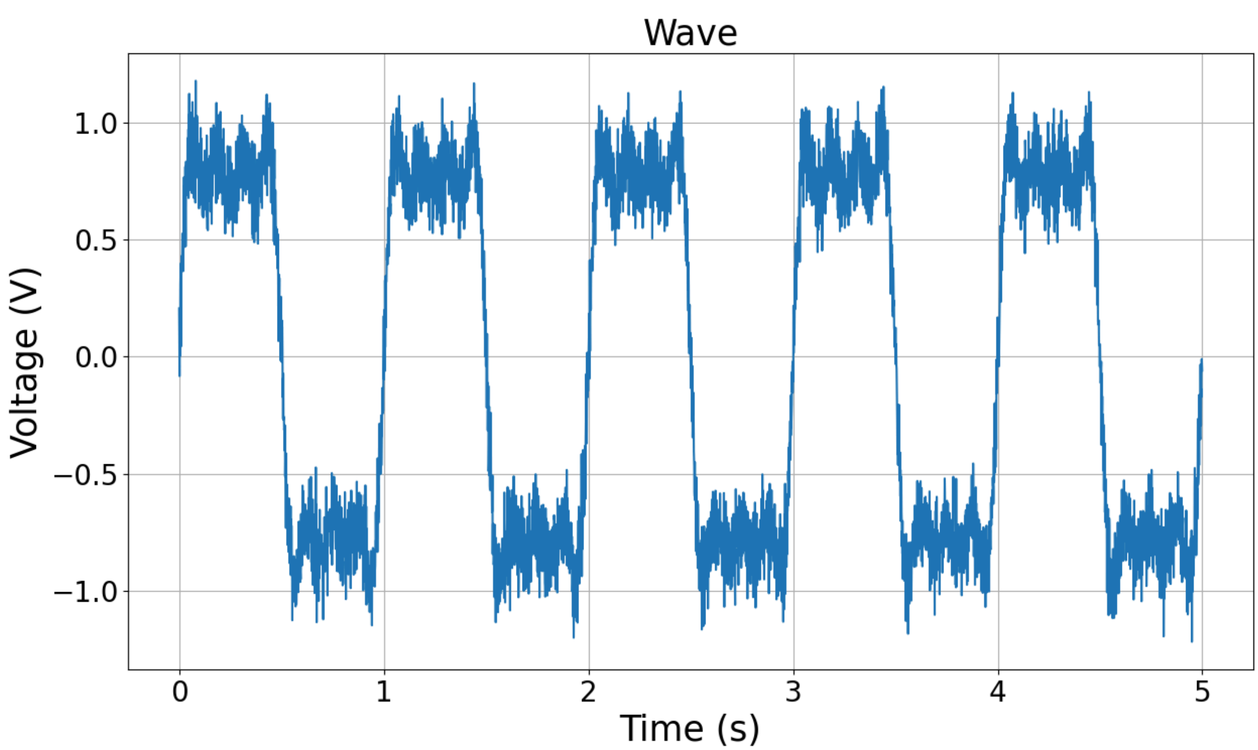
进一步地，探究四个峰值的强度大小和频率关系：

```
[Running] python -u "e:\大二下\computational physics\homework\hw_2\code\A_wave.py"
the first 4 frequencies:
[0.    0.025 0.05  0.075]

amplitude of the largest 4 frequencies:
[19999.85039093  6679.19391904  4012.50260621  2878.48447624]

[Done] exited with code=0 in 2.81 seconds
```

如上图所示，可以看出四个峰值的频率之比恰好为：$1:2:3:4$,强度之比恰好是$1:\frac{1}{3}:\frac{1}{5}:\frac{1}{7}$，联系方波的分解，我们可以得出wave大致是方波。
为了验证，画出前5000个点的波形图：



由图中可以看出，wave数据确实大致是一个方波。

B. 牛顿迭代法

1.给出方程的根

对于方程

$$f(z)=z^3-1, z\in\mathbb{C}$$

方程的根有：

$$z_1=1, z_2=e^{i\frac{2\pi}{3}}, z_3=e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

2.给出z_n的递推公式

使用牛顿法：

$$z_{n+1}=z_n-\frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$$

此处：

$$f(z_n)=z_n^3-1$$

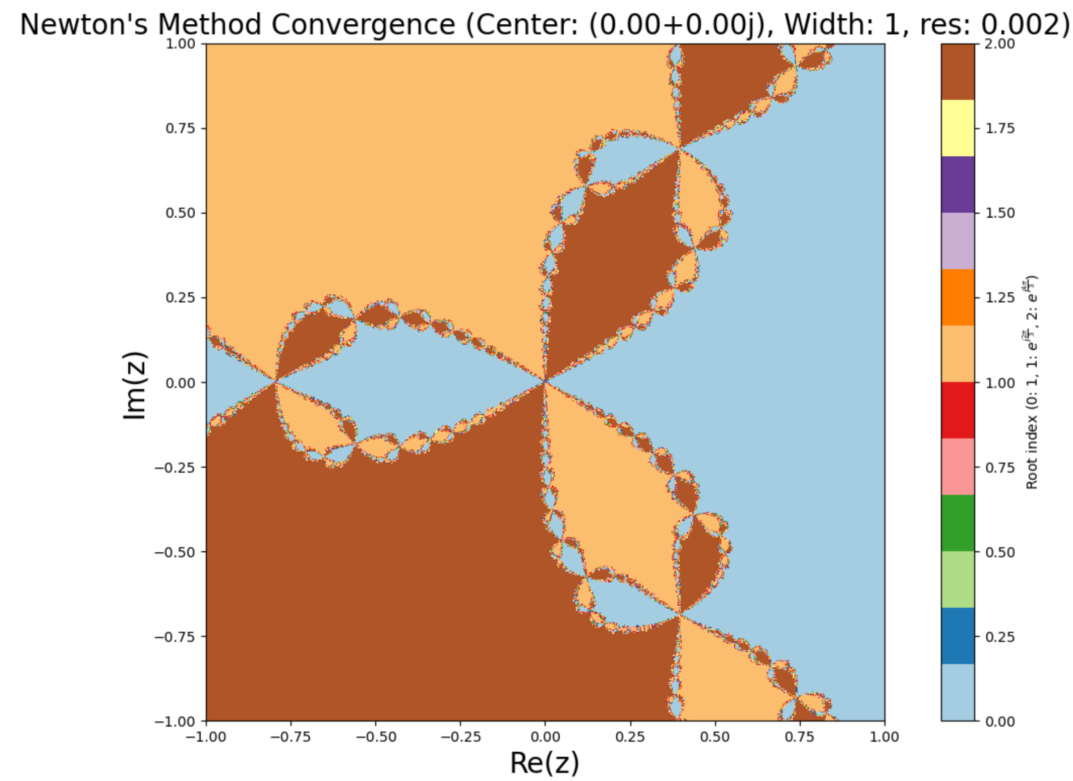
$$f'(z_n)=3z_n^2$$

所以得到递推公式如下：

$$z_{n+1}=z_n-\frac{z_n^3-1}{3z_n^2}=\frac{2z_n^3+1}{3z_n^2}$$

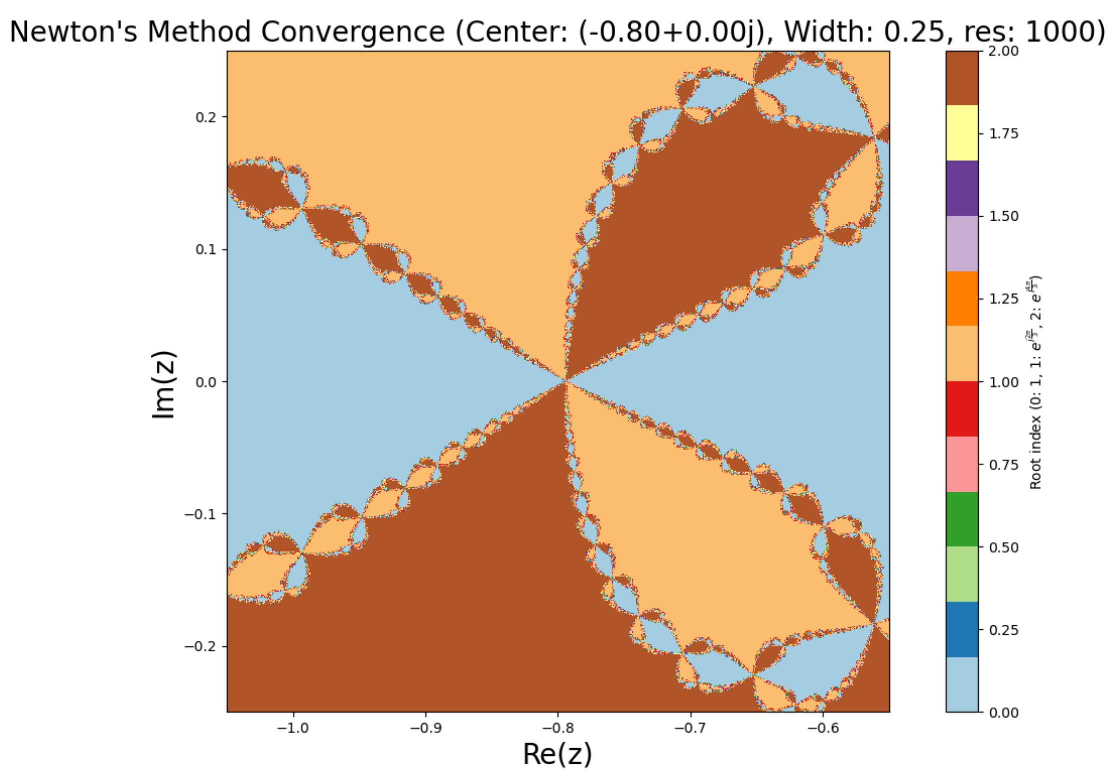
3. 在1为半宽的正方形上收敛到的根的情况

. 记 $z=x+iy$ 。在 x,y 平面上，以 $(x,y)=(0,0)$ 为中心， 1 为半宽的正方形区域内，取分辨率 0.002 ，探究平面上的不同点分别收敛到哪个根上，得到结果如下：

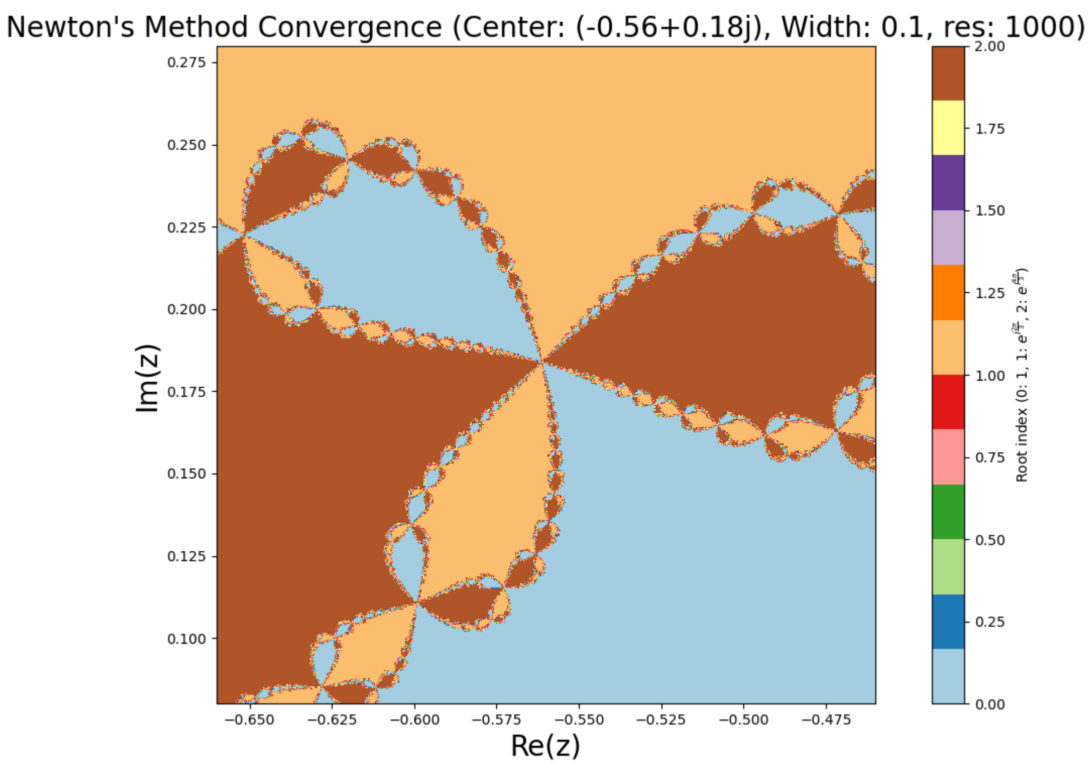


4.放缩

(a) 以 $(-0.8, 0.0)$ 为中心， 0.25 为半宽，分辨率 0.0005。



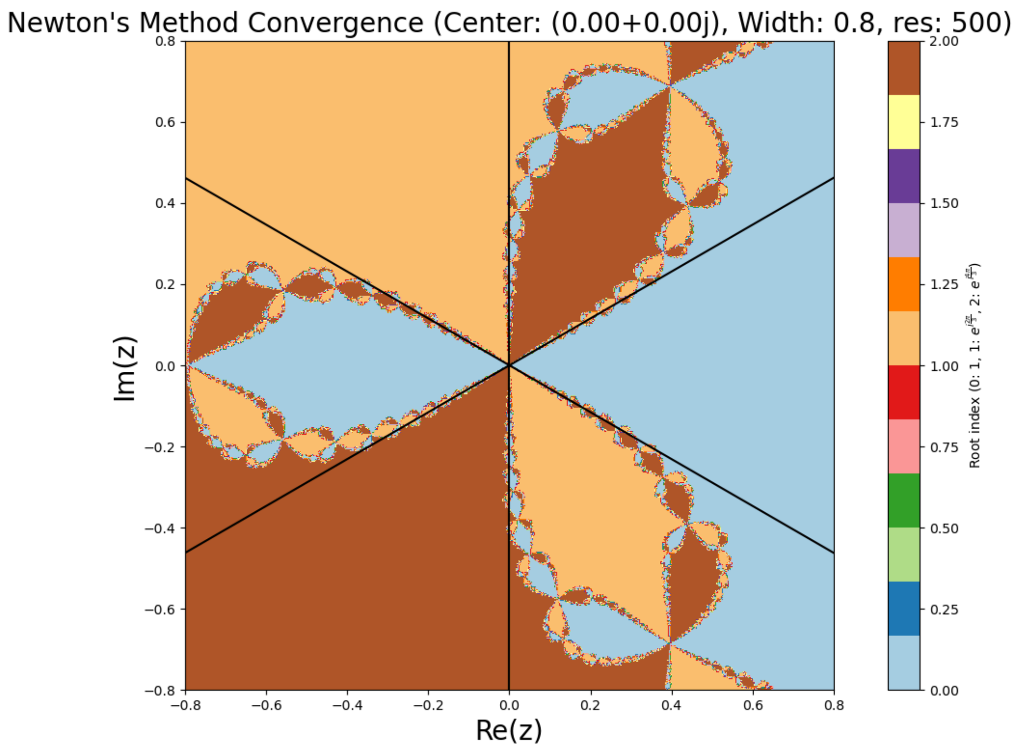
(b) 以 $(-0.56, 0.18)$ 为中心， 0.1 为半宽，分辨率 0.0002。



发现:

由以上三张可视化结果可以发现:

1. 三个单位根周边的初始点会收敛到该单位根上，但是辐角为 $\frac{\pi}{3}$ 的根会收敛到 $e^{\frac{4\pi}{3}}$ 上，辐角为 π 的根会收敛到 1 上,辐角为 $\frac{5\pi}{3}$ 的根会收敛到 $e^{\frac{2\pi}{3}}$ 上，即辐角为 $\frac{\pi}{3}$,π,$\frac{5\pi}{3}$ 的初始点倾向于收敛到“对角”的解上。
2. 随着图像的放大，图像呈现出“分形”的特点，也就是存在“自相似”性。
3. 放大后分形的角度是会转动的，角度是否转动取决于中心所在分形的指向，比如 $(-0.8, 0.0)$ 为中心图所在分形指向是水平的，所以放大后分形角度没有转到；而 $(-0.56, 0.18)$ 为中心的图在辐角为 $\frac{\pi}{3}$ 的根处，所以放大后分形角度会转动。
4. 在加入辅助线后可以看出，颜色由 $y = tan(30^\circ)x$,$x = 0$,$y = -tan(30^\circ)x$， $y = tan(30^\circ)x$, $x = 0$,$y = -tan(30^\circ)x$ 六条线分割



附录

代码可见：https://github.com/jtzhao29/computational_physics_hw2.git

A_dft.py

```
import numpy as np
import pandas as pd


def my_dft_norm(x_array)->np.ndarray:
    """
    自己编写一个DFT程序，要求接受元素类型为
    complex128(python)/ComplexF64(julia)
    的一维数组，返回其离散傅里叶变换
    """
    N = len(x_array)
    n = np.arange(N)
    k = n.reshape((N,1))
    M = np.exp(-2j * np.pi * k * n / N)/N**0.5  #np.exp(np.array) 会对数组中的每个元素应用指数函数
    return np.dot(M,x_array)

def my_dft(x_array)->np.ndarray:
    """
    自己编写一个DFT程序，要求接受元素类型为
    complex128(python)/ComplexF64(julia)
    的一维数组，返回其离散傅里叶变换
    """
    N = len(x_array)
    n = np.arange(N)
    k = n.reshape((N,1))
    M = np.exp(-2j * np.pi * k * n / N) #np.exp(np.array) 会对数组中的每个元素应用指数函数 exp
    return np.dot(M,x_array)


if __name__ == '__main__':
    # 测试样例:随机数组
    np.random.seed(0)  # 设置seed可以保证输出结果相同
    x = np.random.rand(8) + 1j * np.random.rand(8)
    x = x.astype(np.complex128)
    # Dataframe.astype(dtype, copy:defalt True, errors='raise')Cast a pandas object to a specif

    my_dft_result = my_dft(x)
    FFTW_result = np.fft.fft(x,norm='ortho')

    print("\nTesting data",x)
```

```
print("\nMy DFT result",my_dft_result)
print("\nNumpy FFT result",FFTW_result)

print("\nMy DFT result - Numpy FFT result",my_dft_result-FFTW_result)
```

A_Base2_FFT.py

```python
import numpy as np
from A_dft import my_dft
import cmath
from timeit import timeit
import matplotlib.pyplot as plt
def is_power_of_two(n)->bool:
    """
    判断一个数是否是2的幂
    """
    return n > 0 and (n & (n - 1)) == 0
    #如果是2的幂次，则则其二进制表示中只有一个比特位为 1

def fft(x):
    """
    快速傅里叶变换,自己写的，递归算法
    """
    n = len(x)
    if n==1:
        return x

    even = fft(x[0::2])
    odd = fft(x[1::2])
    T = [cmath.exp(-2j * cmath.pi * k / n) * odd[k] for k in range(n // 2)]
    # 利用离散傅里叶变换的性质:傅里叶变换的结果中前一半和后一半互为共轭
    return [even[k] + T[k] for k in range(n // 2)] + \
           [even[k] - T[k] for k in range(n // 2)]

def iterative_fft(x):
    """
    快速傅里叶变换,自己写的，非递归算法，蝴蝶运算的那个
    """
    n = len(x)
    log_n = int(np.log2(n))

    W = [cmath.exp(-2j * cmath.pi / (1 << i)) for i in range(log_n + 1)]

    result = np.array(x)
    indices = np.arange(n)
    indices = np.bitwise_or.reduce([((indices >> i) & 1) << (log_n-1-i) for i in range(log_n)],
    result = result[indices]
```

```python
    half_size = 1
    for level in range(log_n):
        step = half_size * 2
        for start in range(0, n, step):
            factor = 1
            for i in range(half_size):
                even = result[start + i]
                odd = factor * result[start + half_size + i]
                result[start + i] = even + odd
                result[start + half_size + i] = even - odd
                factor *= W[level + 1]
        half_size = step

    return result


if __name__ == '__main__':
    # # 测试样例:随机数组
    # np.random.seed(0)  # 设置seed可以保证输出结果相同
    # x = np.random.rand(8) + 1j * np.random.rand(8)
    # x = x.astype(np.complex128)

    # my_fft_y = fft(x)
    # my_dft_y = my_dft(x)
    # FFT_y = np.fft.fft(x)
    # print("\nTesting data",x)
    # print("\nMy FFT result",my_fft_y)
    # # print("\nMy DFT result",my_dft_y)
    # print("\nFFTW result",FFT_y)

    # 给出数组大小从2**4到2**12的测试样例
    size = [2**i for i in range(4,13)]
    my_fft = []
    my_iterative_fft = []
    np_fft = []
    for i in size:
        if  is_power_of_two(i):
            x = np.random.rand(i) + 1j * np.random.rand(i)
            x = x.astype(np.complex128)
            exec_time_my_fft = timeit(lambda: fft(x),number=1000)
            exec_time_fft = timeit(lambda: np.fft.fft(x),number=1000)
            exec_time_iterative_fft = timeit(lambda: iterative_fft(x),number=1000)
```

```python
        my_fft.append(exec_time_my_fft/1000)
        my_iterative_fft.append(exec_time_iterative_fft/1000)
        np_fft.append(exec_time_fft/1000)

        print(f"my fft for size{i},exection time:{exec_time_my_fft}")
        # print(f"my iterative_fft for size{i},exection time:{exec_time_iterative_fft}")
        print(f"np.fft for size{i},exection time:{exec_time_fft}")

nlogn = [i*np.log2(i) for i in size]

plt.plot(size,my_fft,label="my_fft")
plt.plot(size,my_iterative_fft,label="my_iterative_fft")
plt.plot(size,np_fft,label="np_fft")
plt.plot(size,nlogn,label="nlogn")
plt.xscale('log')
plt.yscale('log')
plt.legend()
plt.xlabel('size',fontsize=25)
plt.ylabel('time',fontsize=25)
plt.title('FFT execution time',fontsize=25)
plt.xticks(fontsize=20)
plt.yticks(fontsize=20)
plt.show()
```

A_wave.py

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

data = np.loadtxt("./data/waveform.dat")
time = data[:,0]
voltage = data[:,1]

sampling_rate = 1 / (time[1] - time[0])
n = len(voltage)
freq = np.fft.fftfreq(n, d=1/sampling_rate)
fft_values = np.fft.fft(voltage)

plt.figure(figsize=(12, 6))



plt.plot(freq[:n//2], np.abs(fft_values)[:n//2])
plt.title('Frequency Domain Analysis using FFT',fontsize=25)
plt.xlabel('Frequency (Hz)',fontsize=25)
plt.ylabel('Amplitude',fontsize = 25)
plt.xticks(fontsize=20)
plt.yticks(fontsize=20)
plt.grid()
plt.show()

print("the first 4 frequencies:")
print(freq[:4])

def find_the_largest4(Amplitude:np.ndarray)->np.ndarray:
    """\n"""
    Amplitude = np.abs(Amplitude)
    Amplitude = Amplitude[:n//2]
    Amplitude = Amplitude[np.argsort(Amplitude)[::-1]]
    return Amplitude[:4]

print("\namplitude of the largest 4 frequencies:")
print(find_the_largest4(fft_values))

plt.plot(time[:5000], voltage[:5000])
plt.title('Wave',fontsize=25)
plt.xlabel('Time (s)',fontsize=25)
```

```
plt.ylabel('Voltage (V)',fontsize = 25)
plt.xticks(fontsize=20)
plt.yticks(fontsize=20)
plt.grid()
plt.show()
```

B.py

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(z):
    """
    方程 f(z) = z^3 - 1
    """
    return z**3 - 1

def f_prime(z):
    """
    方程 f'(z) = 3z^2
    """
    return 3 * z**2

def newton_method(z0, max_iter=100, tol=1e-6):
    """
    牛顿迭代法
    z0: 初始猜测值
    max_iter: 最大迭代次数
    tol: 收敛容忍度
    """
    z = z0
    for _ in range(max_iter):
        dz = f(z) / f_prime(z)
        z = z - dz
        if abs(dz) < tol:
            break
    return z

def get_convergence_region(center, width, resolution, bias=1e-5):
    """
    获取在复平面上牛顿法的收敛区域
    center: 中心点 (复数)
    width: 半宽度，表示正方形区域的范围
    resolution: 网格的分辨率
    bias: 收敛的容忍度
    """
    x_min, x_max = center.real - width, center.real + width
    y_min, y_max = center.imag - width, center.imag + width
```

```
    x_vals = np.linspace(x_min, x_max, resolution)
    y_vals = np.linspace(y_min, y_max, resolution)

    # 创建网格
    X, Y = np.meshgrid(x_vals, y_vals)
    Z = X + 1j * Y

    # 根的集合
    roots = [1, np.exp(2j * np.pi / 3), np.exp(4j * np.pi / 3)]  # 3个根

    # 收敛区域
    region = np.zeros(Z.shape, dtype=int)

    # 对每个点应用牛顿法
    for i in range(Z.shape[0]):
        for j in range(Z.shape[1]):
            z = Z[i, j]
            # 对每个初始点进行牛顿迭代
            z_final = newton_method(z, max_iter=50, tol=bias)
            # 找到收敛的根
            distances = [abs(z_final - root) for root in roots]
            region[i, j] = np.argmin(distances)  # 收敛到哪个根

    return region, X, Y

def plot_convergence(center, width, resolution, bias=1e-5):
    """
    可视化牛顿法收敛区域
    """
    region, X, Y = get_convergence_region(center, width, resolution, bias)
    x1 = np.linspace(center,center+width,1000)
    y1 = x1*(3**0.5)/3
    x0 = np.linspace(center,center,1000)
    x2 = np.linspace(center-width,center,1000)
    y0 = np.linspace(center,center+width,1000)
    y2 = x2*(3**0.5)/3
    y22 = -x2*(3**0.5)/3

    # 绘制收敛图
    plt.figure(figsize=(8, 6))
    plt.imshow(region, extent=(X.min(), X.max(), Y.min(), Y.max()), origin='lower', cmap='Pairec
    plt.plot(x1,y1,color = 'black')
    plt.plot(x0,y0,color = 'black')
```

```
    plt.plot(x2,y22,color = 'black')
    plt.plot(x2,y2,color = 'black')
    plt.plot(x0,-y0,color = 'black')
    plt.plot(x1,-y1,color = 'black')
    plt.colorbar(label='Root index (0: 1, 1: $e^{i\\frac{2\\pi}{3}}$, 2: $e^{i\\frac{4\\pi}{3}}$
    center_str = f"({center.real:.2f}{center.imag:+.2f}j)"

    plt.title(f"Newton's Method Convergence (Center: {center_str}, Width: {width}, res: {resolut

    plt.xlabel('Re(z)',fontsize=20)
    plt.ylabel('Im(z)',fontsize=20)
    plt.show()


# 测试可视化
plot_convergence(center=0.0+0.0j, width=0.8, resolution=500, bias=1e-5)

# plot_convergence(center=-0.8+0j,width=0.25,resolution=1000)
# plot_convergence(center=-0.56+0.18j,width=0.1,resolution=1000)
```