Übungsblatt 0 - Lösung

Aufgabe 0.1

Löse das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 8 \\ 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 8 \\ 5x_2 - 4x_3 + 3x_4 &= -17 \\ -2x_1 + 14x_2 + x_3 + 8x_4 &= -20 \end{aligned}$$

mit dem Gauss'schen Eliminationsverfahren.

Lösung

Die Schritte des Gauss'schen Eliminationsverfahrens sind

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & -2 & 8 \\ 4 & 7 & 3 & -2 & 8 \\ 0 & 5 & -4 & 3 & -17 \\ -2 & 14 & 1 & 8 & -20 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II}-2\cdot\text{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & -2 & 8 \\ 0 & 5 & -1 & 2 & -8 \\ 0 & 5 & -4 & 3 & -17 \\ -2 & 14 & 1 & 8 & -20 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{IV}-1\cdot\text{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & -2 & 8 \\ 0 & 5 & -1 & 2 & -8 \\ 0 & 5 & -4 & 3 & -17 \\ 0 & 15 & 3 & 6 & -12 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III}-1\cdot\text{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & -2 & 8 \\ 0 & 5 & -1 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -9 \\ 0 & 15 & 3 & 6 & -12 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{IV}-3\cdot\text{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & -2 & 8 \\ 0 & 5 & -1 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{IV}+2\cdot\text{III}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & -2 & 8 \\ 0 & 5 & -1 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \end{array}\right).$$

Die Pivotelemente eines jeden Schritts wurden farblich gekennzeichnet.

Daraus folgt die Lösung mittels Rückwärtssubstitution:

- $2x_4 = -6 \Rightarrow x_4 = -3$,
- $-3x_3 + x_4 = -9 \Rightarrow x_3 = 2$,
- $5x_2 - x_3 + 2x_4 = -8 \Rightarrow x_2 = 0$,
- $2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 8 \Rightarrow x_1 = -1$.

Aufgabe 0.2

Beweise die Formel für die Inverse einer 2×2-Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

mittels Gauss-Jordan-Elimination.

Lösung

Schritt 1 der Gauss-Jordan-Elimination ist

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{II}-(c/a)\cdot\text{I}} \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & d-bc/a & -c/a & 1 \end{array} \right).$$

Um die Terme in Gleichung II einfacher zu machen, multiplizieren wir sie mit a und erhalten

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & ad-bc & -c & a \end{array} \right).$$

Im nächsten Schritt kürzen wir ab mit $y = ad - bc$, teilen Gleichung II durch y und erhalten

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -c/y & a/y \end{array} \right).$$

Nun eliminieren wir b in Gleichung I und erhalten

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -c/y & a/y \end{array} \right) \xrightarrow{\text{I}-b\cdot\text{II}} \left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & 1+bc/y & -ab/y \\ 0 & 1 & -c/y & a/y \end{array} \right).$$

Um auf der linken Seite die Einheitsmatrix zu erhalten, teilen wir Gleichung I durch a und erhalten

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & (y+bc)/(ay) & -b/y \\ 0 & 1 & -c/y & a/y \end{array} \right).$$

Da

$$y = ad - bc \Leftrightarrow d = \frac{y+bc}{a},$$

erhalten wir schließlich

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & d/y & -b/y \\ 0 & 1 & -c/y & a/y \end{array} \right)$$

und somit

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d/y & -b/y \\ -c/y & a/y \end{pmatrix} = \frac{1}{y} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 0.3

Ziel dieser Aufgabe ist es, den Satz von Taylor anhand eines Beispiels numerisch nachzuweisen.

Satz von Taylor (Basisversion)**:** Es sei $k \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ k-mal differenzierbar ist. Dann gilt

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j + \underbrace{o(|x - x_0|^k)}_{R_k f(x;x_0)},$$

wobei $R_k f(x; x_0)$ das k-te Restglied der Taylor-Approximation bezeichnet.

Wir werden die o-Notation bald einführen. Zum jetzigen Zeitpunkt reicht es zu wissen, dass $o(|x-x_0|^k)$ einen Term repräsentiert, der für $x \to x_0$ *schneller* als $|x-x_0|^k$ gegen 0 konvergiert.

Für den numerischen Nachweis sei nun $f = \sin$, deren Taylor-Approximation für die Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ nach $j = 2$ abgebrochen werden soll, d.h. wir interessieren uns für das Konvergenzverhalten von $R_2 f(x; x_0)$ für $x \to x_0$.

(a) Starte das Code-Beispiel mit Variablendefinitionen für f, deren Taylor-Approximation und x_0.

(b) Generiere eine Liste von Werten für x, die gegen x_0 „konvergieren", d.h. sich x_0 annähern. Berechne anschließend die Werte für den Approximationsfehler, d.h. den Absolutbetrag des zugehörigen Restglieds $R_2 f(x; x_0)$.

(c) Weise mit einem logarithmischen Plot nach, dass $|R_2 f(x; x_0)| = o(|x - x_0|^2)$.

Lösung

(a)

```
f <- sin
t <- \(x) sin(x0) + cos(x0) * x - 0.5 * sin(x0) * x^2
x0 <- 0.
```

(b)

```
xs <- 10^seq(-8, 0, 0.1)
errs <- abs(f(xs) - t(xs))
```

(c)

```
plot(abs(xs - x0), errs,
    log = "xy", type = "l",
    xlab = expression(paste("|", x - x[0], "|")),
    ylab = "Approximationsfehler"
) # The warning comes from exact approximations with zero error.
```

```
Warning in xy.coords(x, y, xlabel, ylabel, log): 4 y values <= 0 omitted from
logarithmic plot
```

```
lines(abs(xs - x0), abs(xs - x0)^2, lty = "dashed")
legend("bottomright",
    legend = c(
        expression(paste("|", R[2] * f(paste(x, ";", x[0])), "|")),
        expression(paste("|", x - x[0], "|"^2))
    ),
    lty = c("solid", "dashed")
)
```