Übungsblatt 3

Aufgabe 3.1

Seien A, B Matrizen mit passenden Dimensionen. Berechne relative Konditionszahlen für die folgenden Probleme:

a. $f(A) = A + B$,

b. $f(A) = AB$,

c. $f(A) = A^{-1}B$.

Für welche A, B sind die Probleme schlecht konditioniert?

Aufgabe 3.2

Sei A eine Matrix und $E = \{\widetilde{A} \colon \|\widetilde{A} - A\| \leq \delta\|A\|\}$ die Menge der bezüglich der Toleranz δ nicht zu unterscheidenden Inputs. Wir nennen dann A *numerisch singulär* bezüglich δ, wenn $\kappa(A)\delta \geq 1$. Sei nun $\varepsilon > 0$ eine Zahl mit $\varepsilon \leq \delta$.

a. Zeige, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

numerisch singulär ist.

b. Finde eine Zahl ε, sodass A gegenüber der Maschinengenauigkeit singulär ist. Überprüfe, was in `R` passiert, wenn wir $A\boldsymbol{x} = \mathbf{1}$ durch `solve(A, b)` lösen wollen.

c. Sei nun $\boldsymbol{b} = (2, \varepsilon)$. Was passiert, wenn wir das Problem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ durch `solve(A, b)` lösen wollen? Können wir A und $\boldsymbol{b}$ so manipulieren, dass `R` die richtige Lösung ausspuckt?

Aufgabe 3.3

Seien $M \in \mathbb{R}^{500\times 500}$ und $B \in \mathbb{R}^{500\times k}$ Matrizen mit unabhängigen, normalverteilten Einträgen. Dann ist $A = MM^\top$ (fast sicher) eine SPD-Matrix.

```
set.seed(5)
M <- matrix(rnorm(500 * 500), 500, 500)
A <- M %*% t(M)
B <- rnorm(500)
```

```
c(
    all(A == t(A)), # A ist symmetrisch
    min(eigen(A)$values) > 0 # A ist positiv definit
)
```

```
[1] TRUE TRUE
```

a. Schreibe eine Funktion `spd_solve(A, B)`, welche die Cholesky-Faktorisierung von A verwendet um $A^{-1}B$ zu berechnen. Die Funktionen `chol()`, `forwardsolve()` und `backsolve()` sollten dabei nützlich sein.

b. Vergleiche die Laufzeit von `solve(A, B)` und `spd_solve(A, B)` für $k = 1$.

c. Wie skalieren die Laufzeiten für $k = 1, 10, 100$? Wie lässt sich das Beobachtete erklären?