Übungsblatt 0

Aufgabe 0.1

Löse das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 8 \\ 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 8 \\ 5x_2 - 4x_3 + 3x_4 &= -17 \\ -2x_1 + 14x_2 + x_3 + 8x_4 &= -20 \end{aligned}$$

mit dem Gauss'schen Eliminationsverfahren.

Aufgabe 0.2

Ziel dieser Aufgabe ist es, den Satz von Taylor anhand eines Beispiels numerisch nachzuweisen.

Satz von Taylor (Basisversion)**:** Es sei $k \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ k-mal differenzierbar ist. Dann gilt

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j + \underbrace{o(|x - x_0|^k)}_{R_k f(x;x_0)},$$

wobei $R_k f(x; x_0)$ das k-te Restglied der Taylor-Approximation bezeichnet.

Wir werden die o-Notation bald einführen. Zum jetzigen Zeitpunkt reicht es zu wissen, dass $o(|x-x_0|^k)$ einen Term repräsentiert, der für $x \to x_0$ *schneller* als $|x-x_0|^k$ gegen 0 konvergiert.

Für den numerischen Nachweis sei nun $f = \sin$, deren Taylor-Approximation für die Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ nach $j = 2$ abgebrochen werden soll, d.h. wir interessieren uns für das Konvergenzverhalten von $R_2 f(x; x_0)$ für $x \to x_0$.

(a) Starte das Code-Beispiel mit Variablendefinitionen für f, deren Taylor-Approximation und x_0.

(b) Generiere eine Liste von Werten für x, die gegen x_0 „konvergieren", d.h. sich x_0 annähern. Berechne anschließend die Werte für den Approximationsfehler, d.h. den Absolutbetrag des zugehörigen Restglieds $R_2 f(x; x_0)$.

(c) Weise mit einem logarithmischen Plot nach, dass $|R_2 f(x; x_0)| = o(|x - x_0|^2)$.