Programación Lineal

Toma de decisiones

En la *Historia*, escrito en el año 450 A.C., Herodoto dice lo siguiente:

"Si se debe tomar una decisión importante [los persas] discuten la cuestión cuando están ebrios y al día siguiente el jefe de la casa presenta la decisión para su reconsideración cuando están sobrios. Si aún así la aprueban, se adopta; si no, se abandona. A la inversa, toda decisión tomada en estado de sobriedad, se reconsidera posteriormente cuando están ebrios."

La optimización basada en programación lineal corresponde a situaciones reales en las que se pretende identificar y resolver dificultades para aumentar la productividad respecto a los recursos (principalmente los limitados y costosos), aumentando así los beneficios.

Origen

- II GM. Un grupo de investigadores militares, encabezados por A.P. Rowe, estudian el uso militar de un, por entonces, nuevo sistema de detección denominado radar (RAdio Detection And Ranging). **Generalmente se acepta que la investigación de este grupo constituye el inicio de la Investigación Operativa.**
- …
- En 1945, G.J. Stigler planteó el problema de la dieta, ante la preocupación del ejército americano por asegurar los requisitos nutricionales básicos de la tropa al menor coste posible. El problema fue resuelto manualmente mediante un método heurístico, con una solución sólo unos céntimos peor que la solución exacta que aportaría más tarde el método del símplex.

Pronósticos.

- Otra de las partes importantes del análisis del entorno que utilizan los gerentes es la realización de pronósticos, estos análisis se utilizan para anticiparse a los acontecimientos y poder predecir qué es lo que va a ocurrir. Una clasificación de los entornos según Robbins y Coulter

Clasificación de los entornos

Cuantitativas

- Análisis de series temporales.
- Modelos de Regresión.
- Modelos ecnométricos.
- Indicadores económicos.
- ...

Caulitativas

- Jurado de opinión
- Evaluación de clientes.
- Composición de fuerzas de venta.
- ....

Asignación de Recursos. Programación Lineal.

Los recursos con los que cuenta cualquier empresa son: Activos financieros, Equipos físicos y humanos, Intangibles, … Aunque los gerentes cuentan con varias técnicas para asignar estos recursos dentro de su organización, vamos a centrar este punto en un método cuantitativo como es la Programación Lineal, PL.

El análisis con **Programación Lineal** es un método de optimización, que utilizan los gerentes para mejorar la asignación de recursos, Aplicaciones de la Programación Lineal

- Asignación de tareas.
- Asignación de recursos.
- Producción.
- Transporte.
- Finanzas.
- Mezclas.
- Marketing.
- Sistemas de distribución.
- …

Técnicas de resolución de modelos con PL.

Formular el problema del que se quiere tomar una decisión y el Criterio de Decisión.

Definir las variables de Decisión.

Definir la Función Objetivo y expresarla en una ecuación

Identificar restricciones y establecer las ecuaciones.

Exponer el modelo de PL para su resolución.

Caso de Estudio, tomado como referencia de (Bierman, Bonini, & Hausman, 1998), Análisis cuantitativo para la toma de decisiones,

Una empresa fabrica cuatro productos: A, B, C y D. Con las siguientes condiciones:

- Cada unidad del producto A requiere una hora de fresado, dos horas de montaje y 10 euros de inventario en proceso.
- Cada unidad del producto B necesita una hora de fresado, tres horas de montaje y un costo de cinco euros de proceso de inventariado.
- Una unidad del producto C requiere 2 horas de fresado, 2 horas de montaje y dos euros de proceso de inventariado.
- Cada unidad del producto D requiere cinco horas de fresado, no necesita montaje y cuesta 12 euros de proceso de inventariado.
- La empresa tiene 120 horas de fresado y 160 horas de montaje disponibles.

Además, no puede disponer de más de mil euros para proceso de inventario.

Cada unidad del producto A genera un beneficio de 40 euros; una unidad del producto B genera un beneficio de 24 euros; las unidades del producto C generan 36 euros y las del producto D, 23 euros.

- No se pueden vender más de 20 unidades del producto A,
- Ni más de 16 unidades del producto C;
- Puede venderse cualquier número de unidades de los productos B y D.
- Sin embargo, hay que producir y vender por lo menos 10 unidades del producto D para satisfacer un requisito contractual.

Modelar el problema en ecuaciones, obtener un valor óptimo y tomar las decisiones en consecuencia.

FO: $40€ * x_1 + 24€ * x_2 + 36€ * x_3 + 23€ * x_4$

- Con el siguiente conjunto de restricciones.
- Horas de Montaje: $2*x_1 + 3*x_2 + 2 *x_3 + 0*x_4 \leq 160$ horas
- Unidades de A: $1*x_1 + 0*x_2 + 0 *x_3 + 0*x_4 \leq 20$ unidades
- Unidades de C: $0*x_1 + 0*x_2 + 1 *x_3 + 0*x_4 \leq 16$ unidades
- Unidades de D: $0*x_1 + 0*x_2 + 0 *x_3 + 1*x_4 \geq 10$ unidades
- Unidades de B: $0*x_1 + 1*x_2 + 0 *x_3 + 0*x_4 \geq 0$ unidades
- Además, las unidades de A, C y D tienes que ser positivas: $x_1, x_3, x_4 > 0$.

	Producto A	Producto B	Producto C	Producto D			
Variables	**20**	**35**	**7,5**	**10**			
Costes	40,00 €	24,00 €	36,00 €	23,00 €	**2.140,00 €**		
Horas Fresado	1	1	2	5	**120**	≤	120
Horas Montaje	2	3	2	0	**160**	≤	160
Coste $ Inventario	10,00 €	5,00 €	2,00 €	12,00 €	**510,00 €**	≤	1.000,00 €
Unidades A	1				**20**	≤	20
Unidades C			1		**8**	≤	16
Unidades D				1	**10**	≥	10
Unidades B							

- Un problema de PL consta de una función objetivo (lineal) por maximizar o minimizar, sujeta a ciertas restricciones en la forma de igualdades o desigualdades

Función Objetivo: La función por optimizar (maximizar o minimizar)

Restricciones: Representan condiciones que es preciso satisfacer.

Sistema de igualdades y desigualdades (<= ó >=)

Conjunto factible: Es el conjunto de puntos que integran la región de resolución.

Solución factible: Cada punto que integra la región (plana) que resuelve el problema.

Solución óptima: Constituye la solución al problema de programación lineal.

- La programación lineal trata la ***planeación de las actividades*** para obtener un resultado óptimo, esto es, el resultado que mejor alcance la meta especificada (según el modelo matemático) entre todas las alternativas de solución.

- ***<u>Método simplex</u>***: Resuelve problemas de n variables por m restricciones.

- Los términos clave son ***recursos*** *y* ***actividades****,* en donde *m* denota el número de distintos tipos de recursos que se pueden usar y *n* denota el número de actividades bajo consideración.
- *ejemplos de recursos* son dinero y tipos especiales de maquinaria, equipo, vehículos y personal.
- *Los ejemplos de actividades* incluyen inversión en proyectos específicos, publicidad en un medio determinado y el envío de bienes de cierta fuente a cierto destino.

Ejemplo: Optimización en la Producción de Una Fábrica de Chocolates

Imagina que trabajas para una fábrica de chocolates que quiere maximizar sus ganancias. La fábrica produce dos tipos de chocolates: **Chocolate A** y **Chocolate B**. Cada tipo de chocolate requiere dos ingredientes principales: **Cacao** y **Leche**. La fábrica tiene una cantidad limitada de estos ingredientes y también hay limitaciones en las horas de trabajo de la maquinaria.

Aquí está el problema que enfrenta la fábrica:

Chocolate A requiere 2 unidades de cacao y 3 unidades de leche por barra, y genera una ganancia de 5€ por barra.

Chocolate B requiere 3 unidades de cacao y 2 unidades de leche por barra, y genera una ganancia de 4€ por barra.

La fábrica tiene un máximo de 100 unidades de cacao y 90 unidades de leche disponibles.

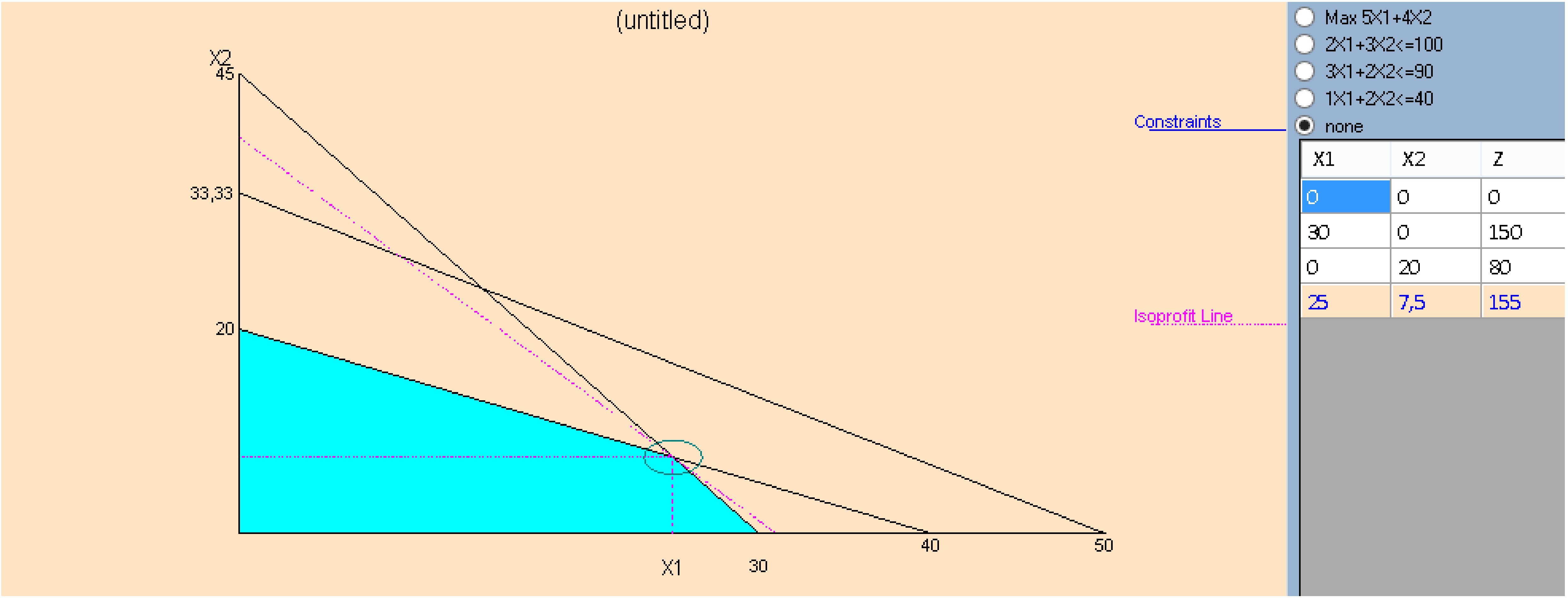
La maquinaria puede producir hasta 40 barras de chocolate en total por día.

Pregunta: ¿Cómo debe la fábrica decidir cuántas barras de cada tipo de chocolate producir para maximizar su ganancia diaria, respetando las limitaciones de ingredientes y tiempo?

Ejemplo: Optimización en la Producción de Una Fábrica de Chocolates

- **Define las Variables:**
  - Introduce las variables de decisión,
    - x= número de barras de Chocolate A
    - y = número de barras de Chocolate B.
- **Plantea las Restricciones:**
  - Presenta las restricciones en forma de ecuaciones:
    - 2x + 3y ≤ 100 (cacao)
    - 3x + 2y ≤ 90 (leche)
    - X + y ≤ 40 (horas de maquinaria)
- **Define la Función Objetivo:**

z: 5x + 4y MAXIMIZAR


(untitled)
X2
45
33,33
20
X1
30
40
50
Constraints
Isoprofit Line
Max 5X1+4X2
2X1+3X2<=100
3X1+2X2<=90
1X1+2X2<=40
none
X1 X2 Z
0 0 0
30 0 150
0 20 80
25 7,5 155

- La modelación se define como el proceso de abstracción del sistema real a un modelo cuantitativo. *Involucra desde la definición del sistema real y la determinación de sus fronteras, incluyendo la conceptualización del sistema asumido*.

- La modelación es sin duda una combinación de arte y ciencia.

- *No se puede precisar una metodología para la construcción de un modelo, por lo que necesariamente la modelación se aprende con la práctica.*

optimizar (maximizar o minimizar)

$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n,$

sujeta a las restricciones:

$$a_{11x1} + a_{12x2} + ... + a_{1nxn} \leq b_1$$

$$a_{21x1} + a_{22x2} + ... + a_{2nxn} \leq b_2$$

.

$$a_{m1x1} + a_{m2x2} + ... + a_{mnxn} \leq b_m$$

donde el valor de las variables es:

$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, \quad ..., \quad X_n \geq 0$

m: recursos

n:las actividades

- Con el objetivo se pretende medir la efectividad de las diferentes soluciones factibles que pueden obtenerse y determinar la mejor solución.
- Deberá definirse claramente las unidades de medición del objetivo, como dinero, tiempo, etc.

Variables de decisión

- Son las incógnitas del problema y básicamente consisten en los niveles de todas actividades que pueden llevarse a cabo en el problema a formular. Estas pueden ser de tantos tipos diferentes como sea necesario.
- ***En la mayoría de los problemas a formular, la definición de las variables es el punto clave***.

Restricciones estructurales

- Son diferentes requisitos que debe cumplir cualquier solución para que pueda llevarse a cabo. En cierta manera son las limitantes en los valores de los niveles de las diferentes actividades (variables). Las restricciones más comunes son:

- ***Restricciones de capacidad.*** Limitan el valor de las variables debido a la disponibilidad de horas-hombre, horas-máquina, espacio, etc.

- ***Restricciones de mercado.*** Surgen de los valores máximos y/o mínimos de la demanda o el uso del producto o actividad a realizar.

Restricciones estructurales

- **Restricciones de entradas**. Son limitantes debido a la escasez de materias primas, mano de obra, dinero, etc.

- **Restricciones de calidad**. Son las restricciones que limitan las mezclas de ingredientes, definiendo usualmente la calidad de los artículos a manufacturar, mezcla de ingredientes, etc

- **Restricciones de balance de materiales**. Estos son las restricciones que definen las salidas de un proceso en función de las entradas, tomando en cuenta generalmente cierto porcentaje de merma o desperdicio**.**

Modelado

1. No debe elaborarse un modelo complicado cuando uno simple es suficiente.
2. El problema no debe ajustarse al modelo o método de solución.
3. La fase deductiva de la modelación debe realizarse rigurosamente.
4. Los modelos deben validarse antes de su implantación.
5. Nunca debe pensarse que el modelo es el sistema real
6. Un modelo debe criticarse por algo para lo que no fue hecho.
7. Un modelo no es perfecto.
8. Uno de los primeros beneficios de la modelación reside en el desarrollo del modelo.
9. Un modelo es tan bueno o tan malo como la información con la que trabaja.
10. Los modelos no pueden reemplazar al tomador de decisiones

$$Z = CX1 + CX2 + CX3$$

Sujeto a

$$\begin{array}{lllllllll}
AX1 & + & AX2 & + & AX3 & + & AXn & \leq & B1 \\
LiX1 & + & LiX2 & + & LiX3 & + & LiXn & \leq & B2 \\
ClX1 & + & ClX2 & + & ClX3 & + & ClXn & \leq & B3 \\
 & & & & & & X1 & \geq & B4 \\
 & & & & & & Xi & \geq & 0
\end{array}$$

Algunas reflexiones

- Hemos pasado de la definición del problema a su formulación matemática.
- Error de especificación, el error más frecuente consiste en descuidar las limitaciones (restricciones, características de las variables, etc,)
- Identificación del problema (debemos ignorar partes o tratar el problema entero).
- Elección del modelo matemático adecuado así como el algoritmo adecuado para resolverlo (validación del algoritmo).
- Dificultades en la implementación.
- Calidad de la solución.
- Consistencia de la solución.

El Problema del Carpintero

- Durante un par de sesiones de brain-storming con un carpintero (nuestro cliente), éste nos comunica que sólo fabrica mesas y sillas y que vende todas las mesas y las sillas que fabrica en un mercado. Sin embargo, no tiene un ingreso estable y desea optimizar esta situación. El objetivo es determinar cuántas mesas y sillas debería fabricar para maximizar sus ingresos netos.
- Comenzamos concentrándonos en un horizonte de tiempo, es decir, un plazo de planificación, , para revisar nuestra solución semanalmente, si fuera necesario. Para saber más acerca de este problema, debemos ir al negocio del carpintero y observar lo que sucede y medir lo que necesitamos para para formular (para crear un modelo de) su problema. Debemos confirmar que su objetivo es maximizar sus ingresos netos. Debemos comunicarnos con el cliente.

El Problema del Carpintero

El problema del carpintero se trata de determinar cuántas mesas y sillas debe fabricar por semana; pero primero se debe establecer una función objetivo

- La función objetivo es: 5X1 + 3X2,
- donde X1 y X2 representan la cantidad de mesas y sillas;
- 5 y 3 representan los ingresos netos (por ejemplo, en dólares o décimas de dólares) de la venta de una mesa y una silla, respectivamente.
- Los factores limitantes, que normalmente *provienen del exterior*, son las limitaciones de la mano de obra (esta limitación proviene de la familia del carpintero) y los recursos de materia prima (esta limitación proviene de la entrega programada).

El Problema del Carpintero

- Se miden los tiempos de producción requeridos para una mesa y una silla en distintos momentos del día y se calculan en 2 horas y 1 hora, respectivamente.
- Las horas laborales totales por semana son sólo 40.
- La materia prima requerida para una mesa y una silla es de 1 y 2 unidades, respectivamente.
- El abastecimiento total de materia prima es de 50 unidades por semana.
- En consecuencia, la formulación de PL es la siguiente:
- Maximizar $5 X1 + 3 X2$
- Sujeta a:
  $2 X1 + X2 \leq 40$ restricción de mano de obra
  $X1 + 2 X2 \leq 50$ restricción de materiales

- tanto X1 como X2 son no negativas.

Problema de la dieta

Un nutricionista recomienda una dieta especial basada en tres productos (pasta, pescado y verduras) que han de combinarse de manera que cumplan una serie de requisitos mínimos en cuanto a proteínas y calorías. Estos mínimos se sitúan entre 56 y 90 gramos de proteínas y entre 1000 y 2.000 de calorías.

Los productos que componen la dieta tienen las siguientes unidades por kilogramo: la pasta contiene 50 gramos de proteína y 1,300 calorías, el pescado tiene 220 gr de proteínas y 3.000 calorías y, por ultimo, las verduras frescas poseen 29 gr de proteínas y 650 calorías.

a) Si los precios de los tres productos básicos son respectivamente de 1,0; 4,0 y 0,9 € el kilogramo, ¿Cuál debe ser la combinación de productos que cubriendo las necesidades mínimas suponga un menor coste?.

b) Si aumenta el precio del pescado, y este pasa a ser de 5€. ¿La solución seguirá siendo optima?. Si la respuesta es negativa, cual será la nueva solución?

c) Si disminuye el precio del pescado, y este pasa a ser de 2€ ¿La solución seguirá siendo optima?. Si la respuesta es negativa, cual será la nueva solución?

d) Si el medico recomienda aumentar el numero de calorías por día, pasando a 4500 calorías diarias. ¿La solución seguirá siendo optima?. Si la respuesta es negativa, cual será la nueva solución?

Problema de la dieta

Z =	1 x	+4 y	+ 0,9 z		

- Minimizar o maximizar
- S.a:

Calorías:	1300 x	+ 3000 y	+ 650 z	¿=?	1000/2000
Proteínas:	50 x	+ 220 y	+ 29 z	¿=?	56 /90

X: pasta

Y: pescado

Z: verdura

		Final	Reducido	Objetivo	Permisible	Permisible
Celda	Nombre	Valor	Coste	Coeficiente	Aumentar	Reducir
$F$8	cantidad diaria x: pasta	0,382352941	0	1	0,733333333	0,090909091
$G$8	cantidad diaria y: pescado	0,167647059	0	4	0,4	1,692307692
$H$8	cantidad diaria z: verdura	0	0,335294118	0,9	1E+30	0,335294118

		Final	Sombra	Restricción	Permisible	Permisible
Celda	Nombre	Valor	Precio	Lado derecho	Aumentar	Reducir
$I$11	mínimo Ptoteínas	56	0,016176471	56	17,33333333	17,53846154
$I$12	calorías	1000	0,000147059	1000	456	236,3636364
$I$9	calorías	1000	0	2000	1E+30	1000
$I$10	Máximo Ptoteínas	56	0	90	1E+30	34

Algoritmo SIMPLEX

- http://www.phpsimplex.com/ayuda.htm
- https://www.mathstools.com/section/main/simplex_online?lang=es#.XeabQq97mUl

EL MÉTODO SIMPLEX

1. **Planteamos el problema,** es decir, escribimos la función objetivo y las restricciones de desigualdad.
2. **Convierte las desigualdades en ecuaciones.** Esto se hace agregando una variable de holgura para cada desigualdad.
3. **Construir la tabla símplex inicial.** Escribir la función objetivo en la fila inferior/superior.
4. **La entrada más negativa en la fila inferior identifica la columna pivote.**
5. **Calcular los cocientes. El cociente más pequeño identifica una fila. El elemento en la intersección de la columna identificada en el paso 4 y la fila identificada en este paso se identifica como el elemento pivote.** Los cocientes se calculan dividiendo la columna del extremo derecho por la columna identificada en el paso 4. Un cociente que sea un cero, un número negativo o que tenga un cero en el denominador, se ignora.
6. **Realizar un pivoteo para que todas las demás entradas de esta columna sean cero.** Esto se hace con el **método de Gauss-Jordan.**
7. **Cuando ya no haya más entradas negativas en la fila inferior (de la función objetivo), habremos terminado; de lo contrario, comenzamos nuevamente desde el paso 4.**
8. **Lee tus respuestas.** Obtén las variables usando las columnas con 1 y 0. Todas las demás variables son cero. El valor máximo que estás buscando aparece en la esquina inferior derecha.

Ejemplo Simplex

Pepe_UPSA tiene dos trabajos a tiempo parcial dando clases particulares, Trabajo I y Trabajo II.

Nunca quiere trabajar más de un total de 12 horas a la semana. Ha determinado que por cada hora que trabaja en el Trabajo I, necesita 2 horas de tiempo de preparación, y por cada hora que trabaja en el Trabajo II, necesita una hora de tiempo de preparación, y no puede dedicar más de 16 horas a la preparación. Si gana 4€0 por hora en el Trabajo I y 30€ por hora en el Trabajo II.

¿Cuántas horas debería trabajar por semana en cada trabajo para maximizar sus ingresos?

PASO 1. Planteamos el problema.

Escribir la función objetivo y las restricciones.

Variables de decisión

- x_1 : $número\ de\ horas\ por\ semana\ que\ PepeUPSA\ trabaja\ en\ I$
- x_2 : $número\ de\ horas\ por\ semana\ que\ PepeUPSA\ trabaja\ en\ II$

- Maximizar $z = 40\ x_1 + 30\ x_2$
- Restricciones:
  - $x_1 + x_2 \leq 12$
  - $2x_1 + x_2 \leq 16$
  - x_i : $No\ negativas$

PASO 2. Convierte las inecuaciones en ecuaciones.

Esto se hace agregando una variable de holgura para cada inecuación.

- Maximizar $z = 40\ x_1 + 30\ x_2 + 0 * y_1 + 0 * y\_2$
- Restricciones:
  - $x_1 + x_2 + \ y_1 = 12$
  - $2x_1 + x_2 + y_2 = 16$
  - $x_i : \ No\ negativas$

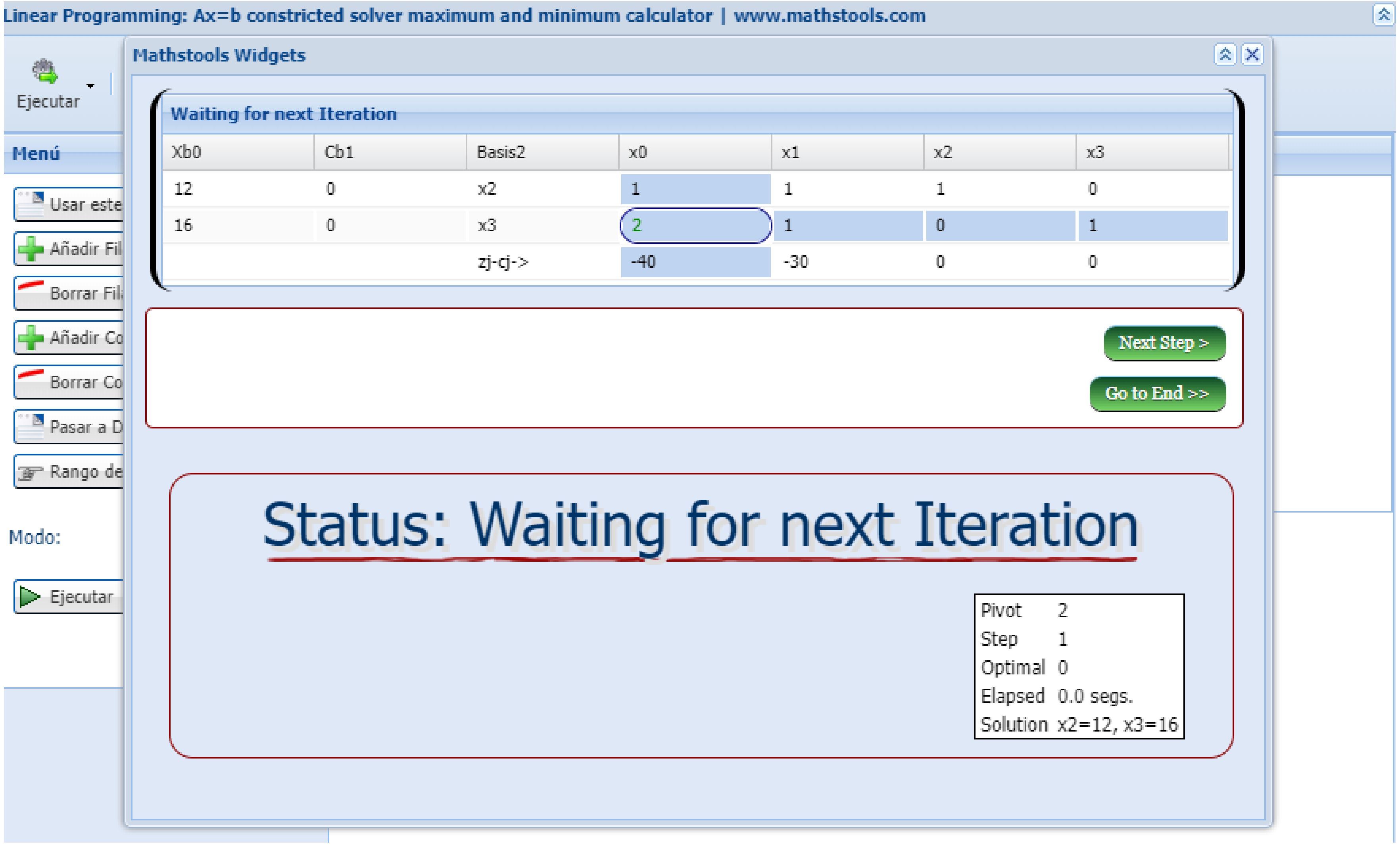
PASO 3. Construir la tabla símplex inicial .

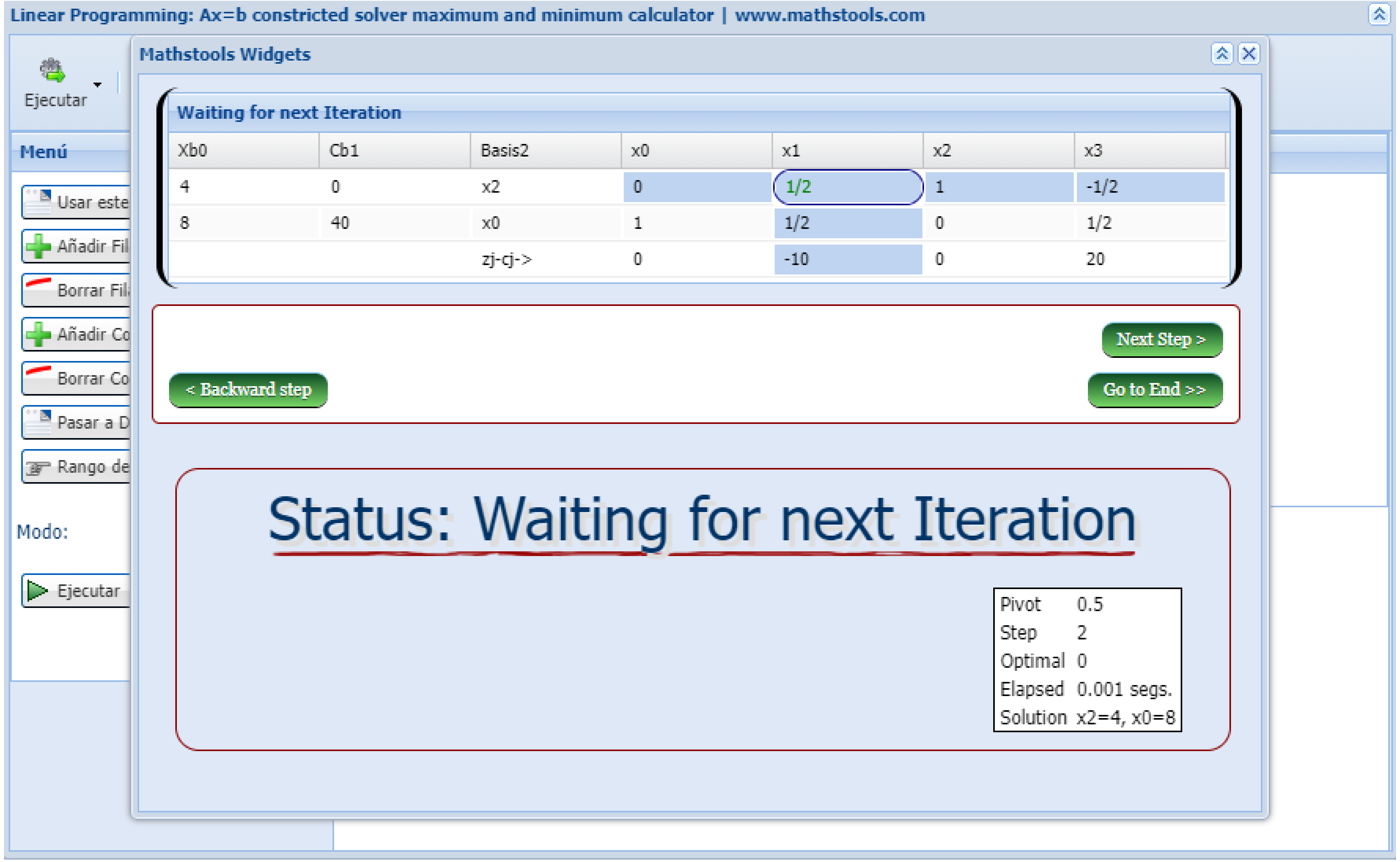
Cada restricción de desigualdad aparece en su propia fila. (Las restricciones de no negatividad *no* aparecen como filas en la tabla símplex). Escriba la función objetivo como la fila inferior/superior.

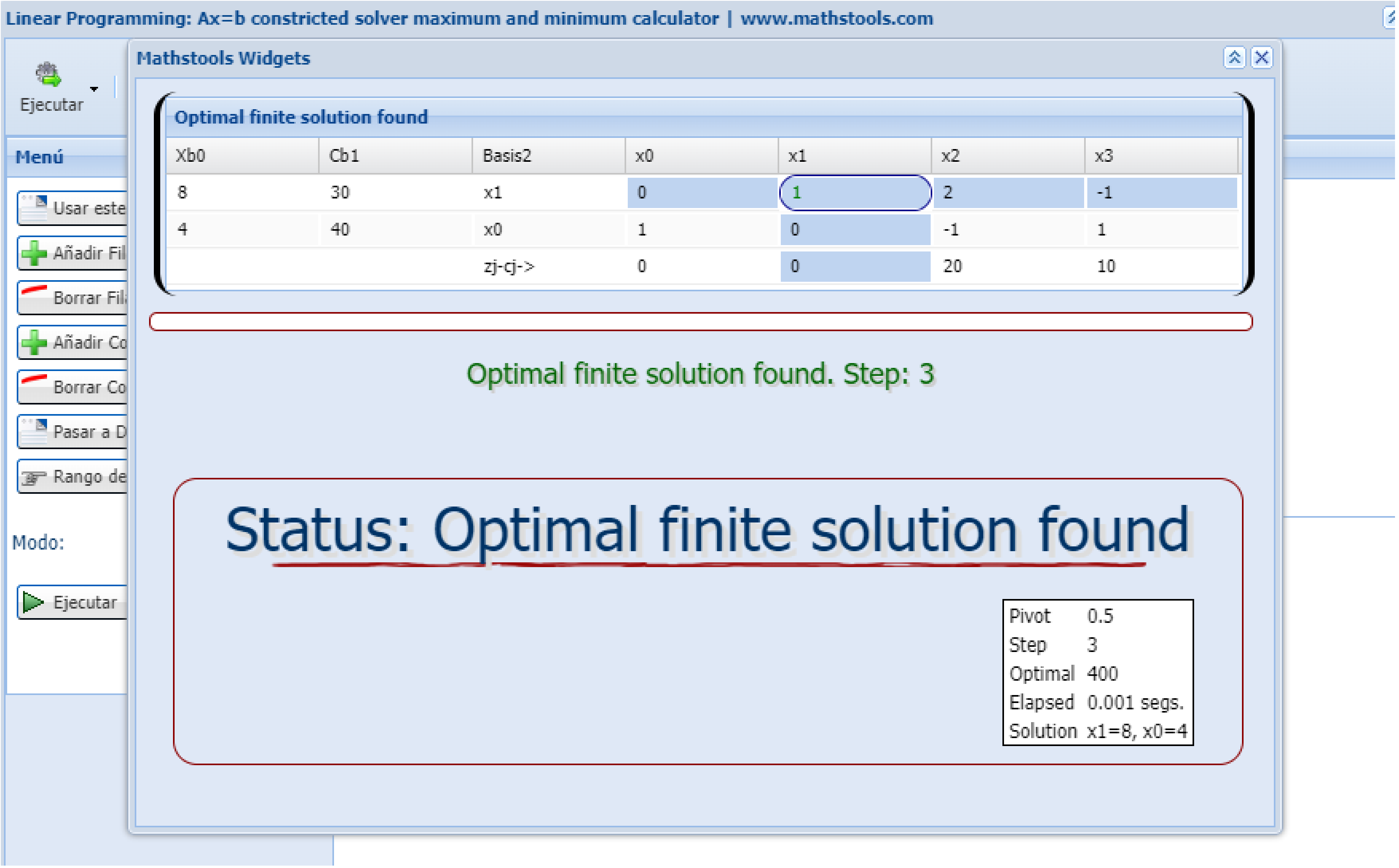
	x1	x2	y1	y2	Z	C
y1	1	1	1	0	0	12
y2	2	1	0	1	0	16
Zj-cj	-40	-30	0	0	1	0

¿Por qué elegimos la entrada más negativa en la fila inferior?

La entrada más negativa en la fila inferior representa el coeficiente más grande en la función objetivo: el coeficiente cuya entrada aumentará el valor de la función objetivo más rápidamente.


Linear Programming: Ax=b constricted solver maximum and minimum calculator | www.mathstools.com
Ejecutar
Menú
Usar este
Añadir Fil
Borrar Fil
Añadir Co
Borrar Co
Pasar a D
Rango de
Modo:
Ejecutar
Mathstools Widgets
Waiting for next Iteration
Xb0 Cb1 Basis2 x0 x1 x2 x3
12 0 x2 1 1 1 0
16 0 x3 2 1 0 1
zj-cj-> -40 -30 0 0
Next Step >
Go to End >>
Status: Waiting for next Iteration
Pivot 2
Step 1
Optimal 0
Elapsed 0.0 segs.
Solution x2=12, x3=16


Linear Programming: Ax=b constricted solver maximum and minimum calculator | www.mathstools.com
Ejecutar
Menú
Usar este
Añadir Fil
Borrar Fil
Añadir Co
Borrar Co
Pasar a D
Rango de
Modo:
Ejecutar
Mathstools Widgets
Waiting for next Iteration
Xb0 Cb1 Basis2 x0 x1 x2 x3
4 0 x2 0 1/2 1 -1/2
8 40 x0 1 1/2 0 1/2
zj-cj-> 0 -10 0 20
Next Step >
< Backward step
Go to End >>
Status: Waiting for next Iteration
Pivot 0.5
Step 2
Optimal 0
Elapsed 0.001 segs.
Solution x2=4, x0=8


Linear Programming: Ax=b constricted solver maximum and minimum calculator | www.mathstools.com
Ejecutar
Menú
Usar este
Añadir Fil
Borrar Fil
Añadir Co
Borrar Co
Pasar a D
Rango de
Modo:
Ejecutar
Mathstools Widgets
Optimal finite solution found
Xb0 Cb1 Basis2 x0 x1 x2 x3
8 30 x1 0 1 2 -1
4 40 x0 1 0 -1 1
zj-cj-> 0 0 20 10
Optimal finite solution found. Step: 3
Status: Optimal finite solution found
Pivot 0.5
Step 3
Optimal 400
Elapsed 0.001 segs.
Solution x1=8, x0=4

	x1	x2	y1	y2	Z	C	
y1	1	1	1	0	0	12	12
x1	2	1	0	1	0	16	8
Zj-cj	-40	-30	0	0	1	0	

	x1	x2	y1	y2	Z	C	
x2	0	1/2	1	- 1/2	0	4	8
X1	1	1/2	0	1/2	0	8	16
Zj-cj	0	-10	0	20	1	320	

	x1	x2	y1	y2	Z	C
X2	0	1	2	-1	0	8
X1	1	0	-1	1	0	4
Zj-cj	0	0	20	10	1	400

Maximizar la siguiente función

MAXIMIZAR	x1	x2	x3	s1	s2	s3		
	-3	-1	-2	0	0	0		
s1	2	1	1	1	0	0		2
s2	1	2	3	0	1	0		5
s3	2	2	1	0	0	1		6

Iteracción 1			x1	x2	x3	s1	s2	s3		
			0	0,5	-0,5	1,5	0	0	0	3
		x1	1	0,5	0,5	0,5	0	0	0	1
		s2	0	1,5	2,5	-0,5	1	0	0	4
		s3	0	1	0	-1	0	1	0	4

Iteracción			x1	x2	x3	s1	s2	s3		
			0	0,8	0	1,4	0,2	0	0	3,8
		X1	1	0,2	0	0,6	-0,2	0	0	0,2
		X3	0	0,6	1	-0,2	0,4	0	0	1,6
		s3	0	1	0	-1	0	1		4

Método de las dos fases

Fase I

- Se resuelve un problema auxiliar: minimización de la suma de las variables artificiales.
- Si su valor es 0, significa que el problema original tiene solución y es posible calcularla, en caso contrario indica que se trata de un problema no factible y no tiene solución.

Fase II

- Se eliminan las columnas correspondientes a las variables artificiales.
- Se resuelve el problema como un simplex normal con los resultados obtenidos en la Fase I

Identificando casos anómalos y soluciones

- **Solución óptima**: cuando se cumple la condición de parada y no hay variables artificiales en la base con valor positivo, se consigue la optimización.
- **Infinitas soluciones**: Al parar, si alguna variable de decisión no básica tiene un valor 0 en la fila Z, significa que existe otra solución que aporta el mismo valor óptimo para la función objetivo. Es este caso el problema admite infinitas soluciones. Mediante una nueva iteración y haciendo que la variable de decisión que tiene el 0 en la fila Z entre en la base se obtendrá otra solución diferente para el mismo valor óptimo.
- **Solución no acotada:** si toda la columna de la variable que entra a la base tiene todos sus elementos negativos o nulos se trata de problema no acotado, es decir, que tiene solución ilimitada. No hay valor óptimo concreto para la función objetivo sino que a medida que se aumenta el valor de las variables también se incrementa el valor Z sin violar ninguna restricción.
- **No existe solución**: cuando ningún punto satisface todas las restricciones del problema se produce la infactibilidad no existiendo ninguna solución posible para él. Unavez terminadas todas las iteraciones del algoritmo, existen en la base variables artificiales cuyo valor es superior a 0
- **Empate de variable entrante**: cuando se produce un empate en la condición de decisión de la variable entrante se puede optar por cualquiera de ellas sin que esto afecte a la solución final. Si influye en el número de iteraciones necesarias para obtener dicha solución. Se aconseja optar a favor de las variables básicas ya que ellas son las que formarán parte de la solución óptima.
- **Empate de variable saliente**: se puede optar por cualquiera de ellas. Se discrimina a favor de las variables de decisión haciendo que permanezcan en la base. En el caso de estar en la primera fase del método de las Dos Fases, se optará por sacar de la base las variables artificiales.
- En la Fase 1: al finalizar la fase 1, si el problema original tiene solución, todas las variables artificiales en la fila indicadora deben tener valor "1".
- ¿El elemento pivote puede ser nulo?: No, el elemento pivote siempre será estrictamente positivo ya que únicamente se realizan los cocientes entre valores no negativos y mayores que cero (ante un problema de maximización).

Método de las dos fases

minimizar		4x1+x2+x3
s.a.		
		2x1+x2+2x3=4
		3x1+3x2+x3=3

FASE 1				x1	x2	x3	R1	R2		
		zj-cj		-5	-4	-3	0	0	0	-7
		R1		2	1	2	1	0		4
		R2		3	3	1	0	1		3
				x1	x2	x3	R1	R2		
		zj-cj		0	1	-1 1/3	-1	2/3	0	-2
		R1		0	-1	1 1/3	1	- 2/3		2
		X1		1	1	1/3	0	1/3		1
				x1	x2	x3	R1	R2		
		zj-cj		0	0	0	0	0		0
		X3		0	- 3/4	1	3/4	- 1/2		1 1/2
		X1		1	1 1/4	0	- 1/4	1/2		1/2
	FASE 2			x1	x2	x3				
				4	1	1				0
		zj-cj		0	3 1/4	0				0
		X3		0	- 3/4	1				1 1/2
		X1		1	1 1/4	0				1/2
				x1	x2	x3				
				3 1/5	0	1	0	0	0	- 2/5
		zj-cj		-2 3/5	0	0	0	0	0	-1 1/3
		X3		3/5	0	1	0	0	0	1 4/5
		x2		4/5	1	0	0	0	0	2/5

$Z2 - C2 = (4 \quad 1) * \begin{pmatrix} 5/4 \\ -3/4 \end{pmatrix}$ =13/4=3,25

El problema DUAL

- La resolución de los problemas duales respecto a los primales se justifica dada la facilidad que se presenta dados problemas donde el número de restricciones supere al número de variables.
- Tiene gran aplicación en el análisis económico del problema.
-
- Como el número de restricciones y variables entre problema dual y primal es inverso, se pueden resolver gráficamente problemas que presenten dos restricciones sin importar el número de variables.

Teorema de Dualidad Débil

El **Teorema de Dualidad Débil** establece que si **x є IRn**, es una solución factible del problema Primal P) y **∏ є IRm**, una solución factible del problema Dual D), entonces:

$$c^T x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i \pi_i = b^T \pi$$

- Es decir, en el formato descrito anteriormente, el valor que reporta una solución factible del problema dual de minimización al ser evaluada en su respectiva función objetivo, representa una ***cota superior*** del valor óptimo del problema primal de maximización.
- Análogamente, una solución factible del problema primal de maximización al ser evaluada en dicha función objetivo representa una ***cota inferior*** del valor óptimo del problema dual de minimización. En conclusión: **V(P)<=V(D)**.

https://www.gestiondeoperaciones.net/programacion_lineal/teorema-de-dualidad-fuerte-y-dualidad-debil-dualidad-en-programacion-lineal/

Teorema de Dualidad Fuerte

- Si un problema (Primal) de Programación Lineal tiene una solución óptima, entonces el correspondiente problema Dual también tiene una solución óptima, y los respectivos valores en la función objetivo son idénticos.

- En consecuencia, del **Teorema de Dualidad Fuerte** se deduce que ambos problemas (primal y dual) al ser evaluados en sus respectivas soluciones óptimas (en caso de existir) proveen idéntico valor óptimo, es decir, **V(P)=V(D)**. Es más, resulta suficiente resolver uno de ellos y luego utilizar las propiedades del **Teorema de Holguras Complementarias** para encontrar la solución óptima (y valor óptimo) de su problema equivalente

Teorema de Holguras Complementarias: Dualidad en Programación Lineal

- El **Teorema de Holguras Complementarias** nos permite encontrar la solución óptima del **Problema Dual** cuando conocemos la solución óptima del **Problema Primal** (y *viceversa*) a través de la resolución de un ***sistema de ecuaciones*** conformado por las variables de decisión (primales y duales) y las restricciones (del modelo primal y dual).
- La importancia de este teorema radica en que facilita la resolución de los modelos de optimización lineal, permitiendo a quién los resuelve buscar el modelo más sencillo para abordar (desde el punto de vista algorítmico) dado que de cualquier forma podrá obtener los resultados del modelo equivalente asociado (sea éste el modelo primal o dual).

https://www.gestiondeoperaciones.net/programacion_lineal/teorema-de-holguras-complementarias-dualidad-en-programacion-lineal/

Condiciones de dualidad

1. Teorema de la Dualidad (Teorema de la Dualidad Primal-Dual)

- Cada problema de programación lineal (primal) tiene un problema dual asociado.
- La solución óptima del problema dual proporciona límites para la solución óptima del problema primal.

2. Teorema de la Dualidad Fuerte

- Si el problema primal tiene una solución óptima, entonces el problema dual también tiene una solución óptima y ambas soluciones óptimas tienen el mismo valor objetivo.
- Si uno de los problemas (primal o dual) es factible y acotado, el otro también lo es.

3. Teorema de la Dualidad Débil

- El valor óptimo de la función objetivo de cualquier solución factible del problema dual es un límite inferior al valor óptimo de la función objetivo del problema primal.
- De manera similar, el valor óptimo de la función objetivo de cualquier solución factible del problema primal es un límite superior al valor óptimo de la función objetivo del problema dual.

4. Condiciones de Optimalidad

Condiciones de Complementariedad: Estas condiciones afirman que, en un problema primal-dual, si una variable en la solución primal es positiva, entonces la restricción correspondiente en el problema dual es exactamente igual a su límite (y viceversa). Esto ayuda a identificar soluciones óptimas.

5. Teorema de la Infeasibilidad

- Si el problema primal es inviable (no tiene solución factible), entonces el problema dual es infactible.
- Si el problema dual es inviable, entonces el problema primal es infactible.

6. Teorema de la Alternancia de Soluciones

Este teorema sostiene que, si existe una solución básica factible para el problema primal, entonces también existe una solución básica factible para el problema dual.

El problema Dual (Tabla de TUCKER)

- *Teorema* Si el problema PRIMAL no tiene solución finita, el problema DUAL no tiene soluciones factibles.

	Primal	Dual
Función Objetivo	Maximización	Minimización
Restricciones	<=	>=
	>=	<=
	=	><
Variables	>=	>=
	<=	<=
	><	=

Problema de Minimización	Problema de Maximización
Si la restricción es:	La variable asociada es:
>=	>= 0
<=	<= 0
=	irrestricta
Si la variable es:	La restricción correspondiente es:
>= 0	<=
<= 0	>=
irrestricta	=

Tabla de Tuker: De Maximización a Minimización

Problema de Maximización	Problema de Minimización
Si la restricción es:	La variable asociada es:
≥	≤ 0
≤	≥ 0
=	Irrestricta
Si la variable es:	La restricción correspondiente es:
≥0	≥
≤0	≤
Irrestricta	=

Tabla de Tuker de minimización a Maximización

Problema de Minimización	Problema de Maximización
Si la restricción es:	La variable asociada es:
≥	≥ 0
≤	≤ 0
=	Irrestricta
Si la variable es:	La restricción correspondiente es:
≥0	≤
≤0	≥
Irrestricta	=

Primal Minimización – Dual Maximización

Por ejemplo, leyendo la tabla desde ***izquierda a derecha***, es decir, pasar de un **problema primal** de **minimización** a un **problema dual** de **maximización**, tenemos:

- ✓ Si el problema primal es de **minimización**, entonces su correspondiente dual será uno de **maximización**.
- ✓ Si el problema primal tiene una **restricción** del tipo **>=**, la **variable dual** asociada a dicha restricción debe ser **>=0**.
- ✓ Si el problema primal tiene una **restricción** del tipo **<=**, la **variable dual** asociada a dicha restricción debe ser **<=0**.
- ✓ Si el problema primal tiene una **restricción** del tipo **=**, la **variable dual** asociada a dicha restricción debe ser **irrestricta** (libre de signo).
- ✓ Si el problema primal tiene una **variable >=0**, la correspondiente **restricción** asociada en el dual debe ser **<=**.
- ✓ Si el problema primal tiene una **variable <=0**, la correspondiente restricción asociada en el dual debe ser **>=**.
- ✓ Si el problema primal tiene una **variable irrestricta** (libre de signo), la correspondiente **restricción** asociada en el dual debe ser **=**.

Primal Maximización – Dual Minimización

De forma análoga, interpretando la tabla desde ***derecha a izquierda***, es decir, pasar de un **problema primal** de **maximización** a un **problema dual** de **minimización**, tenemos:

- ✓ Si el problema primal es de **maximización**, entonces su correspondiente dual será uno de **minimización**.
- ✓ Si el problema primal tiene una **restricción** del tipo **<=**, la **variable dual** asociada a dicha restricción debe ser **>=0**.
- ✓ Si el problema primal tiene una **restricción** del tipo **>=**, la **variable dual** asociada a dicha restricción debe ser **<=0**.
- ✓ Si el problema primal tiene una **restricción** del tipo **=**, la **variable dual** asociada a dicha restricción debe ser **irrestricta** (libre de signo).
- ✓ Si el problema primal tiene una **variable >=0**, la correspondiente **restricción** asociada en el dual debe ser **>=**.
- ✓ Si el problema primal tiene una **variable <=0**, la correspondiente restricción asociada en el dual debe ser **<=**.
- ✓ Si el problema primal tiene una **variable irrestricta** (libre de signo), la correspondiente **restricción** asociada en el dual debe ser **=**.

Ejemplo: Asignación de Proyectos a Desarrolladores de Software

Supongamos que estamos en una empresa de desarrollo de software, y tenemos varios proyectos que deben ser asignados a desarrolladores según su experiencia y nivel profesional.

Queremos **minimizar los costes** de asignación mientras garantizamos que cada proyecto tenga los recursos necesarios.

Supongamos que una empresa tiene tres tipos de desarrolladores:

1. **Junior (J)**: con menor experiencia y un coste menor por hora.
2. **Mid-level (M)**: con experiencia media y un coste intermedio por hora.
3. **Senior (S)**: con mucha experiencia y un coste mayor por hora.

La empresa tiene tres **proyectos** de software con requisitos en horas de desarrollo. Queremos minimizar el costo total de asignación de horas a los proyectos, garantizando que cada proyecto reciba el número de horas necesario. A continuación, se describen los detalles:

a) El **Proyecto A** necesita 50 horas.
b) El **Proyecto B** necesita 80 horas.
c) El **Proyecto C** necesita 60 horas.

Los **costos por hora** de cada tipo de desarrollador son:

- Junior: 30€/hora.
- Mid-level: 50€/hora.
- Senior: 70€/hora.

Cada desarrollador tiene un **número limitado de horas disponibles**:

- **Junior**: 100 horas.
- **Mid-level**: 80 horas.
- **Senior**: 60 horas.

Original Problem

Minimize	X1A	X2A	X3A	X1B	X2B	X3B	X1C	X2C	X3C		
Proyecto A	1	1	1	0	0	0	0	0	0	=	50
Proyecto B	0	0	0	1	1	1	0	0	0	=	80
Proyecto C	0	0	0	0	0	0	1	1	1	=	60
Junior	1	0	0	1	0	0	1	0	0	<=	100
Mid-lebel	0	1	0	0	1	0	0	1	0	<=	80
Senior	0	0	1	0	0	1	0	0	1	<=	60

Dual Problem

	Proyecto A	Proyecto B	Proyecto C	Junior	Mid-lebel	Senior		
Maximize	50	80	60	-100	-80	-60		
X1A	1	0	0	-1	0	0	<=	30
X2A	1	0	0	0	-1	0	<=	50
X3A	1	0	0	0	0	-1	<=	70
X1B	0	1	0	-1	0	0	<=	30
X2B	0	1	0	0	-1	0	<=	50
X3B	0	1	0	0	0	-1	<=	70
X1C	0	0	1	-1	0	0	<=	30
X2C	0	0	1	0	-1	0	<=	50
X3C	0	0	1	0	0	-1	<=	70
	Unrestricted	Unrestricted	Unrestricted					

El Problema Dual del Problema del Carpintero

Maximizar $5X1 + 3X2$

sujeta a:

$$
\begin{array}{lll}
2X1 + X2 & < & 40 \\
X1 + 2X2 & < & 50 \\
X1 > 0 & & \\
X2 > 0 & &
\end{array}
$$

- El problema dual es:

Minimizar $40U1 + 50U2$

Sujeta a:

$$
\begin{array}{lll}
2U1 + U2 & \geq & 5 \\
U1 + 2U2 & \geq & 3
\end{array}
$$

PRIMAL

x1	Mesas					
x2	Sillas					
Maximizar		x1	x2			
		10	20			
		5	3	110		
	Mano de obra	2	1	40	≤	40
	Materiales	1	2	50	≤	50

Dual

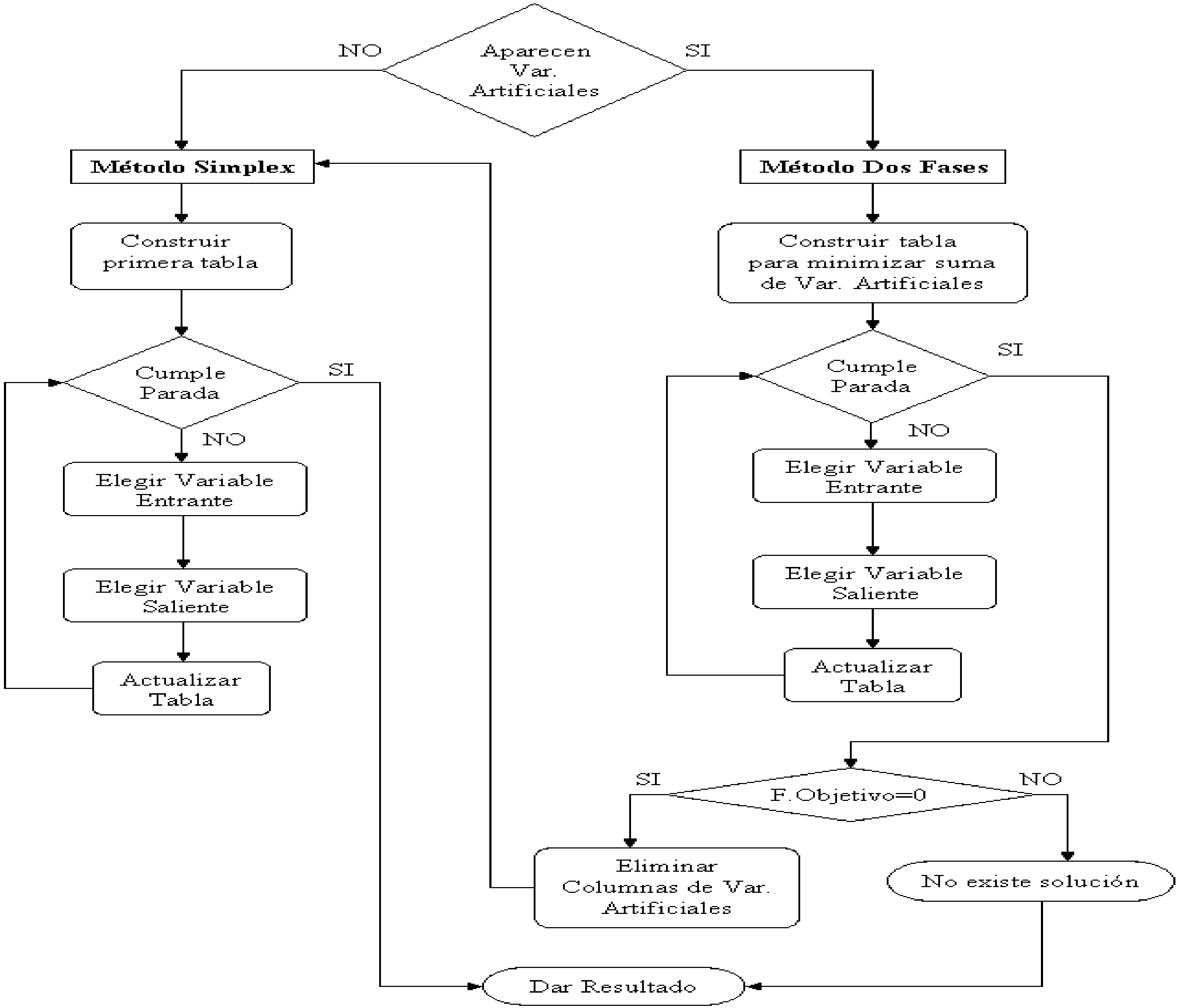
y1	Mano de obra						
y2	Materiales						
Minimizar		y1	y2				
		2,33333333	0,33333333				
		40	50	110			
	Mesas	2	1	5	≥	5	
	Sillas	1	2	3	≥	3	

		Final	Reducido	Objetivo	Permisible	Permisible
Celda	Nombre	Valor	Coste	Coeficiente	Aumentar	Reducir
$D$6	x1	10	0	5	1	3,5
$E$6	x2	20	0	3	7	0,5

		Final	Sombra	Restricción	Permisible	Permisible
Celda	Nombre	Valor	Precio	Lado derecho	Aumentar	Reducir
$F$9		40	2,33333333	40	60	15
$F$10		50	0,33333333	50	30	30

		Final	Reducido	Objetivo	Permisible	Permisible
Celda	Nombre	Valor	Coste	Coeficiente	Aumentar	Reducir
$J$6	y1	2,33333333	0	40	60	15
$K$6	y2	0,33333333	0	50	30	30

		Final	Sombra	Restricción	Permisible	Permisible
Celda	Nombre	Valor	Precio	Lado derecho	Aumentar	Reducir
$L$9	<	5	10	5	1	3,5
$L$10	<	3	20	3	7	0,5


Aparecen Var. Artificiales
NO
SI
Método Simplex
Método Dos Fases
Construir primera tabla
Cumple Parada
SI
NO
Elegir Variable Entrante
Elegir Variable Saliente
Actualizar Tabla
Construir tabla para minimizar suma de Var. Artificiales
Cumple Parada
SI
NO
Elegir Variable Entrante
Elegir Variable Saliente
Actualizar Tabla
F.Objetivo=0
SI
NO
Eliminar Columnas de Var. Artificiales
No existe solución
Dar Resultado

Casos especiales en la aplicación del SIMPLEX:
Tipos de soluciones y su identificación en el método simplex.

1. Degeneración:

- La degeneración ocurre cuando en alguna iteración del método simplex existe un empate en la selección de la variable que sale este empate se rompe arbitrariamente. Sin embargo, cuando suceda esto, una o más de las variables básicas será necesariamente igual a cero en la siguiente iteración. En este caso decimos que la nueva solución es degenerada. Sí hay solución degenerada porque hay menos variables básicas positivas que restricciones. **La variable degenerada es aquella que, tomando valor cero, también tiene cero en la fila de indicación (coste o gradiente reducido y precio sombra).**

La variable degenerada es aquella que, tomando valor cero, también tiene cero en la fila de indicación (coste o gradiente reducido y precio sombra).

2. Múltiples alternativas optimas:

Cuando la función objetivo es paralela a una restricción que se satisface en el sentido de la igualdad a través de la solución óptima, la función objetivo tomará el mismo valor óptimo en más de un punto de la solución. Por esta razón reciben el nombre de Múltiples alternativas óptimas.

¿Cómo sabemos en las tablas que existen múltiples alternativas óptimas?

Cuando en los coeficientes de las variables no básicas en el renglón z de la tabla óptima existe una variable con valor de cero, lo que indica que esa variable no básica puede entrar a la solución básica sin alterar el valor de z, pero provoca un cambio en el valor de las variables.

- **En la fila de indicación (coste o gradiente reducido y precio sombra) hay tantos ceros como variables básicas. En la última tabla, alguno de los costes reducidos de las variables no básicas es igual a cero. Esto quiere decir que la variable no básica cuyo coste reducido es cero podría introducirse en la base si n perjudicar el valor de la función objetivo**

- **3. Soluciones no acotadas:**

En algunos modelos de programación lineal, los valores de las variables se pueden aumentar en forma indefinida sin violar ninguna de las restricciones, lo que significa que el espacio de soluciones es no acotado cuando menos en una dirección. Como resultado el valor de la función objetivo puede crecer (caso de la minimización) en forma indefinida.

¿Cómo sabemos en las tablas que existe solución no acotada?

Cuando en la tabla del simplex en el renglón de la z existe una variable no básica que puede entrar pero al determinar la variable que sale nos damos cuenta que en su columna existen solo valores de ceros o negativos lo que significa que esa variable puede hacer crecer en forma indefinida a z sin que se infrinja ninguna de las restricciones. Por lo tanto concluimos sin hacer más cálculos que el problema no tiene solución acotada.

4. Solución Infactible:

Si las restricciones no se pueden satisfacer en forma simultánea, se dice que el modelo no tiene solución factible. Esta situación nunca puede ocurrir si todas las restricciones son del tipo Menor igual (suponiendo valores positivos en el segundo miembro) ya que las variables de holgura producen siempre una solución factible. Sin embargo, cuando empleamos los otros tipos de restricciones, recurrimos al uso de variables artificiales, que por su mismo diseño no ofrecen una solución factible al modelo original. Aunque se hacen provisiones (a través del uso de penalizaciones) para hacer que estas variables artificiales sean cero en el nivel óptimo, esto sólo puede ocurrir si el modelo tiene una espacio factible. **Si no lo tiene, cuando menos una variable artificial será positiva en la iteración óptima**

		Final	Reducido	Objetivo	Permisible	Permisible
Celda	Nombre	Valor	Coste	Coeficiente	Aumentar	Reducir
$F$10	Producción ótima Variable P1	0	-200	300	200	1E+30
$G$10	Producción ótima Variable P2	70	0	200	300	1E+30
$H$10	Producción ótima Variable P3	230	0	500	1E+30	200

		Final	Sombra	Restricción	Permisible	Permisible
Celda	Nombre	Valor	Precio	Lado derecho	Aumentar	Reducir
$I$12	F1	370	0	430	1E+30	60
$I$13	F2	460	0	460	1E+30	0
$I$14	R1	280	0	420	1E+30	140
$I$15	R2	300	500	300	0	230
$I$16	Producción mínima P2	70	-300	70	35	0
$I$17	Demanda máxima P3	230	0	240	1E+30	10

Práctica 1

- Variables básicas: P2, P3, F1, R1, Demanda P3.
- Solución degenerada: hay menos variables básicas positivas (5) que restricciones (6). La variable degenerada es aquella que, tomando valor cero, también tiene cero en la fila de indicación (coste o gradiente reducido y precio sombra). En este caso la variable básica degenerada es R2.
- Óptimos alternativos: En la fila de indicación (coste o gradiente reducido y precio sombra) hay más ceros que variables básicas.

- **Ejemplo 1: Problema con solución única**

min $Z= 10x_1+16x_2$

s.a.

$2x_1+2x_2 \geq 4$

$2x_1+4x_2 \geq 6$

$x_1, x_2 \geq 0$

- **Ejemplo 2: Problema con solución única**

Max $Z= 4x_1+7x_2+3x_3$

s.a.

$2x_1+x_2+2x_3 \leq 30$

$x_1+2x_2+2x_3 \leq 45$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

- **Ejemplo 3: Problema infactible**

Min $Z = x_1 + x_2$

s.a.

$x_1 + x_2 \leq 1$

$4x_1 + 2x_2 \geq 6$

$x_1, x_2 \geq 0$

- **Ejemplo 4: Problema no acotado**

Max Z= 2x1+x2

s.a.

$x_1 - x_2 \leq 10$

$2x_1 \leq 40$

$x_1, x_2 \geq 0$

- **Ejemplo 5: Problema con óptimos alternativos**

Max $Z = 6x_1 + 10x_2$

s.a.

$5x_1 + 2x_2 \leq 10$

$3x_1 + 5x_2 \leq 15$

$x_1, x_2 \geq 0$

Problema del transporte

Minimizar el coste total de transporte entre los centros de origen y los de destino, satisfaciendo la demanda, y sin superar la oferta

$$Min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$s.a.$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j , j = 1..n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i , i = 1..m$$

$$x_{ij} \geq 0, x_{ij} \in Z$$

x_{ij}: unidades a enviar de origen i a destino j
c_{ij}: coste unitario de transporte de i a j

a_i: unidades de oferta en el punto origen i
b_j: unidades de demanda en el punto destino j

Se supone oferta total igual a demanda total

Problemas de Transporte

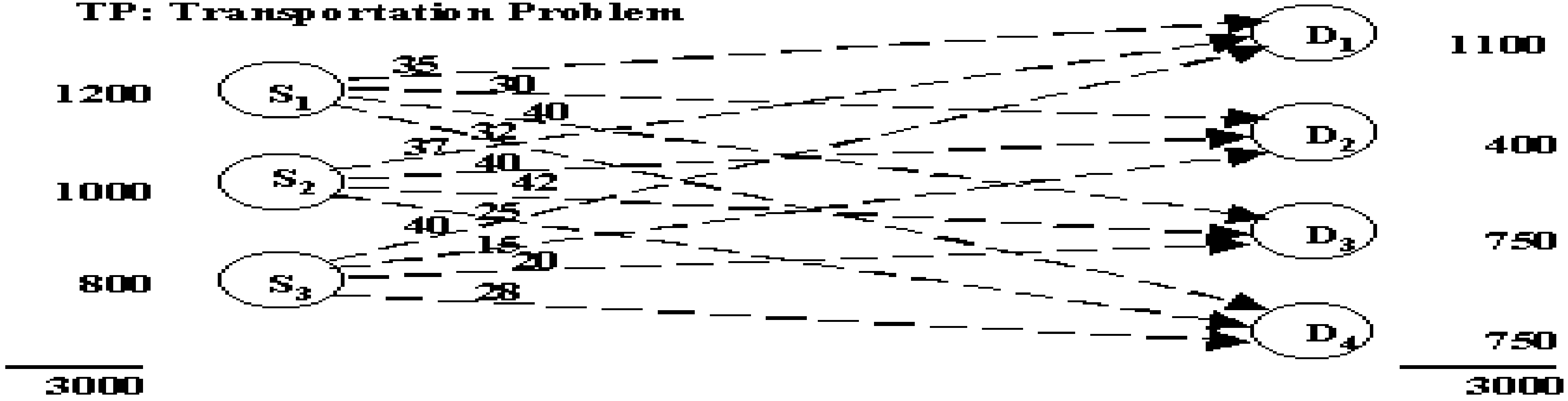
- Los modelos de transporten juegan un papel importante en la gerencia logística y en la cadena de insumos para reducir costos y mejorar servicios. Por lo tanto, el objetivo es encontrar la manera más efectiva en termino de costos para transportar bienes.
- Un distribuidor que tiene m depósitos con un abastecimiento de productos a_i i^{th} en ellos, debe enviar dichos productos a n centros minoristas geográficamente dispersos, cada uno con una demanda de clientes dada e_j, la cual debe ser cubierta.
- **El objetivo es determinar el mínimo costo posible de transporte dados los costos por unidad de transportar entre el i^{th} depósito y el j^{th} centro minorista, el cual es C_{ij}.**

Network Models

Presentation of a Network Problem by:

- A set of nodes
- A set of arcs
- A cost function for each arc

TP: Transportation Problem



LP Formulation:

Min $35X_{11} + 30X_{12} + 40X_{13} + 32X_{14} + 37X_{21} + 40X_{22} + 42X_{23} + 25X_{24} + 40X_{31} + 15X_{32} + 20X_{33} + 28X_{34}$

subject to

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} \le 1200$$
$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} \le 1000$$
$$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} \le 800$$
$$X_{11} + X_{21} + X_{31} \ge 1100$$
$$X_{12} + X_{22} + X_{32} \ge 400$$
$$X_{13} + X_{23} + X_{33} \ge 750$$
$$X_{14} + X_{24} + X_{34} \ge 750$$
$$X_{ij} \ge 0$$

El Problema Dual de Transporte

- El problema dual para el ejemplo anterior viene dado por:

Max: 1200U1 + 1000U2 + 800U3 + 1100V1 + 400V2 + 750V3 + 750V4

- sujeto a:

U1 + V1 £ 35, U1 + V2 £ 30, U1 + V3 £ 40, U1 + V4 ≤ 32
U2 + V1 £ 37, U2 + V2 £ 40, U2 + V3 £ 42, U2 + V4 ≤ 25
U3 + V1 £ 40, U3 + V2 £ 15, U3 + V3 £ 20, U3 + V4 ≤ 28

- Ninguna de las Ui y Vj tiene restricción en el signo.
- La formulación dual sugiere que intentemos cada envió de bienes de forma tal que la diferencia en los precios unitarios Ui al i-ésimo origen, y el precio por unidad de Vj al j-ésimo destino no exceda el costo de transporte por unidad entre el $i^{\text{-ésimo}}$ origen y el $j^{\text{-ésimo}}$ destino.
- La interpretación de las restricciones duales como el objetivo de que el la diferencia de precios de origen-destino no excede el precio del transporte, es equivalente al principio de equilibrio con un significado económico.
- Adicionalmente, se puede interpretar el objetivo dual como el propósito de un transportista en maximizar su utilidad cuando compra en un origen y vende en un destino.

Problemas de scheduling (planificación de turnos)

- Es un problema de rutina en los hospitales planificar las horas de trabajo de las enfermeras. Un modelo de planificación es un problema de programación con enteros que consiste en minimizar el número total de trabajadores sujeto al número especificado de enfermeras durante cada período del día.

Período	Hora del día	Número requerido de enfermeras
1	8:00 - 10:00	10
2	10:00 - 12:00	8
3	12:00 - 2:00	9
4	2:00 - 4:00	11
5	4:00 - 6:00	13
6	6:00 - 8:00	8
7	8:00 - 10:00	5
8	10:00 - 12:00	3

- Como cada enfermera trabaja ocho horas puede comenzar a trabajar al comienzo de cualquiera de los siguientes cinco turnos: 8:00, 10:00, 12:00, 2:00 o 4:00.

- En esta aplicación no consideramos ningún turno que comience a las 9:00, 11:00, etc.
- Tampoco es necesario tener enfermeras que comiencen a trabajar después de las 4:00, porque entonces su turno terminaría después de la medianoche, cuando no se necesitan enfermeras.
- Cada período tiene dos horas de duración, de modo tal que cada enfermera que se presenta a trabajar en el período t también trabajará durante los períodos t + 1, t+ 2, y t+3 --- ocho horas consecutivas.
- La pregunta es: **"¿Cuántas enfermeras deberían comenzar su turno en cada período para satisfacer los requerimientos del recurso especificados en la tabla anterior?"**

- Para formular el modelo de este problema. X_t es una variable de decisión que denota el número de enfermeras que comenzarán su horario en el período t.
- La mano de obra total, que deseamos minimizar, es Suma X_t =x1+x2+x3+x4+x5
- Durante el período 1, debe haber por lo menos 10 personas de guardia; entonces, debemos tener $X_1 > 10$.
- De modo similar, los requerimientos del período 2 sólo pueden satisfacerse con $X_1 + X_2 > 8$. De esta manera denotamos los requerimientos de los períodos restantes:

- $X_1 + X_2 + X_3 \quad > \quad 9$
- $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \quad > \quad 11$
- $X_2 + X_3 + X_4 + X_5 \quad > \quad 13$
- $X_3 + X_4 + X_5 \quad > \quad 8$
- $X_4 + X_5 \quad > \quad 5$
- $X_5 \quad > \quad 3$

	x1	x2	x3	x4	x5			
	1	1	1	1	1	23		
	10	0	0	10	3			
8:00 - 10:00	1					10	≥	10
10:00 - 12:00	1	1				10	≥	8
12:00 - 2:00	1	1	1			10	≥	9
2:00 - 4:00	1	1	1	1		20	≥	11
4:00 - 6:00		1	1	1	1	13	≥	13
6:00 - 8:00			1	1	1	13	≥	8
8:00 - 10:00				1	1	13	≥	5
10:00 - 12:00					1	3	≥	3

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$K$5		0	23

Celda	Nombre	Valor original	Valor final	Entero
$F$6	x1	0	10	Entero
$G$6	x2	0	0	Entero
$H$6	x3	0	0	Entero
$I$6	x4	0	10	Entero
$J$6	x5	0	3	Entero

Celda	Nombre	Valor de la celda	Fórmula	Estado	Demora
$K$7	8:00 - 10:00	10	$K$7>=$M$7	Vinculante	0
$K$8	10:00 - 12:00	10	$K$8>=$M$8	No vinculante	2
$K$9	12:00 - 2:00	10	$K$9>=$M$9	No vinculante	1
$K$10	2:00 - 4:00	20	$K$10>=$M$10	No vinculante	9
$K$11	4:00 - 6:00	13	$K$11>=$M$11	Vinculante	0
$K$12	6:00 - 8:00	13	$K$12>=$M$12	No vinculante	5
$K$13	8:00 - 10:00	13	$K$13>=$M$13	No vinculante	8
$K$14	10:00 - 12:00	3	$K$14>=$M$14	Vinculante	0
$F$6:$J$6=Entero					

- Todas las variables son números enteros.

- Observar que X_1 no está incluida en la restricción del período 5, ya que las enfermeras que comienzan en el período 1 ya no están en servicio en el período 5.
- Asimismo, observar que puede resultar necesario tener más que el número requerido de personas en algunos períodos. Por ejemplo, vemos con la primera restricción que el número de enfermeras que comienzan a trabajar en el período 1 debe ser 10, como mínimo.

- Todas ellas estarán todavía trabajando en el período 2, pero en ese momento sólo se necesitarán ocho personas. Entonces, incluso si $X_2 = 0$, habrá dos enfermeras extra de guardia en el período 2.

Existen 5 periódicos diferentes que son publicados en cierto país, cada periódico cubre algunas de las nueve regiones del país, tal y como es mostrado en la tabla siguiente

# de Periódico	Región Cubierta	Costo por Publicidad	Beneficios por Publicidad
1	1, 2, 3	3	12
2	2, 3, 6	4	10
3	4, 5, 6	3	14
4	5, 7, 8	7	19
5	6, 8, 9	5	16

El problema es encontrar el costo mínimo total de forma tal que la publicidad alcance a todas las áreas del país.

Este problema puede ser formulado como una programación lineal de tipo 0- 1:

Minimizar $C = 3y_1 + 4y_2 + 3y_3 + 7y_4 + 5y_5$	
s.a. y_1	> 1 (Región 1)
$y_1 + y_2$	> 1 (Región 2)
$y_1 + y_2$	> 1 (Región 3)
y_3	> 1 (Región 4)
$y_3 + y_4$	> 1 (Región 5)
$y_2 + y_3 + y_5$	> 1 (Región 6)
y_4	> 1 (Región 7)
$y_4 + y_5$	> 1 (Región 8)
y_5	> 1 (Región 9)
y_j = 0 ó 1, para todos los j's	

Coste

	y1	y2	y3	y4	y5			
	3	4	3	7	5	13		
	1	0	1	1	0			
Región 1	1					1	≥	1
Región 2	1	1				1	≥	1
Región 3	1	1				1	≥	1
Región 4			1			1	≥	1
Región 5			1	1		2	≥	1
Región 6		1	1		1	1	≥	1
Región 7				1		1	≥	1
Región 8				1	1	1	≥	1
Región 9				1		1	≥	1

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
\$L\$6		0	13

Celda	Nombre	Valor original	Valor final	Entero
\$G\$7	y1	0	1	Binario
\$H\$7	y2	0	0	Binario
\$I\$7	y3	0	1	Binario
\$J\$7	y4	0	1	Binario
\$K\$7	y5	0	0	Binario

Celda	Nombre	Valor de la celda	Fórmula	Estado	Demora
\$L\$8	Región 1	1	\$L\$8>=\$N\$8	Vinculante	0
\$L\$9	Región 2	1	\$L\$9>=\$N\$9	Vinculante	0
\$L\$10	Región 3	1	\$L\$10>=\$N\$10	Vinculante	0
\$L\$11	Región 4	1	\$L\$11>=\$N\$11	Vinculante	0
\$L\$12	Región 5	2	\$L\$12>=\$N\$12	No vinculante	1
\$L\$13	Región 6	1	\$L\$13>=\$N\$13	Vinculante	0
\$L\$14	Región 7	1	\$L\$14>=\$N\$14	Vinculante	0
\$L\$15	Región 8	1	\$L\$15>=\$N\$15	Vinculante	0
\$L\$16	Región 9	1	\$L\$16>=\$N\$16	Vinculante	0

Beneficio

	y1	y2	y3	y4	y5			
	12	10	14	19	16	71		
	1	1	1	1	1			
Región 1	1					1	≥	1
Región 2	1	1				2	≥	1
Región 3	1	1				2	≥	1
Región 4			1			1	≥	1
Región 5			1	1		2	≥	1
Región 6		1	1		1	3	≥	1
Región 7				1		1	≥	1
Región 8				1	1	2	≥	1
Región 9				1		1	≥	1

Celda	Nombre	Valor original	Valor final		
$L$6		45	71		

Celda	Nombre	Valor original	Valor final	Entero	
$G$7	y1	1	1	Binario	
$H$7	y2	0	1	Binario	
$I$7	y3	1	1	Binario	
$J$7	y4	1	1	Binario	
$K$7	y5	0	1	Binario	

Celda	Nombre	Valor de la celda	Fórmula	Estado	Demora
$L$8	Región 1	1	$L$8>=$N$8	Vinculante	0
$L$9	Región 2	2	$L$9>=$N$9	No vinculante	1
$L$10	Región 3	2	$L$10>=$N$10	No vinculante	1
$L$11	Región 4	1	$L$11>=$N$11	Vinculante	0
$L$12	Región 5	2	$L$12>=$N$12	No vinculante	1
$L$13	Región 6	3	$L$13>=$N$13	No vinculante	2
$L$14	Región 7	1	$L$14>=$N$14	Vinculante	0
$L$15	Región 8	2	$L$15>=$N$15	No vinculante	1
$L$16	Región 9	1	$L$16>=$N$16	Vinculante	0
$G$7:$K$7=Binario					