Estudos TCC

September 27, 2022

1 Anéis

Definição 1.1 (Anel). *Um anel R é um conjunto com duas operações $+$ e $*$ tal que dados $x, y, z \in R$ temos:*

1. $x + (y + z) = (x + y) + z$
2. $x + y \in R$
3. $\exists 0$ *tal que* $\forall x, x + 0 = x$
4. $x + y = y + x$
5. $\exists - x$ *tal que* $x, x + (-x) = x$
6. $a * b \in R$
7. $(a * b) * c = a * (b * c)$
8. $a * (b + c) = a * b + a * c$
9. $\exists 1$ *tal que* $a * 1 = 1 * a = a$

Observação 1.2. *A definição de anel varia de autor para autor, alguns consideram anéis comutativos com unidade, outro já não consideram a existência do neutro multiplicativo*

Quando a multiplicação também é comutativa, isto é $a * b = b * a$ chamamos de anel comutativo.

Exemplo 1.3. *Temos que $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ com as operações usuais de soma e produto são anéis.*

Proposição 1.4. *Seja R um anel não trivial, se $x \in R$ então $x * 0 = 0$*

Proof. Temos que
$$x * 0 = x * (0 + 0) = x * 0 + x * 0$$
mas como existe o oposto de $x * 0$ podemos somar

$$x * 0 - x * 0 = x * 0 + x * 0 - x * 0$$

logo
$$0 = x * 0$$

□

Temos que caso $1 = 0$ o anel é trivial. Já que $x = x * 1 = x * 0 = 0$.

Definição 1.5 (Subaneis).

Definição 1.6 (Homomorfismo). *Uma função entre os anéis A e B é dito homomorfismo se:*

1. $f(x + y) = f(x) + f(y)$
2. $f(xy) = f(x)f(y)$

Definição 1.7 (Ideais(maximal e primo)).

Definição 1.8 (Divisores de zero).

Definição 1.9 (Anéis quociente).

2 Corpo de fração

3 Localização em anéis comutativos

Vamos seguir a demonstração a partir de um anel A sem unidade, no livro temos a demonstração feita com anel com unidade.

Definição 3.1. *Um subconjunto S de um anel A é dito um conjunto multiplicativo se $1 \in S$ e $x \cdot y \in S$ para todo $x, y \in S$.*

Agora que já temos todas as definições necessárias para iniciar a construção, vamos começar.

Definição 3.2. *Seja A um anel e S um conjunto multiplicativo de A. Vamos definir uma relação em $A \times S$ como*

$$(a, b) \equiv (c, d) \Leftrightarrow (ad - bc)u = 0$$

para algum $u \in S$.

Esta relação, é uma relação de equivalência.

Proof. Vamos mostrar que é uma relação reflexiva, simétrica e transitiva.

Reflexiva $(a, b) \equiv (a, b)$, de fato, pois $ab - ba = 0$, já que estamos trabalhando com um anel comutativo.

Simétrica Temos que $(a, b) \equiv (c, d)$ nos leva a $(ad - bc)u = 0$ mas como o anel é comutativo podemos trocar a ordem dos fatores $(da - cb)u = 0$. Multiplicando por -1 chegamos a $(cb - da)u = 0$ que é igual a $(c, d) \equiv (a, b)$.

Transitividade Seja $(a, b) \equiv (c, d)$ e $(c, d) \equiv (e, f)$, devemos chegar em $(a, b) \equiv (e, f)$. De $(a, b) \equiv (c, d)$ temos $(ad - bc)u_1 = 0$ para algum $u_1 \in S$.

De $(c, d) \equiv (e, f)$ temos $(cf - de)u_2 = 0$ para algum $u_2 \in S$.

Multiplicando a primeira equação por fu_2 e a segunda por bu_1 chegamos a

$$(fad - fbc)u_2u_1 = 0$$

$$(bcf - bde)u_2u_1 = 0$$

Novamente, vamos usar a comutatividade para reorganizar as expressões

$$(afd - fbc)u_2u_1 = 0 \ (*)$$
$$(fbc - bed)u_2u_1 = 0$$

Da segunda expressão temos que $fbcu_2u_1 = bedu_2u_1$

Substituindo isso em (*) temos

$$(afd - bed)u_2u_1 = 0$$

$$(af - be)du_2u_1 = 0$$

Como S é multiplicativo e $u_1 \in S$, logo $du_2u_1 \in S$ e portanto $(a, b) \equiv (e, f)$.

Portanto, a relação definida em $A \times S$ é de equivalência.

□

Notação 3.3. *Denotamos por $S^{-1}A$ o conjunto das classes de equivalência. Denotamos por $\frac{a}{s}$ a classe de equivalência de (a,s).*

Vamos agora definir as operações de soma e multiplicação em $S^{-1}A$.

Definição 3.4. *A soma em $S^{-1}A$ é definida por $\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at+sc}{st}$*

Definição 3.5. *A multiplicação em $S^{-1}A$ é definida por $\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$*

Vamos verificar se as operações estão bem definidas, ou seja, se as operações acima não dependem do representante escolhido da classe.

Proposição 3.6. *As operações de soma e multiplicação em $S^{-1}A$ não dependem dos representantes da classe.*

Proof. Seja $\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$, vamos fazer as operações com esses dois representantes e ver que a operação não depende da escolha. Sabemos que $(as' - sa')u = 0$ para algum u.

$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at+sc}{st}$

$\frac{a'}{b'} + \frac{c}{d} = \frac{a'd+b'c}{b'd}$

$(ad + bc)b'd - bd(a'd + b'c) = adb'd + \cancel{bcb'd} - bda'd - \cancel{bdb'c} = adb'd - bda'd$

Multiplicando tudo por u temos

$uab'dd - ua'bdd$ mas como $ab'u = ba'u$, logo $uab'dd - ua'bdd = (ab'dd - a'bdd)u = 0$, ou seja, são "iguais" os resultados da soma.

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

$\frac{a'}{b'} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a'c}{b'd}$

Utilizando novamente a relação temos que $acb'd - bda'c = ab'cd - a'bcd$ multiplicando por u vamos ficar com $ab'cdu - a'bcdu$ e usando $ab'u = ba'u$ ficaremos com $ab'cdu - a'bcdu = 0$ □

$S^{-1}A$ com a soma e a multiplicação definida acima é um anel.

Agora vamos ver alguns exemplos de anéis que podemos fazer essa construção. Mas antes vamos o que é um domínio de integridade, que é um tipo especial de anel.

Definição 3.7. *Um domínio de integridade (ou simplesmente domínio) é um anel comutativo unitário A tal que se $a, b \in A$ e $a \cdot b = 0$ então $a = 0$ ou $b = 0$.*

Exemplo 3.8. *O caso quando A é um domínio de integridade é um caso particular do anel de frações, isso acontece pois $S = A - \{0\}$ é um conjunto multiplicativo.*

Para provar o exemplo acima, basta provar a seguinte proposição.

Proposição 3.9. *Seja A um domínio de integridade, então o conjunto $C = A - \{0\}$ é um conjunto multiplicativo.*

Proof. Como $1 \in A$, logo $1 \in C$. Temos também que para xy com $x, y \in C$ $xy \neq 0$, pois A é um domínio de integridade e x e y não podem ser nulos. Portanto C é fechado na multiplicação, logo é um conjunto multiplicativo. $\square$

Exemplo 3.10. *Tomando como nosso anel os inteiros ($\mathbb{Z}$) e o nosso conjunto multiplicativo como $S = \mathbb{Z} - 0$, teremos $\frac{a}{b}$, onde $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in S$, ou seja, b deve ser inteiro não nulo e isso é exatamente a definição dos números racionais, que sabemos que é um corpo.*

Exemplo 3.11. *Podemos tomar como $A = \mathbb{Z}$ e S sendo as potências de 2, ou seja, $S = \{2^n\}$ com $n \geq 0$, dessa forma $S^{-1}A = \{\frac{a}{b}$ tal que $a \in A$ e $b = 2^n\}$ com $n \geq 0$.*

Exemplo 3.12. *Temos que $S^{-1}A$ será o anel zero se tivemos que $0 \in S$. De fato, pois se $0 \in S$ podemos tomar u da relação de equivalência como 0, dessa forma $(ad - bc)0 = 0$ para todo $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, dessa forma todos os elementos são equivalentes entre si, em particular serão equivalente ao elemento $\frac{0}{0}$, ou seja, $S^{-1}A$ pode ser representado por um único elemento, o $\frac{0}{0}$*

Um importante homomorfismo é $f(a) = a/1$ para $f : A- > s^{-1}A$.
f definada para um anel sem unidade
quando f é injetora? $<=>$ sem divisor de zero

Proposição 3.13. *Seja $g : A- > B$ um homomorfismo de anéis tal que $g(s)$ é invertível em B para todo $s \in S$. Então existe um único homomorfismo de anel $h : S^{-1}A- > B$ tal que $g = hof$*

References

[1] *Atiyah M. F.; MacDonald M. G., Introduction to Commutative Algebra . Addison-wesley publishing company, 1969.*

[2] *Fraleigh, J. B., A first course in abstract algebra. Person , 2003.*

[3] *Herstein I. N., Topics in algebra. University of Chicago, 1975.*