Análisis Matemático I — Licenciatura en Ciencias de la Computación
Cálculo I — Licenciatura en Matemática Aplicada
FAMAF – UNC

Examen Final - 28 de julio de 2021

TODAS LAS RESPUESTAS DEBEN ESTAR JUSTIFICADAS

Ejercicio 1.

a) ¿Cuáles son los números que se encuentran a menor distancia de -1 que de 3 ó a menor distancia que 5 de -8?

1) Escriba inecuaciones que representen el problema.
2) Resuelva las inecuaciones del punto anterior.

b) Grafique el conjunto de soluciones de la siguiente desigualdad:

$$\ln\left[(x-3)(x+2)\right] - \ln(x-4) > 0$$

c) Dada la función $f(x) = e^{-(x-1)^2} + 1$, $f : R \to R$ responda las siguientes preguntas, justificando la respuesta:

1) ¿Es inyectiva?
2) ¿Es subyectiva?
3) ¿Es biyectiva?
4) ¿Es inversible?
5) ¿Es necesario restringir el dominio para que sea inyectiva? En caso afirmativo, hágalo.
6) ¿Es necesario restringir el espacio de llegada para que sea subyectiva? En caso afirmativo, hágalo.
7) Indique dominio y espacio de llegada para que la función tenga inversa y calcúlela.

d) Defina inyectividad.

Ejercicio 2.

a) Enuncie el teorema del valor intermedio, describiendo adecuadamente las hipótesis y la tesis del teorema.

b) Sea $h(x)$ una función que cumple las siguientes desigualdades en el intervalo $0 \leq x \leq 1$:

$$\frac{\sqrt{9+x}-3}{x} \leq h(x) \leq \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{tg} x}{6x^2 \cos^2 x}$$

Calcule $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x)$

c) Sea $g(x)$ la siguiente función definida a tramos:

$$g(x) = \begin{cases} |x| & x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ \dfrac{x}{(x-1)^2} & 0 < x < 2 \\ x^2 - 4 & 2 \leq x \end{cases}$$

¿Para qué valores de x esta función es discontinua y qué tipo de discontinuidad tiene?

d) Demuestre que hay al menos una solución de la siguiente ecuación en el intervalo $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$:

$$\left(\frac{\operatorname{sen} x}{2}\right)^2 - \left(\frac{\cos x}{3}\right)^2 = 0$$

Ejercicio 3. a) Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

(i) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$

(ii) $g(x) = \frac{x^2}{e^x + e^{-x}}$

b) (i) Obtenga la ecuación de la recta tangente al gráfico de la función $f(x) = \dfrac{2x}{1+x}$ en el punto $(1, 1)$.

(ii) Utilice la ecuación obtenida en (i) para estimar el valor de $f(0.9)$ con una aproximación lineal.

c) Enuncie el Teorema de Rolle e interprete gráficamente este resultado (puede ser mediante un ejemplo).

Ejercicio 4. Grafique una función que cumpla con **todas** las siguientes características:

a) La función está definida para todos los reales.

b) Tiene una asíntota horizontal en $y = 6$ y $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

c) Tiene sólo 2 discontinuidades: una esencial en $x = 2$ y una de salto en $x = 5$.

d) Es continua por derecha en $x = 2$ y $f(2) = 3$; $f(x) < 0$ en el intervalo $(3, 5)$ y $f(5) = 1$.

e) $f'(x)$ y $f''(x)$ no existen únicamente para $x = -1$, $x = 2$ y $x = 5$.

f) $f'(x) = 0$ para $x = -3$ y $x = 0$.

g) $f'(x) > 0$ exclusivamente en los intervalos $(-3, -1)$ y $(5, +\infty)$.

h) $f''(x) > 0$ exclusivamente en los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$ y $(3, 5)$.

i) Tiene 2 puntos de inflexión.

j) En función de los datos brindados, especificar cuáles son las asíntotas de la función, cuáles son los máximos, mínimos, los puntos críticos y puntos de inflexión, dónde la función crece y decrece, y dónde es cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo.

Ejercicio 5. a) Encuentre el valor de k ($k > 0$) para el que se cumple que :

$$\int_{-1}^{k} \frac{x+1}{x^2 + 2x + 5}\, dx = \ln 2$$

.

b) Grafique y calcule el área encerrada por las curvas : $y_1 = x^2$, $y_2 = -x$, $x_1 = -1$ y $x_2 = 2$.

c) Sean f y F tal que $F'(x) = f(x)$, funciones continuas en $\mathbb{R}$. En la tabla se dan valores de F para algunos puntos del dominio. Con los datos de la tabla que considere necesarios, calcule el valor de $\int_1^3 f(2x)dx$, mostrando su cálculo.

	$x=1$	$x=2$	$x=3$	$x=4$	$x=5$	$x=6$
F	4	2	1	8	10	6