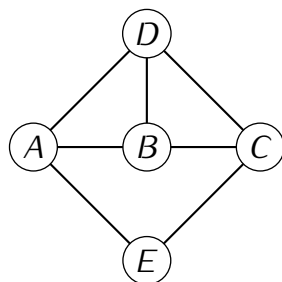


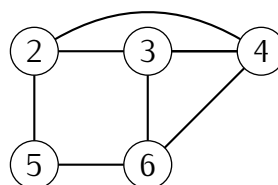
Práctico 5 Matemática Discreta I – Año 2021/1 FAMAF

(1) Escribir las listas de adyacencia de los siguientes grafos.

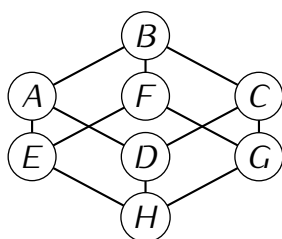
(a)



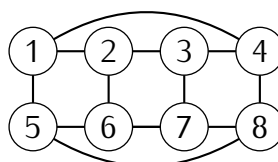
(b)



(c)



(d)



(2) Dibujar los grafos correspondientes a las siguientes listas de adyacencias.

(a)

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>
<i>b</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>a</i>
<i>d</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>c</i>	<i>b</i>
<i>e</i>	<i>e</i>	<i>e</i>	<i>e</i>	<i>c</i>
			<i>d</i>	

(b)

1	2	3	4	5
2	1	1	1	1
3	3	2	2	
4	4	4	3	
5				

(c)

1	2	3	4	5	6	7	8
6	3	2	5	4	1	1	6
7	7		6		4	2	7
					8	8	

(d)

1	2	3	4	5
2	1	1	1	1
3	3	2	2	4
4	4	4	3	
5			5	

(e)

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>
<i>b</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>a</i>
<i>d</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>c</i>	<i>c</i>
<i>e</i>		<i>e</i>		

(f)

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>
<i>b</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>a</i>
<i>d</i>	<i>c</i>	<i>e</i>	<i>e</i>	<i>c</i>
<i>e</i>				<i>d</i>

(g)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
6	4	7	2	2	1	3	3	1	8	7	6
9	5	8			12	11	10	12	11	10	9

- (3) Un *grafo planar* es un grafo para el que *existe* un dibujo del grafo en el plano tal que no hay ningún cruce de aristas. Por ejemplo, los grafos (a), (b) y (d) del ejercicio (1) son planares.

Un grafo planar divide al plano en *regiones* delimitadas por aristas, por ejemplo el grafo (a) del ejercicio (1) determina 4 regiones:

- la delimitada por las aristas AB , BD y DA ,
- la delimitada por BC , CD y DB ,
- la delimitada por AB , BC , CE y EA , y
- la región exterior.

Para todo grafo planar vale el famoso *Teorema de Euler para poliedros* que dice

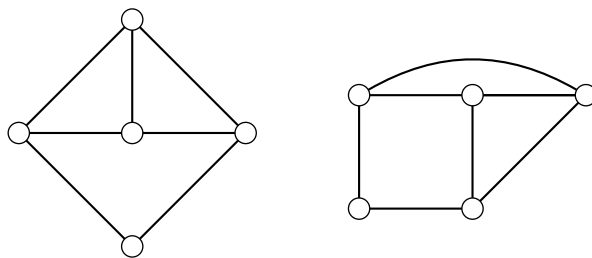
$$C + V - A = 2, \quad (*)$$

donde C es el número de regiones (en el caso de poliedros, caras), A es el número de aristas y V es el número de vértices.

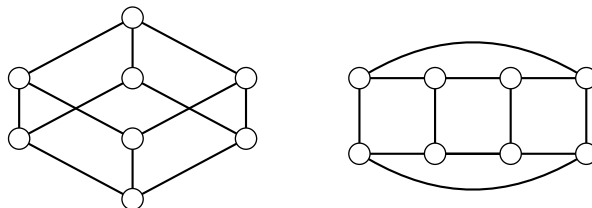
Comprobar que los grafos (a), (b) y (d) del ejercicio (1) satisfacen la fórmula (*).

- (4) Demostrar que el grafo (d) del ejercicio (2) es planar y comprobar la fórmula de Euler.
- (5) ¿Cuántas aristas tiene el grafo completo K_n ? ¿Para qué valores de n se puede afirmar que K_n es planar?
- (6) Demuestre que los siguientes pares de grafos son isomorfos, especificando un isomorfismo en cada caso.

(a)



(b)

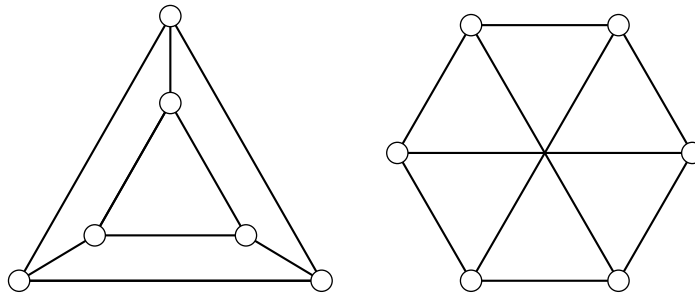


- (7) Encuentre un isomorfismo entre los grafos dados por las siguientes listas (ambas listas especifican versiones de un famoso grafo conocido como *grafo de Petersen*).

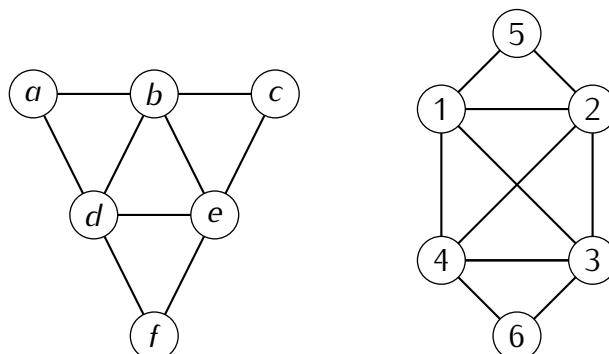
a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
b	a	b	c	a	a	b	c	d	e
e	c	d	e	d	h	i	f	f	g
f	g	h	i	j	i	j	j	g	h

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1	2	3	0	1	0	2	6
5	2	3	4	5	4	4	3	5	7
7	6	8	7	6	8	9	9	9	8

- (8) (a) Encuentre todos los grafos de 5 vértices y 2 aristas no isomorfos entre sí.
 (b) Encuentre todos los grafos de 4 vértices y 3 aristas no isomorfos entre sí.
- (9) Pruebe que los siguientes grafos no son isomorfos.

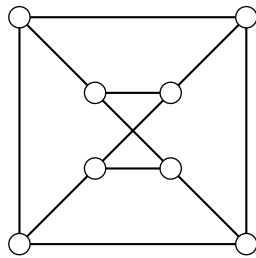


- (10) Determinar la valencia máxima y la valencia mínima de cada grafo del ejercicio (1). Decir cual grafo es regular.
- (11) Escribir la lista de valencias de cada grafo del ejercicio (2). Es decir, escribir todos los valores que toman las valencias en cada grafo (sin repetir).
- (12) Para cada una de las siguientes secuencias, encuentre un grafo que tenga exactamente las valencias indicadas o demuestre que tal grafo no existe.
- (a) 3, 3, 1, 1 (b) 3, 2, 2, 1 (c) 3, 3, 2, 2, 1, 1
 (d) 4, 1, 1, 1, 1 (e) 7, 3, 3, 3, 2, 2 (f) 4, 1, 1, 1
- (13) Probar que los siguientes grafos no son isomorfos.

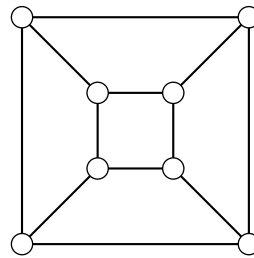


- (14) Encuentre una función del grafo G al H que preserve valencias. ¿Es un isomorfismo?

G :



H :



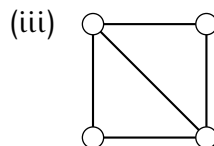
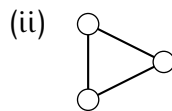
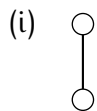
- (15) Sean $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ dos grafos, y sea $\alpha : V \mapsto V'$ una función biyectiva tal que $\delta(v) = \delta(\alpha(v)) \quad \forall v \in V$.

(a) ¿Puede afirmar que α es un isomorfismo?

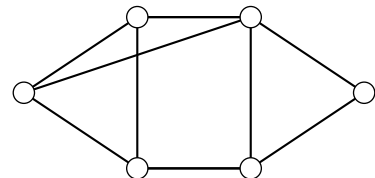
(b) ¿Puede afirmarlo si $|V| = 3$ ó 4 ?

- (16) Sea $G = (V, E)$ un grafo. El *grafo complemento* de G es $\overline{G} = (V, \overline{E})$, donde \overline{E} son todos los 2-subconjuntos de V que no están en E . Es decir, el grafo complemento tiene los mismos vértices que el grafo original y todas las aristas que le faltan para ser un grafo completo. Una propiedad importante del grafo complemento es: Si los grafos G y H son isomorfos entonces \overline{G} y \overline{H} son isomorfos.

(a) Halle el complemento de los siguientes grafos:



(iv)

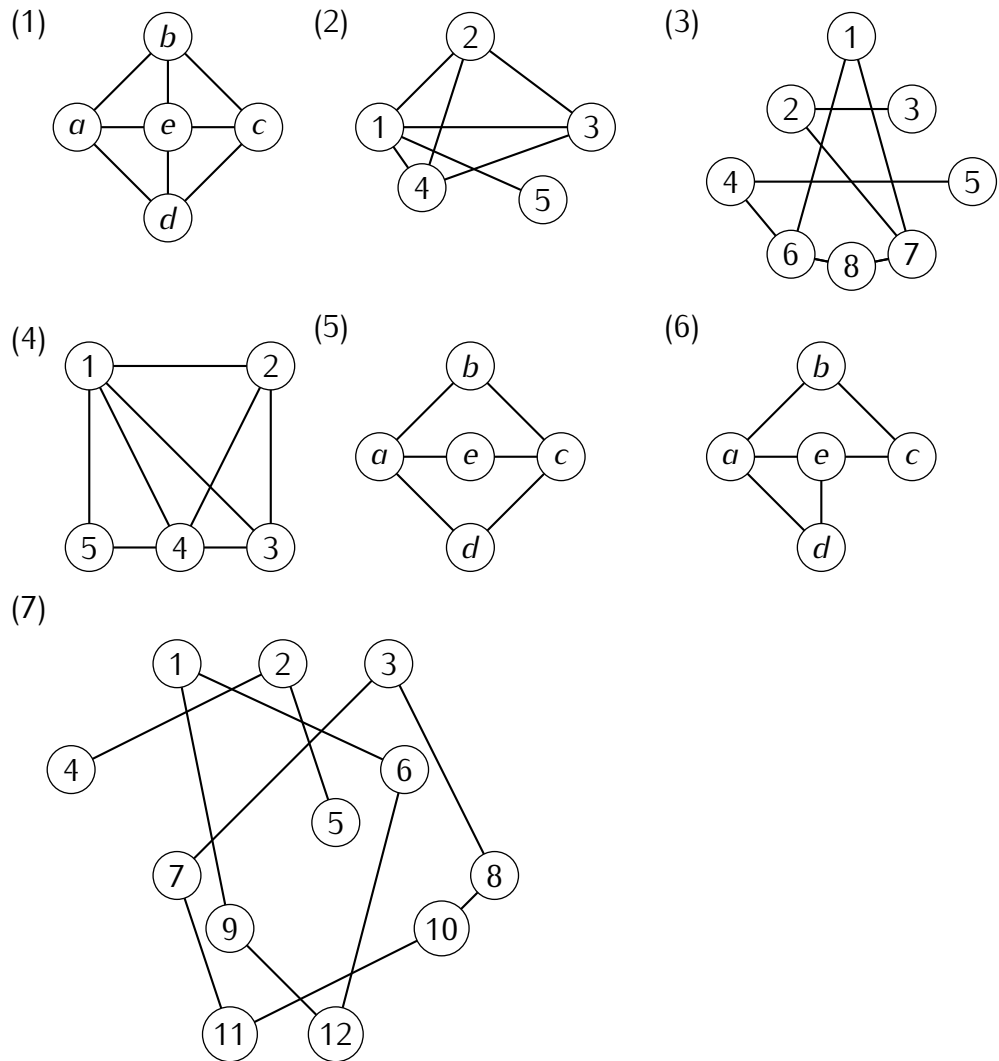


(b) Si $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $\delta(v_i) = d_i \quad \forall i = 1, \dots, n$, calcule las valencias del grafo complemento.

(c) Pruebe que los grafos del ejercicio (9) no son isomorfos usando los grafos complemento.

- (17) Pruebe que si G es un grafo con más de un vértice, entonces existen dos vértices con la misma valencia.

- (18) Dados los siguientes grafos:



- (a) Determine en cada caso si existen subgrafos completos de más de 2 vértices.
- (b) Para el grafo (1), dé todos los caminos que unen a con b .
- (c) Dé caminatas eulerianas en los grafos (4), (5) y (6).
- (d) Para (2) y (3), decir si existen ciclos hamiltonianos.
- (e) Determinar cuales de los siguientes pares de grafos son isomorfos:
- (i) (4) y (2),
 - (ii) (5) y (6),
 - (iii) (5) y (1).
- (f) Halle las componentes conexas del grafo (7).

(19) Dado el siguiente grafo

0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	1	0	3	0	1	0	1
3	2	3	2	5	4	5	2	3
5	6	7	4		6	7	6	5
7	8		8		8		8	7

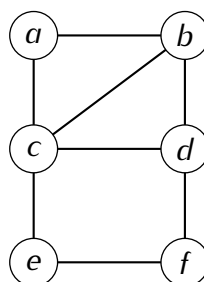
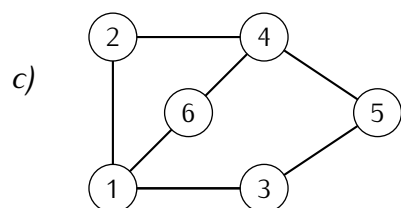
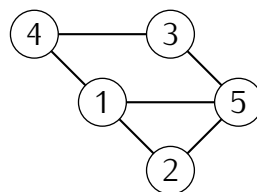
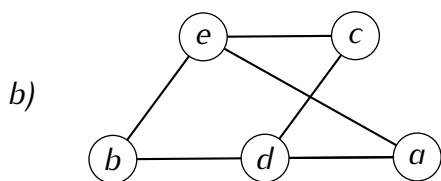
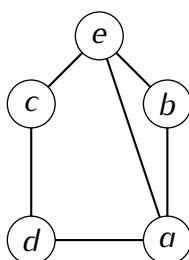
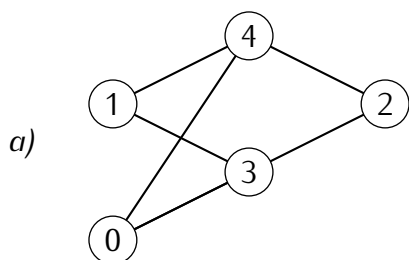
encuentre un ciclo hamiltoniano (si existe). Determine si existe una caminata euleriana, y en caso de ser así, encuentre una.

- (20) Un ratón intenta comer un $3 \times 3 \times 3$ cubo de queso. Él comienza en una esquina y come un subcubo de $1 \times 1 \times 1$, para luego pasar a un subcubo adyacente. ¿Podrá el ratón terminar de comer el queso en el centro?

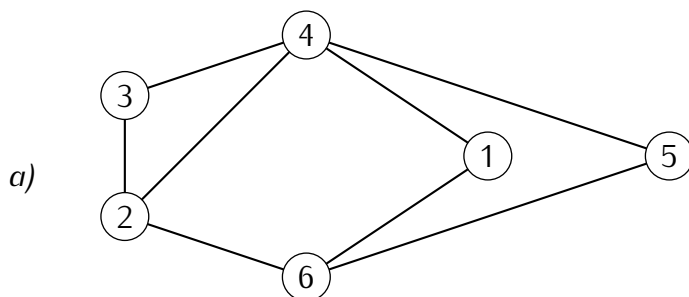
- (21) Dé todos los árboles de 5 vértices no isomorfos.

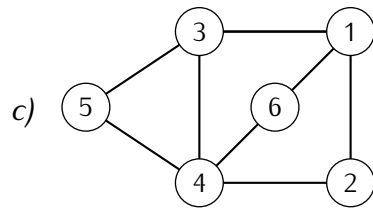
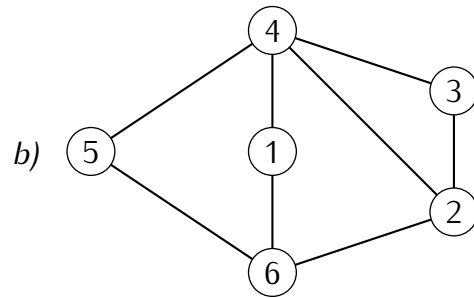
§ Ejercicios de repaso.

- (22) Probar que los siguientes pares de grafos no son isomorfos.



- (23) Encontrar una caminata euleriana en cada uno de los siguientes grafos.





- (24) En el grafo de la derecha del ejercicio (13), encontrar un *circuito euleriano*, es decir una caminata euleriana que comienza y termina en un mismo vértice.