

Práctico 0

NÚMEROS COMPLEJOS
SOLUCIONES

1. Expresar los siguientes números complejos en la forma $a+ib$. Hallar el módulo y conjugado de cada uno de ellos, y graficarlos.

$$a) (-1+i)(3-2i)$$

$$b) i^{131} - i^9 + 1$$

$$c) \frac{1+i}{1+2i} + \frac{1-i}{1-2i}$$

SOLUCIN:

$$a) (-1+i)(3-2i) = -3 + 3i + 2i - 2i^2 = -3 + 5i + 2 = \boxed{-1 + 5i}$$

$$|(-1+i)(3-2i)| = |-1 + 5i| = \sqrt{(-1)^2 + 5^2} = \sqrt{1 + 25} = \boxed{\sqrt{26}}$$

$$\overline{(-1+i)(3-2i)} = \overline{-1 + 5i} = \boxed{-1 - 5i}$$

$$b) i^{131} - i^9 + 1 = i^{4 \cdot 32 + 3} - i^{4 \cdot 2 + 1} + 1 = (i^4)^{32} \cdot i^3 - (i^4)^2 \cdot i^1 + 1 = i^3 - i + 1 = -i - i + 1 = \boxed{1 - 2i}$$

$$|i^{131} - i^9 + 1| = |1 - 2i| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{1 + 4} = \boxed{\sqrt{5}}$$

$$\overline{i^{131} - i^9 + 1} = \overline{1 - 2i} = \boxed{1 + 2i}$$

$$c) \frac{1+i}{1+2i} + \frac{1-i}{1-2i} = \frac{(1+i)(1-2i) + (1-i)(1+2i)}{1^2 + 2^2} = \frac{2\operatorname{Re}(1-2i+i-2i^2)}{5} = \boxed{\frac{6}{5}}$$

$$\left| \frac{1+i}{1+2i} + \frac{1-i}{1-2i} \right| = \left| \frac{6}{5} \right| = \boxed{\frac{6}{5}}$$

$$\overline{\frac{1+i}{1+2i} + \frac{1-i}{1-2i}} = \overline{\frac{6}{5}} = \boxed{\frac{6}{5}}$$

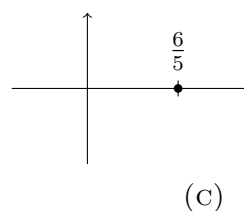
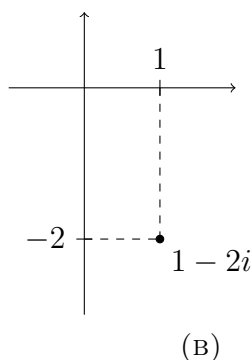
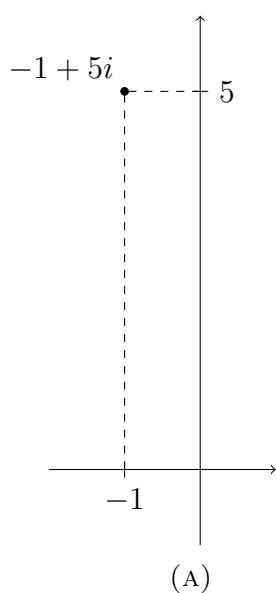


FIGURA 1. Ejercicio 1

2. Encontrar números reales x e y tales que $3x + 2yi - xi + 5y = 7 + 5i$.

SOLUCIN: Sean $x, y \in \mathbb{R}$, separo las partes real e imaginaria de la ecuacin y planteo un sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 3x + 2yi - xi + 5y = 7 + 5i &\implies \begin{cases} \operatorname{Re}(3x + 2yi - xi + 5y) = \operatorname{Re}(7 + 5i) \\ \operatorname{Im}(3x + 2yi - xi + 5y) = \operatorname{Im}(7 + 5i) \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ 2y - x = 5 \end{cases} \\ \begin{array}{rcl} 3(2y - 5) + 5y & = & 7 \\ 6y - 15 + 5y & = & 7 \\ 11y & = & 22 \\ y & = & 2 \end{array} \left| \begin{array}{rcl} 2 \cdot 2 - 5 & = & x \\ -1 & = & x \end{array} \right| \boxed{\begin{array}{rcl} y & = & 2 \\ x & = & -1 \end{array}} \end{aligned}$$

3. Probar que si $z \in \mathbb{C}$ tiene módulo 1 entonces $z + z^{-1} \in \mathbb{R}$.

SOLUCIN: Sabemos que el inverso de z se puede escribir $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$. Como por hiptesis tenemos que $|z| = 1$, resulta $z^{-1} = \bar{z}$. Luego:

$$z + z^{-1} = z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R}$$

□

4. Probar que si $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ entonces el polinomio $x^2 + a^2$ tiene siempre dos raíces complejas distintas.

SOLUCIN: Se iguala a 0 el polinomio:

$$0 = x^2 + a^2 = x^2 - (ia)^2 = (x + ai)(x - ai) \implies \begin{cases} x_1 = ai \\ x_2 = -ai \end{cases}$$

Se tendr $x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow a \neq 0$.