Análisis Matemático I — Licenciatura en Ciencias de la Computación
Cálculo I — Licenciatura en Matemática Aplicada

FAMAF – UNC

Examen Final - 11 de agosto de 2021

TODAS LAS RESPUESTAS DEBEN ESTAR JUSTIFICADAS

Ejercicio 1.

a) ¿Cuáles son los números que se encuentran a menor distancia de 5 que de 3 y a menor distancia de 4 que de 8?

1) Escriba inecuaciones que representen el problema.
2) Resuelva las inecuaciones del punto anterior.

b) Grafique el conjunto de soluciones de la siguiente desigualdad:

$$\frac{|x+4|}{|x-1|} < (x+4)$$

c) Dada la función $f(x) = e^{-x^4} + 1$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, responda las siguientes preguntas justificando la respuesta:

1) ¿Es inyectiva?
2) ¿Es subyectiva?
3) ¿Es biyectiva?
4) ¿Es inversible?
5) ¿Es necesario restringir el dominio para que sea inyectiva? En caso afirmativo, hágalo.
6) ¿Es necesario restringir el espacio de llegada para que sea subyectiva? En caso afirmativo, hágalo.
7) Indique dominio y espacio de llegada para que la función tenga inversa y calcúlela.

d) Defina biyectividad.

Ejercicio 2.

a) Calcule el siguiente límite:

$$\lim_{x\to\infty} (x + e^x)^{1/x}$$

b) Encuentre la constante k para que la función $f(x)$ sea continua para todo número real.

$$f(x) = \begin{cases} k^2 + 3x & x < -1 \\ 6 & x = -1 \\ -(3+x)k & -1 < x \end{cases}$$

c) Dé los valores de t donde la función $g(t)$ es discontinua y diga qué tipo de discontinuidad tiene en cada uno de esos puntos.

$$g(t) = \begin{cases} t^2 - 1 & t \leq -1 \\ \dfrac{1}{t^2(t-2)^2} & -1 < t < 1 \\ 3 & t = 1 \\ t^2 - t + 1 & 1 < t \end{cases}$$

Ejercicio 3. a) Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

(i) $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{e^{x^2}}$

(ii) $g(x) = \ln(\sqrt{x^2+1})$

b) (i) Obtenga la ecuación de la recta tangente al gráfico de la función $f(x) = \frac{1-x}{1+x^2}$ en el punto $(0,1)$.

(ii) Utilice la ecuación obtenida en (i) para estimar el valor de $f(0.1)$ con una aproximación lineal.

c) ¿Cuándo decimos que una función f es derivable en un punto x_0? Explique con sus palabras qué interpretación geométrica tiene el valor $f\,'(x_0)$.

Ejercicio 4. Grafique una función que cumpla con **todas** las siguientes características:

a) La función está definida para todos los reales.

b) Tiene una asíntota horizontal en $y = -6$ y $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

c) Tiene sólo 2 discontinuidades: una esencial en $x = 3$ y una de salto en $x = 6$.

d) Es continua por derecha en $x = 3$ y $f(3) = -3$; $f(x) > 0$ en el intervalo $(4, 6)$ y $f(6) = -1$.

e) $f'(x)$ y $f''(x)$ no existen únicamente para $x = 0$, $x = 3$ y $x = 6$.

f) $f'(x) = 0$ para $x = -2$ y $x = 1$.

g) $f'(x) < 0$ exclusivamente en los intervalos $(-2, 0)$ y $(6, +\infty)$.

h) $f''(x) < 0$ exclusivamente en los intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ y $(4, 6)$.

i) Tiene 2 puntos de inflexión.

j) En función de los datos brindados, especificar cuáles son las asíntotas de la función, cuáles son los máximos, mínimos, los puntos críticos y puntos de inflexión, en qué intervalos la función crece y decrece, y en cuáles es cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo.

Ejercicio 5. a) En la gráfica de $y = f(x)$, la pendiente en cualquier punto (x, y) es el doble del valor de x. Si $f(2) = 3$, calcule el valor de $f(3)$.

b) Grafique y calcule el área encerrada por las curvas : $y_1 = 1 - x^2$; $y_2 = |x| - 1$; $x_1 = -1$ y $x_2 = 1/2$.

c) Si $F(x)$ es una antiderivada de $\dfrac{(\ln x)^3}{x}$ y $F(1) = 0$, calcule el valor de $F(e)$.