NÚMEROS COMPLEJOS

PATRICIA KISBYE

1. Definición

En los números reales es posible resolver cualquier ecuación lineal en una variable:

$$ax = b,$$

siempre que a sea distinto de 0. Pero las ecuaciones cuadráticas, aún las más simples como

$$x^2 = b,$$

no tienen solución si $b < 0$. A fin de encontrar una solución a este problema, se introduce un número imaginario i que resuelve la ecuación $x^2 = -1$, y combinándolo con los números reales se construye el conjunto de los números complejos. Más precisamente, un número complejo es una expresión de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales, e i es un número *imaginario* con la propiedad $i^2 = -1$. Al conjunto de los números complejos se lo denota $\mathbb{C}$, y está definido por:

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a,\ b \in \mathbb{R}\}.$$

Por ejemplo, los siguientes son números complejos:

$$2 + 5i, \qquad 0 + (-2)i, \qquad -2 + 3i, \qquad 5 + 0i, \qquad 1 + 1i.$$

En los casos en que a o b son iguales a 0, se suele omitir su escritura, y también se escribe $a - bi$ en lugar de $a + (-b)i$, y $a + i$ por $a + 1i$. De este modo:

$$0 + (-2)i = -2i, \qquad 5 + 0i = 5, \qquad 1 + 1i = 1 + i.$$

Si $z = a + bi$ es un número complejo, denominamos *parte real de* z a a, y *parte imaginaria de* z a b. Lo denotamos:

$$Re(z) = a, \qquad Im(z) = b.$$

En particular, los números reales están contenidos en $\mathbb{C}$, y son aquellos números complejos con parte imaginaria nula: $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid Im(z) = 0\}$.

2. Operaciones en $\mathbb{C}$

En los números complejos se definen las operaciones de suma y producto. La suma de dos números se obtiene sumando las partes real e imaginaria respectivamente:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

La multiplicación de dos números complejos se calcula aplicando la propiedad distributiva y usando el hecho que $i^2 = -1$:

$$\begin{aligned}(a + bi) \cdot (c + di) &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= ac + bd(-1) + (ad + bc)i \\ (a + bi) \cdot (c + di) &= (ac - bd) + (ad + bc)i\end{aligned}$$

Los números complejos junto con las operaciones de suma y producto satisfacen los axiomas de cuerpo. Esto es:

- La suma y el producto son asociativos y conmutativos. (S1, S2, P1 y P2).
- El producto es distributivo con respecto a la suma. (D).
- Existe un elemento neutro para la suma y otro para el producto. (S3 y P3)
- Todo número complejo z tiene un opuesto, $-z$. (S4)
- Todo número complejo z distinto de 0 tiene un inverso, z^{-1}. (P4)

En el caso de (S3) y (S4), el elemento neutro es el número complejo $0 = 0 + 0i$, y el opuesto de $a + bi$ es $-a - bi$.

Para (P3), el elemento neutro para el producto es $1 = 1 + 0i$. Lo que no resulta tan sencillo a priori es determinar cuál es el inverso de un número complejo arbitrario $z = a + bi$. Nos ocupamos de esto en el siguiente parágrafo.

2.1. **Inverso de un número complejo.** Dado un número complejo $z = a + bi$, se define su *conjugado* como $\overline{z} = a - bi$. Es decir, el número que se obtiene reemplazando a b por su opuesto. Así por ejemplo:

$$\overline{-5 + 3i} = -5 - 3i, \qquad \overline{2 - 3i} = 2 + 3i, \qquad \overline{-3} = -3, \qquad \overline{-5i} = 5i.$$

Si z, $w \in \mathbb{C}$, se cumple que

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \qquad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}.$$

Además, notemos que si $z = a + bi$, entonces

$$z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

Por lo tanto $z \cdot \overline{z} \geq 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$, y es igual a 0 si y sólo si $z = 0$.

Definición 2.2. Si $z \in \mathbb{C}$, el *módulo* de z es el número real dado por

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}.$$

Si $z = a + bi$, con a, $b \in \mathbb{R}$, entonces se cumple que

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Por ejemplo,

$$|4 - 3i| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5, \qquad |0 + 0i| = 0, \qquad |-3i| = \sqrt{(-3)^2} = 3.$$

Notemos que si $z = a$ es un número real, su módulo coincide con la definición de valor absoluto, $|z| = \sqrt{a^2} = |a|$, por lo cual es razonable utilizar la misma notación.

Además, si z, $w \in \mathbb{C}$, entonces

$$|z \cdot w|^2 = (z \cdot w) \cdot \overline{(z \cdot w)} = z \cdot w \cdot \overline{z} \cdot \overline{w} = z \cdot \overline{z} \cdot w \cdot \overline{w} = |z|^2 \cdot |w|^2,$$

por lo tanto $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$.

Notemos ahora que si $z \neq 0$, entonces

$$z \cdot \Big(\frac{1}{|z|^2} \cdot \overline{z}\Big) = 1.$$

Esto nos permite dar la definición de inverso de un número complejo, no nulo.

Definición 2.3. Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. El *inverso* del número complejo $z = a + bi$ es

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i.$$

Ejemplo 2.4. Calculamos el inverso de los números complejos $2 - 3i$, $3i$ y $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

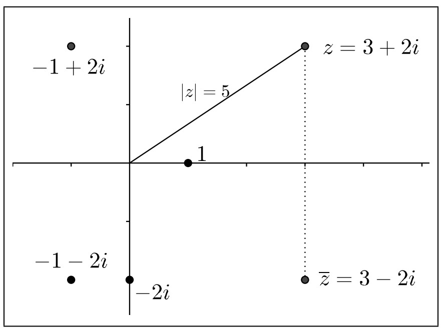
$$\begin{aligned}
(2 - 3i)^{-1} &= \frac{2 + 3i}{2^2 + 3^2} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13} i \\
(3i)^{-1} &= \frac{-3i}{9} = -\frac{1}{3} i \\
\Big(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)^{-1} &= \frac{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

Notación: Si z, $w \in \mathbb{C}$ y $w \neq 0$, la escritura $\frac{z}{w}$ sirve para denotar $z \cdot w^{-1}$.

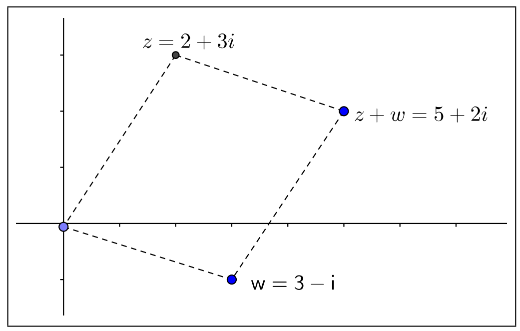
3. Notación polar

Así como los números reales tienen una representación geométrica en una recta, los números complejos se representan en el plano cartesiano, identificando a cada uno de los ejes con los complejos con parte imaginaria nula y parte real nula, respectivamente (Figura 1(a)). Es decir, cada número complejo $z = a + bi$ se identifica con el punto del plano cartesiano con coordenadas (a, b).

En particular, el conjugado de z se obtiene reflejando el par (a, b) con respecto al eje real, y $|z|$ es la distancia euclídea entre el par (a, b) y el origen de coordenadas.



(a) Representación en el plano



(b) Suma de complejos

FIGURE 1. Representación de $\mathbb{C}$ en el plano

Asimismo, podemos ver que la suma de dos números complejos se corresponde con la suma de pares ordenados, y geométricamente se obtiene aplicando la *regla del paralelogramo* (Figura 1(b)). Ahora bien, ¿qué interpretación geométrica podemos darle al producto? Para esto es útil conocer la notación polar de un número complejo.

Consideremos en primer lugar un número complejo $z = a + bi$ con $|z| = 1$. Es decir, con la propiedad que $a^2 + b^2 = 1$. Retomando los conceptos básicos de trigonometría, esto significa que existe un número $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que

$$a = \cos(\theta), \qquad b = \text{sen}(\theta).$$

Luego $z = \cos(\theta) + i\text{sen}(\theta)$.[1]

Si ahora consideramos un número complejo $z = a + bi$ arbitrario, distinto de 0, se cumple que

$$z = |z| \cdot \frac{z}{|z|}.$$

[1]En este caso preferimos escribir $i\text{sen}(\theta)$ en lugar de $\text{sen}(\theta)\, i$, pero es sólo una elección de notación.

Dado que el número complejo $\frac{z}{|z|}$ tiene módulo 1, se sigue que es de la forma $\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta)$. Luego podemos representar a z como:

$$z = |z| \cdot (\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta)).$$

Así resulta que todo número complejo z distinto de 0 puede escribirse en la forma cartesiana $z = a+bi$ o en la *forma polar* $z = r(\cos(\theta)+i\text{sen}(\theta))$, donde estas expresiones están relacionadas por:

$$a = r\ \cos(\theta), \qquad b = r\text{sen}(\theta).$$

Geométricamente, $r = |z|$ representa la distancia del número complejo al origen de coordenadas, y θ es la medida en radianes del ángulo entre el eje real y la semirrecta con origen en 0 y que pasa por z, tomando el sentido antihorario.

Notemos que θ no está definido de forma unívoca, ya que las funciones trigonométricas son periódicas con período 2π. No obstante la interpretación geométrica es la misma.

Definición 3.1. Sea $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Si $\theta \in [0, 2\pi)$ y $z = r\,(\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta))$, entonces θ se llama *argumento* de z.

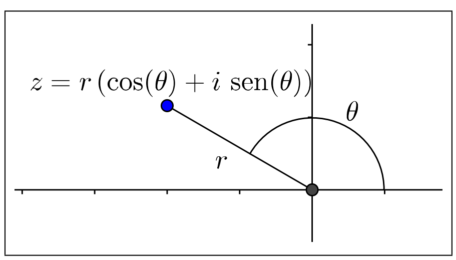


FIGURE 2. Representación polar

Ejemplo 3.2.

- El número complejo $z = 1 - i$ tiene módulo $\sqrt{2}$. Entonces:

$$1 - i = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,i\right) = \underbrace{\sqrt{2}}_{r} \cdot (\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\cos(\theta)} + \underbrace{(-\frac{\sqrt{2}}{2})}_{\text{sen}(\theta)}\ i).$$

  Luego el argumento de z es $\theta = \frac{7}{4}\pi$, y podemos escribir:

$$z = 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos(\frac{7\pi}{4}) + i\text{sen}(\frac{7\pi}{4})\right).$$

- Si $z = -5$, entonces $|z| = 5$, por lo cual

$$z = 5(-1 + 0i) = 5\left(\cos(\pi) + i\mathrm{sen}(\pi)\right).$$

Es decir que el módulo es 5 y el argumento es π.

- Si $z = 12i$, entonces $|z| = 12$, y

$$z = 12(0 + 1\,i) = 12\left(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\mathrm{sen}(\frac{\pi}{2})\right).$$

En este caso, el módulo es 12 y el argumento es $\pi/2$.

4. Fórmula de Moivre

Las propiedades de las funciones trigonométricas para la suma de ángulos establecen que:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\theta) &= \cos(\alpha)\cos(\theta) - \mathrm{sen}(\alpha)\mathrm{sen}(\theta)\\ \mathrm{sen}(\alpha+\theta) &= \mathrm{sen}(\alpha)\cos(\theta) + \cos(\alpha)\mathrm{sen}(\theta)\end{aligned} \tag{4.1}$$

Por otra parte, tenemos que

$$(\cos(\alpha) + i\mathrm{sen}(\alpha)) \cdot (\cos(\theta) + i\mathrm{sen}(\theta)) = \\ \cos(\alpha)\cos(\theta) - \mathrm{sen}(\alpha)\mathrm{sen}(\theta) + i\big(\mathrm{sen}(\alpha)\cos(\theta) + \cos(\alpha)\mathrm{sen}(\theta)\big). \tag{4.2}$$

De (4.1) y (4.2) podemos concluir que:

$$(\cos(\alpha) + i\mathrm{sen}(\alpha)) \cdot (\cos(\theta) + i\mathrm{sen}(\theta)) = \cos(\alpha+\theta) + i\mathrm{sen}(\alpha+\theta). \tag{4.3}$$

Teorema 4.1 (Fórmula de Moivre)**.** Sea $\theta \in \mathbb{R}$, entonces

$$(\cos(\theta) + i\mathrm{sen}(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\mathrm{sen}(n\theta) \tag{4.4}$$

Proof. La demostración sigue aplicando inducción en n y usando el resultado (4.3).

Para $n = 1$ el resultado es obvio. Supongamos cierto para $n = k$:

$$(\cos(\theta) + i\mathrm{sen}(\theta))^k = \cos(k\theta) + i\mathrm{sen}(k\theta).$$

Entonces para $n = k + 1$ tenemos:

$$\begin{aligned}(\cos(\theta) + i\mathrm{sen}(\theta))^{k+1} &= (\cos(\theta) + i\mathrm{sen}(\theta))^k \cdot (\cos(\theta) + i\mathrm{sen}(\theta))\\ &= (\cos(k\theta) + i\mathrm{sen}(k\theta)) \cdot (\cos(\theta) + i\mathrm{sen}(\theta).\end{aligned}$$

Ahora aplicando (4.3) con $\alpha = k\theta$, y dado que $k\theta + \theta = (k+1)\theta$ se sigue inmediatamente

$$(\cos(\theta) + i\mathrm{sen}(\theta))^{k+1} = (\cos((k+1)\theta) + i\mathrm{sen}((k+1)\theta)).$$

□

Esto nos permite dar una interpretación geométrica del producto de dos números complejos. Si $z = r\,(\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta))$ y $w = s\,(\cos(\alpha) + i\text{sen}(\alpha)$, entonces

$$z \cdot w = (r \cdot s)\,(\cos(\theta + \alpha) + i\text{sen}(\theta + \alpha)).$$

El módulo del producto es el producto de los módulos, y el argumento del producto es la suma de los argumentos.[2]

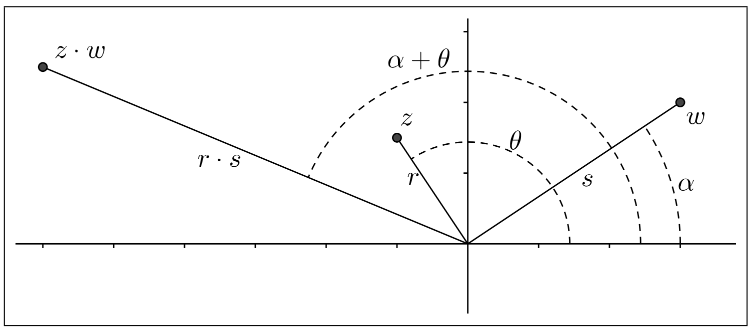


FIGURE 3. Representación de $z \cdot w$

Notación exponencial: Otra notación para representar a los números complejos es la notación exponencial, en la cual se denota

$$e^{i\theta} := \cos(\theta) + i\text{sen}(\theta).$$

Aquí e es la base del logaritmo natural o neperiano. De esta manera, cualquier número complejo $z \neq 0$, puede escribirse de la forma

$$z = e^{x+i\theta} = e^x \cdot e^{i\theta}, \qquad \text{donde } e^x = |z|, \qquad e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\text{sen}(\theta).$$

De aquí la fórmula de Euler:

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Esta notación resulta útil para reflejar las propiedades del producto de números complejos, ya que son las mismas que para la exponenciación. Recordemos que para todo $a > 0$, $x, y \in \mathbb{R}$, se cumple que $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, y si $n \in \mathbb{N}$, entonces $(a^x)^n = a^{nx}$.

[2]Observación: Si $\theta + \alpha > 2\pi$, el argumento del producto es $\theta + \alpha - 2\pi$.

En el caso de dos números complejos $z = e^{x+iy}$, $w = e^{u+iv}$, con $|z| = e^x$, $|w| = e^u$, tenemos que

$$|z \cdot w| = e^x e^y = e^{x+y},$$

y para el caso de los argumentos, la fórmula (4.3) y la Fórmula de Moivre se traducen en

$$e^{iy} \cdot e^{iv} = e^{i(y+v)}, \qquad (e^{iy})^n = e^{iny}.$$

De esta manera, el producto $z \cdot w$ se escribe en forma exponencial sumando los exponentes en las expresiones de z y w:

$$z \cdot w = e^x e^u e^{iy} e^{iv} = e^{(x+iy)+(u+iv)},$$

y si $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$z^n = \left(e^{x+iy}\right)^n = e^{n(x+iy)}.$$

5. Raíces de la unidad

En esta sección nos centraremos en resolver las ecuaciones de la forma

$$z^n = 1,$$

donde n es un número natural. Es claro que $z = 1$ es una solución para cualquier n, y si n es par entonces $z = -1$ es otra solución. Ahora bien, en el conjunto de los números complejos esta ecuación tiene exactamente n soluciones distintas[3]. Cada una de estas soluciones se denomina *raíz n-ésima de la unidad*.

Para calcular estas raíces complejas, notemos en primer lugar que si $z^n = 1$, entonces $|z|$ también es igual a 1, pues $|z| > 0$ y $|z|^n = |z^n| = 1$. Por lo tanto z debe ser de la forma

$$z = \cos(\theta) + i\,\text{sen}(\theta).$$

Tomando esta expresión para z, tenemos por la Fórmula de Moivre que

$$z^n = \cos(n\theta) + i\,\text{sen}(n\theta),$$

y si debe cumplirse $z^n = 1$ entonces θ tiene que ser tal que

$$n\theta = k \cdot 2\pi, \qquad \text{para algún } k \in \mathbb{Z}.$$

Recíprocamente, si $\theta = k\frac{2\pi}{n}$, entonces $z = \cos(\theta) + i\,\text{sen}(\theta)$ es una raíz de $z^n = 1$ puesto que satisface

$$z^n = (\cos(\theta) + i\,\text{sen}(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\,\text{sen}(n\theta) = 1.$$

[3]Esto resulta del Teorema Fundamental del Álgebra y otros resultados teóricos que no abordaremos en este curso.

Podemos concluir entonces que un número complejo es raíz de $z^n = 1$ si y sólo si es de la forma

$$z = \cos(k\frac{2\pi}{n}) + i\text{sen}(k\frac{2\pi}{n}), \qquad \text{para algún } k \in \mathbb{Z}.$$

Notemos que si $k \in \mathbb{Z}$, entonces $k = q \cdot n + r$, para algún r con $0 \leq r < n$, y en ese caso,

$$\cos(k\frac{2\pi}{n}) + i\text{sen}(k\frac{2\pi}{n}) = \cos(r\frac{2\pi}{n}) + i\text{sen}(r\frac{2\pi}{n}).$$

Por otro lado, si $0 \leq r_1 < r_2 < n$, entonces

$$\cos(r_1\frac{2\pi}{n}) + i\text{sen}(r_1\frac{2\pi}{n}) \neq \cos(r_2\frac{2\pi}{n}) + i\text{sen}(r_2\frac{2\pi}{n}),$$

por lo cual para cada $r \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r < n$, obtendremos una solución distinta de $z^n = 1$.

Teorema 5.1. Sea n un número natural. Entonces la ecuación $z^n = 1$ tiene n raíces distintas: $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ dadas por

$$z_k = \cos(k\frac{2\pi}{n}) + i\text{sen}(k\frac{2\pi}{n}), \qquad 0 \leq k < n.$$

Ejemplo 5.2. Las raíces cúbicas de 1 satisfacen $z^3 = 1$. Hay exactamente tres raíces distintas, y son

$$z_0 = 1, \qquad z_1 = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i\text{sen}(\frac{2\pi}{3}), \qquad z_2 = \cos(\frac{4\pi}{3}) + i\text{sen}(\frac{4\pi}{3}).$$

Dado que $\cos(\frac{2\pi}{3}) = \cos(\frac{4\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$, y $\text{sen}(\frac{2\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} = -\text{sen}(\frac{4\pi}{3})$, estas raíces son los números complejos

$$z_0 = 1, \qquad z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \qquad z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

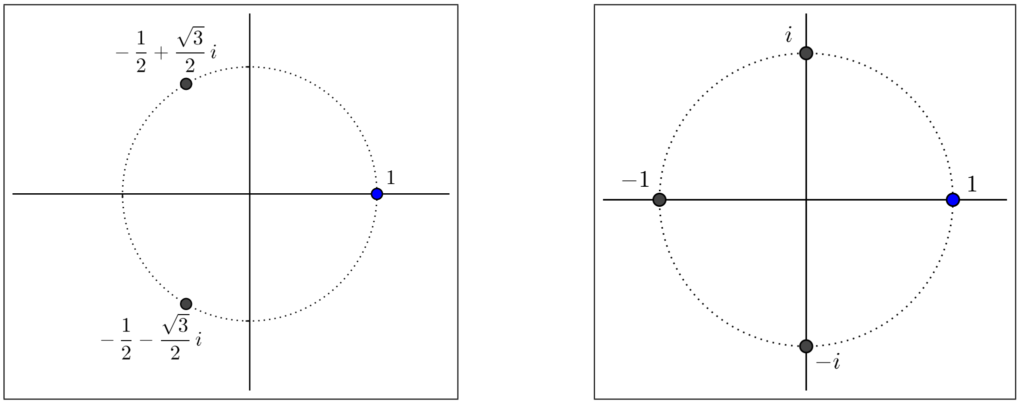
Ejemplo 5.3. Las raíces cuartas de 1 son:

$$z_0 = 1, \qquad z_1 = \cos(\frac{2\pi}{4}) + i\text{sen}(\frac{2\pi}{4})$$

$$z_2 = \cos(\frac{4\pi}{4}) + i\text{sen}(\frac{4\pi}{4}), \qquad z_3 = \cos(\frac{6\pi}{4}) + i\text{sen}(\frac{6\pi}{4}).$$

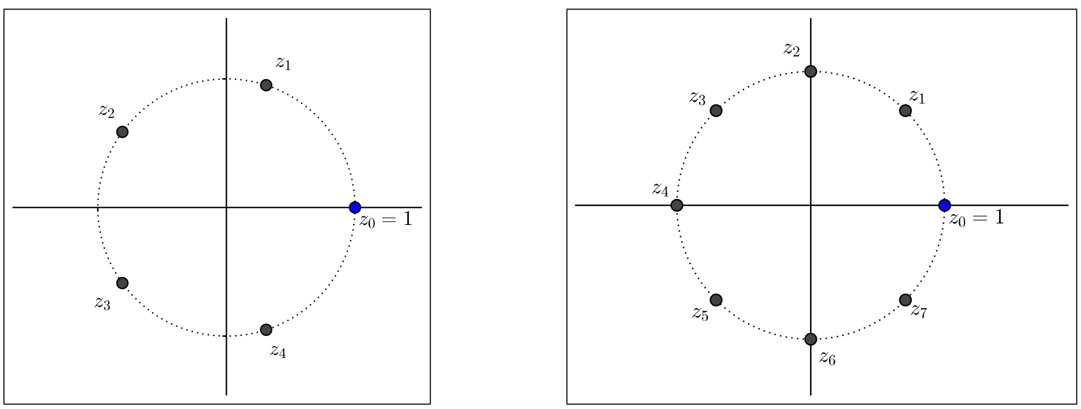
En notación cartesiana, estas raíces son:

$$z_0 = 1, \qquad z_1 = i, \qquad z_2 = -1, \qquad z_3 = -i.$$



(a) $z^3 = 1$ (b) $z^4 = 1$

FIGURE 4. Raíces cúbicas y cuartas de la unidad



(a) $z^5 = 1$ (b) $z^8 = 1$

FIGURE 5. Raíces de la unidad

Ejemplo 5.4. El cálculo de las raíces de la unidad también nos permite resolver problemas como el siguiente: dar las soluciones de la ecuación

$$z^3 = -8.$$

Una solución $z = |z|(\cos(\theta) + i\mathrm{sen}(\theta))$ de esta ecuación debe satisfacer

$$|z| = 2, \qquad \cos(3\theta) = -1, \qquad \mathrm{sen}(3\theta) = 0.$$

Esto indica que $3\theta = (2k+1)\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Tomando $k = 0$, $k = 1$ y $k = 2$ obtenemos 3 soluciones:

$$z_0 = 2\big(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\mathrm{sen}(\frac{\pi}{3})\big), \qquad z_1 = 2\big(\cos(\frac{3\pi}{3}) + i\mathrm{sen}(\frac{3\pi}{3})\big), \qquad z_2 = 2\big(\cos(\frac{5\pi}{3}) + i\mathrm{sen}(\frac{5\pi}{3})\big),$$

es decir

$$z_0 = 2 \cdot \big(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\big) = 1 + \sqrt{3}i, \qquad z_1 = -2, \qquad z_2 = 2 \cdot \big(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\big) = 1 - \sqrt{3}i.$$

Ejemplo 5.5. Para calcular las soluciones de $z^5 = i$, debe ser $|z| = 1$ y entonces planteamos

$$z^5 = \cos(5\theta) + i\mathrm{sen}(5\theta) = i.$$

Esto indica que debe ser $5\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi = (\frac{4k+1}{2})\pi$.

Tomando valores de k en el intervalo de números enteros $[0, 4]$, tendremos los siguientes valores de θ:

$$\theta_0 = \frac{\pi}{10}, \qquad \theta_1 = \frac{\pi}{2}, \qquad \theta_2 = \frac{9\pi}{10}, \qquad \theta_3 = \frac{13\pi}{10}, \qquad \theta_4 = \frac{17\pi}{10},$$

Ilustramos las soluciones de los Ejemplos 5.4 y 5.5 en la Figura 5.

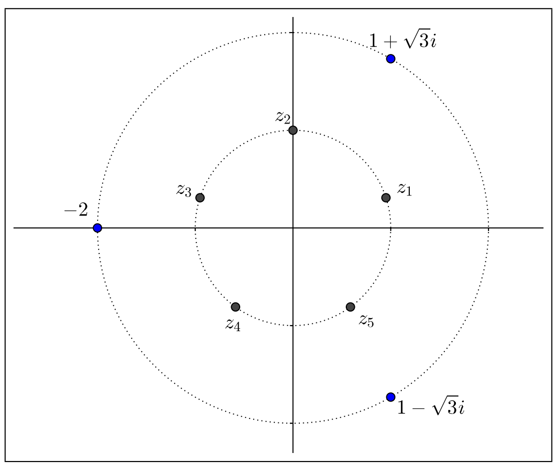


FIGURE 6. Soluciones de $z^5 = i$ y $z^3 = -8$

Ejemplo 5.6. Para determinar las soluciones de $z^5 = -1 - i$, observamos que si $z = r\,(\cos(\theta) + i\mathrm{sen}(\theta))$, entonces debe ser $r = \sqrt[10]{2}$, y además

$$\cos(5\theta) + i\mathrm{sen}(5\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Luego $5\theta = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$, para algún $k \in \mathbb{Z}$. Dando valores a k entre 0 y 4 obtenemos los argumentos:

$$\theta_0 = \frac{\pi}{4}, \qquad \theta_1 = \frac{13\pi}{20}, \qquad \theta_2 = \frac{21\pi}{20}, \qquad \theta_3 = \frac{29\pi}{20}, \qquad \theta_4 = \frac{38\pi}{20},$$

y las soluciones son de la forma

$$z_k = \sqrt[10]{2}\,\big(\cos(\theta_k) + i\mathrm{sen}(\theta_k)\big), \qquad k = 0 \dots 4.$$

Ejemplo 5.7. Consideremos la ecuación

$$3z^2 - 6z + 6 = 0. \tag{5.1}$$

El discriminante de esta ecuación es $\Delta = 6^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6 = -36 < 0$, y por lo tanto no existen soluciones reales. Ahora bien, podemos completar cuadrados en el polinomio cuadrático y reescribirlo como:

$$3 \cdot (z^2 - 2z + 1 + 1) = 3 \cdot \big((z-1)^2 + 1\big).$$

Entonces la ecuación (5.1) es equivalente a

$$3\big((z-1)^2 + 1\big) = 0, \qquad \text{o bien } (z-1)^2 = -1.$$

Esto dice que $z - 1$ debe ser i o $-i$, y por lo tanto las soluciones de $3z^2 - 6z + 6 = 0$ son

$$z_1 = 1 + i, \qquad z_2 = 1 - i.$$

Una forma equivalente de resolverlo es aplicar la fórmula de Bashkara para el cálculo de las raíces, interpretando a $\sqrt{\Delta} = i\sqrt{|\Delta|}$ en caso que Δ sea negativo. Entonces las raíces son:

$$z_1 = \frac{6 + i\sqrt{36}}{6} = 1 + i, \qquad z_1 = \frac{6 - i\sqrt{36}}{6} = 1 - i.$$