

Análisis Matemático I
Lic. en Ciencias de la Computación / Lic. en Matemática Aplicada
FAMAF, UNC — Año 2021

Guía de Ejercicios N°3: Límites

1. A partir de una tabla de valores, estime $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ tomando valores cercanos a a , por derecha y por izquierda. (Sugerencia: utilice calculadora).

a) $\lim_{x \rightarrow 4} (5x^2 - 2x + 3)$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$

2. Calcule los siguientes límites utilizando las propiedades de cálculo de límite.

a) $\lim_{x \rightarrow 4} (5x^2 - 2x + 3)$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 1}{x + 1}$

f) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 4}$

b) $\lim_{s \rightarrow 2} (s^2 + 1)(s^2 + 4s)$

e) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1}$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$

c) $\lim_{t \rightarrow -1} \frac{\sqrt{t^3 + 3t^2 + 7}}{t + 2}$

3. Dada la siguiente función $f(x)$, calcule los límites laterales e indique si los límites indicados existen:

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \leq 0 \\ 9 - (x - 3)^2 & \text{si } 0 < x < 4 \\ -1 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

e) $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

d) $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$

f) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

4. Dada la siguiente función $g(x)$, calcule los límites laterales y decida si los límites indicados existen:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } |x| > 1 \\ -x & \text{si } |x| < 1 \\ 2 & \text{si } |x| = 1 \end{cases}$$

a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$

e) $\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$

d) $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x)$

f) $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$

5. Calcule los siguientes límites, si existen. Si no existen explique por qué:

a) $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{h^2}}{h}$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2 - |x|}{2 + x}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 2}{|x - 2|}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right)$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right)$

6. Calcule:

- a) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ sabiendo que $1 \leq f(x) \leq x^2 + 2x + 2$.
 b) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ sabiendo que $3x \leq f(x) \leq x^3 + 2$ cerca de 1.

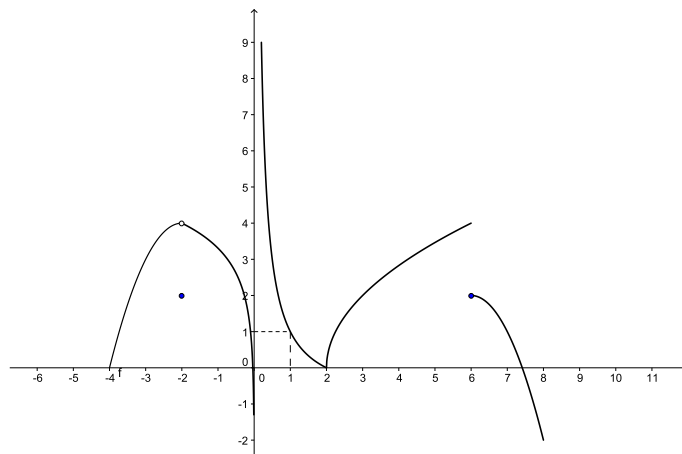
7. Calcule los siguientes límites:

- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1}{x + 1}$ c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 1}{2 + 2x^2 + 9x^4}$
 b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{1 + 3x^2}$ d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{18x^2 + 1} \frac{1}{\sqrt{32x^2 - 3}} \right)$

8. Determine las asíntotas horizontales y verticales de las siguientes curvas:

- a) $y = \frac{x}{x+4}$ b) $y = \frac{x^2+4}{x^2-1}$ c) $y = \frac{x^3+1}{x^3+x}$

9. Observe el gráfico de la función g de la Figura que se muestra a continuación y determine, aproximadamente, los siguientes valores, en caso que existan.



- | | | | |
|------------------------------------|------------------------------------|-------------------------------------|------------------------------------|
| a) $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ | f) $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$ | k) $\lim_{x \rightarrow 6^-} g(x)$ | o) $g(-2)$ |
| b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$ | g) $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x)$ | l) $g(6)$ | p) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ |
| c) $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$ | h) $g(2)$ | m) $\lim_{x \rightarrow -2} g(x)$ | q) $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ |
| d) $g(1)$ | i) $\lim_{x \rightarrow 6} g(x)$ | n) $\lim_{x \rightarrow -2^+} g(x)$ | r) $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$ |
| e) $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ | j) $\lim_{x \rightarrow 6^+} g(x)$ | ñ) $\lim_{x \rightarrow -2^-} g(x)$ | s) $g(0)$ |

10. Calcule los límites indicados:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^2 - 1}{x}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{\sin 5x} \right)^2$ e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{x}$
 b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 9)}{x^2 - 5x + 6}$ d) $\lim_{r \rightarrow \infty} r \sin \frac{1}{r}$ f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

Problemas extras

11. Utilizando las propiedades de límites, conteste los siguientes interrogantes:

- a) Si no existen los límites $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$, ¿puede existir $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$ o $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$?
- b) Si existen $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$, y son ambos finitos, ¿existe necesariamente $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$?
- c) Si existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, finito, y no existe $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$, ¿puede existir $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$?
- d) Si existen $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$, ambos finitos, ¿se puede concluir que existe $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$?

12. Se sabe que una pileta de natación se vacía según la función $V(t) = 1000 \frac{\sqrt{t+3} - 2}{t-1}$, donde V es el volumen expresado en m^3 y t el tiempo en horas. ¿A qué valor se aproxima el volumen cuando el tiempo se aproxima a 1 hora?

13. La cantidad de una droga en la corriente sanguínea t horas después de inyectada intramuscularmente está dada por la función $f(t) = \frac{10t}{t^2 + 1}$. Al pasar el tiempo, ¿cuál es la cantidad límite de droga en sangre?

14. En un experimento biológico, la población de una colonia de bacterias (en millones) después de x días está dada por: $y(x) = \frac{4}{2 + 8e^{-2x}}$.

- a) ¿Cuál es la población inicial de la colonia de bacterias?
- b) Determine si la población crece indefinidamente con el tiempo o tiene a estabilizarse en algún valor fijo.