Análisis Matemático I

Licenciatura en Ciencias de la Computación Licenciatura en Matemática Aplicada FAMAF, UNC — Año 2021

Guía de Ejercicios N°6

Derivadas - 2° Parte

1. Haga corresponder el gráfico de cada función en (a)-(d) de la Figura 1 con el de su derivada en (i)-(iv). Justifique la correspondencia. Discuta lo que ve, prestando especial atención a lo que le pasa a f(x) cuando f'(x) es positiva y cuando f'(x) es negativa. ¿Cómo se comporta f(x) cuando f'(x) se acerca a 0? ¿Está de acuerdo con la siguiente afirmación? Mientras más grande es |f'(x)|, más rápido cambia f(x). Comente.

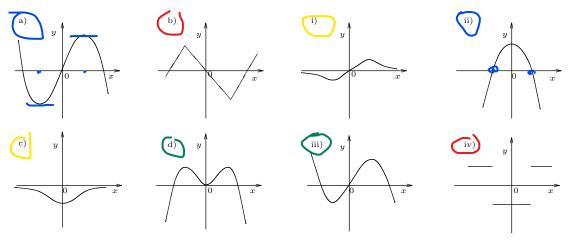


Figura 1

2. La Figura 2 muestra la gráfica de la función g en el intervalo [-4,7].

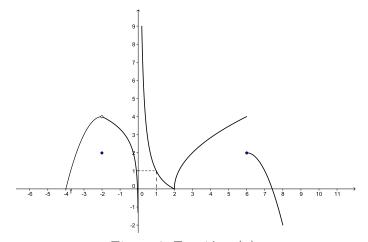


Figura 2: Función g(x).

- a) ¿Qué puntos están excluídos del dominio de g?
- b) ¿En qué puntos del dominio g es discontinua?

- c) ¿En qué puntos del dominio g no es diferenciable?
- d) Especifique un intervalo donde q crece más rápidamente.
- e) Especifique un intervalo donde g decrece más rápidamente.
- f) Esboce a grandes rasgos el gráfico de f'(x).

Extremos locales y absolutos. Gráfica de funciones.

3. Encuentre el máximo y el mínimo de las siguientes funciones:

a)
$$f(x) = 2x + 3, \qquad x \in [-1, 1]$$

d)
$$f(x) = x^2 - 4x + 6$$
, $-3 \le x \le 10$

b)
$$f(x) = |x^2 - x - 2|, \quad x \in [-3, 3]$$

c) $f(x) = \sqrt{5 - 4x}, \quad -1 \le x \le 1$

c)
$$f(x) = \sqrt{5-4x}, -1 \le x \le 1$$

e)
$$f(x) = (x^2 - x - 1) e^x$$
, $|x| \le 3$

4. Encuentre los extremos locales y absolutos de las siguientes funciones en R:

a)
$$f(x) = x - x^{2/3}$$

b)
$$f(x) = \frac{2x+3}{x^2+1} + 3 \arctan x$$
.

- 5. Determine los intervalos donde la función $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ es monótona.
- 6. Determine los máximos y mínimos locales de $f(x) = x^2 |2x 1|$.
- 7. Determine los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo de las siguientes funciones.

a)
$$f(x) = e^{1/x}$$
 para $x > 0$

c)
$$f(x) = x^2 e^{-2x^2}$$

b)
$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$$

$$d) \ f(x) = x \ln x$$

8. Esboce la gráfica de las siguientes funciones. Previamente determine dominio, puntos críticos, intervalos de crecimiento y decrecimiento y comportamiento de la función cuando x se acerca a los bordes del dominio.

2

$$a) \ f(x) = x^2 + 2x$$

e)
$$f(x) = \frac{x^3 - 2x}{x^2 - 3}$$

$$b) \ f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$f) f(x) = (x^2 - 4)^2$$

c)
$$f(x) = x - 2 \arctan x$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$$

$$d) \ f(x) = \frac{x+2}{x^2 + x - 2}$$

$$h) \ f(x) = \frac{1}{3 + x^2}$$

9. Demuestre que la ecuación $x^5 + 10x + 3 = 0$ tiene una y solo una raíz.

Formas Indeterminadas y la Regla de L'Hôpital.

10. Calcule los límites indicados

a)
$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+6x)}{x(x-7)}$$

d)
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin(x)}$$

e) $\lim_{x \to 0^+} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$
f) $\lim_{h \to 0^+} h \ln(h)$
g) $\lim_{r \to 0^+} r^{\sin(r)}$

$$h) \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$$

$$b) \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2}$$

$$e) \lim_{x \to 0^+} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$$

$$i) \lim_{x \to 0} \frac{6^x - 2^x}{x}$$

$$j) \lim_{x \to 0^+} x^x$$

c)
$$\lim_{x \to \infty} \frac{1 + x^6 + x^{12}}{e^x}$$

$$f) \lim_{h \to 0^+} h \ln(h)$$

$$j)$$
 $\lim_{x\to 0^+} x^x$

$$g)$$
 $\lim_{r\to 0^+} r^{\mathrm{sen}(r)}$

$$k) \lim_{x \to 0^+} x^{\ln x}$$

- 11. Compruebe que $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x^p}=0$ para cualquier número p>0. Esto hace ver que la función logarítmica tiende a ∞ con mayor lentitud que cualquier potencia de x.
- 12. Compruebe que $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n}=\infty$ para cualquier entero n. Esto significa que la función exponencial tiende tiende a ∞ con mayor rapidez que cualquier potencia de x

Linealización y aplicaciones

- 13. Sea f una función tal que f(1) = 2, cuya función derivada es $f'(x) = \sqrt{x^3 + 1}$
 - a) Estime el valor de f(1,1) con una aproximación lineal.
 - b) ¿Cree que el valor exacto de f(1,1) es menor o mayor que el estimado? ¿Por qué?
- 14. Usando aproximaciones lineales, encuentre valores aproximados de

a)
$$\sqrt{36,1}$$

$$b) \frac{1}{10.1}$$

$$c) \sin 59^{\circ}$$

Material Extra

- 15. El lado de un cubo mide 30 cm, con un posible error de medición de 0.1 cm. Usando aproximaciones lineales, estime el error máximo posible en el cálculo de
 - a) el volumen del cubo,
 - b) su área.
- 16. Si V es el volumen de un cubo cuyo lado mide x, donde el valor de x depende de t, calcule dV/dt en función de dx/dt.
- 17. Si xy = 1 y dx/dt = 4, calcule dy/dt cuando x = 2.