# Análisis Matemático I

Licenciatura en Ciencias de la Computación

FAMAF, UNC — Año 2017.

## Guía de Ejercicios Nº4

### Continuidad

1. Esboce el gráfico de una función $f$, sin dar su fórmula, que tenga las siguientes características:

   - Su dominio es $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$,
   - es discontinua en $x = -2$ y en $x = 4$,
   - $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \infty$ y
   - $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 1$.

   Rta; Por ejemplo graficar $-\frac{1}{x+2}$ si $x < 1$ y $\frac{x^2-16}{8(x-4)}$ si $x \neq 4$ y $x > 1$; , $f(4) = 2$.

2. Determine si la función $g$, del ejercicio 11 de la Guía 3, es continua en $x = 1, 2, 6, -2, 0$ y justifique su respuesta.

3. Utilice la definición de continuidad y las propiedades de límites para demostrar que la función es continua en el valor indicado.

   *a*) $f(x) = (x + 2x^3)^4 \quad$ en $x = -1$
   Como suma y producto de funciones continuas es una función continua, todo polinomio es continuo en todo $\mathbb{R}$.

   *b*) $f(t) = \dfrac{t^2}{(t+1)^3} \quad$ en $t = 2$
   El cociente de polinomios será continuo en los puntos donde no se anula el denominador, entonces esta función es continua en $t = 2$ ya que $(2 + 1)^3 \neq 0$.

4. Justifique por qué la función $f(x) = x\sqrt{16 - x^2}$ es continua en el intervalo $[-4, 4]$ e indique qué propiedades de la continuidad de funciones utiliza.

   Como el producto de funciones continuas es una función continua y los polinomios son continuos en $\mathbb{R}$, basta ver que $\sqrt{16 - x^2}$ es continua y esto es verdadero ya que es composición de la función raíz cuadrada con el polinomio $16 - x^2$, bien definida en $[-4, 4]$.

5. Determine, si los hay, en qué puntos es discontinua la función $f$. En cada caso, indique si se trata de una discontinuidad evitable, de salto o esencial.

   *a*) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$
   Es continua en todo $\mathbb{R}$.

   *b*) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$
   Es continua en $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$. En -1 tiene una discontinuidad esencial, ya que $\lim_{x \to -1^+} \frac{x}{x+1} = \infty$.

   *c*) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 2 \\ x & x \leq 2 \end{cases}$
   Como $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 2^2 = 4 \neq 2 = \lim_{x \to 2^-}$, la función tiene una discontinuidad de salto.

*d*) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 1 \\ x & x \leq 1 \end{cases}$

En este caso los límites laterales coinciden con el valor de la función, por lo tanto es continua en $x = 1$, en el resto es continua por ser polinomial.

*e*) $H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

Aquí los límites laterales existen pero son distintos $(0 \neq 1)$, luego se tiene una discontinuidad de salto.

*f*) $f(x) = H(x-1)$, donde $H$ es la función definida en e).

$H$ era continua en todo $\mathbb{R}$ salvo en 0. Por lo tanto la composición será continua en todo $\mathbb{R}$ salvo los puntos cuya imagen por $f(x) = x - 1$ sea 0, esto es $x = 1$ donde tiene una discontinuidad de salto.

*g*) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$

Aquí, $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} x + 2 = 4 \neq 1 = f(2)$, luego no es continua en 2 pero la discontinuidad es evitable ya que existe el límite. En el resto de $\mathbb{R}$ la función es continua por ser cociente de polinomios y el denominador sólo se anula en $x = 2$.

*h*) $h(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{|x|}}$

El dominio son los $x \geq -1$. Alli el numerador es una función continua y el denominador también. Como este último se anula en 0, el cociente es continuo en $[-1, 0) \cup (0, \infty)$. En 0 los límites laterales son $\infty$ y la discontinuidad es esencial.

*i*) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

La función vale -1 en $(-\infty, 0)$ y 1 en $(0, \infty)$, luego es continua en esos intervalos. Los límites laterales cuando $x$ tiende a 0 son distintos pero finitos, por lo tanto en 0 tiene una discontinuidad de salto.

*j*) $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Si $x \neq 0$, la función es continua por ser producto de la identidad con una composición de $\operatorname{sen}$ con $\frac{1}{x}$ que es continua cuando $x \neq 0$. Si calculamos el límite en 0 usando el lema del sandwich:

$$-|x| \leq x \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) \leq |x|.$$

vemos que es 0 y coincide con el valor de la función en 0. Por lo tanto es continua en todo $\mathbb{R}$.

6. *a*) Determine la constante $c$ para la cual la función $g$ resulta continua en $\mathbf{R}$.

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - c & x < 4 \\ cx + 20 & x \geq 4 \end{cases}$$

Para que $g$ sea continua debe valer $\lim_{x\to 4^-} g(x) = \lim_{x\to 4^+} g(x)$. Esto nos plantea la ecuación $4^2 - c = c4 + 20$ de donde $c = -\frac{4}{3}$.

*b*) Grafique $g$ con el valor $c$ obtenido en el ítem anterior.

La parábola $x^2 + \frac{4}{3}$ para $x \leq 4$, se conecta en el punto $(4, \frac{44}{3})$ con una recta de pendiente $-\frac{4}{3}$.

7. Tiene que graficar, en una computadora, el plano de una ruta y se le presenta el problema de graficar las funciones que determinan la misma. Sabe que la ruta se comporta como la función $y = -(x-1)^4 + 1$ en el intervalo [0.5,1] y como la función $(x-1)^2 + k$ en el intervalo [1,1.2], pero desconoce la constante $k$. ¿Podría calcularla?

   Para que la ruta se continue los límites por izquierda y pr derecha deben coincidir.

   Luego $\lim_{x\to 1^-}(x-1)^4 + 1 = \lim_{x\to 1^+}(x-1)^2 + k$. Esto quiere decir que $1 = k$.

8. Determine el dominio de $f$ en los distintos casos y decida si existe una función $F$ continua cuyo dominio es todo el conjunto $\mathbf{R}$ y que satisface $F(x) = f(x)$ si $x$ está en el dominio de $f$. ¿Cómo está definida $F$, en caso de que exista?.

   *a)* $f(t) = \dfrac{\sqrt[3]{t^3 + 3t^2 + 7}}{t+2}$
   El numerador y el denominador están definidos en todo $\mathbb{R}$ y el denominador sólo se anula en $t = -2$, luego la función está definida en $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$. En $t = -2$ los límites laterales no existen y por lo tanto no se puede extender a una función continua.

   *b)* $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x+1}$
   En este caso el denominador se anula en $x = -1$ pero si existe $\lim_{x\to -1} = 3$. Esto permite extender a $f$ a una función continua $F$ con $F(-1) = 3$.

   *c)* $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 4}$
   El denominador se anula en 1 y en 4. El numerador se anula en 4 pero no en 1. Entonces podemos extender $f$ a una función continua en $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ pero no en todo $\mathbb{R}$.

   *d)* $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$
   El dominio de $f$ es $[-1, 0) \cup (0, \infty)$. Tenemos que ver si la discontinuidad en 0 es evitable- Para esto multiplicamos y dividimos por $\sqrt{1+x} + 1$ y obtenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1+x} + 1)}{x(\sqrt{1+x} + 1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + x - 1}{x(\sqrt{1+x} + 1)} = \frac{1}{2}.$$

   Luego podemos extender a una función continua en $[-1, \infty)$. Para extenderla a todo $\mathbb{R}$ debemos dar una función continua en $(-\infty, -1]$ que valga $\frac{\sqrt{1+(-1)}-1}{-1} = 1$ en $x = -1$. Por ejemplo la constante $y = -1 \quad \forall\, x \in (-\infty, -1]$.

   *e)* $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2} - 1}{1 - \sqrt{1-x^2}}$
   La función está definida en $(-1, 1)$- Si calculamos los límites en los extremos del intervalo,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm 1} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{1 - \sqrt{1-x^2}} &= \lim_{x\to\pm 1} \frac{(\sqrt{1+x^2} - 1)(\sqrt{1+x^2} + 1)(1 + \sqrt{1-x^2})}{(1 - \sqrt{1-x^2})(\sqrt{1+x^2} + 1)(1 + \sqrt{1-x^2})} \\
&= \lim_{x\to\pm 1} \frac{(1 + \sqrt{1-x^2})}{(\sqrt{1+x^2} + 1)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2} + 1}
\end{aligned}$$

   Tenemos infinitas posibilidades de extender a funciones continuas en todo $\mathbb{R}$. Basta con tomar una función continua que valga $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ en $x = \pm 1$. Por ejemplo la función que fuera de $(-1, 1)$ vale siempre $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$. O también $\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\sqrt{|1-x^2|}}$ si $x \neq \pm 1$ y $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ si $x = \pm 1$.

9. Aplicando el Teorema del Valor Intermedio demuestre que hay una solución de la ecuación en el intervalo dado:

   *a)* $x^3 - 3x = -1$ en (0,1)
   Si usamos que $f(x) = x^3 - 3x$ es continua en $[0,1]$ y $f(0) = 0^3 - 3(0) > -1 > 1^3 - 3(1) = f(1)$ podemos aplicar el Teorema de los valores intermedios y concluir que existe $x \in (0,1)$ que satisface $f(x) = -1$.

   *b)* $x^5 - 2x^2 - x - 3 = 0$ en (-2,3)
   Como en a) vemos que $g(x) = x^5 - 2x^2 - x - 3$ es continua y cumple $g(-2) = (-2)^5 - 2(-2)^2 - (-2) < 0 < 3^5 - 2(3)^2 - 3 - 3 = g(3)$.

   *c)* $x^3 + 2x = x^2 + 1$ en (0,1)
   Aquí consideramos la función $f(x) = x^3 - 2x - x^2$ $0^3 + 2(0) - 0^2 < 1 < 1^3 + 2(1) - 1^2$ luego $f(y) = 1$ para algún $y \in (0,1)$. Este $y$ satisface la ecuación.

10. Empleando el Teorema del Valor Intermedio demuestre que hay un número $c$ tal que $f(c) = 0$.

   *a)* $f(x) = \ln(x) - \operatorname{sen}(x)$
   Se cumple $f(1) = -\operatorname{sen}(1) < 0 < \ln 3 - \operatorname{sen} 3$.

   *b)* $f(x) = 2^x + x - 2$
   Se verifica que $2^0 + 0 - 2 < 0 < 2^1 + 1 - 2$.

11. Determine si las siguientes funciones verifican las hipótesis del Teorema de Weierstrass en el intervalo indicado. De ser así, indique cuál es el valor máximo y cuál es el valor mínimo alcanzados por la función:

   *a)* $f(x) = \cos x$, en $[-\pi/3, \pi/2]$.
   $\cos(x)$ es continua en $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ y se puede aplicar entonces el Teorema de Weierstrass.. Max=$\cos 0 = 1$; Min= $\cos \pi/2 = 0$.

   *b)* $f(x) = \tan x$, en $[0, \pi]$ con $f(\pi/2) = 0$
   No se verifican las hipótesis del TW ya que la función $\tan(x)$ no es continua en $\pi/2$

   *c)* $f(x) = 1 - 2x^2$, en $[1,3]$
   Al se r $f(x)$ polinomio y $[1,3]$ cerrado, se verifican las hipótesis del TW. La función es una parábola que crece hacia abajo y tiene raíces $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, luego es decreciente en el intervalo [1,3] y . Max=-1=$f(1)$ ; Min= -17=$f(3)$.

   *d)* $f(x) = \frac{1}{|x|}$, en $[4,8]$
   Como $f(x) = 1/x$ es continua en el intervalo cerrado$[4,8]$, se verifican las hipótesis del TW. Por ser la función decreciente en [4,8]. Max=$1/4 = f(4)$; Min=$1/8 = f(8)$.

   *e)* $f(x) = x$, en $(0,1)$.
   No es cerrado el intervalo de definición de $f(x)$, por lo tanto no se verifican las hipótesis del TW..