Análisis Matemático I

Licenciatura en Ciencias de la Computación

FAMAF, UNC — Año 2017

Guía de Ejercicios Nro. 2: Funciones

Propiedades generales

1. Determine el dominio de las siguientes funciones:

   a) $g(x) = \dfrac{2}{3x-5}$

   b) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

   c) $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

   d) $g(x) = \dfrac{x^4}{x^2+x-6}$

2. Esboce la gráfica de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ x+1 & x > 0 \end{cases}$

   b) $f(x) = \begin{cases} |x| & |x| \leq 1 \\ 1 & |x| > 1 \end{cases}$

   c) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & x < 0 \\ x & 0 \leq x \leq 2 \\ \sqrt{x-2} & x > 2 \end{cases}$

   d) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

   e) $f(x) = \begin{cases} 1-|x-1| & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & x < 0 \text{ ó } x > 2 \end{cases}$

3. Considere un triángulo isósceles cuyos lados iguales valen 10 m.

   a) Exprese la superficie del triángulo como función de la base.

   b) Identifique el dominio de la función.

4. Un recipiente de almacenamiento en forma de paralelepípedo recto (sin tapa), tiene $10m^3$ de volumen. El largo de su base es el doble de su ancho x. El material de la base cuesta \$10 por m^2, el de los laterales cuesta \$6 por m^2. Obtenga la función $C(x)$ que da el costo del recipiente en función de x. Determine su dominio.

5. Determine el dominio, imagen y trace la gráfica de

   a) $g(x) = \sqrt{6-2x}$

   b) $h(x) = |2x-3|$

6. Diga si las siguientes funciones son pares, impares o ninguno de los dos casos e indique su dominio.

   a) $f(x) = 3x - x^3$

   b) $f(x) = x + x^2$

   c) $f(x) = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2}$

7. Considere las funciones $g(x) = \sqrt{3x}$ y $f(x) = \sqrt{25-x^2}$ y determine el dominio de

   a) $g(x) + f(x)$

   b) $\dfrac{g(x)}{f(x)}$

8. Determine $f \circ f$, $g \circ g$, $f \circ g$ y $g \circ f$ si

   a) $f(x) = x^2 \qquad g(x) = \dfrac{1}{x+1}$

   b) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} \qquad g(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

9. Evalúe las siguientes funciones en los puntos indicados.

   a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ en el punto $t + 1$

   b) $f(x) = x + \sqrt{1 + x^2}$ en el punto $-t$

   c) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ en el punto $\dfrac{1}{t}$

10. Sea $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$. Escriba las siguientes funciones en la forma $\dfrac{p(x)}{q(x)}$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios:

   a) $f(x) + 1$

   b) $f(x + 1)$

   c) $f \circ f(x)$

Funciones inversas

1. Halle el dominio e imagen de las siguientes funciones y diga si se puede definir la inversa de las mismas. En caso afirmativo, calcule dicha inversa.

   a) $f(x) = 2x + 1$

   b) $f(x) = x^2$

   c) $f(x) = \dfrac{2x+1}{2x-1}$

   d) $f(x) = -\sqrt{x^2 - 4x + 4}$

   e) $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

2. Esboce el gráfico y calcule la inversa de las siguientes funciones cuando sea posible. De no existir la inversa, indíquelo.

   a) $f(x) = x^2 \qquad -\infty < x < \infty$

   b) $f(x) = x^2 \qquad x \leq 0$

   c) $f(x) = \dfrac{2-x}{3+x} \qquad x \neq -3$

   d) $f(x) = \sqrt{1 - x^2} \qquad -1 \leq x < 0$

3. El agua se congela a 32 grados Fahrenheit y a 0 grados Celsius. A nivel del mar el agua hierve a 212 grados Fahrenheit y a 100 grados Celsius.

   a) Encuentre la función lineal que transforma grados Fahrenheit en grados Celsius y grafíquela.

   b) Calcule su inversa, grafíquela y explique qué representa esa función.

Gráficos de parábolas

1. Escriba las ecuaciones de las siguientes parábolas en la forma $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ (completar cuadrados).

   a) $y = x^2 - 2x + 3$

   b) $y = x^2 + 6x + 5$

   c) $y = 2x^2 + 8x + 7$

Circunferencias

1. Encuentre el centro y el radio de las siguientes circunferencias:

   a) $x^2 - 6x + y^2 - 4y = -9$ *b*) $x^2 + 8x + y^2 = -12$

Funciones trigonométricas y sus inversas

1. A partir de los valores conocidos del seno y del coseno de $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{2}$, calcule en forma exacta las expresiones que se dan a continuación:

   a) $\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{4\pi}{3} + \tan\frac{5\pi}{3}$ *b*) $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6} + \cos\frac{7\pi}{6} + \tan\frac{5\pi}{6}$

2. Esboce la gráfica de

   a) $\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}$

   b) $f(x) = \cos 2x$

   c) $f(x) = 3\cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

   d) $f(x) = 1 + \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

3. Escriba cada una de las siguientes funciones $\operatorname{sen} x^2$, $\operatorname{sen}^2 x$ y $\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$ como una composición de funciones. Son iguales estas funciones?

Funciones exponencial y logaritmo

1. Esboce en un mismo gráfico las funciones

   a) $f(x) = 2^x$ *b*) $g(x) = \mathrm{e}^x$ *c*) $l(x) = \left(\dfrac{2}{5}\right)^x$

2. Considere la función $f(x) = c\,\mathrm{e}^{Kx}$.

   a) Determine las constantes c y K si sabe que $f(2) = 2$ y $f(3) = 3$.
   b) Calcule $f(4)$.
   c) Para qué valores de x vale que $f(x) = 4$?

3. Esboce la gráfica de las funciones $f(x) = \ln(x+5)$, $g(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$ y $h(x) = \ln|x|$.

4. Resuelva las siguientes ecuaciones:

   a) $\sqrt{\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$
   b) $(\sqrt{\mathrm{e}}\,)^x = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$
   c) $\sqrt{\ln(x^2-1)} = \sqrt{\ln(x+1) + \ln(x-1)}$
   d) $\ln(x+2) + \ln(x+4) = \ln(2x+5)$
   e) $\sqrt{\ln x} = \ln\sqrt{x}$
   f) $\sqrt{x-1} = \sqrt{-x-2}$

Material Extra

1. Halle las ecuaciones de las rectas con las condiciones dadas y grafique:

   a) Tiene pendiente igual a -4/3 y pasa por el punto (-1, 7).
   b) Pasa por los puntos (8,-2) y (7,-2).
   c) Pasa por el punto (-1,-3) y es paralela a la recta que pasa por los puntos (3, 2) y (5,7).
   d) Pasa por el punto (-5, 3) y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos (7, 0) y (-8, 1)

2. Tiene la oportunidad de comprar un Ford Fiesta usado por \$34500 o un Volkswagen Gol por \$43750. Su mecánico le aseguró que ambos están en muy buenas condiciones y que no necesitarán reparaciones por mucho tiempo. El Fiesta hace 10.5 kilómetros por litro y el Gol hace 14.2 kilómetros por litro. Suponga que el combustible cuesta \$10.05 por litro. Considere $F(x) =$ costo de compra más consumo del Fiesta por x kilómetros y $G(x) =$ costo de compra más consumo del Gol por x kilómetros.

   Grafique $F(x)$ y $G(x)$ en los mismos ejes para $0 \leq x \leq 50000$ kilómetros. Cuántos kilómetros deberá manejar antes que el costo de compra y consumo del Fiesta supere al costo de compra y consumo del Gol?

3. La Bahía de Fundy en Canadá es conocida por tener la mayor diferencia entre sus mareas alta y baja, siendo aproximadamente de 15m. Supongamos que en un punto particular de la bahí a la profundidad del agua (y) medida en metros en función del tiempo (t) medido en horas desde la medianoche del 1 de Enero de 1994, está dada por

   $$y = y_o + A\sin(B(t - t_o))$$

   a) Cuál es el significado físico de y_o?
   b) Cuál es el valor de A?
   c) Asumiendo que la marea sube cada 12 horas y media. Cuál es el valor de B?
   d) Cuál es el significado físico de t_o?
   e) Esboce el gráfico correspondiente.

4. Encuentre todas las soluciones de las siguientes ecuaciones

   a) $1 + \operatorname{sen} x = 2\cos^2 x$
   b) $\cos x \operatorname{sen} x = 0$
   c) $2\cos(2x) + 4\operatorname{sen} x = 3$

Análisis Matemático I

Licenciatura en Ciencias de la Computación

FAMAF, UNC — Año 2017

Guía de Ejercicios Nro. 2: Funciones

Propiedades generales

1. Determine el dominio de las siguientes funciones:

   a) $g(x) = \dfrac{2}{3x-5}$

   El numerador no se debe anular, luego el dominio es $\mathbb{R}\backslash\{\frac{5}{3}\}$.

   b) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

   El radicando no debe ser negativo, entonces $1 - x^2 \geq 0$. Luego el dominio es $[-1, 1]$.

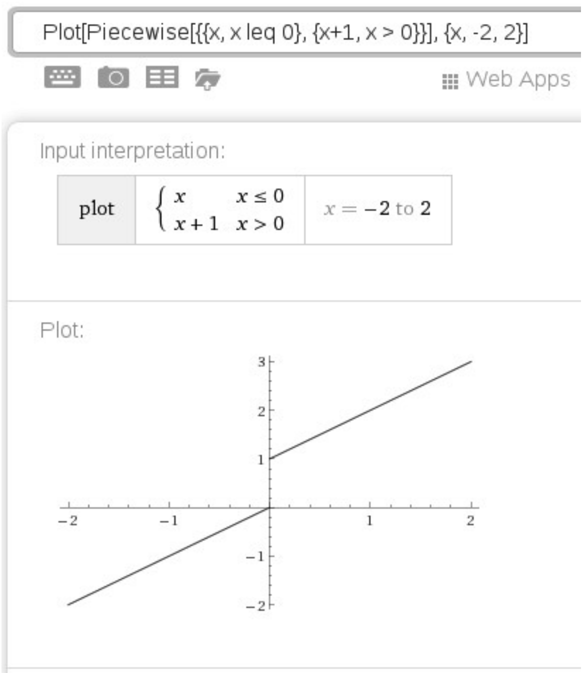
   c) $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

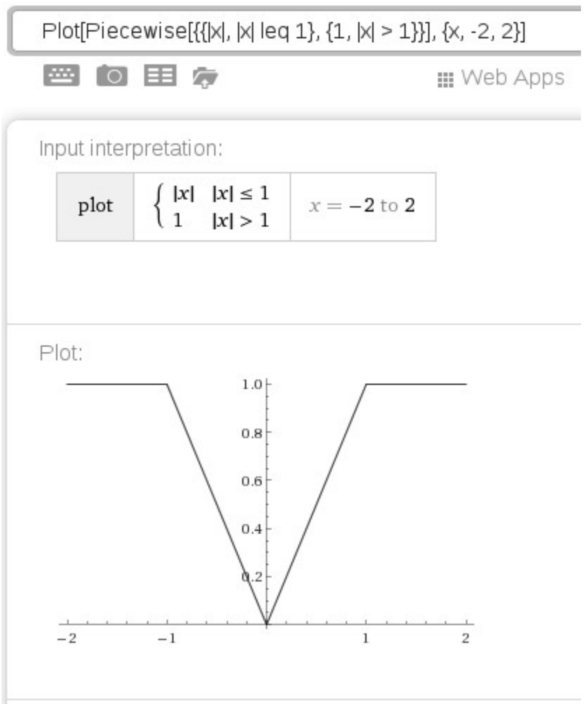
   Aquí el dominio es $\{x$ tal que $x \geq 0\}$.

   d) $g(x) = \dfrac{x^4}{x^2+x-6}$

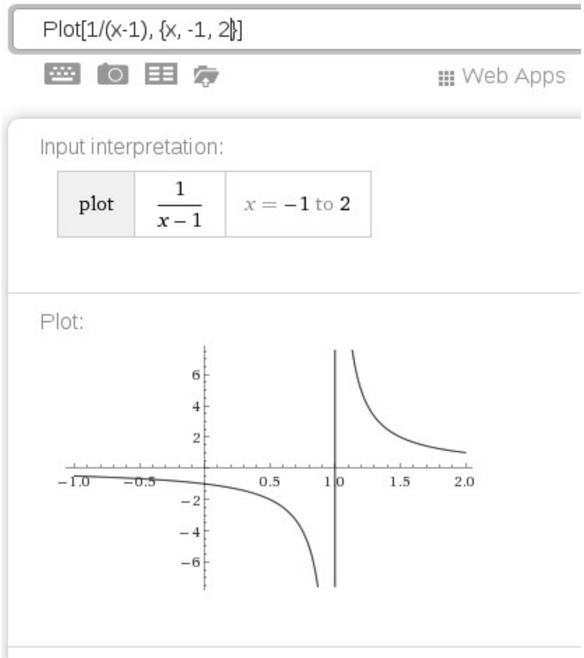
   En este caso hay que evitar las raíces del numerador y el dominio es $\mathbb{R}\backslash\{-3, 2\}$.

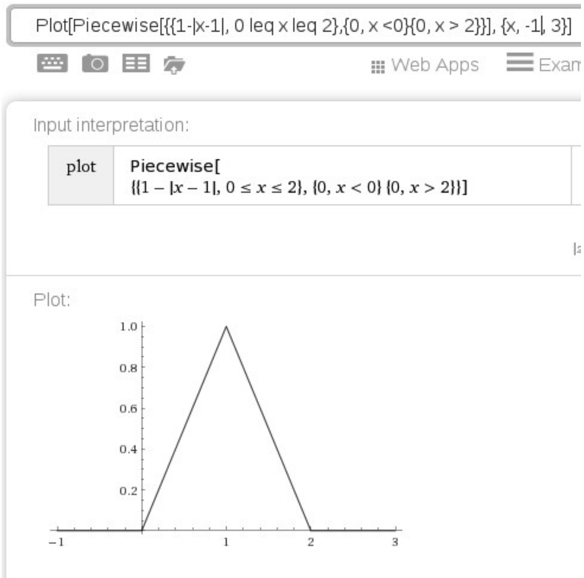
2. Esboce la gráfica de las siguientes funciones[1]:

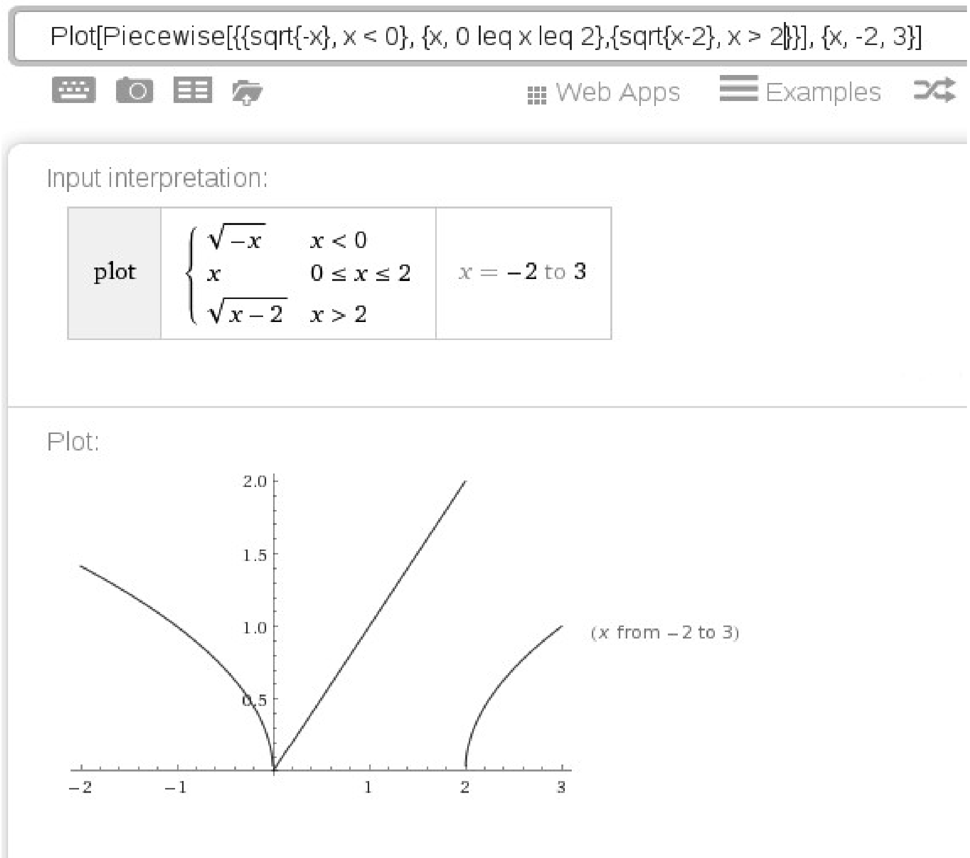




[1] La figuras fueron obtenidas desde http://www.wolframalpha.com. Notar que la sintaxis en el cuadro de dilogo es muy simple, lo que permite fácilmente graficar funciones en distintos intevalos







3. Considere un triángulo isósceles cuyos lados iguales valen 10 m.

   a) Exprese la superficie del triángulo como función de la base.

   El área del triángulo es $A = \dfrac{b.h}{2}$. Hay que expresar entonces la altura h en términos de la base. Como es isósceles la altura parte al triángulo en dos triángulos rectángulos, cuya hipotenusa mide 10. Luego la altura mide $\sqrt{10^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}$, entonces la fórmula del área queda $A(b) = \frac{b}{2}\sqrt{10^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}$.

Alternativamente podemos usar la fórmula de Herón para el área de un triángulo en término de sus lados a, b, c: $A = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}$ en nuestro caso particular si b es la base $a = c = 10$ y queda

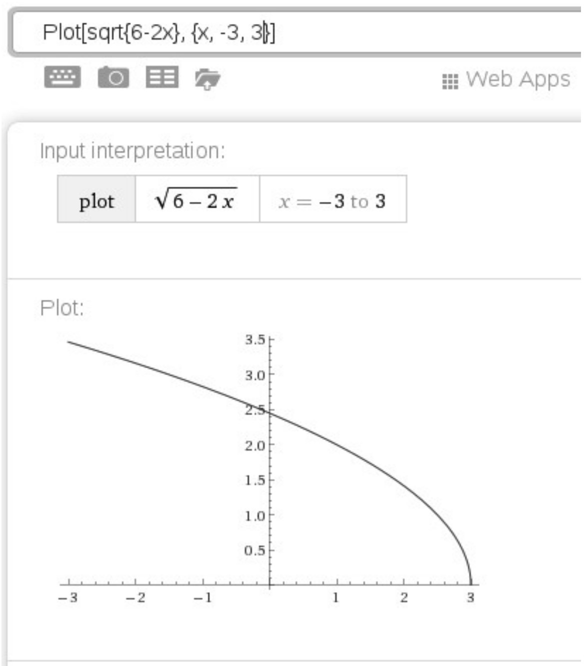
$$A = \frac{1}{4}\sqrt{(10+b+10)(10+b-10)(b+10-10)(10+10-b)} = \frac{1}{4}\sqrt{(20^2-b^2)b^2}$$

b) Identifique el dominio de la función.
La base b debe cumplir $b^2 \leq 200$, para que el radicando no sea negativo. Entonces el dominio queda $[0, 10\sqrt{2}]$.

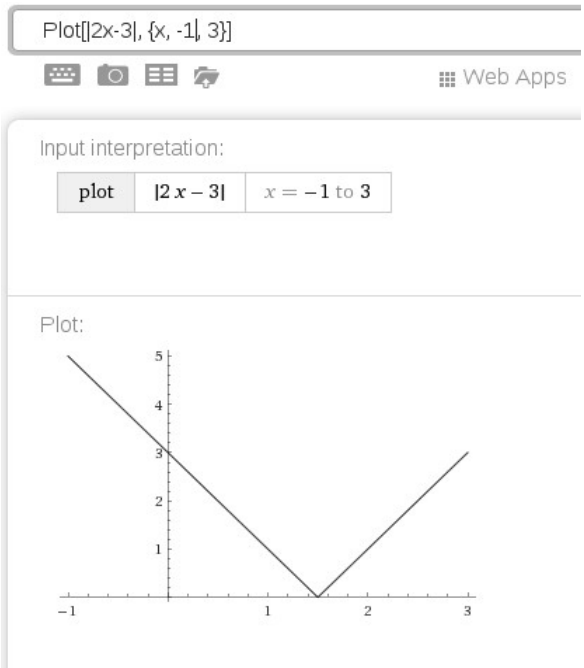
4. Un recipiente de almacenamiento en forma de paralelepípedo recto (sin tapa), tiene $10m^3$ de volumen. El largo de su base es el doble de su ancho x. El material de la base cuesta \$10 por m^2, el de los laterales cuesta \$6 por m^2. Obtenga la función $C(x)$ que da el costo del recipiente en función de x. Determine su dominio.
$V = b.a.h = 2x.x.h$, luego $h = \frac{160}{2x^2}$.
El área de la base es $2x^2$ y su costo $2(10x^2)$.
El área de las 4 paredes laterales es $2(x+2x)\frac{160}{2x^2}$ y su costo es $6\left(2(x+2x)\frac{160}{2x^2}\right)$.
El costo total es entonces $C(x) = 2(10x^2) + 36\frac{160}{2x} = 20x^2 + \frac{2880}{x}$.
El dominio son los números no negativos.

5. Determine el dominio, imagen y trace la gráfica

a) $\mathcal{D}(f) = (-\infty, 3)$



b) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$



6. Diga si las siguientes funciones son pares, impares o ninguno de los dos casos e indique su dominio.

   a) $f(x) = 3x - x^3$ es impar.

   b) $f(x) = x + x^2$ no tiene paridad definida.

   c) $f(x) = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2}$ es par.

7. Considere las funciones $g(x) = \sqrt{3x}$ y $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ y determine el dominio de

   a) $g(x) + f(x)$
   $[0, \infty) \cap [-5, 5] = [0, 5]$.

   b) $\dfrac{g(x)}{f(x)}$
   $[0, \infty) \cap (-5, 5) = [0, 5)$.

8. Determine $f \circ f$, $g \circ g$, $f \circ g$ y $g \circ f$ si

   a) $f(x) = x^2 \qquad g(x) = \dfrac{1}{x+1}$

   $$f(f(x)) = (x^2)^2 = x^4; \quad g(g(x)) = \frac{1}{\dfrac{1}{x+1} + 1} = \frac{x+1}{x+2}.$$

   $$f(g(x)) = (\frac{1}{x+1})^2 = \frac{1}{(x+1)^2}; \quad g(f(x)) = \frac{1}{x^2+1}.$$

   b) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} \qquad g(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

9. Evalúe las siguientes funciones en los puntos indicados.

   a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ en el punto $t + 1$

   b) $f(x) = x + \sqrt{1 + x^2}$ en el punto $-t$

   c) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ en el punto $\dfrac{1}{t}$

   Evaluar una función con otra significa componer las funciones.

10. Sea $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$. Escriba las siguientes funciones en la forma $\dfrac{p(x)}{q(x)}$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios:

    a) $f(x) + 1 = \dfrac{2x+1}{x}$

    b) $f(x+1) = \dfrac{x+2}{x}$

    c) $f \circ f(x) = \dfrac{\dfrac{x+1}{x} + 1}{\dfrac{x+1}{x}} = \dfrac{x(2x+1)}{x(x+1)}$

Funciones inversas

1. Halle el dominio e imagen de las siguientes funciones y diga si se puede definir la inversa de las mismas. En caso afirmativo, calcule dicha inversa.

   a) $f(x) = 2x + 1$ Rta: $x(y) = \dfrac{1}{2}(y-1)\, , quad \forall y \in \mathbb{R}$

   b) $f(x) = x^2$ Rta: $x(y) = \sqrt{y}\, , \quad \forall y \in \mathbb{R}_{\geq}$.

   c) $f(x) = \dfrac{2x+1}{2x-1}$

   $$y = \frac{2x+1}{2x-1} \implies (2x-1)y - 2x - 1 = 0 \implies x2(y-1) = y+1 \implies x = \frac{y+1}{2(y-1)} \; \forall y \in \mathbb{R} \backslash \{1\}$$

d) $f(x) = -\sqrt{x^2 - 4x + 4}$ $D = \mathbb{R}$ $f(x) = -\sqrt{(x-2)^2} = -|x-2|$
Podemos definir infinitas inversas por ejemplo $g(y) : (-\infty, 0] \to (-\infty, 2]; \quad y \to y + 2$
$h(y) : (-\infty, 0] \to [2, \infty) \quad y \to 2 - y$

e) $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ Aquí la inversa es única $x = y^3 + 1$ y está definida en todos los reales

2. Esboce el gráfico y calcule la inversa de las siguientes funciones cuando sea posible. De no existir la inversa, indíquelo.

   a) $f(x) = x^2\,, -\infty < x < \infty;$ no tiene inversa.

   b) $f(x) = x^2\,, x \leq 0;$ $\quad f^{-1}(y) = -\sqrt{y}\,, \forall y \geq 0.$

   c) $f(x) = \dfrac{2-x}{3+x}\,, x \neq -3;$ $\quad f^{-1}(y) = \dfrac{2-3y}{1+y}\,, y \neq -1.$

   d) $f(x) = \sqrt{1-x^2}\,, -1 \leq x \leq 1;$ $\quad f^{-1}(y) = -\sqrt{1-y^2}\,, -1 \leq y \leq 1.$

3. El agua se congela a 32 grados Fahrenheit y a 0 grados Celsius. A nivel del mar el agua hierve a 212 grados Fahrenheit y a 100 grados Celsius.

   a) Encuentre la función lineal que transforma grados Fahrenheit en grados Celsius y grafíquela.
   La función $C(x) = ax + b$ debe cumplir $C(32) = 0$ y $C(212) = 100$. Luego

   $$32\,a + b = 0\,, \qquad 212\,a + b = 100\,.$$

   Si restamos la primera de la segunda obtenemos $180a = 100$ es decir $a = \dfrac{100}{180} = \dfrac{5}{9}$.
   Volviendo a la primer ecuación $b = -\dfrac{160}{9}$ y se obtiene $C(x) = \dfrac{5x}{9} - \dfrac{160}{9}$.

   b) Calcule su inversa, grafíquela y explique qué representa esa $F(y) = \dfrac{9}{5}y + 32$. Transforma Celsius en Fahrenheit.

Gráficos de parábolas

1. Escriba las ecuaciones de las siguientes parábolas en la forma $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ (completar cuadrados).

   a) $y = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$

   b) $y = x^2 + 6x + 5 = (x+3)^2 - 4$

   c) $y = 2x^2 + 8x + 7 = 2\,(x+2)^2 - 1$

Circunferencias

1. Encuentre el centro y el radio de las siguientes circunferencias:

   a) $x^2 - 6x + y^2 - 4y = -9$
   $(x-3)^2 - 9 + (y-2)^2 - 4 = -9 \implies C = (3,2); r = \sqrt{4} = 2.$

   b) $x^2 + 8x + y^2 = -12$
   $(x+4)^2 - 16 + y^2 = -12; \implies C = (-4,0); r = 2.$

Funciones trigonométricas

1. A partir de los valores conocidos del seno y del coseno de $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{2}$, calcule en forma exacta las expresiones que se dan a continuación:

$$(0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}) \to (\operatorname{sen}(0), \operatorname{sen}(\frac{\pi}{6}), \operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}), \operatorname{sen}(\frac{\pi}{3}), \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2})) = (\frac{\sqrt{0}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}. \frac{\sqrt{4}}{2}).$$

$$(0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}) \to (\cos(0), \cos(\frac{\pi}{6}), \cos(\frac{\pi}{4}), \cos(\frac{\pi}{3}), \cos(\frac{\pi}{2})) = (\frac{\sqrt{4}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2}. \frac{\sqrt{0}}{2}).$$

   a) $\operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{4\pi}{3} + \tan \frac{5\pi}{3}$

   Rta.: $2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{3} - \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} - \frac{1}{2} - \sqrt{3} = \frac{1}{2}$

   b) $\operatorname{sen} \frac{5\pi}{6} + \cos \frac{7\pi}{6} + \tan \frac{5\pi}{6}$

   Rta: $-\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6} - \tan \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3} - 3}{6}$

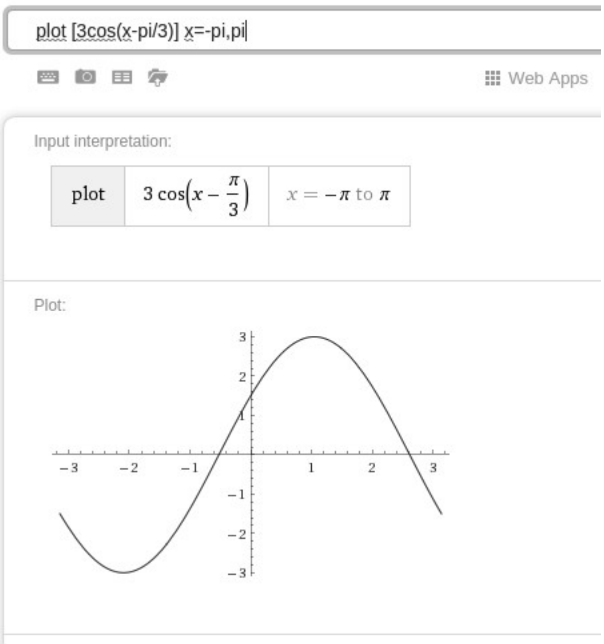
2. Esboce la gráfica de

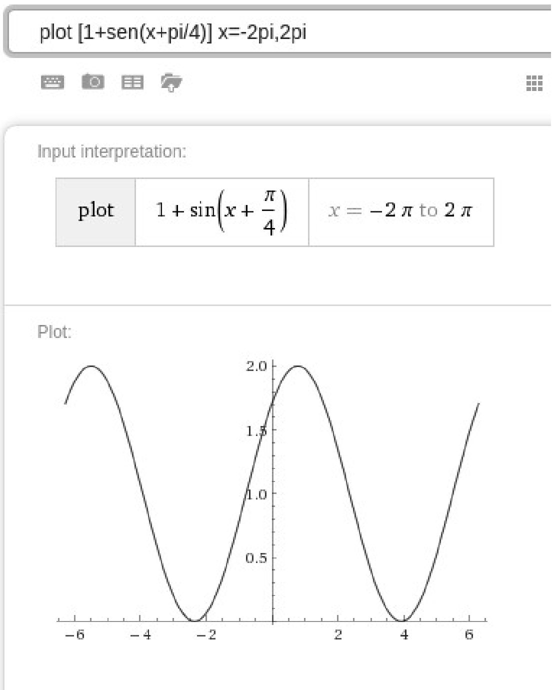
   a) $\operatorname{sen} \frac{x}{2}$

   b) $f(x) = \cos 2x$

   c) $f(x) = 3 \cos \left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

   d) $f(x) = 1 + \operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{4}\right)$





3. Escriba cada una de las siguientes funciones $\operatorname{sen} x^2$, $\operatorname{sen}^2 x$ y $\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$ como una composición de funciones. Son iguales estas funciones?

   a) $\operatorname{sen} x^2 = \operatorname{sen}(y)\,,\ y = x^2$

   b) $\operatorname{sen}^2 x = y^2\,,\ y = \operatorname{sen}(x)$

   c) $\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x) = \operatorname{sen}(y)\,,\ y = \operatorname{sen}(x)$