# Análisis Matemático I

Licenciatura en Ciencias de la Computación
Licenciatura en Matemática Aplicada
FAMAF, UNC — Año 2021

## Guía de Ejercicios N°4

### Continuidad

1. Esboce el gráfico de una función $f$, sin dar su fórmula, que tenga las siguientes características:
   - Su dominio es $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$,
   - es discontinua en $x = -2$ y en $x = 4$,
   - $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \infty$ y
   - $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 1$.

2. Determine si la función $g$, del ejercicio 9 de la Guía 3, es continua en $x = 1, 2, 6, -2, 0$ y justifique su respuesta.

3. Utilice la definición de continuidad y las propiedades de límites para demostrar que la función dada es continua en el valor indicado.

   *a*) $f(x) = (x + 2x^3)^4 \quad$ en $x = -1$

   *b*) $f(t) = \dfrac{t^2}{(t+1)^3} \quad$ en $t = 2$

4. Justifique por qué la función $f(x) = x\sqrt{16 - x^2}$ es continua en el intervalo $[-4, 4]$ e indique qué propiedades de la continuidad de funciones utiliza.

5. Determine, en caso de que los haya, en qué puntos es discontinua la función $f$. En cada caso, indique si se trata de una discontinuidad evitable, de salto o esencial.

   *a*) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$

   *b*) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 2 \\ x & x \leq 2 \end{cases}$

   *c*) $H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

   *d*) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$

   *e*) $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

6. *a*) Determine la constante $c$ para la cual la función $g$ resulta continua en $\mathbb{R}$.

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - c & x < 4 \\ cx + 20 & x \geq 4 \end{cases}$$

   *b*) Grafique $g$ con el valor $c$ obtenido en el ítem anterior.

7. Determine el dominio de $f$ en los distintos casos y decida si existe una función $F$ continua cuyo dominio es todo el conjunto $\mathbb{R}$ y que satisface $F(x) = f(x)$ si $x$ está en el dominio de $f$. ¿Cómo está definida $F$, en caso de que exista?.

   *a*) $f(t) = \dfrac{\sqrt[3]{t^3 + 3t^2 + 7}}{t + 2}$    *b*) $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x + 1}$    *c*) $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 4}$

8. Aplicando el Teorema del Valor Intermedio demuestre que hay una solución de la ecuación en el intervalo dado:

   *a*) $x^3 - 3x = -1$ en $(0, 1)$

   *b*) $x^5 - 2x^2 - x - 3 = 0$ en $(-2, 3)$

   *c*) $x^3 + 2x = x^2 + 1$ en $(0, 1)$

9. Empleando el Teorema del Valor Intermedio demuestre que hay un número $c$ tal que $f(c) = 0$.

   *a*) $f(x) = \ln(x) - \operatorname{sen}(x)$ , en $[1, \pi/2]$.

   *b*) $f(x) = 2^x + x - 2$, en $[0, 1]$.

10. Determine si las siguientes funciones verifican las hipótesis del Teorema de Weierstrass en el intervalo indicado. De ser así, indique cuál es el valor máximo y cuál es el valor mínimo que alcanza la función:

   *a*) $f(x) = \cos x$, en $[-\pi/3, \pi/2]$.

   *b*) $f(x) = \tan x$, en $[0, \pi]$ con $f(\pi/2) = 0$.

   *c*) $f(x) = 1 - 2x^2$, en $[1, 3]$.

## Material Extra

1. Determine, en caso de que los haya, en qué puntos es discontinua la función $f$. En cada caso, indique si se trata de una discontinuidad evitable, de salto o esencial.

   *a*) $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$

   *b*) $h(x) = \dfrac{\sqrt{x + 1}}{\sqrt{|x|}}$

   *c*) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

2. Determine el dominio de $f$ en los distintos casos y decida si existe una función $F$ continua cuyo dominio es todo el conjunto $\mathbb{R}$ y que satisface $F(x) = f(x)$ si $x$ está en el dominio de $f$. ¿Cómo está definida $F$, en caso de que exista?

   *a*) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1 + x} - 1}{x}$    *b*) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{1 - \sqrt{1 - x^2}}$

3. Tiene que graficar, en una computadora, el plano de una ruta y se le presenta el problema de graficar las curvas de la misma. Sabe que el camino se comporta como la función $y = -(x-1)^4 + 1$ en el intervalo $[0,5;\ 1]$ y como la función $(x - 1)^2 + k$ en el intervalo $[1;\ 1,2]$, pero desconoce la constante $k$. ¿Podría calcularla?

4. Determine si las siguientes funciones verifican las hipótesis del Teorema de Weierstrass en el intervalo indicado. De ser así, indique cuál es el valor máximo y cuál es el valor mínimo que alcanza la función:

   *a*) $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$, en $[4, 8]$

   *b*) $f(x) = x$, en $(0, 1)$.