

## Práctico 0

## NÚMEROS COMPLEJOS

**Objetivos.**

- Familiarizarse con los números complejos.
- Aprender a operar con números complejos (sumar, multiplicar, calcular inversos, conjugados y normas).

**Ejercicios.**

- (1) Expresar los siguientes números complejos en la forma  $a + ib$ . Hallar el módulo y conjugado de cada uno de ellos, y graficarlos.

(a)  $(-1 + i)(3 - 2i)$

(b)  $i^{131} - i^9 + 1$

(c)  $\frac{1+i}{1+2i} + \frac{1-i}{1-2i}$

- (2) Encontrar números reales  $x$  e  $y$  tales que  $3x + 2yi - xi + 5y = 7 + 5i$

- (3) Probar que si  $z \in \mathbb{C}$  tiene módulo 1 entonces  $z + z^{-1} \in \mathbb{R}$ .

- (4) Probar que si  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  entonces el polinomio  $x^2 + a^2$  tiene siempre dos raíces complejas distintas.

**Ejercicios de repaso.** Si ya hizo los ejercicios anteriores continúe a la siguiente guía. Los ejercicios que siguen son similares a los anteriores y le pueden servir para practicar antes de los exámenes.

- (5) Expresar los siguientes números complejos en la forma  $a + ib$ . Hallar el módulo y conjugado de cada uno de ellos, y graficarlos.

(a)  $(\cos \theta - i \sin \theta)^{-1}$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ ,

(b)  $3i(1 + i)^4$ ,

(c)  $\frac{1+i}{1-i}$

- (6) Sea  $z = 2 + \frac{1}{2}i$ , calcular

(a)  $\frac{(z+i)(z-i)}{z^2+1}$ .

(b)  $z - 2 + \frac{1}{z-2}$ .

(c)  $\left| \frac{1}{z-i} \right|^2$ .

- (7) Sea  $z \in \mathbb{C}$ . Calcular  $\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} - \frac{1}{|z|^2}$ .

- (8) (Desigualdad triangular) Sean  $w$  y  $z$  números complejos. Probar que

$$|w + z| \leq |w| + |z|,$$

y la igualdad se cumple si y sólo si  $w = r \cdot z$  para algún número real  $r \geq 0$ . En general, sean  $z_1, z_2, \dots, z_n$  números complejos. Probar que

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|.$$

- (9) Sean  $w$  y  $z$  números complejos. Entonces

$$||w| - |z|| \leq |w - z|.$$