Práctico 3
Matemática Discreta I – Año 2021/1
FAMAF

(1) Hallar el cociente y el resto de la división de:

a) 135 por 23. *b)* -135 por 23. *c)* 135 por -23.
d) -135 por -23. *e)* 127 por 99. *f)* -98 por -73.

(2) *a)* Si $a = b \cdot q + r$, con $b \leq r < 2b$, hallar el cociente y el resto de la división de a por b.

b) Repetir el ejercicio anterior, suponiendo ahora que $-b \leq r < 0$.

(3) Dado $m \in \mathbb{N}$, hallar los restos posibles de m^2 y m^3 en la división por $3, 4, 5, 7, 8, 11$.

(4) Expresar en base 10 los siguientes enteros:

a) $(1503)_6$ *b)* $(1111)_2$ *c)* $(1111)_{12}$
d) $(123)_4$ *e)* $(12121)_3$ *f)* $(1111)_5$

(5) Convertir

a) $(133)_4$ a base 8, *b)* $(B38)_{16}$ a base 8,
c) $(3506)_7$ a base 2, *d)* $(1541)_6$ a base 4.

(6) Calcular:

a) $(2234)_5 + (2310)_5$, *b)* $(10101101)_2 + (10011)_2$.

(7) Expresar en base 5: $(1503)_6 + (1111)_2$.

(8) Sean a, b, $c \in \mathbb{Z}$. Demostrar las siguientes afirmaciones:

a) Si $a \neq 0$ y $a|1$, entonces $a = 1$ ó $a = -1$.

b) Si $a \neq 0$, $a|b$ y $a|c$, entonces $a|(rb + sc)$ para cualesquiera $r, s \in \mathbb{Z}$.

c) Si $a \neq 0$ y $a|b$, entonces $a|b \cdot c$.

d) Si $a \neq 0$, $a|b$ y $a|(b + c)$, entonces $a|c$.

(9) Dados $b, c \in \mathbb{Z}$, probar las siguientes propiedades:

a) 0 es par y 1 es impar.

b) Si b es un número par no nulo y $b \mid c$, entonces c es par. (Por lo tanto, si b es par, también lo es $-b$).

c) Si un número par no nulo divide a 2, entonces ese número es 2 ó -2.

d) Si b y c son pares, entonces $b + c$ también lo es.

e) La suma de un número par y uno impar es impar.

f) $b + c$ es par si y sólo si b y c son ambos pares o ambos impares.

g) b es par si y sólo si b^2 es par.

(10) Probar que $n(n+1)$ es par para todo $n \in \mathbb{Z}$.

(11) Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ (no nulos cuando el enunciado lo requiera). ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas? Justificar las respuestas.

a) $a \mid b \cdot c \;\Rightarrow\; a \mid b$ ó $a \mid c$.

b) $a \mid (b + c) \;\Rightarrow\; a \mid b$ ó $a \mid c$.

c) $a \mid c$ y $b \mid c \;\Rightarrow\; a \cdot b \mid c$.

d) $a \mid c$ y $b \mid c \;\Rightarrow\; (a + b) \mid c$.

e) $b, c \in \mathbb{N}$ y $a = b \cdot c \;\Rightarrow\; a \geq b$ y $a \geq c$.

(12) Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$:

a) $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ es múltiplo de 11.

b) $3^{2n+2} - 8n - 9$ es divisible por 64.

(13) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificar la respuesta.

a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $3^n + 1$ es múltiplo de n.

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $3n^2 + 1$ es múltiplo de 2.

c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n + 1) \cdot (5n + 2)$ es múltiplo de 2.

(14) Probar que para todo $n \in \mathbb{Z}$, $n^2 + 2$ no es divisible por 4.

(15) Probar que todo entero impar que no es múltiplo de 3, es de la forma $6m \pm 1$, con m entero.

(16) *a)* Probar que el producto de tres enteros consecutivos es divisible por 6.

b) Probar que el producto de cuatro enteros consecutivos es divisible por 24 (ayuda: para todo $n \in \mathbb{N}$, el número combinatorio $\binom{n+3}{4} \in \mathbb{N}$).

c) Sea $m \geq 2$. Probar que el producto de m enteros consecutivos es divisible por $m!$.

(17) Probar que si a y b son enteros entonces $a^2 + b^2$ es divisible por 7 si y sólo si a y b son divisibles por 7. ¿Es lo mismo cierto para 3? ¿Para 5?

(18) Encontrar

a) $(7469, 2464)$, *b)* $(2689, 4001)$,

c) $(2447, -3997)$, *d)* $(-1109, -4999)$.

(19) Calcular el máximo común divisor y expresarlo como combinación lineal de los números dados, para cada uno de los siguientes pares de números:

a) 14 y 35, *b)* 11 y 15, *c)* 12 y 52,

d) 12 y -52, *e)* 12 y 532, *f)* 725 y 441,

g) 606 y 108.

(20) Probar que no existen enteros a y b que satisfagan $a + b = 100$ y $(a, b) = 3$.

(21) *a)* Sean a y b coprimos. Probar que si $a \mid b \cdot c$ entonces $a \mid c$.

b) Sean a y b coprimos. Probar que si $a \mid c$ y $b \mid c$, entonces $a \cdot b \mid c$.

(22) Encontrar todos los enteros positivos a y b tales que $(a, b) = 10$ y $[a, b] = 100$.

(23) *a)* Probar que si d es divisor común de a y b, entonces $\dfrac{(a, b)}{d} = \left(\dfrac{a}{d}, \dfrac{b}{d}\right)$.

b) Probar que si $a, b \in \mathbb{Z}$ no nulos, entonces $\dfrac{a}{(a, b)}$ y $\dfrac{b}{(a, b)}$ son coprimos.

(24) Probar que 3 y 5 son números primos.

(25) Dar todos los números primos positivos menores que 100.

(26) Determinar con el criterio de la raíz cuáles de los siguientes números son primos: 113, 123, 131, 151, 199, 503.

(27) Probar que si $n \in \mathbb{Z}$, entonces los números $2n + 1$ y $n(n + 1)$ son coprimos.

(28) Demostrar que si $a \cdot b$ es un cuadrado y $(a, b) = 1$, entonces a y b son cuadrados.

(29) *a)* Probar que $\sqrt{5}$ no es un número racional.

b) Probar que $\sqrt{15}$ no es un número racional.

c) Probar que $\sqrt{8}$ no es un número racional.

(30) *a)* Probar que $\sqrt[3]{4}$ no es un número racional.

b) Probar que $\sqrt[4]{54}$ no es racional.

c) Probar que no existen enteros m, n no nulos tal que $21n^5 = m^5$.

(31) Probar que si p_k es el k-ésimo primo positivo entonces

$$p_{k+1} \leq p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_k + 1$$

(32) Calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los siguientes pares de números usando la descomposición en números primos.

a) $a = 12$ y $b = 15$.

b) $a = 11$ y $b = 13$.

c) $a = 140$ y $b = 150$.

d) $a = 225$ y $b = 44$.

e) $a = 60$ y $b = 70$.